Einführungskurs Mathematik

PD Dr. Olaf Schnürer

Universität St. Gallen

Herbstsemester 2025

Themenübersicht für das Semester

1. Grundlagen zu Funktionen in einer reellen Variablen I: Funktionen, Betragsfunktion, Ungleichungen, Summationszeichen
2. Grundlagen zu Funktionen in einer reellen Variablen I: Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen
3. Grundlagen zu Funktionen in einer reellen Variablen II: Ableitungsregeln
4. Grundlagen zu Funktionen in einer reellen Variablen II: Kurvendiskussion (Monotonie, Extrema)
5. Partielle Ableitungen (für VWL-Vorlesung)
6. Algebra: Lineare, quadratische und Exponentialgleichungen

Pause

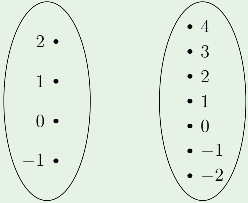
7. Analytische Geometrie: Visualisierung von Functionen in zwei Variablen, Niveaulinien, allgemeine Konzepte
8. Analytische Geometrie: Niveaulinien, Kurven zweiten Grades (Ellipse, Parabel, Hyperbel)
9. Optimierung von Funktionen in zwei rellen Variablen unter Nebenbedingungen
10. Gleichungssysteme (linear und nicht-linear), Systeme von Ungleichungen
11. Kombinatorik – die Kunst, zu zählen
12. Grundlagen der linearen Algebra (Koordinatensysteme, Vektoren, Abstände und Winkel, Geraden und Ebenen)

Überblick

- Funktionen
- Absolutbetrag
- Ungleichungen
- $\sum$-Schreibweise für Summen

Funktionen

Beispiel (einer Funktion)



Definitionsmenge Wertemenge

Gegeben: endliche Mengen $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ und
$Y = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Notation:

$$f : X \to Y \qquad \text{"}f \text{ von } X \text{ nach } Y\text{"}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 \qquad \text{"}x \text{ wird abgebildet auf } f(x) = x^2\text{"}$$

Kurzschreibweise: $f(x) = x^2$

Definition (Funktion = Abbildung)

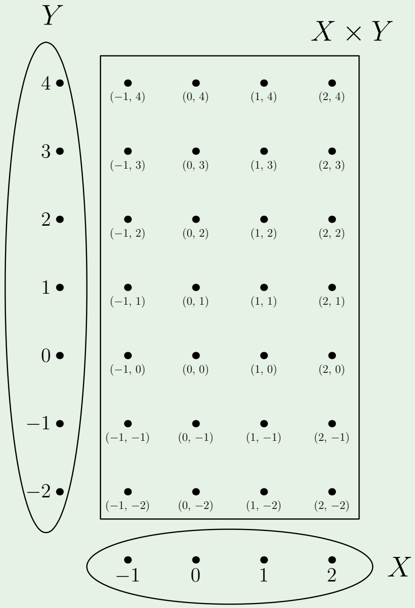
Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Zuordnung, die

- jedem Element x der Menge X
- *genau ein* Element $f(x)$ der Menge Y zuordnet.

Terminologie:

- X ist die **Definitionsmenge** oder **Startmenge** von f
- Y ist die **Wertemenge** oder **Zielmenge** von f
- $f(x)$ ist das **Bild**/**Wert von** x unter f
- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ist das **Bild** oder genauer die **Bildmenge** von f

Beispiel (Graph einer Funktion)

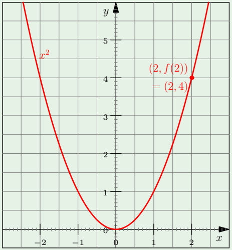


Markiere für jedes $x \in X = \{-1, 0, 1, 2\}$ den Punkt $(x, f(x)) = (x, x^2)$ im Produkt $X \times Y$. Die Menge der Punkte, die man so erhält, ist der **Graph** von f. Er ist unser wichtigstes Werkzeug, um Funktionen zu visualisieren.

Nun zu unendlichen Mengen. Wir betrachten weiterhin die Quadrierfunktion, nehmen aber als Start- und Zielmenge die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$

Der Graph ist die Parabel $y = x^2$.



$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Definition (Verknüpfung/Komposition/Hintereinanderausführung von Funktionen)

Seien f und g Funktionen, so dass die Zielmenge von f mit der Startmenge von g übereinstimmt (oder darin enthalten ist).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $g \circ f$ ("g nach f") von X nach Z, genannt **Verknüpfung** von g und f, durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{für beliebiges } x \in X$$

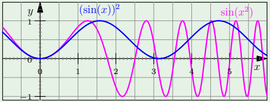
Beachte: Die Funktion g wird *nach* der Funktion f angewendet (auch wenn g im Ausdruck $g \circ f$ vor f kommt).

Beispiel

Die Funktion $h(x) = \sin(x^2)$ ist die Verknüpfung der Sinusfunktion $g(x) = \sin(x)$ und der Quadrierfunktion $f(x) = x^2$, denn $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2) = h(x)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h=g\circ f=\sin\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g=\sin"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Beachte, dass es auf die Reihenfolge ankommt: Die Verknüpfung $f \circ g$ ist durch $f(g(x)) = f(\sin(x)) = (\sin(x))^2$ gegeben, was nicht mit $h(x) = \sin(x^2)$ übereinstimmt.



Hier haben f und g die reellen Zahlen als Start- und Zielmenge, was zur Folge hat, dass $g \circ f$ sinnvoll definiert ist. Im Allgemeinen ist $f \circ g$ gar nicht definiert.

Umkehrfunktion

Motivation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"] & Y \arrow[r, "g", red] & X \end{tikzcd}$$

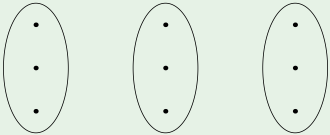
bildet jedes x auf sich selbst ab

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.
Frage: Können wir x aus $y = f(x)$ zurückberechnen?

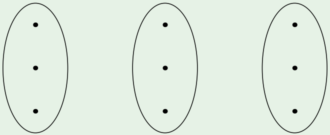
Genauer: Gibt es eine Funktion $g\colon Y \to X$, die f in dem Sinne umkehrt, dass die Verknüpfung $g \circ f$ jedes Element von X auf sich selbst abbildet, d. h. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$?

Beispiel (mit endlichen Mengen)

Schlechtes Setting (g existiert nicht):



Gutes Setting (g existiert):



- Eine notwendige Bedingung für die Existenz von g ist, dass verschiedene Elemente von X auf verschiedene Elemente von Y abgebildet werden. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **injektiv**.
- Überdies wäre es nett, wenn jedes Element $y \in Y$ im Bild von f wäre, denn dann hat man mindestens einen natürlichen Kandidaten für $g(y)$. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **surjektiv**.

Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Definition (injektive, surjektive, bijektive Funktionen)

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst

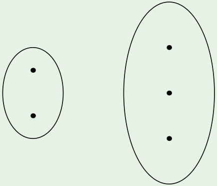
- **injektiv**, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$, für alle Elemente $x_1, x_2 \in X$.
  Äquivalent: Aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle Elemente $x_1, x_2 \in X$.
  In Worten: Verschiedene Elemente der Startmenge werden auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet. Jedes Element der Zielmenge ist das Bild von höchstens einem Element der Startmenge.
- **surjektiv**, wenn es für jedes Element $y \in Y$ ein Element $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
  In Worten: Jedes Element der Zielmenge ist das Bild eines Elements der Startmenge.
- **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.
  In Worten: Für jedes Element $y \in Y$ gibt es **genau ein** Element $x \in X$ with $f(x) = y$.

Beispiele mit endlichen Mengen

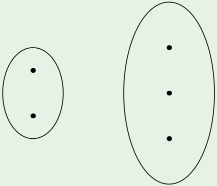
Beispiele

injektive Funktion:

$x_1 \neq x_2$ impliziert $f(x_1) \neq f(x_2)$



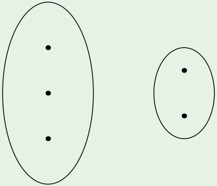
nicht-injektive Funktion:



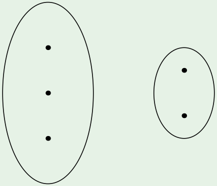
Beispiele

surjektive Funktion:

für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$



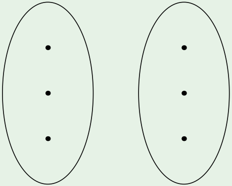
nicht-surjektive Funktion:



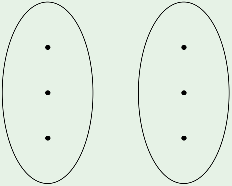
Beispiele

bijektive Funktion:

für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$



nicht-bijektive Funktion:



Beispiel

Einige Leute besuchen eine Theateraufführung.
Sei X die Menge dieser Leute und sei Y die Menge der Sitzplätze im Theater.
Sei $f\colon X \to Y$ die Funktion/Abbildung, die einer Person ihren Sitzplatz zuordnet.

- f injektiv bedeutet: Das Publikum ist zufrieden: Pro Sitzplatz höchstens eine Person.
- f surjektiv bedeutet: Der Veranstalter ist zufrieden: Ausverkauft
  ... aber eventuell sitzen auf einigen Sitzen mehrere Personen.
- f bijektiv bedeutet: Publikum und Veranstalter sind zufrieden.

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist

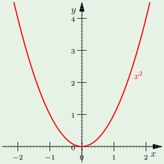
- f genau dann injektiv, wenn jede horizontale Gerade durch Y den Graphen von f höchstens einmal schneidet.
- f genau dann surjektiv, wenn jede horizontale Gerade durch Y den Graphen von f mindestens einmal schneidet.
- f genau dann bijektiv, wenn jede horizontale Gerade durch Y den Graphen von f genau einmal schneidet.

Beispiel

Die Funktion

$$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto y = f(x) = x^2
\end{aligned}
$$

- ist nicht injektiv: $f(-1) = f(1)$. allgemein gilt $f(-a) = f(a)$ für alle $a \neq 0$
- ist nicht surjektiv: $-1 \in \mathbb{R}$ ist nicht im Bild; keine negative Zahl ist im Bild



Ersetzen der Definitionsmenge durch $[0, \infty)$ liefert eine injektive Funktion

$$
\begin{aligned}
f: [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x^2
\end{aligned}
$$

Ersetzen der Wertemenge durch die Bildmenge $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ liefert eine surjektive Funktion

$$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R} &\to [0, \infty) \\
x &\mapsto x^2
\end{aligned}
$$

Ersetzt man bei einer beliebigen Funktion $f: X \to Y$ die Zielmenge Y durch die Bildmenge $f(X)$, so erhält man stets eine *surjektive* Funktion $f: X \to f(X)$.

Beide Ersetzungen liefern eine bijektive Funktion

$$
\begin{aligned}
f: [0, \infty) &\to [0, \infty) \\
x &\mapsto x^2
\end{aligned}
$$

Satz (über die Umkehrfunktion)

Sei $f\colon X \to Y$ eine **bijektive** Funktion. Dann ist es möglich, eine Funktion $f^{-1}\colon Y \to X$ zu definieren durch

$$f^{-1}(y) = \big(\text{das eindeutige Element } x \in X \text{ mit } f(x) = y\big)$$

Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ — Beweis: $f^{-1}(f(x)) = \big(\text{das eindeutige Element } x' \in X \text{ mit } f(x') = f(x)\big) = x$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$ — Beweis: $f(f^{-1}(y)) = f\big(\text{das eindeutige Element } x \in X \text{ mit } f(x) = y\big) = x$

D. h.: f^{-1} macht f rückgängig und umgekehrt.
Die Funktion f^{-1} heisst **Umkehrfunktion** von f.

Beachte: $\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Beispiele

$f(x) = x + 3$	$f^{-1}(y) = y - 3$	warum? $y = x + 3 \iff x = y - 3$
$f(x) = 3x$	$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$	
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$	als Funktionen $[0, \infty) \xrightarrow{f} [0, \infty) \xrightarrow{f^{-1}} [0, \infty)$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$	als Funktionen $[0, \infty) \xrightarrow{f} [0, \infty) \xrightarrow{f^{-1}} [0, \infty)$
$f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$	$f^{-1}(y) = \ln(y)$	als Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{f} (0, \infty) \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}$

Beispiel (Standardmethode zur Bestimmung der Umkehrfunktion)

Für viele Funktionen, die durch algebraische Ausdrücke gegeben sind, gibt es eine Standardmethode zum Bestimmen der Umkehrfunktion (falls diese existiert).
Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Dann gilt nach Definition der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \big(\text{das }_{\text{hoffentlich}}\text{ eindeutige Element } x \in X \text{ mit } f(x) = y\big)$$

D. h. wir sollten versuchen, die folgende Gleichung nach x auflösen.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x+3}{x-2} &= y \\ x+3 &= (x-2)y \\ x+3 &= xy-2y \\ x-xy &= -2y-3 \\ x(1-y) &= -2y-3 \\ x &= \frac{-2y-3}{1-y} = \frac{2y+3}{y-1} \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass es für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ genau ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ mit $f(x) = y$ gibt.
Deswegen ist unsere Ausgangsfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

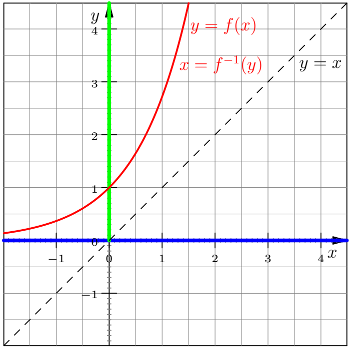
bijektiv mit Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{y-1}.$$

All diese Gleichungen sind äquivalent, falls $x \neq 2$ und $y \neq 1$.

Merke

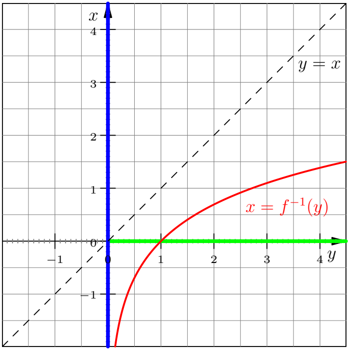
Sei $f : X \to Y$ eine **bijektive** Funktion zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$.
Dann entsteht der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $x = y$.



Als Beispiel betrachten wir die bijektive Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\ x &\mapsto y = f(x) = e^x \end{aligned}$$

Die rote Kurve ist der Graph von f.
Die rote Kurve ist auch der Graph von f^{-1}, wenn wir y als unabhängige Variable verwenden (d. h. "das Koordinatensystem von links" anschauen).
Da wir normalerweise die unabhängige Variable horizontal darstellen, spiegeln wir die gesamte Zeichnung an der ersten Winkelhalbierenden (siehe nächste Seite).



Die rote Kurve ist der Graph der Umkehrfunktion

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\
y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \ln(y)
\end{aligned}
$$

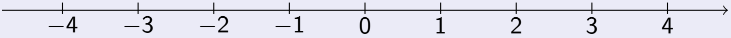
Üblicherweise wird x als unabhängige und y als abhängige Variable verwendet. Dies können wir erreichen, indem wir die Rollen von x und y vertauschen. Die Umkehrfunktion wird dann wie folgt notiert.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto y = f^{-1}(x) = \ln(x)
\end{aligned}
$$

Um mit der Zeichnung konsistent zu sein, müssen auch dort x und y ausgetauscht werden.

Definition (Betrag = Absolutbetrag)

Der **Betrag** $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als ihre Distanz vom Nullpunkt auf dem Zahlenstrahl.



Die formale Definition geht so:

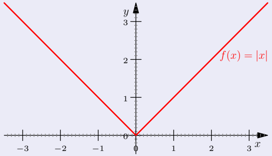
$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele

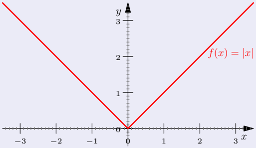
$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-7| &= -(-7) = 7 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

D.h. Minus weglassen, wenn x negativ!

Der Graph der Betragsfunktion $f(x) = |x|$.



Eigenschaften des Absolutbetrags



- nach unten beschränkt durch Null: $|x| \geq 0$. Der Betrag ist stets nicht-negativ (= nie negativ).
- symmetrisch bezüglich der y-Achse: $|x| = |-x|$.
- Wachstumseigenschaften:
  - Auf der "negativen x-Achse inklusive Null" (= dem Intervall $(-\infty, 0]$) ist die Betragsfunktion streng monoton fallend.
  - Auf der "positiven x-Achse inklusive Null" (= dem Intervall $[0, \infty)$) ist die Betragsfunktion streng monoton steigend.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$ gelten:

- Die Bedingung $|x| \leq a$ ist äquivalent zu $-a \leq x \leq a$.

- Die Bedingung $a \leq |x|$ ist äquivalent zu $x \leq -a$ or $a \leq x$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\qquad y \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Merke

Geometrische Sichtweise: $|a - b|$ ist der Abstand (= die Distanz) zwischen a und b.

Beispiel

Lösen Sie $|x - 2| < 3$.
Geometrische Sichtweise: Die Distanz zwischen $|x - 2|$ zwischen x und 2 soll kleiner als 3 sein, d. h. x sollte im Intervall $\mathbb{L} = (2 - 3,\ 2 + 3) = (-1,\ 5)$ sein.

Formaler Lösungsweg: $|x - 2| < 3$ ist äquivalent zu $-3 < x - 2 < 3$, also $-1 < x < 5$.

Beispiel

Lösen Sie $|x - 5| = |x + 3|$. Geometrische Sichtweise:

- $|x - 5|$ ist der Abstand zwischen x und 5
- $|x + 3| = |x - (-3)|$ ist der Abstand zwischen x und -3

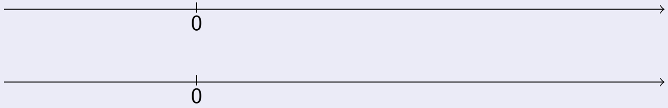
Diese zwei Abstände sind genau dann gleich, wenn x der Mittelpunkt von 5 und -3 ist, d. h. $x = \frac{5+(-3)}{2} = 1$.

Eigenschaften des Betrags: Dreiecksungleichung

(Dreiecksungleichung)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die folgende **Dreiecksungleichung**.

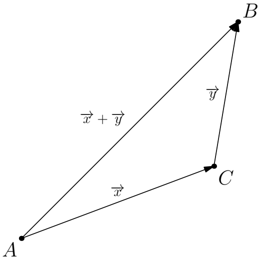
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$



Der Name Dreiecksungleichung kommt aus der Geometrie. Sind A, B und C beliebige Punkte in der Ebene, so ist der direkte Weg von A nach B kürzer oder genauso lang wie der Weg via C. Wenn man Vektoren verwendet wie in der Zeichnung rechts, so gilt also

$$|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}| \leq |\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}|$$

Mit anderen Worten: In jedem Dreieck ist jede Seite kürzer oder genauso lang wie die Summe der beiden anderen Seiten.
Im eindimensionalen Fall sind alle Dreiecke ausgeartet in dem Sinne, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.



Ungleichungen lösen

Die folgenden Umformungen sind Äquivalenzumformungen. = D.h. sie verändern die Lösungsmenge nicht.

- Addition/Subtraktion desselben Ausdrucks auf beiden Seiten der Ungleichung:

$$\begin{aligned} & x + 21 < -2x + 6 && \mid -x-6 \\ \iff \quad & 15 < -3x \end{aligned}$$

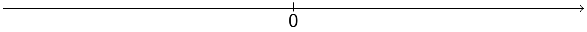
- Multiplikation/Division beider Seiten mit/durch einer **positiven** Zahl/Ausdruck:

$$\begin{aligned} & 15 < -3x && \mid \cdot \frac{1}{3}, \text{ dasselbe wie } : 3 \\ \iff \quad & 5 < -x \end{aligned}$$

- Multiplikation/Division beider Seiten mit/durch eine **negative** Zahl/Ausdruck **bei gleichzeitigem Umdrehen des Vergleichszeichens**:

$$\begin{aligned} & 5 < -x && \mid \cdot (-1) \\ \iff \quad & -5 > x \end{aligned}$$

  Warum? Multiplikation mit -1 ist die Spiegelung der Zahlengeraden am Nullpunkt, die **die Reihenfolge umkehrt** (Beispiel: aus $-2 < 3 < 4$ wird $2 > -3 > -4$).



- trivial: Beide Seiten vertauschen und das Vergleichszeichen umdrehen.

$$\begin{aligned} & -5 > x \\ \iff \quad & x < -5 && \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = (-\infty, -5) \end{aligned}$$

Beispiel

Lösen Sie $\frac{2x+7}{x+2} \geq 1$. Beim Multiplizieren mit $x+2$ muss man zwei Fälle unterscheiden!

- Fall 1, Bedingung $x+2>0$:

$$\begin{aligned} & 2x+7 \geq x+2 && \mid -x-7 \\ \iff \quad & x \geq -5 \end{aligned}$$

  Naiv mag man denken, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 = [-5, \infty)$ ist. Aber im Fall 1 ist $x+2>0$ oder gleichbedeutend $x>-2$ angenommen. Also $\mathbb{L}_1 = (-2, \infty) \cap [-5, \infty) = (-2, \infty)$.

- Fall 2, Bedingung $x+2<0$:

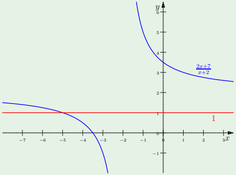
$$\begin{aligned} & 2x+3 \boxed{\leq} x+2 && \mid -x-7 \\ \iff \quad & x \leq -5 \end{aligned}$$

  Nun müssen sowohl $x<-2$ als auch $x \leq -5$ gelten, d. h. $\mathbb{L}_2 = (-\infty, -5]$.

Resultat: Die Lösungsmenge unserer Ungleichung ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-2, \infty) \cup (-\infty, -5] = (-\infty, -5] \cup (-2, \infty)$$

Dies ist genau die Teilmenge der x-Achse, über der der blaue Graph oberhalb der roten Linie verläuft.



Definition (Summationszeichen $\sum$ = Sigma-Notation = $\sum$-Notation)

Mathematiker verwenden das Symbol $\sum$ (der griechische Grossbuchstabe Sigma), um Summen mit vielen strukturell ähnlichen Termen platzsparend aufzuschreiben. Die Definition ist wie folgt:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

lies: "Summe über a_i für i von m bis n"

wobei

- i die **Laufvariable** oder der **Summationsindex** ist;
- a_i ein von i abhängiger Ausdruck ist;
- die ganze Zahl m der Startwert von i ist;
- die ganze Zahl n der Endwert von i ist.

Das "$i = m$" unter dem Summationszeichen bedeutet, dass die Laufvariable bei m startet und dann in Einserschritten solange wächst, bis $i = n$ gilt. Dabei wird $m \leq n$ angenommen.

Beispiel

$$\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Beispiele

Summe aller natürlicher Zahlen von 1 bis 100: (Diese Summe ist $\frac{100\cdot 101}{2}$ nach der Gaußschen Summenformel)

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+99+100$$

Summe aller geraden Zahlen von -4 bis 100: (jede Variable kann als Laufvariable verwendet werden)

$$\sum_{j=-2}^{50} 2j = (-4)+(-2)+0+2+4+\cdots+96+98+100$$

Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 91:

$$\sum_{k=0}^{50}(2k+1) = 1+3+5+\cdots+99+101 = \sum_{k=1}^{51}(2k-1)$$

Klammern sind wichtig: ($\sum$ wird vor $+$, aber nach $\cdot$ ausgeführt)

$$\sum_{k=0}^{50} 2k+1 = \left(\sum_{k=0}^{50} 2k\right)+1 = \Big(0+2+\cdots+98+100\Big)+1$$

Beispiele

Dieselbe Summe kan auf viele unterschiedliche Arten geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{99}{100}=\sum_{i=1}^{99}\frac{i}{i+1}=\sum_{i=2}^{100}\frac{i-1}{i}=\sum_{i=20}^{118}\frac{i-19}{i-18}$$

Verschieben der Laufvariablen: Um zu sehen, dass der letzte $\sum$-Ausdruck mit dem ersten übereinstimmt, substituieren wir $i=j+19$ (Indexverschiebung um 19):

$$\sum_{i=20}^{118}\frac{i-19}{i-18}\overset{\substack{\text{Substitution}\\ i=j+19}}{=}\sum_{j+19=20}^{118}\frac{(j+19)-19}{(j+19)-18}$$

(keine offizielle Notation)

$$\overset{\substack{\text{subtrahiere 19}\\ \text{von beiden}\\ \text{Summationsgrenzen}}}{=}\sum_{j=1}^{99}\frac{j}{j+1}$$

$$\overset{\text{ersetze } j \text{ durch } i}{=}\sum_{i=1}^{99}\frac{i}{i+1}$$

Abstrakt lautet die Formel für eine Indexverschiebung/Substitution $i=j+s$ wie folgt.

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{j=m-s}^{n-s}a_{j+s}$$