Einführungskurs Mathematik

PD Dr. Olaf Schnürer

Universität St. Gallen

Herbstsemester 2025

Überblick

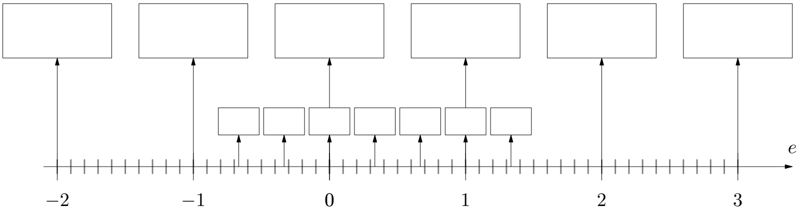
Potenzen, Definition von b^e

Frage

Wie definiert man die Potenz b^e? Dabei ist $b > 0$ die **Basis** und $e \in \mathbb{R}$ der **Exponent**.

Hinweis: Der Buchstabe e in dieser Diskussion hat nichts mit der *Eulerschen Zahl* e zu tun, die später auftauchen wird.

Wir fixieren $b > 0$ und schreiben in jedes Rechteck, was b^e sein sollte, wobei e auf der horizontalen Zahlengeraden variiert. Auf der nächsten Folie ist erklärt, was hier wann einzutragen ist, falls es zu schnell geht.



Jetzt ist b^e für alle rationalen Zahlen $e \in \mathbb{Q}$ definiert.
Wie kann man dies auf alle reellen Zahlen $e \in \mathbb{R}$ erweitern? Mögliche Definition als Grenzwert einer Folge:

$$b^\pi = b^{3.14159\ldots} := \text{Grenzwert der Folge } b^3,\ b^{3.1},\ b^{3.14},\ b^{3.141},\ b^{3.1415}, \ldots \text{ reeller Zahlen}$$

Potenzen, Definition von b^e

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Füllen Sie alle grossen Rechtecke mit **positiven ganzen/natürlichen** Exponenten
2. Beachten Sie, dass der Übergang von einem grossen Rechteck zum rechten Nachbarrechteck durch Multiplikation mit b gegeben ist.
3. Der Übergang von einer grossen Box zur linken Nachbarbox sollte eine Division durch b sein
4. Füllen Sie das grosse Rechteck mit dem Exponenten **0**
5. Füllen Sie alle grossen Rechtecke mit **negativen ganzen** Exponenten

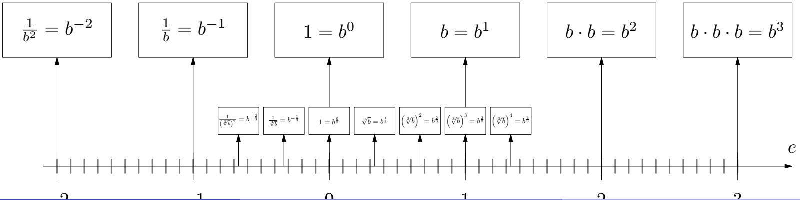
Jetzt ist b^e für alle ganzen Zahlen $e \in \mathbb{Z}$ definiert. Bis jetzt könnte b auch negativ sein, aber besser nicht im Folgenden.

Wie kann man dies auf alle rationale Zahlen $e \in \mathbb{Q}$ erweitern?

6. Füllen Sie die kleinen Rechtecke über 0 und 1

Wir möchten, dass der Übergang von einem kleinen Rechteck zum rechten Nachbarrechteck eine Multiplikation mit einer Zahl ist. Diese Zahl muss $\sqrt[3]{a}$ sein. Ebenso sollte der Übergang nach links eine Division durch diese Zahl sein.

7. Füllen Sie alle kleinen Rechtecke (zuerst positive, dann negative Exponenten)



Potenzgesetze

Potenzgesetze

Für alle Basen $a, b \in (0, \infty)$ und alle Exponenten $e, f \in \mathbb{R}$ gilt:

$a^e \cdot a^f = a^{e+f}$	Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis
$a^e \cdot b^e = (ab)^e$	Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten
$(a^e)^f = a^{ef}$	Potenz einer Potenz

Der formale Beweis dieser Regeln erfordert einige Arbeit.
Wie bei allen Gleichungen: Je nach Problem kann es angebracht sein, diese Gleichungen „von links nach rechts“ bzw. „von rechts nach links“ zu verwenden.

Beispiele

Aus den obigen Regeln leiten wir die folgenden Gleichungen ab. Einige dieser Konsequenzen werden auch als Potenzgesetze bezeichnet.

$$a^{-e} = a^{e\cdot(-1)} = (a^e)^{-1} = \frac{1}{a^e}$$

$$= a^{-e} = a^{(-1)\cdot e} = \left(a^{-1}\right)^e = \left(\frac{1}{a}\right)^e$$

$$a^{e-f} = a^{e+(-f)} = a^e \cdot a^{-f} = a^e \cdot \frac{1}{a^f} = \frac{a^e}{a^f}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^e = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^e = a^e \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^e = a^e \cdot \frac{1}{b^e} = \frac{a^e}{b^e}$$

Beispiele

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^e = a^{\frac{e}{m}} = a^{e\cdot\frac{1}{m}} = \left(a^e\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\sqrt[m]{a^e}\right)$$

$$\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[7]{x} = x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{7}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{7}} = x^{\frac{14+3}{21}} = x^{\frac{17}{21}} = \sqrt[21]{x^{17}}$$

Potenzfunktionen vs. Exponentialfunktionen

Bei der Betrachtung von Potenzen b^e können wir

1. den Exponenten fixieren und die Basis variieren oder
2. die Basis fixieren und den Exponenten variieren.

Der erste Fall führt zu **Potenzfunktionen**, d.h. Funktionen der Form jedes $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a$$

Der zweite Fall führt zu **Exponentialfunktionen**, d.h. Funktionen der Form jedes $a > 0$

$$f(x) = a^x$$

Potenzfunktionen

Definition (Potenzfunktionen)

Eine **Potenzfunktion** ist eine Funktion f der folgenden Gestalt (für beliebiges $a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} f\colon (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto y = f(x) = x^a \end{aligned}$$

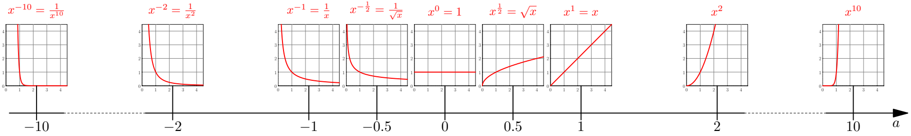
In manchen Büchern wird zusätzlich ein von Null verschiedener Faktor erlaubt, so dass eine allgemeine Potenzfunktion die Gestalt $f(x) = cx^a$ hat, für $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiele (Potenzfunktionen)

$f(x) = x^3$ oder $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ oder $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ oder $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Potenzfunktionen

Geogebra: Graphen von x^a in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Statisches Bild hier:



Eigenschaften von Potenzfunktionen $f(x) = x^a$ $(a \in \mathbb{R})$

- mengentheoretische Eigenschaft:
  - bijektiv als Funktion $(0, \infty) \to (0, \infty)$, wenn $a \neq 0$, daher umkehrbar (= hat eine Umkehrfunktion); die Umkehrfunktion ist selbst eine Potenzfunktion, nämlich

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$$

Beweis: $f(f^{-1}(x)) = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a = x^{\frac{1}{a}\cdot a} = x^1 = x$ und $f^{-1}(f(x)) = (x^a)^{\frac{1}{a}} = x^{a\cdot\frac{1}{a}} = x^1 = x$

- Wachstumseigenschaften:
  - streng monoton steigend, wenn $a > 0$
  - streng monoton fallend, wenn $a < 0$
  - konstant, wenn $a = 0$
- Krümmungseigenschaften:
  - streng konvex, wenn $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ „Linkskurve“
  - streng konkav, wenn $a \in (0, 1)$ „Rechtskurve”
  - linear, wenn $a = 0$ oder $a = 1$

Definition (Wachstumseigenschaften: (streng) monoton steigend/fallend)

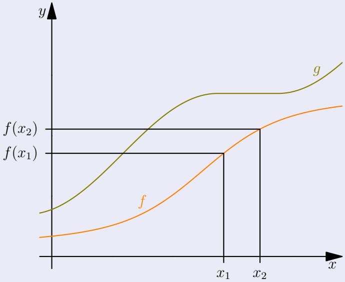
Eine Funktion $f: X \to Y$ zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ heisst genau dann

- **streng monoton steigend** (oder wachsend), wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$

- **streng monoton fallend**, wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$



Für die Versionen ohne „streng“, ersetze man $f(x_1) < f(x_2)$ durch $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ durch $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Die Funktion f in der Zeichnung ist streng monoton steigend. Die Funktion g ist monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend.

(Ausblick auf Ableitungen)

Die erste Ableitung $f'(x)$ weiss, ob f streng motonon steigend oder fallend ist.

- $f'(x_0) > 0 \implies f$ streng monoton steigend bei x_0.
- $f'(x_0) < 0 \implies f$ streng monoton fallend bei x_0.

Potenzfunktionen

Beispiel (eventuell weglassen in Vorlesung)

Warum ist $f(x) = x^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{x^3} = \left(\sqrt[7]{x}\right)^3$ streng monoton steigend auf $(0, \infty)$?

Beweis.

Schritt 1: Wir behaupten, dass $g(x) = x^3$ streng monoton steigend auf $(0, \infty)$ ist.
Seien $x < y$ beliebige Elemente von $(0, \infty)$. Wir multiplizieren diese Ungleichung einmal mit $x > 0$ und einmal mit $y > 0$ und erhalten

$$x^2 = x \cdot x < xy < y \cdot y = y^2 \qquad \text{also} \qquad x^2 < y^2$$

Multiplikation dieser Ungleichung $x^2 < y^2$ mit $x > 0$ und der Ungleichung $x < y$ mit $y^2 > 0$ liefert

$$x^3 = x^2 \cdot x < y^2 \cdot x < y^2 \cdot y = y^3 \qquad \text{so} \qquad x^3 < y^3$$

Schritt 2: Ebenso sieht man, dass die Funktion x^7 streng monoton steigend ist. Daher ist ihre Umkehrfunktion $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ ebenfalls streng monoton steigend.

Allgemeine Tatsache: Eine bijektive Funktion ist genau dann streng monoton steigend, wenn ihre Umkehrfunktion streng monoton steigend ist.

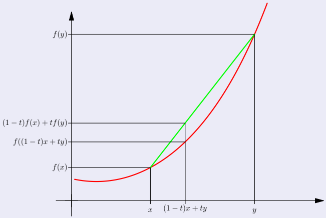
Schritt 3: Beachte $f = r \circ g$ für $r(x) = \sqrt[7]{x}$ und $g(x) = x^3$. Da sowohl g als auch r streng monoton steigend sind, gilt dies auch für ihre Verknüpfung $f(x) = (r \circ g)(x) = r(g(x)) = \sqrt[7]{x^3}$.

Allgemeine Tatsache: Jede Verknüpfung streng monoton steigender Funktionen ist streng monoton steigend. $\square$

Definition (Krümmungseigenschaften: konvex, konkav)

Eine Funktion $f : I \to Y$ von einem Intervall I in eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist

- **konvex**, wenn jedes Liniensegment zwischen zwei Punkten des Graphen von f über diesem Graphen liegt, siehe Bild; Linkskurve
- **konkav**, wenn jedes Liniensegment zwischen zwei Punkten des Graphen von f unter diesem Graphen liegt. Rechtskurve



Für die Versionen mit „streng“ verlangt man nur, dass der „innere Teil der Liniensegments“ streng über/unter dem Graphen liegt.

Formal wird die Konvexität durch die folgende Bedingung definiert.

$$f\big((1-t)\cdot x + t\cdot y\big) \leq (1-t)\cdot f(x) + t\cdot f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in X \text{ und } t \in [0,1].$$

Was bedeutet $(1-t)\cdot x + t\cdot y$?

- Für $t = 0$ ist diese Zahl x.
- Für $t = 1$ ist diese Zahl y.
- Man kann diesen Ausdruck umformen zu $(1-t)\cdot x + t\cdot y = x - t\cdot x + t\cdot y = x + t(y-x)$. Man addiert also zu x das t-Fache des (eindimensionalen) Verbindungsvektors $y - x = \overrightarrow{xy}$.
- Fazit: Wenn (die Zeitvariable) t gleichmässig von 0 auf 1 wächst, bewegt sich diese Zahl gleichmässig von x nach y (auf der x-Achse).

Ebenso bewegt sich $(1-t)f(x) + tf(y)$ gleichmässig von $f(x)$ nach $f(y)$ (auf der y-Achse).
In der formalen Konvexitätsdefinition wird also gefordert, dass dieser sich auf der y-Achse bewegende Punkt stets oberhalb des Bildes (unter f) des sich auf der x-Achse bewegenden Punktes liegt.

(Ausblick auf Ableitungen)

Die zweite Ableitung $f''(x)$ weiss, ob f konvex oder konkav ist.

- $f''(x_0) > 0 \implies f$ ist konvex bei x_0.
- $f''(x_0) < 0 \implies f$ ist konkav bei x_0.

Example

Die Funktion $f(x) = x^2$ hat Ableitung $f'(x) = 2x$ und zweite Ableitung $f''(x) = 2$.

Also gilt $f''(x_0) = 2 > 0$ für alle x_0 und f ist überall konvex (Linkskurve), wie das ja bei der Parabel auch der Fall sein sollte.

Exponentialfunktionen

Definition (Exponentialfunktionen)

Eine **Exponentialfunktion** ist eine Funktion f der folgenden Form (wobei $a \in (0, \infty)$).

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\ x &\mapsto y = f(x) = a^x \end{aligned}$$

In einigen Büchern ist auch ein von Null verschiedener Faktor erlaubt, d.h. die allgemeine Form einer Exponentialfunktion ist $f(x) = ca^x$ für $a \in (0, \infty)$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. Manchmal ist $a = 1$ nicht erlaubt.

Exponentialfunktionen werden verwendet, um das Wachstum oder den Zerfall von Grössen zu beschreiben.

$$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

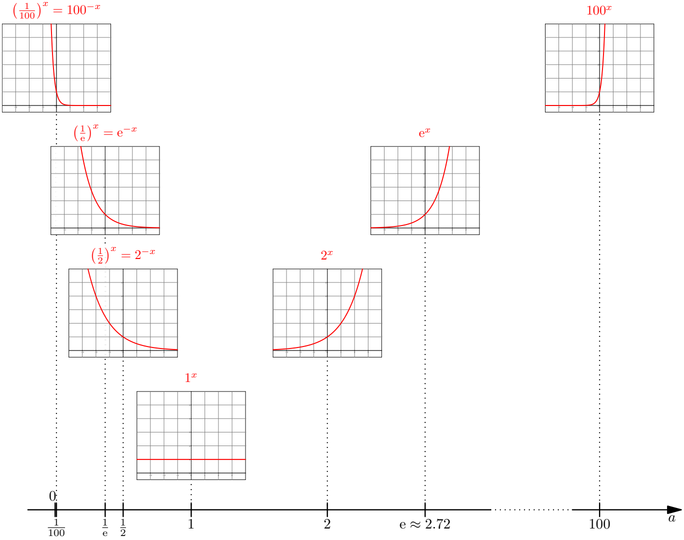
Das heisst: Die „Grösse“ $f(x)$ wächst um den Faktor a, wenn die „Zeit“ x um 1 zunimmt. Für $a > 1$ haben wir Wachstum, für $0 < a < 1$ Zerfall.

Beispiele (Exponentialfunktionen)

- $f(x) = 3^x$ wächst um den Faktor 3 pro Zeiteinheit (eine Bakterienpopulation)
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wächst um den Faktor $\frac{1}{2}$ pro Zeiteinheit (radioaktiver Zerfall, 1 Einheit $=$ Halbwertszeit des radioaktiven Elements, z.B. Uran)

Exponentialfunktionen

Geogebra: Graphen von a^x abhängig von $a \in (0, \infty)$. Statisches Bild hier:



Eigenschaften von Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ $(a > 0)$

- mengentheoretische Eigenschaft:
  - bijektiv, wenn $a \neq 1$, daher umkehrbar; die Umkehrfunktion heisst **Logarithmus zur Basis** a und wie folgt bezeichnet.

    $$f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

    Beachten Sie, dass

    $$\log_a \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

    Logarithmen sind nur für **positive** Argumente definiert.
- Wachstumseigenschaften:
  - streng monoton fallend, wenn $0 < a < 1$ — dasselbe gilt für $\log_a$
  - streng monoton steigend, wenn $a > 1$ — dasselbe gilt für $\log_a$
  - konstant, wenn $a = 1$ — weil die Umkehrfunktion dieselbe Wachstumseigenschaft hat
- Krümmungseigenschaften:
  - streng konvex, wenn $a \neq 1$ — $\log_a$ streng konkav
    "Linkskurve" — "Rechtskuve"
  - konstant (und konvex), wenn $a = 1$ — weil die Umkehrfunktion einer konvexen Funktion konkav ist (der Graph ist ein Spiegelbild)
- algebraische Eigenschaft:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Exponentialfunktionen sind „plus-mal-kompatibel“.

Offizielle Terminologie:
Exponentialfunktionen sind Gruppenmorphismen von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die multiplikative Gruppe $((0, \infty), \cdot)$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Logarithmen sind „mal-plus-kompatibel“.

Offizielle Terminologie:
Logarithmen sind Gruppenhomomorphismen von der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ zur multiplikativen Gruppe $((0, \infty), \cdot)$.

Logarithmengesetze

Laut Definition ist $f^{-1} = \log_a$ die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$. Insbesondere gilt:

$$\log_a(x) = f^{-1}(x) = \big(\text{das eindeutige Element } z \in \mathbb{R} \text{ mit } a^z = x\big)$$
$$= \text{„}a \text{ hoch welche Zahl/Exponent ist } x\text{?“}$$

Insbesondere gelten: $\log_a(a^x) = x$ und $a^{\log_a(y)} = y$. für alle $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

Auch: $\log_a(y) = x \iff a^x = y$. für alle $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

Logarithmengesetze

Für alle positiven reellen Zahlen $a, b \in (0, \infty)$ und $x, y \in (0, \infty)$ gilt:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{Logarithmus eines Produkts}$$
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \qquad \text{Logarithmus einer Potenz}$$

Für den Beweis verwende man die Potenzgesetze $a^e \cdot a^f = a^{e+f}$ und $(a^e)^f = a^{ef}$ und die Tatsache, dass $\log_a(x)$ die Umkehrfunktion von a^x ist.

Diese Regeln implizieren:

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \qquad \text{Basiswechsel}$$

Anzahl der Ziffern

Die Anzahl der Ziffern einer Zahl x wie üblich im Dezimalsystem geschrieben ist ungefähr

$$\log_{10}(x)$$

Beispiele

- Die 7-stellige Zahl $x = 1'000'000$ hat ungefähr $\log_{10}(1'000'000) = 6$ Ziffern.
- Die 7-stellige Zahl $x = 9'999'999$ hat ungefähr $\log_{10}(9'999'999) \approx 6.99999995657055$ Ziffern.

Die genaue Formel lautet (Anzahl der Ziffern von x) $= \lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$, wobei $\lfloor y \rfloor$ „y abgerundet" ist (auf Englisch sagt man „y floor").

exp und ln

Für Mathematiker ist die wichtigste Exponentialfunktion die Exponentialfunktion, deren Basis die **Eulersche Zahl** $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ ist, d.h. $f(x) = \mathrm{e}^x$. Diese Funktion wird oft mit exp bezeichnet und normalerweise einfach als **die Exponentialfunktion** bezeichnet.

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto \boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x = \ln^{-1}(x)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \boxed{\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x) = \exp^{-1}(x)} \end{aligned}$$

Ihre Umkehrfunktion ist der **natürliche Logarithmus** und wird mit ln ("logarithmus naturalis") bezeichnet.

Beide Funktionen können mit Potenzreihen berechnet werden: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Z.B. $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Wichtige Identitäten

$$\exp(x+y) = \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

unter Verwendung der neuen exp-Notation

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$$

spezielle Fälle der obigen Regeln für $\ln = \log_{\mathrm{e}}$

Jede Potenz kann mit exp und ln berechnet werden.

und so berechnen Computer Potenzen

$$a^b = \exp(\ln(a^b)) = \exp(b \cdot \ln(a)) = \mathrm{e}^{b \ln(a)}$$

Jeder Logarithmus kann mit ln berechnet werden.

und das tun Computer

$$\log_a(x) = \frac{\log_{\mathrm{e}}(x)}{\log_{\mathrm{e}}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

durch Basiswechsel

Man sagt, dass eine zeitabhängige Grösse exponentiell wächst/fällt, wenn sie streng monoton wächst/fällt und in jeder fixierten Zeitspanne mit demselben Faktor multiplizert wird (unabhängig davon, wann man diese Zeitspanne beginnt).

Exponentiell wachsende Grössen werden durch Funktionen der Form

$$f(t) = f_0 \cdot b^{\frac{t}{T}} = f_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{T} \cdot \ln(b)} = f_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln(b)}{T} \cdot t} = f_0 \cdot \left(e^{\frac{\ln(b)}{T}}\right)^t$$

beschrieben, wobei f_0 der Anfangsbestand der Grösse zur Zeit $t = 0$ und b der Wachstumsfaktor während einer (beliebig gewählten) Zeitspanne $T > 0$ sind.

Beispiel (aus der Biologie)

Wächst eine Zellenpopulation exponentiell in jeweils 5 Stunden um den Faktor 2, so wird die Anzahl der Zellen zur Zeit t (in Stunden gemessen) beschrieben durch

$$f(t) = f_0 \cdot 2^{\frac{t}{5}} = f_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{5} \cdot \ln(2)} = f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5} \cdot t} = f_0 \cdot \left(e^{\frac{\ln(2)}{5}}\right)^t$$

wobei f_0 der Anfangsbestand ist. (Man setze zur Probe etwa $t = 0$ oder $t = 5$ oder $t = 10$ ein.)
Dem letzten Ausdruck entnimmt man entweder direkt (denn er hat die Form $f_0 \cdot b^{\frac{t}{T}}$ für $T = 1$) oder durch eine der folgenden Rechnungen, dass der Wachstumsfaktor pro Stunde $e^{\frac{\ln(2)}{5}}$ beträgt.

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5}}}{f_0} = e^{\frac{\ln(2)}{5}} \quad \text{oder} \quad \frac{f(t+1)}{f(t)} = \frac{f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5} \cdot (t+1)}}{f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5} \cdot t}} = \frac{f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5} \cdot t} \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5}}}{f_0 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{5} \cdot t}} = e^{\frac{\ln(2)}{5}}$$

In der Mathe-Vorlesung kommt die Formel $A_{n,\infty} = A(n) = P \cdot \mathrm{e}^{i \cdot n} = P \cdot (\mathrm{e}^i)^n$ im Zusammenhang mit stetiger Verzinsung (continuous compunding) vor. Der Wachstumsfaktor pro Jahr ist dort e^i.

Trigonometrische Funktionen

Der **Einheitskreis** ist der Kreis um den Ursprung mit Radius 1 Einheit.

Definition (sin, cos, tan)

Sei α ein Winkel. Sei P_α der Punkt auf dem Einheitskreis, sodass α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl $\ell_\alpha = OP_\alpha$ ist. Definiere (vgl. Abbildung)

- $\cos(\alpha) := \big(x\text{-Koordinate von } P_\alpha\big)$
- $\sin(\alpha) := \big(y\text{-Koordinate von } P_\alpha\big)$
- $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \big(\text{Steigung von } \ell_\alpha\big)$

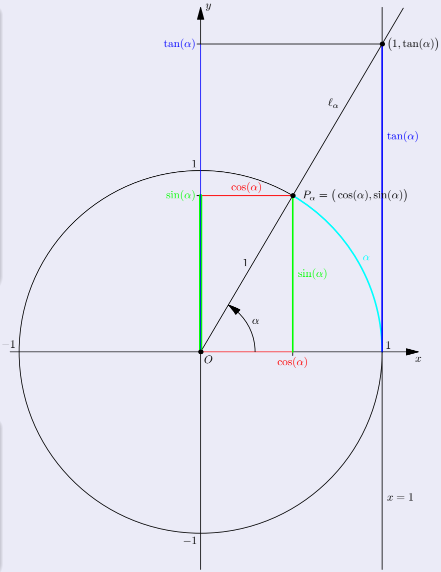
Beachten Sie, dass $\tan(\alpha)$ die y-Koordinate des Schnittpunkts der Gerade ℓ_α und der Gerade $x = 1$ ist.

(Trigonometrischer Pythagoras)

$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

Kurznotation: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Beweis: Verwende das offensichtliche rechtwinklige Dreieck und Pythagoras.



In der Schule werden die trigonometrischen Funktionen oft mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke definiert.

Und es gibt Merksprüche wie GAGA-Hühnerhof AG; ich bevorzuge die im folgenden erklärte englische Merkhilfe SOH-CAH-TOA.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{opposite of } \alpha}{\text{hypotenuse}} \qquad \text{SOH} = \text{sine}=\text{opposite} \;/\; \text{hypotenuse}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{adjacent of } \alpha}{\text{hypotenuse}} \qquad \text{CAH} = \text{cosine}=\text{adjacent} \;/\; \text{hypotenuse}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{\text{opposite of } \alpha}{\text{adjacent to } \alpha} \qquad \text{TOA} = \text{tangent}=\text{opposite} \;/\; \text{adjacent}$$

Merkhilfe

SOH-CAH-TOA

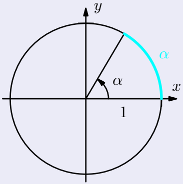
Diese zwei möglichen Definitionen sind gleichbedeutend: In unserer obigen Definition mit dem Einheitskreis verwende man das offensichtliche rechtwinklige Dreieck mit roten und grünen Katheten.

Seine Hypotenuse hat die Länge 1, so dass $\sin(\alpha) = \frac{\text{grüne Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{grün}}{1} = \text{grün}$ und analog für $\cos(\alpha)$ und (mit einem anderen rechtwinkligen Dreieck) $\tan(\alpha)$.

Winkel werden traditionell in Grad gemessen. Eine natürlichere[1] Definition ist die folgende.

Definition (Bogenmass)

Das **Bogenmass** eines Winkels α ist die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis, der von α ausgeschnitten wird.



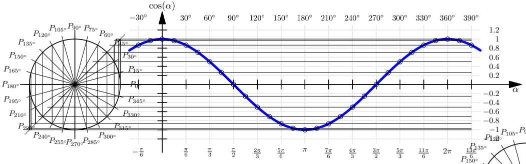
Beispiele

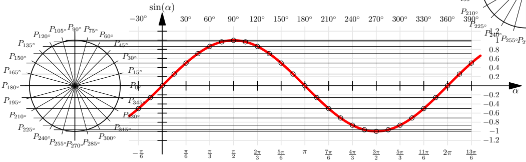
- $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$
- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $\frac{180^\circ}{\pi} = 1$
- $540^\circ = 3\pi$
- $-180^\circ = -\pi$

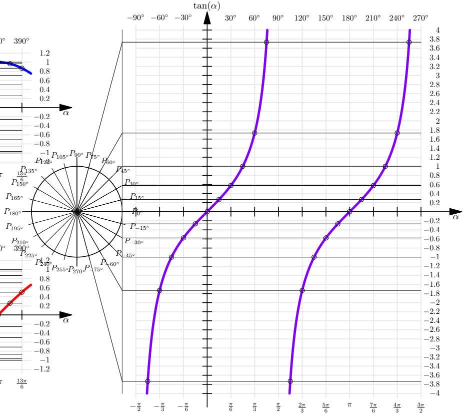
Die SI-Einheit des Bogenmasses ist Radiant, abgekürzt rad, z.B. $180^\circ = \pi\,\text{rad}$. Sie wird in der Mathematik fast immer weggelassen.

[1] Warum sollte der Vollwinkel 360° sein und nicht 5040 oder 1 oder 42? Das Bogenmass kann statt wie unten erklärt auch ohne Bezug auf den Einheitskreis (und eine fest gewählte Einheit) wie folgt mit Hilfe eines beliebigen Kreises definiert werden: Dividiere die Länge des vom Winkel ausgeschnittenen Kreisbogens durch den Radius des Kreises.

Die trigonometrischen Funktionen cos und sin sind per Definition die Koordinaten eines Punktes P_α, der sich mit konstanter Geschwindigkeit (1 Einheit pro Zeiteinheit) auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn bewegt, beginnend bei $(1, 0)$. Die Variable α ist sowohl die Zeit als auch der Winkel (im Bogenmass).

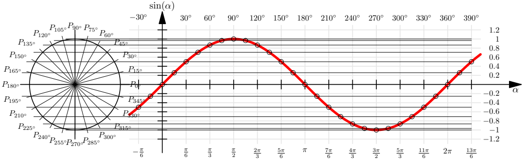






Sinus ist eine Verschiebung des Kosinus (und umgekehrt) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Eigenschaften der Sinusfunktion



- Das Bild/der Wertebereich der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$.

$$\sin \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

- Die Nullstellen der Sinusfunktion sind genau die Vielfachen von π.

$$\sin(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}$$

- Die Sinusfunktion ist periodisch mit einer „Periodenlänge“ von 2π.

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

- Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
  (und zu jeder ihrer Nullstellen)

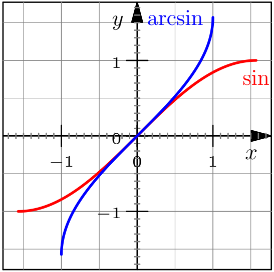
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Wenn wir die Startmenge von sin auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ verkleinern, erhalten wir eine bijektive (streng monoton steigende) Funktion

$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

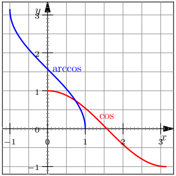
Ihre Umkehrfunktion ist die **Arkussinus**-Funktion

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = [-90^\circ, 90^\circ]$$

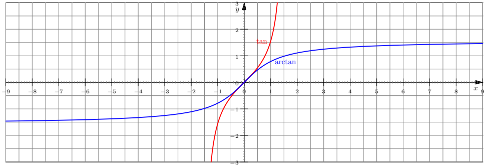


Ähnlich kann man die Eigenschaften von cos und tan diskutieren; auch diese Funktionen sind umkehrbar:

- Die Kosinusfunktion cos ist als Funktion invertierbar $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$. Ihre Umkehrfunktion ist die **Arkuskosinus**-Funktion arccos.



- Die Tangensfunktion tan ist als Funktion $\tan\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ invertierbar. Ihre Umkehrfunktion ist die **Arkustangens**-Funktion arctan.



Trigonometrische Identitäten

Es gibt viele Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.
Zum Beispiel kann man die pythagoreische Identität nach $\cos(x)$ oder $\sin(x)$ lösen und erhält

$$\sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$$
$$\cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$$

Ein weiteres Beispiel sind die **Winkelsummenidentitäten**:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Diese Winkelsummenidentitäten sind übrigens leicht zu erhalten, sobald man komplexe Zahlen und die **Eulersche Formel** kennt.

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Für eine ziemlich lange Liste von Identitäten siehe
`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities`.

Harmonische Schwingung (voraussichtlich nicht in der Vorlesung)

Viele periodische Prozesse lassen sich mit der folgenden Funktion simulieren.

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0)$$

In der Physik gibt dies Funktion die Position eines Gewichts an, das an einer linearen Feder befestigt ist. Hier

- y_0 ist die Amplitude;
- f ist die Frequenz (Anzahl der Wiederholungen pro Zeiteinheit); $T = \frac{1}{f}$ ist die Periode.
- φ_0 ist die Phasenverschiebung (bestimmt die Startposition zur Zeit $t = 0$).

Das Bild zeigt den Graphen von $y(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot t + \frac{\pi}{3})$