Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Rechenfertigkeiten: Kopfrechnen

2.0.1. Um sinnvoll Mathematik betreiben zu können, ist es unerlässlich, gewisse Rechnungen schnell im Kopf ausführen zu können und ein gewisses Gefühl für die Grösse von Ergebnissen zu haben (Überschlagsrechnungen).

Wer für eine Rechnung wie $4 \cdot 7$ den Taschenrechner braucht, verschwendet im Vergleich zu jemandem, der dies einmal verstanden und auswendig gelernt hat, sehr viel Lebenszeit und ist auch einfach langsam, sei es in der Mathematikprüfung, beim Ermitteln des Punktestands bei Spielen oder beim Einkaufen.

Ein Teilaspekt von Intelligenz ist Geschwindigkeit beim Lösen von Problemen; einfache Probleme sollten schnell und sicher gelöst werden. Übung macht den Meister.

2.0.2 (Kopfrechnen)**.** Ich erwarte in Zukunft, dass die folgenden Additionen schnell und sicher im Kopf ausgeführt werden können.

Addition	0 bis 20	21 bis 100
0 bis 20	sofort (auswendiggelernt) Beispiel: $11 + 17$	sofort Beispiel: $19 + 72$
21 bis 100	sofort Beispiel: $43 + 9$	fast sofort Beispiel: $59 + 67 = 110 + 16$

Zu den Beispielrechnungen: ✎

2.0.3 (Kopfrechnen)**.** Ich erwarte in Zukunft, dass die folgenden Multiplikationen schnell und sicher im Kopf ausgeführt werden können.

Multiplikation	0 bis 10	11 bis 20
0 bis 10	sofort (auswendiggelernt) Beispiel: $7 \cdot 9$	fast sofort Beispiel: $6 \cdot 17 = 60 + 42$
11 bis 20	fast sofort Beispiel: $17 \cdot 9 = 90 + 63$	rasch, kurzes Nachdenken Beispiel: $13 \cdot 18 = 100 + 30 + 80 + 24$

Zu den Beispielrechnungen: ✎

2.0.4. Neben der Addition natürlicher Zahlen zwischen 0 und 100 sollte man auch die Subtraktion solcher Zahlen gut beherrschen. Noch besser ist es, wenn man alle Additionen und Subtraktionen zwischen ganzen Zahlen zwischen -100 und 100 rasch im Kopf durchführen kann, also Rechungen wie $72 - 39$ oder $-72 - 39$ oder $-72 + 39$ oder $-72 - (-39)$. Was hier der beste Rechentrick ist, weiss ich nicht, aber man könnte zum Beispiel im Kopf so vorgehen: ✎

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

2.0.5. Wer natürliche Zahlen zwischen 0 und 20 sicher multiplizert, sollte auch keine Probleme haben, ganze Zahlen zwischen -20 und 20 zu multiplizeren. Hier gilt es zusätzlich nur zu beachten, dass

$$\text{plus mal plus} = \text{plus} = \text{minus mal minus}$$
$$\text{plus mal minus} = \text{minus} = \text{minus mal plus}$$

Aufgabe A1 Übe Kopfrechnen mit einem Partner oder in einer kleinen Gruppe (man darf maximal 10 Sekunden benötigen pro Aufgabe; Stoppuhr verwenden):

(a) Addition:
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen 0 und 100, der andere berechnet die Summe («$53+37$?» «90»).
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen -100 und 100, der andere berechnet die Summe («$-53+37$?» «-16»).

(b) Subtraktion:
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen 0 und 100, der andere berechnet die Differenz («$53-37$?» «16»).
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen -100 und 100, der berechnet die Differenz («$-53-(-37)$?» «-16»).

(c) Multiplikation:
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen 0 und 20, der andere berechnet das Produkt («$13\cdot 15$?» «195»).
- Einer nennt zwei Zahlen zwischen -20 und 20, der andere berechnet das Produkt («$(-13)\cdot 15$?» «-195»).

(d) Division = Faktor bei Multiplikation finden: Wähle ein beliebiges Produkt in der Tabelle unten und nenne die Zahl ganz links in derselben Zeile. Der Partner muss die Zahl ganz oben in derselben Spalte herausfinden. Zwei Fragemöglichkeiten: «16 mal was ist 208?» oder «208 durch 16 ist was?»

(e) Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben durcheinander üben!

Aufgabe A2 Die Tabelle zeigt das Grosse Einmaleins, also die **Multiplikationstabelle** aller natürlichen Zahlen von 0 bis 20.

(a) Übe selbst mit dieser Tabelle! Die Produkte mit dunkelgrauem Hintergrund solltest du sofort kennen (also möglichst auch die Quadratzahlen auf der Diagonalen), für die Produkte mit hellgrauem Hintergrund darfst du etwas länger überlegen, die restlichen Produkte solltest du im Kopf berechnen können. Natürlich darfst du gerne das gesamte Grosse Einmaleins auswendiglernen.

(b) Überlege dir gewisse Tricks, so dass du einige Einträge schnell ermitteln kannst.
Beispiele:
- Die Tabelle ist spiegelsymmetrisch zur Diagonalen; insofern genügt es, die Einträge oberhalb der Diagonalen zu kennen (das sind «nur noch» 210 Einträge statt 400 Einträge).
- «Multiplikation mit 5 ist dasselbe wie Multiplikation mit 10 und Division durch 2»: Wenn ein Faktor des Produkts 5 ist, kann man auch so rechnen:

$$5\cdot 13 = \frac{10}{2}\cdot 13 = \frac{10\cdot 13}{2} = \frac{130}{2} = 65$$

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

3 Die natürlichen Zahlen

3.0.1. Wir setzen voraus, dass der Leser die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ der natürlichen Zahlen kennt und weiss, wie man solche Zahlen addiert und multipliziert.

3.1 Teilbarkeit und Primzahlen

Definition 3.1.1 Teiler, Vielfaches

Seien t und v natürliche Zahlen. Dann heisst t **Teiler** von v und v heisst **Vielfaches** von t genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x gibt mit $x \cdot t = v$.
Manchmal werden die folgenden Schreibweisen verwendet:

$t \mid v$ für «t teilt v» = «t ist Teiler von v» = «v ist durch t teilbar» = «v ist Vielfaches von t»

$t \nmid v$ für die Verneinung dieser Aussage, also für «t teilt v nicht»

Beispiele 3.1.2. Die Zahl 17 ist ein Teiler von 68, denn $4 \cdot 17 = 68$. Gleichbedeutend: 68 ist ein Vielfaches von 17. Man schreibt kurz $17 \mid 68$.

Die Zahl 0 ist ein Vielfaches von 18 und 18 ist ein Teiler von 0, denn $0 \cdot 18 = 0$. In Kurzschreibweise: $18 \mid 0$.

3.1.3 (Einfache Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation (= Teilbarkeitsbeziehung)). Könnte Lemma werden (eventuell hinter Teilbarkeitsregeln?)!

Wenn t ein Teiler von a ist, so ist t auch ein Teiler von jedem Vielfachen von a. ✎

Wenn t ein Teiler von a und von b ist, so ist t auch ein Teiler von $a + b$. ✎

Satz 3.1.4 Teilbarkeitsregeln/Teilbarkeitskriterien

Eine im Dezimalsystem (= Zehnersystem) geschriebene natürliche Zahl ist genau dann

- durch 2 teilbar, wenn ✎
- durch 3 teilbar, wenn ✎
- durch 4 teilbar, wenn ✎
- durch 5 teilbar, wenn ✎
- durch 6 teilbar, wenn ✎
- (Teilbarkeit durch 7 der Einfachheit halber weggelassen, vgl. 3.1.5)
- durch 8 teilbar, wenn ✎
- durch 9 teilbar, wenn ✎
- durch 10 teilbar, wenn ✎
- durch 11 teilbar, wenn ✎

3.1.5. Viele weitere Teilbarkeitskriterien findet man zum Beispiel auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit#Teilbarkeitsregeln_im_Dezimalsystem`. Teilbarkeit durch 7 ist beispielsweise gleichbedeutend dazu, dass die «alternierende 3er-Quersumme» durch 7 teilbar ist.

Definition 3.1.6 Quersumme, alternierende Quersumme

Die **Quersumme** einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.
Die **alternierende Quersumme** (= abwechselnde Quersumme) einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl ist die alternierende Summe ihrer Ziffern (bei der Einerziffer startend), also

$$+(\text{letzte Ziffer}) - (\text{vorletzte Ziffer}) + (\text{vorvorletzte Ziffer}) - (\text{vorvorvorletzte Ziffer}) \pm \dots$$

Beispiele 3.1.7. Die Quersumme von $235'711'131'719'232$ ist

$$2+3+5+7+1+1+1+3+1+7+1+9+2+3+2=48$$

Dies ist durch 3 teilbar. Also ist nach unserer Durch-3-Teilbarkeitsregel $235'711'131'719'232$ durch 3 teilbar ist; in der Tat ist es das 3-Fache von $78'570'377'239'744$.

(Wer mag, kann auch die Durch-3-Teilbarkeitsregel mehrfach anwenden: Die Quersumme von 48 ist 12, die von 12 ist 3, was durch 3 teilbar ist. Also sind 12 und 48 und 23571113171923 durch 3 teilbar.)

Die alternierende Quersumme von $8'235'711'131'719'236$ ist

$$6-3+2-9+1-7+1-3+1-1+1-7+5-3+2-8=-22$$

Dies ist durch 11 teilbar. Also ist nach unserer Durch-11-Teilbarkeitsregel $8'235'711'131'719'236$ durch 3 teilbar ist; in der Tat ist es das 11-Fache von $748'701'011'974'476$. Hier verwenden wir die Teilbarkeitsbegriffe in naheliegender Weise für ganze Zahlen.

3.1.8. Wenn es nur um die Teilbarkeit der alternierenden Quersumme durch eine Zahl geht, darf man die alternierende Quersumme auch «falsch herum» von links beginnend berechnen. Man erhält dann bis auf das Vorzeichen (Plus/Minus) auch die alternierende Quersumme.

In dem gerade betrachteten Beispiel $8'235'711'131'719'236$ ist die «falsch» gebildete alternierende Quersumme

$$8-2+3-5+7-1+1-1+3-1+7-1+9-2+3-6=22$$

Beweis. Wir beweisen nur die Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 9 und 11. Wer den Beweis der Teilbarkeit durch 2 versteht, wird ohne Schwierigkeiten die anderen Teilbarkeitsregeln beweisen können. Ausserdem beweisen wir diese Regeln nur jeweils an einem aussagekräftigen Beispiel.

Teilbarkeit durch 2 am Beispiel der symbolisch geschriebenen Zahl $437'06z$, wobei $z \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ die letzte Ziffer ist. Es gilt ✎

Da $437'060$ stets durch 2 teilbar ist, ist nun hoffentlich klar, dass die letzte Ziffer z über Teilbarkeit durch 2 entscheidet. Genaugenommen verwendet dies zweimal 3.1.3 (sinngemäss verallgemeinert auf ganze Zahlen): Ist z durch 2 teilbar, so ist auch die Summe auf der rechten Seite, also $437'06z$, durch 2 teilbar. Ist umgekehrt $437'06z$ durch 2 teilbar, so ist auch die Differenz $437'06z - 437'060 = z$ durch 2 teilbar.

Teilbarkeit durch 3 **und** 9 am Beispiel der Zahl Zahl $37'062$ (mit Quersumme 18, was wiederum Quersumme 9 hat) und hoffen, dass der Leser dadurch das allgemeine Vorgehen versteht. ✎

Da der zweite Summand rechts stets durch 9 (und erst recht durch 3) teilbar ist, entscheidet die Quersumme über Teilbarkeit durch 9 und durch 3.

Teilbarkeit durch 11 durch ein aussagekräfriges Beispiel: ✎

Aus Teilbarkeit durch 6 folgt offensichtlich Teilbarkeit durch 2 und 3. Umgekehrt stimmt das auch, braucht aber wohl formal die **Eindeutigkeit** der Primfaktorzerlegung, die wir eventuell später erklären. □

Aufgabe A3 Beweise die Teilbarkeitsregeln für Teilbarkeit durch 4, 5, 8, 10 in Satz 3.1.4 in aussagekräftigen Beispielen. Orientiere dich dabei am Beweis der Teilbarkeit durch 2 im obigen Beweis.

3.1.9 (Schriftliche Division (mit Rest oder Ergebnis als Kommazahl))**.** Schriftliche Division durch einstellige natürliche Zahl an Tafel erklären anhand des Beispiels 246813579 : 7. Ergebnis auf drei Arten angeben:

- Schreibweise in der Sekundarschule: ✎
- Damit ist gemeint (mathematisch sinnvolle Angabe des Ergebnisses): ✎
- Wenn man die Division fortsetzt, erhält man das Ergebnis als Kommazahl (bei Division zweier natürlicher Zahlen bricht die Folge der Nachkommaziffern ab oder wird periodisch): ✎

Merke 3.1.10

Eine natürliche Zahl x ist genau dann durch eine natürliche Zahl $d \neq 0$ teilbar, wenn bei der Division mit Rest $x : d$ der Rest Null herauskommt.

Warnung 3.1.11. Ich treffe oft auf Schüler, die denken, der Rest der Division $x : y$ sei dasselbe wie die (erste) Ziffer nach dem Komma (oder ähnliches) von $\frac{x}{y}$. Dies ist im Allgemeinen komplett falsch.

Es gilt beispielsweise $37 : 5 = 7$ Rest 2, aber $\frac{37}{5} = \frac{74}{10} = 7.4$ und der Rest 2 ist nicht die erste Nachkommaziffer 4. Was aber gilt, ist $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5} = 7 + \frac{4}{10} = 7.4$ oder umgeschrieben $\frac{2}{5} = 7.4 - 7 = 0.4$.

Aufgabe A4

(a) Gib jeweils an, durch welche der 11 Zahlen von 1 bis 11 die folgenden Zahlen teilbar sind. Verwende dazu die Teilbarkeitsregeln bzw. bei Teilbarkeit durch 7 schriftliche Division mit Rest.
- 140612164
- 389061369015
- 1073741824
- 39916800
- 27720 Zahl geändert, ich wollte eine Null am Ende statt einer 9.

(b) Bestimme die kleinste positive natürliche Zahl, die durch alle Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 teilbar ist.

(c) Gib jeweils alle Teiler der angegebenen Zahl an (der Grösse nach aufsteigend geordnet).
- 20
- 91
- 100
- 484
- 625
- 726
- 1024
- 1
- 0

(Falls jemand programmieren kann: Schreibe ein Programm, dass alle Teiler einer Zahl n ermittelt.)

(d) Zeige durch (möglichst kleine) Gegenbeispiele, dass die folgenden Teilbarkeitsregeln falsch sind:
- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 7 teilbar ist.»
- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 7 teilbar ist.»
- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 5 teilbar ist.»

Definition 3.1.12

Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positive natürliche Zahlen.
- Der **grösste gemeinsame Teiler von a und b** (kurz **ggT**)

$$\mathrm{ggT}(a, b) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ teilt } a \text{ und } t \text{ teilt } b\}$$

  ist definiert als das grösste Element der (endlichen) Menge der gemeinsamen Teiler von a und b.
  Diese Definition ist etwas allgemeiner auch sinnvoll, falls nicht $a = b = 0$ gilt. Beispiele: $\mathrm{ggT}(0, 6) = 6 = \mathrm{ggT}(6, 0)$.
- Das **kleinste gemeinsame Vielfache von a und b** (kurz **kgV**)

$$\mathrm{kgV}(a, b) := \min\{v \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid v \text{ ist Vielfaches von } a \text{ und } v \text{ ist Vielfaches von } b\}$$

  ist definiert als das kleinste **positive** Element der Menge der gemeinsamen Vielfachen von a und b.

Aufgabe A5

(a) Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$.

a) $a = 9$, $b = 4$ b) $a = 18$, $b = 12$ c) $a = 25$, $b = 10$ d) $a = 60$, $b = 90$

(Falls jemand programmieren kann: Schreibe ein Programm, dass $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ berechnet.)

(b) Bestimmen Sie jeweils zusätzlich das Produkt $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$. Fällt Ihnen etwas auf?

Definition 3.1.13

Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heisst genau dann **Primzahl**, wenn sie genau zwei Teiler hat (nämlich 1 und m).
Gleichbedeutend: Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heisst genau dann **Primzahl**, wenn $m \geq 2$ gilt und m nur die beiden (offensichtlichen) Teiler 1 und m hat.

Warnung 3.1.14. Die Zahlen 0 und 1 sind keine Primzahlen, denn 0 hat unendlich viele Teiler und 1 hat genau einen Teiler.

Aufgabe A6

Erstelle eine Liste aller Primzahlen von 0 bis 100. Hinweis: Es gibt genau 25.

(Falls jemand programmieren kann: Schreibe ein Programm, dass alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl n ermittelt.)

3.1.15. Mit dem folgenden Algorithmus, dem Sieb des Eratosthenes, kann man die Aufgabe A6 schnell und effizient lösen.

Mit naheliegenden Verbesserungen (vgl. 3.1.18) ist dieser Sieb-Algorithmus meines Wissens einer der schnellsten bekannten Algorithmen zum Erstellen einer Primzahlliste bis zu einer vorgegebenen Zahl.

Algorithmus 3.1.16 Sieb des Eratosthenes

Das **Sieb des Eratosthenes** ist der folgende Algorithmus zum Erstellen einer Liste aller Primzahlen bis zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl N. Dabei werden Zahlen in einer Liste durch Einrahmen als Primzahlen oder durch Durchstreichen als Nicht-Primzahlen markiert; wir nennen so gekennzeichnete Zahlen «markierte» Zahlen.

(1) Schreibe alle natürlichen Zahlen von 2 bis N auf.

(2) Wiederhole die folgende Anweisung, solange es eine nicht markierte Zahl in der Liste gibt:
   - Wähle die kleinste nicht markierte Zahl, rahme sie ein und streiche all ihre echt grösseren Vielfachen in der Liste.

Die Primzahlen in der Liste sind genau die eingerahmten Zahlen.

Beispiel 3.1.17. Wir führen das Sieb des Eratosthenes im Beispiel $N = 150$ durch:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

3.1.18. Man kann das Sieb des Eratosthenes auf die folgenden einfachen Weise beschleunigen.

- Sobald die erste nicht markierte Zahl echt grösser als $\sqrt{N}$ ist, kann man die Wiederholung stoppen und direkt alle nicht markierten Zahlen einrahmen.
  Der Grund dafür ist, dass jede Nicht-Primzahl n mindestens einen Teiler t mit $1 < t \leq \sqrt{n}$ hat.
- Ausserdem genügt es, beim Streichen der Vielfachen einer Primzahl p mit der Zahl p^2 anzufangen, denn alle kleineren Vielfachen sind bereits gestrichen.

Beweis, dass das Sieb des Eratosthenes das gewünschte Ergebnis liefert. Dies folgt aus den folgenden Beobachtungen:

- Die 2 wird sofort eingerahmt und ist sicherlich eine Primzahl.
- Jede gestrichene Zahl n ist keine Primzahl.
  Grund: Gestrichen wurde n ausgehend von einer eingerahmten Zahl p mit $p \geq 2$ und $p < n$. Also ist n ein Vielfaches von p und somit keine Primzahl.
- Jede eingerahmte Zahl n hat nur die Teiler 1 und n und ist somit eine Primzahl.
  Grund: Sonst gibt es einen Teiler t von n mit $1 < t < n$. Zu dem Zeitpunkt, an dem n eingerahmt wird, ist n die kleinste nicht markierte Zahl. Also muss t markiert sein, also entweder eingerahmt oder gestrichen (beides geht offensichtlich nicht).
  - Falls t eingerahmt ist, so wäre n als echt grösseres Vielfaches gestrichen (aber n ist laut Annahme eingerahmt). Widerpruch.
  - Falls t gestrichen ist, so ist t ein Vielfaches einer anderen natürlichen Zahl s mit $1 < s < t$. Dann ist aber n als Vielfaches von t auch ein Vielfaches von s und wegen $n > t$ und $t > s$ gilt $n > s$. Dann ist aber n ein echt grösseres Vielfaches von s und muss somit gestrichen sein (aber n ist laut Annahme eingerahmt). Widerspruch.

  Diese beiden Widersprüche zeigen, dass es keinen solchen Teiler t von n geben kann. Also ist n eine Primzahl.

□

Aufgabe A7 (ohne Taschenrechner)

(a) Finde heraus, ob 211 eine Primzahl ist!
Hinweis: Warum genügt es, alle Primzahlen $\leq \sqrt{211} \approx 14.56$ darauf zu testen, ob sie ein Teiler von 211 sind? Du musst also nur 6 Primzahlen testen; denk an die Teilbarkeitskriterien.

(b) Finde heraus, ob 323 eine Primzahl ist!

(c) Wenn man wissen will, ob eine Zahl n eine Primzahl ist, warum genügt es, n durch alle Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ zu dividieren?

Satz 3.1.19 Satz von Euklid

Es gibt unendlich viele Primzahlen. Mehr Infos auf Wikipedia: Satz des Euklid

Beweis. Wir zeigen die folgende stärkere Aussage: Für jede endliche Liste von Primzahlen kann man eine «neue» Primzahl konstruieren, die nicht auf dieser Liste steht.✎

□

Aufgabe A8 (Taschenrechner nur bei Teilaufgabe (c) erlaubt)

Verstehe den Beweis des Satzes 3.1.19 in einigen konkreten Fällen.

(a) Wenn man mit der Liste 2, 3, 5 von Primzahlen startet: Welche «neue» Primzahl liefert der Beweis?

(b) Wenn man mit der Liste 2, 7 von Primzahlen startet: Welche «neue» Primzahl liefert der Beweis?

(c) Starte mit der einelementigen Liste 2 von Primzahlen.
- Welche neue Primzahl liefert der Beweis? Schreibe diese Primzahl ans Ende deiner Primzahlliste.
- Wiederhole dieses Vorgehen, bis du eine Liste aus 7 Primzahlen erzeugt hast.
Hinweis: Alle Primzahlen, die du dabei findest, sind kleiner als 60, und einige enden mit einer 3.

Aufgabe A9 In dieser Aufgabe sollst du lernen, dass es beliebig grosse «Primzahllücken» gibt, also beliebig lange Folgen direkt aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. Die Aufgabe ist ohne Taschenrechner zu lösen und benötigt keine aufwändigen Rechnungen, aber ein wenig Nachdenken.

(a) Betrachte das Produkt

$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$$

der natürlichen Zahlen von 1 bist 11. (Man nennt diese Zahl «11 Fakultät» und schreibt sie als 11!.)

Begründe, dass keine der Zahlen in der Liste

$$a+2, a+3, a+4, a+5, \ldots, a+11$$

eine Primzahl ist. Aus wie vielen Zahlen besteht diese Liste?
Bemerkung: $a+1 = 39'916'801$ ist eine Primzahl; deswegen haben wir die Liste nicht bei $a+1$ starten lassen.

(b) Gibt es 1000 direkt aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist?
(c) Gibt es beliebig lange solcher Primzahllücken?

Definition 3.1.20 Potenzen, Basis, Exponent

Gegeben eine Zahl b und eine positive natürliche Zahl $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heisst

$$b^e := \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{e \text{ Faktoren}}$$

die e**-te Potenz von** b. Sprechweise: «b hoch e». Wir definieren $b^0 := 1$, falls $b \neq 0$.
Dabei heisst b **Basis** und e heisst **Exponent**. Der Rechenvorgang heisst **Potenzieren**. Man sagt auch, dass man «b in die e-te Potenz erhebt».
Spezialfälle:

- $b^1 = b$
- Die zweite Potenz b^2 von b heisst das **Quadrat von** b; jede Zahl der Form b^2 für ein $b \in \mathbb{N}$ heisst **Quadratzahl**.
- Jede Zahl der Form b^3 für ein $b \in \mathbb{N}$ heisst **Kubikzahl**.

Nicht definiert ist 0^0.

Satz 3.1.21 Potenzgesetze = Rechengesetze für Potenzen

Für alle Zahlen a, b und alle $e, f \in \mathbb{N}$ gelten:

$a^e \cdot a^f = a^{e+f}$	Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis
$a^e \cdot b^e = (ab)^e$	Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten
$(a^e)^f = a^{ef}$	Potenz einer Potenz

Beweis. ✎

□

Aufgabe A10 Schreiben Sie jeweils ohne Klammern und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $x^2y^5 \cdot (xy)^3$
b) $(tuw)^{23} \cdot \left((tu)^5\right)^7$
c) $\left((as)^9 \cdot (at)^3\right)^7$
d) $\left(\left((pq)^3 \cdot p^4\right)^5 \cdot q^2\right)^3$
e) $\left((2 \cdot 3)^x \cdot (3 \cdot 5)^{4x}\right)^y$
f) $\left(((pq)^x \cdot p^x)^x \cdot q^x\right)^x$

Aufgabe A11 Beliebte Fehler in Prüfungen: Die folgenden drei Formeln gelten nicht für alle natürlichen Zahlen a, b, e, f. Widerlegen Sie sie jeweils durch ein möglichst einfaches Gegenbeispiel! (Finden Sie also jeweils (möglichst einfache) Werte für alle vorkommenden Variablen, so dass rechts und links des Gleichheitszeichens etwas anderes herauskommt.)

a) $(a+b)^e = a^e + b^e$ b) $(a^e)^f = a^{e+f}$ c) $(a^e)^f = a^{e^f}$

3.1.22. Der folgende Satz besagt, dass die Primzahlen die «multiplikativen Bausteine/Atome» der natürlichen Zahlen bilden: Jede Primzahl ist in eindeutiger Weise ein Produkt von Primzahlen.

Satz 3.1.23 Satz über die Primfaktorzerlegung; englisch: fundamental theorem of arithmetic, prime factorization theorem

Jede positive natürliche Zahl $a > 0$ lässt sich eindeutig (= auf genau eine Weise) als Produkt

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{e_m}$$

von Primzahlpotenzen schreiben, wobei
- $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der vorkommenden Primzahlen ist,
- die Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_m$ Primzahlen sind, die sogenannten **Primfaktoren von** a, und $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ gilt und
- die Exponenten $e_1, e_2, \dots, e_m$ positive natürliche Zahlen sind.

Die obige Darstellung von a als Produkt von Primzahlpotenzen heisst **Primfaktorzerlegung** oder kurz **PFZ** von a.

Im Fall $a = 1$ ist diese Aussage so zu verstehen: Es gilt $m = 0$ und das «leere Produkt» mit gar keinem Faktor ist 1.

Beweis. Existenz der Zerlegung (vergleiche Beispiel 3.1.24):
- Man zerlege a immer weiter in Faktoren, bis a als Produkt von Primzahlen dargestellt ist.
- Man ordne die Primfaktoren der Grösse nach und schreibe sie als Potenzen.

Eindeutigkeit der Zerlegung: etwas aufwändiger (eventuell erkläre ich dies in einem Anhang für die Tapferen). □

Beispiel 3.1.24. Betrachte die Zahl $a = 1'912'911$. ✎

Aufgabe A12 Bestimmen Sie jeweils **ohne Taschenrechner** die Primfaktorzerlegung der angegebenen Zahl. Geben Sie dabei jeweils explizit die Anzahl m der Primfaktoren, die Primfaktoren $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ und die zugehörigen Exponenten $e_1, \dots, e_m$ an.

Hinweis: Um die Primfaktorzerlegung zu bestimmen, muss man in den letzten vier Teilaufgaben die Produkte und Potenzen nicht ausrechnen.

a) 24	b) 31	c) 72	d) 91	e) 2100	f) 2023
g) 2024	h) 1024	i) $24 \cdot 72$	j) 24^3	k) $24^3 \cdot 72^2$	l) $(24^7)^2 \cdot 72^{5^3}$

Aufgabe A13 Bestimme jeweils die Primfaktorzerlegung der angegebenen Zahl (ohne Taschenrechner).

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300$ b) $315 \cdot 154000 \cdot 29000$ c) $84 \cdot 16500 \cdot 1900$

d) $525 \cdot 1800 \cdot 19000$ e) $\left(5 \cdot 2^2 \cdot 7^4\right)^{10}$ f) $\left(6^2 \cdot 54^4\right)^{10}$

Aufgabe A14 (ohne Taschenrechner) Gegeben sind die folgenden acht Zahlen durch ihre Primfaktorzerlegung:

$a = 3^4 \cdot 13^{2025} \cdot 19^6$ $b = 3^{24} \cdot 13^{2026} \cdot 19^6$ $c = 3^{24} \cdot 13^{2027} \cdot 19^6$ $d = 3^4 \cdot 13^{2028} \cdot 19^{10}$
$e = 3^{24} \cdot 13^{2025} \cdot 19^{21}$ $f = 3^{24} \cdot 13^{2026} \cdot 19^9$ $g = 3^{24} \cdot 13^{2027} \cdot 19^{12}$ $h = 3^{24} \cdot 13^{2028} \cdot 19^{12}$

(a) Entscheiden Sie bei jeder der acht Zahlen, ob es sich um eine Quadratzahl (= zweite Potenz) handelt. Hinweis: Was ist die Primfaktorzerlegung des Quadrats von $3^x \cdot 13^y \cdot 19^z$?
(b) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung
(c) Entscheiden Sie bei jeder der acht Zahlen, ob es sich um eine Kubikzahl (= dritte Potenz) handelt. Hinweis: Was ist die Primfaktorzerlegung der dritten Potenz von $3^x \cdot 13^y \cdot 19^z$?
(d) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine Kubikzahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung
(e) Entscheiden Sie bei jeder der acht Zahlen, ob es sich um eine sechste Potenz einer natürlichen Zahl handelt.
(f) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine sechste Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung

Aufgabe A15 (ohne Taschenrechner)

(a) Schreiben Sie alle Teiler von 500 auf. Wie viele Teiler gibt es insgesamt?
(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung jedes Teilers.
(c) Wenn Sie die Primfaktorzerlegung von 500 mit den Primfaktorzerlegungen der Teiler vergleichen, was fällt Ihnen auf? Können Sie damit begründen, dass 500 genau 12 Teiler hat?
(d) Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis und versuchen Sie, die Aussage von Satz 3.1.26 zu erraten.

Beispiel 3.1.25. Betrachte die Zahl 18. Primfaktorzerlegung: ✎

Angabe aller Teiler: ✎

Anzahl der Teiler von 18: ✎

Teilerdiagramm/Teilerbild:

Satz 3.1.26 Teiler und Teileranzahl ermitteln, falls Primfaktorzerlegung bekannt

Hat eine beliebige positive natürliche Zahl $a > 0$ die Primfaktorzerlegung

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m},$$

so sind die Teiler von a genau die Zahlen

✎

Insbesondere gilt:

(Anzahl der Teiler von a) = ✎

Beweis. Seien x und y zwei natürliche Zahlen mit $x \cdot y = a$. Dann liefert das Produkt der Primfaktorzerlegung von x mit der Primfaktorzerlegung von y die Primfaktorzerlegung von a (wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). Daraus folgt, dass jeder Primfaktor q von x ein Primfaktor von a ist und dass der Exponent bei q in der Primfaktorzerlegung von x kleiner-gleich als der Exponent von q in der Primfaktorzerlegung von a ist. Damit bleiben nur die im Satz angegebenen Zahlen als Teiler übrig und es ist klar, dass es sich dabei um Teiler von a handelt (denn das Produkt von $p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \dots \cdot p_m^{f_m}$ und $p_1^{e_1-f_1} \cdot p_2^{e_2-f_2} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m-f_m}$ ist a.) □

Beispiel 3.1.27.

Die Zahl

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

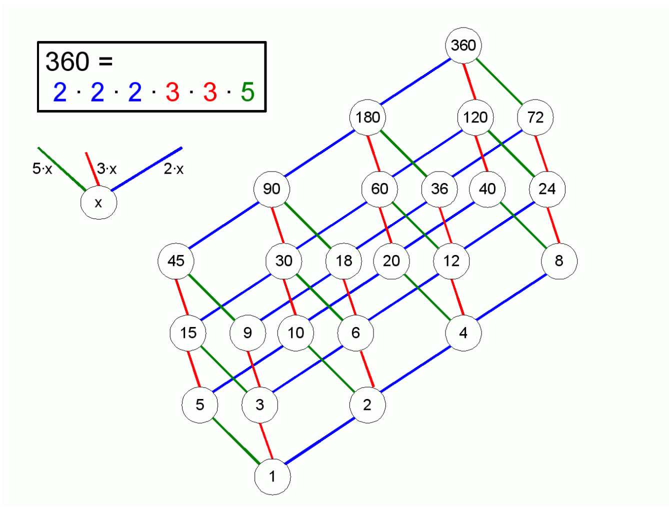
hat

$(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Teiler,

nämlich alle Zahlen

$$2^e \cdot 3^f \cdot 5^g \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} e &= 0, 1, 2, 3 \text{ und} \\ f &= 0, 1, 2 \text{ und} \\ g &= 0, 1. \end{aligned}$$

Im Teilerdiagramm/Teilerbild dargestellt:



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Teilerbild_360.png

Definition 3.1.28 Teilerdiagramm oder Teilerbild

Das **Teilerdiagramm/Teilerbild** einer natürlichen Zahl a sieht so aus, wie in den obigen Beispielen erklärt. Genauer besteht es aus allen Teilern von a, die durch farbige Linien (oder Pfeile nach oben) miteinander verbunden sind, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- In der untersten Zeile steht die Zahl 1.
- In der zweituntersten Zeile stehen alle Teiler von a, die Primzahlen sind (also alle Primfaktoren von a).
- In der drittuntersten Zeile stehen alle Teiler von a, die das Produkt zweier Primzahlen sind.
- In der viertuntersten Zeile stehen alle Teiler von a, die das Produkt dreier Primzahlen sind.
- etc.
- In der obersten Zeile steht die Zahl a.
- Jedem Primfaktor p von a ist eine Farbe zugeordnet.
  - Zwei Teiler von a sind genau dann durch eine Linie dieser Farbe verbunden, wenn die obere Zahl das p-fache der unteren Zahl ist.
  - Alle Linien dieser Farbe sind parallel.

3.1.29. Im obigen Beispiel $18 = 2 \cdot 3^2$ ist das Teilerdiagramm ein zweidimensionales Parallelogramm.

Im obigen Beispiel $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist das Teilerdiagramm (die Projektion) ein(es) dreidimensionalen **Parallelepiped**(s) (= «dreidimensionales Parallelogramm»).

Allgemein gilt: Hat eine Zahl m verschiedene Primfaktoren, so ist das zugehörige Teilerdiagramm ein m-dimensionales Parallelepiped (= «m-dimensionaler Parallelogramm»).

Beispiel 3.1.30. Betrachte die (sehr grosse) Zahl

$$a = 79^{999} \cdot 89^{6} \cdot 97^{11}$$

Anzahl der Teiler von a:

$$(999+1) \cdot (6+1) \cdot (11+1) = 1000 \cdot 7 \cdot 12 = 84'000$$

Angabe aller Teiler von a:

$$79^e \cdot 89^f \cdot 79^g \text{ für beliebige natürliche Zahlen } e,\ f,\ g \text{ mit } \begin{array}{l} 0 \leq e \leq 999 \text{ und} \\ 0 \leq f \leq 6 \text{ und} \\ 0 \leq g \leq 11. \end{array}$$

Aufgabe A16

(a) Bestimme für jede der folgenden Zahlen mit Hilfe der Primfaktorzerlegung die Anzahl der Teiler und zeichne das Teilerdiagramm.

$200 \qquad 105 \qquad 47^2 \cdot 59^2$ (nicht ausrechnen, Teiler per PFZ angeben)

(b) Gib jeweils an, wie viele Teiler die Zahl hat und gib alle Teiler in kompakter Form an.

$$5 \cdot 13^{10} \cdot 17^{19} \cdot 19^{29} \qquad\qquad \left(50^{10} \cdot 20^{11}\right)^4$$

Algorithmus/Satz 3.1.31 zur Bestimmung von ggT und kgV mit Hilfe der PFZ

Gegeben sind zwei positive natürliche Zahlen a und b mit bekannter Primfaktorzerlegung.

(1) Sei $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ eine Auflistung aller Primzahlen, die als Primfaktor von a oder b auftauchen.

(2) Schreibe

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{e_m}$$
$$b = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{f_m}$$

für geeignete natürliche Zahlen $e_1, \ldots, e_m$ und $f_1, \ldots f_m$ (dies sind die Primfaktorzerlegungen von a und b, wenn man auch 0 als Exponenten erlaubt).

(3) Dann kann man die PFZ des ggT bzw. kgV von a und b wie folgt ermitteln

$$\operatorname{ggT}(a,b) = p_1^{\min(e_1,f_1)} \cdot p_2^{\min(e_2,f_2)} \cdot \cdots \cdot p_m^{\min(e_m,f_m)}$$
$$\operatorname{kgV}(a,b) = p_1^{\max(e_1,f_1)} \cdot p_2^{\max(e_2,f_2)} \cdot \cdots \cdot p_m^{\max(e_m,f_m)}$$

Hierbei liefern $\max(x,y)$ das Maximum (= die grössere) und $\min(x,y)$ das Minimum (= die kleinere) zweier Zahlen x und y.

Folgerung 3.1.32

Sind a und b beliebige natürliche Zahlen, so gilt

$$a \cdot b = \operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b)$$

Insbesondere kann man jede der vier Zahlen a, b, $\operatorname{ggT}(a,b)$, $\operatorname{kgV}(a,b)$ berechnen, wenn drei dieser Zahlen bekannt sind.

«Beweis» von Satz 3.1.31 am aussagekräftigen Beispiel. Wir betrachten das Beispiel

$$a = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{2023} \cdot 7 \quad \cdot 11^{100} \cdot 53^{123}$$
$$b = 2^3 \cdot 3^{12} \cdot 5^{1111} \cdot 7^{42} \cdot 11 \qquad\quad \cdot 83^{456}$$

(1) Die Liste aller in diesen beiden PFZ auftauchenden Primzahlen ist

$$2 < 3 < 5 < 7 < 11 < 53 < 83$$

(2) Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} a &= 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{2023} \cdot 7^1 \cdot 11^{100} \cdot 53^{123} \cdot 83^0 \\ b &= 2^3 \cdot 3^{12} \cdot 5^{1111} \cdot 7^{42} \cdot 11^1 \cdot 53^0 \cdot 83^{456} \end{aligned}$$

(3) In symbolischer Schreibweise:

Teiler von a: $\quad 2^{\leq 7} \cdot 3^{\leq 12} \cdot 5^{\leq 2023} \cdot 7^{\leq 1} \cdot 11^{\leq 100} \cdot 53^{\leq 123} \cdot 83^{\leq 0}$

Teiler von b: $\quad 2^{\leq 3} \cdot 3^{\leq 12} \cdot 5^{\leq 1111} \cdot 7^{\leq 42} \cdot 11^{\leq 1} \cdot 53^{\leq 0} \cdot 83^{\leq 456}$

✎

(4) In symbolischer Schreibweise:

Vielfache von a: $\quad 2^{\geq 7} \cdot 3^{\geq 12} \cdot 5^{\geq 2023} \cdot 7^{\geq 1} \cdot 11^{\geq 100} \cdot 53^{\geq 123} \cdot 83^{\geq 0}$ · Produkt von Potenzen anderer Primzahlen

Vielfache von b: $\quad 2^{\geq 3} \cdot 3^{\geq 12} \cdot 5^{\geq 1111} \cdot 7^{\geq 42} \cdot 11^{\geq 1} \cdot 53^{\geq 0} \cdot 83^{\geq 456}$ · Produkt von Potenzen anderer Primzahlen

✎

$\square$

Beweis der Folgerung 3.1.32. Für alle Zahlen e und f gilt $e + f = \min(e, f) + \max(e, f)$.
(Beispiele: $17 + 3 = 3 + 17 = \min(17, 3) + \max(17, 3)$; $4 + 4 = \min(4, 4) + \max(4, 4)$.)
Daraus folgt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= p_1^{e_1} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} \cdot p_1^{f_1} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} \\ &= p_1^{e_1+f_1} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} \\ &= p_1^{\min(e_1,f_1)+\max(e_1,f_1)} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} \\ &= p_1^{\min(e_1,f_1)} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} \cdot p_1^{\max(e_1,f_1)} \cdot \text{(weitere solche Faktoren)} = \operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{kgV}(a, b). \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe A17 Betrachten Sie die beiden Zahlen $a = 3'500$ und $b = 10'584$.

(a) Versuchen Sie, $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ ohne Algorithmus/Satz 3.1.31 zu bestimmen (Bitte nicht zu viel Zeit in diese Teilaufgabe investieren; sie dient vorrangig dazu, Sie zu überzeugen, dass das naive Bestimmen von ggT und kgV nicht sehr effizient ist.)
(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen von a und b.
(c) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ mit Hilfe von Algorithmus/Satz 3.1.31.
(d) Rechnen Sie $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus (schriftlich Multiplizieren) und überzeugen Sie sich per schriftlichem Multiplizieren, dass die Folgerung 3.1.32 in diesem Beispiel gilt.

Aufgabe A18

(a) Es gelten $\mathrm{ggT}(a, b) = 8$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 96$ und $b = 24$. Bestimme a.
(b) Es gelten $\mathrm{ggT}(a, b) = 6$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 90$ und $a = 30$. Bestimme b.
(c) Es gelten

$$\mathrm{ggT}(a, b) = 7^{100} \cdot 11^{700} \qquad \mathrm{kgV}(a, b) = 7^{200} \cdot 11^{700}$$

Welche Werte können a und b haben? Wie viele Lösungen gibt es?
(d) Es gelten $\mathrm{ggT}(a, b) = 6$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 168$. Welche Werte können a und b haben? Wie viele Lösungen gibt es?
(e) Gibt es zwei positive natürliche Zahlen a und b mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 400$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 100$?
(f) Gibt es zwei positive natürliche Zahlen a und b mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 100$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 400$?
(g) Gibt es zwei positive natürliche Zahlen a und b mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 100$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 401$?
(h) Welche (möglichst schwache) Bedingung müssen zwei positve natürliche Zahlen g und k erfüllen, so dass es zwei positive natürliche Zahlen a und b mit $\mathrm{ggT}(a, b) = g$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = k$ gibt?

3.2 Euklidischer Algorithmus

3.2.1. Wenn man die Primfaktorzerlegungen zweier natürlicher Zahlen kennt, liefert Satz 3.1.31 sofort den ggT und den kgV (bzw. zumindest deren Primfaktorzerlegungen).

Kennt man diese Primfaktorzerlegungen nicht, ist der im Folgenden erklärte **euklidische Algorithmus** das Standardverfahren zur Ermittlung des ggT. Das kgV kann dann mit Hilfe der Formel $\mathrm{kgV}(a, b) = \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ bestimmt werden (Folgerung 3.1.32).

Algorithmus 3.2.2 Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus ist das folgende Verfahren zur Bestimmung des $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b.

(1) Fall $b = 0$: Dann gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, 0) = a$. Beende den Algorithmus mit Ergebnis a.
(2) Setze $r_0 := b$.
(3) Führe nach dem folgenden Schema Divisionen mit Rest durch, bis als Rest 0 herauskommt.

$a = q_1 \cdot r_0 + r_1$ Schritt 1: Division von a durch r_0, nenne den Rest r_1. (und den Ganzzahlquotient q_1)
$r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2$ Schritt 2: Division von r_0 durch r_1, nenne den Rest r_2.
$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$ Schritt 3: Division von r_1 durch r_2, nenne den Rest r_3.
$\vdots$
$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n$ Schritt n: Division von r_{n-2} durch r_{n-1}, nenne den Rest r_n.
$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0$ Schritt $n + 1$: Division von r_{n-1} durch r_n, der Rest ist Null; deswegen Ende.

Hierbei ist n so definiert, dass $n + 1$ die Nummer des Schrittes ist, bei dem zum ersten Mal der Rest Null herauskommt.

(4) Gib r_n als Ergebnis des Algorithmus zurück.

Beispiel 3.2.3. Bestimme den ggT von 2835 und 1344 mit dem euklidischen Algorithmus. ✎

Beweis. **Der Algorithmus endet (= teriminiert):** Bei jeder Division mit Rest ist der Rest echt kleiner als der Divisor; somit gelten

$$b = r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

Dies ist eine echt absteigende Folge natürlicher Zahlen, die nach endlich vielen Schritten bei 0 ankommen muss.
Der Algorithmus liefert das korrekte Ergebnis: Im Schritt 1 gilt (wegen $r_0 = b$)

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

Dann gelten:

- Jeder Teiler von b und r_1 ist auch Teiler von a (denn a ist eine Summe von Vielfachen von b und r_1).
- Jeder Teiler von a und b ist auch Teiler von r_1, denn $r_1 = a - q_1 b$.

Also haben die beiden Zahlen a und b dieselben Teiler wie die beiden Zahlen b und r_1. Insbesondere folgt

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r_1) = \text{ggT}(r_0, r_1)$$

In derselben Weise folgert man aus der Gleichung $r_{i-2} = q_i \cdot r_{i-1} + r_i$ im Schritt i, dass

$$\text{ggT}(r_{i-2}, r_{i-1}) = \text{ggT}(r_{i-1}, r_i)$$

All diese Gleichungen liefern

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r_0, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \text{ggT}(r_2, r_3) = \dots = \text{ggT}(r_{n-1}, r_n) = \text{ggT}(r_n, 0) \overset{\text{offensichtlich}}{=} r_n$$

Dies zeigt, dass der Algorithmus das gewünschte Ergebnis $r_n = \text{ggT}(a, b)$ liefert. (Auch im Fall $b = 0$.)

□

Aufgabe A19 Bestimme jeweils mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT der beiden angegebenen Zahlen.

(a) 3151 und 1472 (bereits als Beispiel oben vorgerechnet) Lösung: 23
(b) 450 und 195 Lösung: 15
(c) 3224 und 288 Lösung: 8
(d) 1025 und 78 Lösung: 1
(e) 1572 und 678 Lösung: 6
(f) 144 und 452 Lösung: 4

3.3 Für Motivierte, nicht im Unterricht: Direkter Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_arithmetic#Uniqueness_without_Euclid's_lemma

Nehmen wir an, dass die Primfaktorzerlegung nicht eindeutig ist. Dann gibt es eine kleinste positive natürliche Zahl $a > 0$, die zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen hat, nämlich

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$$

wobei alle p_i und alle q_j Primzahlen sind (wir verlangen nicht, dass die Primfaktoren verschieden sind).

Sicherlich ist a keine Primzahl und es gilt $a \neq 1$. Insbesondere bestehen beide Primfaktorzerlegungen aus mindestens zwei Faktoren, d. h. $m \geq 2$ und $n \geq 2$.

Wir behaupten, dass jedes der p_i von jedem der q_j verschieden sein muss. Sonst würde etwa $p_i = q_j$ gelten und $\frac{a}{p_i} = \frac{a}{q_j}$ hätte zwei verschieden Primaktorzerlegungen und ist kleiner als a, im Widerspruch zur Wahl von a.

Wir könnne zusätzlich annehmen, dass $p_1 < q_1$ gilt (sonst vertausche man die beiden Faktorisierungen).

Definiere P und Q wie folgt.

$$a = p_1 \cdot \underbrace{p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m}_{P:=} = q_1 \cdot \underbrace{q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n}_{Q:=}$$

Wegen $a = p_1 P = q_1 Q$ und $p_1 < q_1$ muss $P > Q$ gelten.

Wir können die Zahl $a - p_1 Q$ auf zwei Arten als Produkt schreiben:

$$\begin{aligned} a - p_1 Q &= p_1 P - p_1 Q = p_1(P - Q) \\ = a - p_1 Q &= q_1 Q - p_1 Q = (q_1 - p_1)Q \end{aligned}$$

also

$$p_1(P - Q) = (q_1 - p_1)Q$$

Beachte, dass $(q_1 - p_1)Q = a - p_1 Q$ echt kleiner als a ist und dasselbe auch für die beiden Faktoren $q_1 - p_1$ und Q gilt, und auch für p_1 und $P - Q$. Nach Wahl von a haben diese fünf (positiven natürlichen) Zahlen eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Also kommt die Primzahl p_1 als Primfaktor in der Primfaktorzerlegung von $q_1 - p_1$ oder von Q vor.

Wir zeigen, dass beides zu Widersprüchen führt.

- Wenn p_1 ein Primfaktor von $Q = q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$ ist, so muss $p_1 = q_j$ gelten für ein j; wir haben aber bereits oben gesehen, dass dies nicht möglich ist. Widerspruch.
- Wenn p_1 ein Primfaktor von $q_1 - p_1$ ist, so teilt p_1 auch $q_1 = (q_1 - p_1) + p_1$, was auch nicht sein kann, denn $p_1 \neq q_1$ (siehe oben). Widerspruch.

Unsere Annahme vom Anfang des Beweises führt also zu einem Widerspruch, kann also nicht wahr sein. Somit ist die Primfaktorzerlegung eindeutig. □

3.4 Für Motivierte, nicht im Unterricht: Beweis der Eindeutigkeit der PFZ mit dem Lemma von Bézout (erweiterter euklidischer Algorithmus) und dem Lemma von Euklid

3.4.1. In diesem Abschnitt erklären wir zwei wichtige Lemmata und folgern daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Im Sinne eines eleganten Aufbaus der allgemeinen Theorie ist dieser Beweis dem obigen «quick and dirty»-Beweis vorzuziehen.

Lemma 3.4.2 von Bézout; Folgerung aus dem euklidischen Algorithmus 3.2.2, erweiterter euklidischer Algorithmus

Der $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a, b kann stets in der Form

$$\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$$

dargestellt werden für geeignete ganze Zahlen x, $y \in \mathbb{Z}$.
Man sagt, dass der $\mathrm{ggT}(a, b)$ als **$\mathbb{Z}$-Linearkombination von a und b** dargestellt wird.
Das im Beweis erklärte konstruktive Verfahren hierfür heisst **erweiterter euklidischer Algorithmus**.

Beweis. Man führe den euklidischen Algorithmus aus und löse alle Gleichungen (bis auf die letzte) nach r_i auf. Dann ersetzte man in der letzten so erhaltenen Gleichung $\operatorname{ggT}(a, b) = r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}$ sukzessive r_{n-2}, r_{n-1}, $\dots$, r_2, r_1 mit Hilfe der anderen Gleichungen, bis der $\operatorname{ggT}(a, b)$ in der gewünschten Form dargestellt ist. (Das hier bewusst sehr kurz erklärte Verfahren wird hoffentlich durch das folgende Beispiel verständlich.) □

Beispiel 3.4.3. Bestimme den ggT von 4644 und 456 und stelle ihn als $\mathbb{Z}$-Linearkombination dieser beiden Zahlen dar.

$$\begin{aligned} 4644 &= 10 \cdot 456 + 84 & &\Longrightarrow & 84 &= 4644 - 10 \cdot 456 \\ 456 &= 5 \cdot 84 + 36 & &\Longrightarrow & 36 &= 456 - 5 \cdot 84 \\ 84 &= 2 \cdot 36 + 12 & &\Longrightarrow & 12 &= 84 - 2 \cdot 36 \\ 36 &= 3 \cdot 12 + 0 \end{aligned}$$

Sukzessives Ersetzen «von unten»:

$$\begin{aligned} 12 &= 84 - 2 \cdot 36 & &\text{ersetze } 36 \\ &= 84 - 2 \cdot (456 - 5 \cdot 84) & &\text{multiplizere aus und fasse zusammen} \\ &= -2 \cdot 456 + 11 \cdot 84 & &\text{ersetze } 84 \\ &= -2 \cdot 456 + 11 \cdot (4644 - 10 \cdot 456) & &\text{multipliziere aus und fasse zusammen} \\ &= -112 \cdot 456 + 11 \cdot 4644 \end{aligned}$$

Probe:

$$-112 \cdot 456 + 11 \cdot 4644 = -51072 + 51084 = 12$$

Lemma 3.4.4 von Euklid

Wenn eine Primzahl p ein Produkt ab zweier natürlicher Zahlen teilt, so teilt p die Zahl a oder die Zahl b.

Beweis. Wenn p ein Teiler von a ist, sind wir fertig. Sonst gilt $\operatorname{ggT}(p, a) = 1$ (denn p hat nur die Teiler 1 und p). Nach dem dem Lemma von Bézou 3.4.2 erhalten wir eine Darstellung

$$1 = \operatorname{ggT}(p, a) = xp + ya$$

für geeignete ganze Zahlen x und y. Wir multiplizieren diese Gleichung mit b und erhalten

$$b = xpb + yab$$

Offensichtlich ist xpb durch p teilbar. Laut Annahme ist ab und damit yab durch p teilbar. Also ist auch die Summe $xpb + yab = b$ durch b teilbar. Dies war zu zeigen. □

Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung mit dem Lemma von Euklid 3.4.4. Nehmen wir an, dass die Primfaktorzerlegung nicht eindeutig ist. Dann gibt es eine kleinste positive natürliche Zahl $a > 0$, die zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen hat, nämlich

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$$

wobei alle p_i und alle q_j Primzahlen sind (wir verlangen nicht, dass die Primfaktoren verschieden sind).

Sicherlich ist a keine Primzahl und es gilt $a \neq 1$. Insbesondere bestehen beide Primfaktorzerlegungen aus mindestens zwei Faktoren, d. h. $m \geq 2$ und $n \geq 2$.

Da p_1 das Produkt $a = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$ ist, teilt p_1 nach dem Lemma von Euklid 3.4.4 mindestens einen der Faktoren q_j.[1] Da q_j eine Primzahl ist und $p_1 > 1$ gilt, folgt $q_1 = p_j$. Dann ist aber $\frac{a}{p_1} = \frac{a}{q_j}$ eine natürliche Zahl, die kleiner als a ist und zwei verschiedene Primfaktorzerlungen

$$\frac{a}{p_1} = \frac{a}{q_j} = \cancel{p_1} \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_{j-1} \cdot \cancel{q_j} \cdot q_{j+1} \cdot \dots \cdot q_n$$

hat. Dies widerspricht aber unserer Wahl von a als kleinster solcher Zahl. Also war unsere Anfangsannahme falsch. Folglich ist die Primfaktorzerlegung eindeutig. □

[1] Ausführlich geht das so: Da p_1 ein Teiler von $a = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_m)$ ist, zeigt das Lemma von 3.4.4, dass p_1 ein Teiler von q_1 oder von $q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_m = q_2 \cdot (q_3 \cdot \dots \cdot q_m)$ ist; in letzterem Fall zeigt dasselbe Lemma, dass p_1 ein Teiler von q_2 oder von $q_3 \cdot \dots \cdot q_m$ ist; usw.

3.5 Ausblick: Unbekanntes und Bekanntes zu Primzahlen

3.5.1. In der Zahlentheorie, einem Teilgebiet der Mathematik, beschäftigt man sich oft mit Primzahlen; einerseits erforscht man deren Eigenschaften, andererseits verwendet man sie zur Lösung vieler Probleme.

Wie in allen interessanten Bereichen der Mathematik gibt es auch in der Zahlentheorie viele offene Vermutungen – die bekannteste und vielleicht bedeutendste ist die Riemannsche Vermutung (dabei geht es um komplexe Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion), aber auch viele interessante Resultate.

Zwei bekannte Vermutungen über Primzahlen

3.5.2. Wir geben zwei Beispiele von Vermutungen zu Primzahlen, die sich elementar formulieren lassen. Wer eine dieser Vermutungen löst, wird berühmt (und vermutlich gibt es auch Preise und anderweitige finanzielle Belohnungen). Die allgemeine Erwartung ist, dass die Beweise dieser Vermutungen sehr schwierig sind.

Vermutung 3.5.3 Goldbachsche Vermutung (1742 formuliert); siehe auch Wikipedia: Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl, die echt grösser als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.

Beispiele 3.5.4. $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7 = 5+5$.

3.5.5. Wer mag, kann die Goldbachsche Vermutung etwa für alle geraden Zahlen bis 100 von Hand prüfen. Schneller geht dies natürlich mit Hilfe eines Computerprogramms. (Wer programmieren kann oder dies lernen möchte: Schreibe ein entsprechendes Programm. Hinweis: Nutze das Sieb des Eratosthenes 3.1.16.)

Laut Wikipedia ist die Gültigkeit der Vermutung für alle geraden Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$ per Computer gezeigt. Dies ist zwar ein starkes Argument für die Vermutung, aber kein allgemeiner Beweis.

3.5.6. Ein Grund dafür, dass die Goldbachsche Vermutung offen ist, mag darin liegen, dass Primzahlen durch multiplikative Eigenschaften (Anzahl der Teiler) definiert sind, die Aussage der Goldbachschen Vermutung aber additiver Natur ist (Summe zweier Primzahlen). Es scheint schwierig zu sein, von der «multiplikativen» Zahlentheorie in die «additive» zu wechseln.

Definition 3.5.7

Ein **Primzahlzwilling** ist ein Paar zweier Primzahlen, die sich um 2 unterscheiden, also ein Paar (p,q) zweier Primzahlen mit $q = p+2$.

Beispiele 3.5.8. Primzahlzwillinge sind $(3,5)$ und $(5,7)$ und $(11,13)$ und $(17,19)$.

Vermutung 3.5.9 Primzahlzwillingsvermutung (twin prime conjecture); siehe auch Wikipedia: Primzahlzwilling

Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

3.5.10. Laut Wikipedia (englischer Eintrag Twin prime, abgerufen am 29.10.2025) gilt: «As of January 2025, the current largest twin prime pair known is $2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1$, with $388,342$ decimal digits. It was discovered in September 2016. There are 808,675,888,577,436 twin prime pairs below 10^{18}.»

Zwei interessante Sätze über Primzahlen

3.5.11. Fermat's Zwei-Quadrate-Satz ist liefert eine interessante «additive» Aussage über Primzahlen.

Satz 3.5.12 Zwei-Quadrate-Satz, Fermat's theorem on sums of two squares; vgl. Wikipedia: Zwei-Quadrate-Satz

Für jede ungerade Primzahl p (also jede Primzahl ausser der 2) gilt: Genau dann kann p als Summe zweier Quadrate geschrieben werden, wenn bei der Division von p durch 4 der Rest 1 herauskommt. In Formeln:

$$p = x^2 + y^2 \quad \text{für geeignete } x, y \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{p \equiv 1 \mod 4}_{\text{Schreibweise bedeutet: } p \text{ und } 1 \text{ haben denselben Rest bei Division durch } 4}$$

Beispiele 3.5.13. Welche der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ haben bei der Division durch 4 den Rest 1 (und sind dann automatisch ungerade)?

Nur 5, 13, 17. Diese lassen sich, wie im Zwei-Quadrate-Satz behauptet, als Summe zweier Quadrate darstellen:

$$5 = 1^2 + 2^2 \qquad 13 = 2^2 + 3^2 \qquad 17 = 1^2 + 4^2$$

Die anderen **ungeraden** der obigen Primzahlen lassen sich nach dem Zwei-Quadrate-Satz nicht so darstellen. Der Leser überzeuge sich von dieser Tatsache.

Die Primzahl ist in der Formulierung des Zwei-Quadratesatzes ausgenommen, denn es gilt $2 = 1^2 + 1^2$ aber $2 \not\equiv 1 \mod 4$.

Auch hier kann, wer mag, den Zwei-Quadrate-Satz für einige ungerade Primzahlen prüfen.

3.5.14. Der Primzahlsatz behandelt die Frage nach der Verteilung der Primzahlen und beantwortet (asymptotisch) die Frage, wie viele Primzahlen es unterhalb einer gegebenen Zahl x gibt.

Satz 3.5.15 Primzahlsatz, prime number theorem (bewiesen 1896); siehe auch Wikipedia: Primzahlsatz

Für jede Zahl x definiere $\pi(x)$ als die Anzahl aller Primzahlen bis x, in Formeln

$$\pi(x) := |\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist prim und } p \leq x\}|$$

Dann sind $\pi(x)$ und $\frac{x}{\ln(x)}$ asymptotisch äquivalent – man schreibt dies als

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

Dies bedeutet, dass der Quotient $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = \frac{\pi(x) \cdot \ln(x)}{x}$ sich beliebig nahe der Zahl 1 nähert, wenn man x genügend gross wählt.

3.5.16. Die Funktion «natürlicher Logarithmus» ln wurde noch nicht erklärt. Sie ist (mit Hilfe der Eulerschen Zahl $e \approx 2.71828$) definiert als

$$\begin{aligned} \ln(x) &= (\text{die Zahl } y \text{ mit } e^y = x) \\ &\approx (\text{die Zahl } y \text{ mit } 2.71828^y = x) \end{aligned}$$

Mit Basiswechsel (einem Logarithmengesetz) und der grobe Interpretation des Zehnerlogarithmus $\log_{10}$ als Anzahl der Stellen im Zehnersystem gilt

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} \\ &\approx 2.3 \cdot (\text{Anzahl der Stellen von } x \text{ im Dezimalsystem}) \end{aligned}$$

Beispiele für diese Approximation:

$$\begin{aligned} \ln(1'000'000) &\approx 13.82 & 2.3 \cdot (\text{Stellenanzahl von } 1'000'000) &= 2.3 \cdot 7 \approx 16.1 \\ \ln(10^{20}) &\approx 46.05 & 2.3 \cdot (\text{Stellenanzahl von } 10^{20}) &= 2.3 \cdot 21 \approx 48.3 \end{aligned}$$

Der Primzahlsatz sagt also, dass es bis $x = 10^{20}$ etwa $\frac{x}{\ln(x)} \approx \frac{10^{20}}{46.05} \approx 2.17 \cdot 10^{18}$ Primzahlen gibt. Die genaue Zahl ist $\pi(x) = \pi(10^{20}) = 2'220'819'602'560'918'840$ laut https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function#Table_of_%CF%80(x),_%E2%81%A0x/log_x_%E2%81%A0,_and_li(x)

3.5.17.

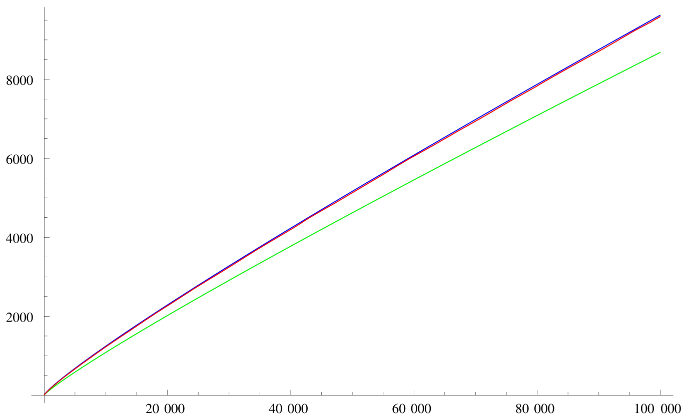
Die Graphik rechts zeigt in rot die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ und in grün die Approximation $\frac{x}{\ln(x)}$.

Beispiel: Für $x = 100'000 = 10^5$ gelten $\pi(x) = 9'592$ und $\frac{x}{\ln(x)} \approx 8'686$.

Wer programmieren kann oder lernen möchte: Erstelle mit Python die Graphik rechts.

(Die bessere blaue Approximation ist der sogenannte Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.)

Grahikquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:PrimeNumberTheorem.svg



4 Reelle Zahlen, rationale Zahlen, ganze Zahlen, natürliche Zahlen

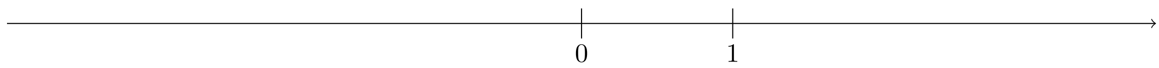
4.0.1. Wir definieren die reellen Zahlen geometrisch als Punkte auf dem Zahlenstrahl und erklären die Definition der Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$, $\frac{?}{?}$ geometrisch. Parallel werden die Rechengesetze bewiesen. Im Anschluss werden viele weitere Grundlagen erklärt (Beträge, Wurzeln, Vergleichszeichen, Dezimaldarstellung, rationale Zahlen, irrationale Zahlen (etwa $\sqrt{2}$), Überabzählbarkeit, ganze Zahlen, natürliche Zahlen).

Wir wählen bewusst einen Top-Down-Ansatz, beginnen also mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und betrachten darin die Teilmengen $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ rationaler, ganzer und natürlicher Zahlen. Bei einem systematischen Aufbau der Theorie geht man meist den anderen Bottom-Up-Weg von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, jedoch birgt dieser Aufbau meiner Erfahrung nach im Schulkontext einige Probleme (sowohl formaler als auch didaktischer Art).

4.1 Definition der Menge der reellen Zahlen

Definition 4.1.1 reeller Zahlenstrahl, Nullpunkt = Ursprung, Einheitslänge

Der **reelle Zahlenstrahl** oder kurz **Zahlenstrahl** ist definiert als eine Gerade, auf dem zwei verschiedene Punkte als 0 und 1 markiert sind. Indem wir die Richtung von 0 nach 1 als **positive Richtung** definieren (und dies mit einem Pfeil andeuten), wird unsere Gerade zu einem Strahl.



Man nennt 0 auch **Nullpunkt** oder **Ursprung** des Zahlenstrahls. Die Länge der Strecke von 0 bis 1 wird als **Einheitslänge** bezeichnet.

4.1.2. Es ist üblich, den Zahlenstrahl horizontal und nach rechts gerichtet zu zeichnen. Wir folgen dieser Konvention. Die positive Richtung ist also im Folgenden stets die Richtung nach rechts.

Es gibt unendlich viele Wahlen von Geraden samt Punkten $0 \neq 1$ darauf, und jede ist ein möglicher reeller Zahlenstrahl. Jeden dieser Zahlenstrahlen kann man aber in naheliegender Weise mit jedem anderen identifizieren (kompatibel mit der Darstellung reeller Zahlen als Dezimalzahlen, die wir weiter unten erklären). Wir sprechend deshalb von **dem** reellen Zahlenstrahl statt von «einem» reellen Zahlenstrahl.

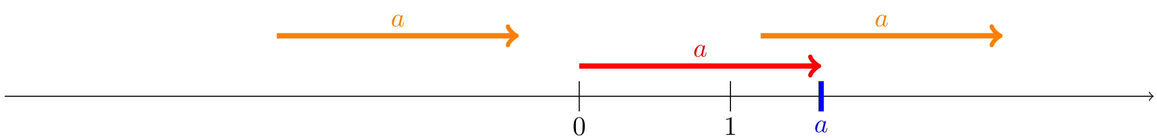
Definition 4.1.3 reelle Zahl, Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Eine **reelle Zahl** ist definiert als ein Punkt auf dem Zahlenstrahl.
Die reellen Zahlen «rechts» der Null nennen wir **positiv**, die Zahlen «links» der Null **negativ**. (Die Null ist weder positiv noch negativ.)
Die **Menge aller reellen Zahlen** wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ notiert, in Formeln

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{a \mid a \text{ ist reelle Zahl}\} \\ &= \{a \mid a \text{ ist Punkt auf dem Zahlenstrahl}\} \\ &= \text{reeller Zahlenstrahl}\end{aligned}$$

4.1.4. Wie wir im Folgenden sehen werden, ist es sinnvoll, sich eine reelle Zahl a auf drei verschiedene, aber gleichbedeutende Weisen vorzustellen:

- als Punkt a auf dem Zahlenstrahl (wie in der Definition);
- als Pfeil a vom Punkt 0 zum Punkt a.
- als beliebigen Pfeil a auf dem Zahlenstrahl mit derselben Länge und Richtung wie der Pfeil a.



Die reelle Zahl Null als Pfeil ist ein Pfeil der Länge Null (ohne sinnvoll definierte Richtung).

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

4.2 Definition der Grundrechenarten und deren Eigenschaften

4.2.1. Die Menge der reellen Zahlen wird vor allem dadurch interessant, dass wir mit reellen Zahlen rechnen können. Wie dies geht, wird nun erklärt.

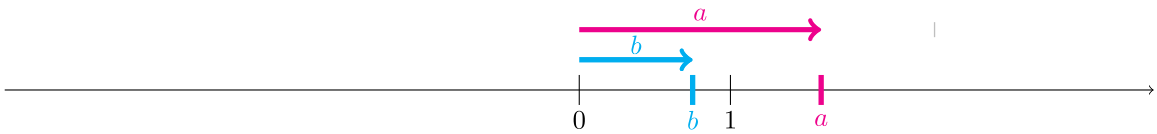
Definition 4.2.2 Addition zweier reeller Zahlen, Summe, Summand

Seien a und b reelle Zahlen, die wir uns als Pfeile auf dem Zahlenstrahl vorstellen. Definiere

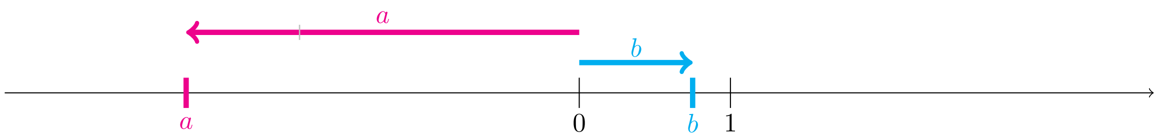
$$a + b := \text{der Pfeil, der aus } a \text{ per Anhängen von } b \text{ entsteht}$$

Genauer: Verschiebe b so, dass b am Endpunkt von a startet; dann ist $a + b$ definiert als der Pfeil vom Startpunkt von a zum Endpunkt von b.
Die Rechenoperation $+$ heisst **Addition**, a und b heissen **Summanden** (= «die zu Summierenden») und $a + b$ heisst **Summe**.

Beispiel 4.2.3.



Beispiel 4.2.4.



Satz 4.2.5 Rechengesetze der Addition

Für alle reellen Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ gelten

$a + b = b + a$	**Kommutativgesetz der Addition**
$a + (b + c) = (a + b) + c$	**Assoziativgesetz der Addition**
$0 + a = a = a + 0$	0 ist **neutrales Element** bezüglich der Addition

lateinisch: *commutare* = vertauschen; *associare* = verbinden; *neuter* = gleichgültig

Beweis. Kommutativgesetz: ✎

Assoziativgesetz: ✎

0 neutrales Element der Addition: ✎

□

4.2.6. Wegen des Assoziativgesetzes kann man beim Addieren Klammern weglassen und $a + b + c$ schreiben statt $(a + b) + c$ oder $a + (b + c)$. Analoges gilt für Summen mit mehr als drei Summanden.

Definition 4.2.7 Gegenzahl, Negatives einer Zahl

Ist a eine beliebige reelle Zahl (die wir uns als Punkt vorstellen), so definieren wir

$$-a := \text{Spiegelung von } a \text{ am Nullpunkt}$$

Wir nennen $-a$ das **Negative** oder die **Gegenzahl** von a.
Stellt man sich a als Pfeil vor, so hat der Pfeil $-a$ dieselbe Länge, aber die entgegengesetzte Richtung.

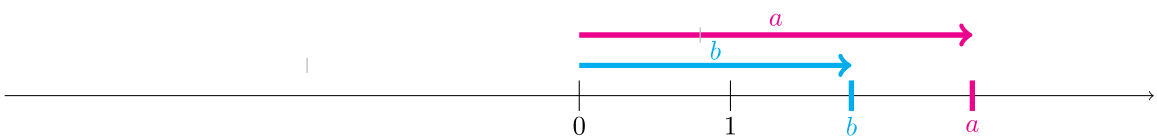
Definition 4.2.8 Subtraktion zweier reeller Zahlen, Differenz, Minuend, Subtrahend

Für beliebige reelle Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a - b := a + (-b).$$

Die Rechenoperation heisst **Subtraktion**, a heisst **Minuend** (= «der zu Vermindernde»), b heisst **Subtrahend** (= «der Abzuziehende»), das Ergebnis $a - b$ der Subtraktion heisst **Differenz**.

Beispiel 4.2.9. Wir illustrieren sowohl die Gegenzahl $-b$ als auch die Differenz $a - b$.



Merke 4.2.10 Differenz als Pfeil zwischen Pfeilspitzen, als Lösung einer Gleichung

Wenn a und b beliebige reelle Zahlen sind, so gilt:

die Differenz $a - b$ ✎

Die Gleichung $b + x = a$ ist gleichbedeutend (subtrahiere b) zu $x = a - b$ (denn $b + x - b = b + x + (-b) = b + (-b) + x = 0 + x = x$ wegen (Assoziativität und) Kommutativität und $b + (-b) = 0$ (siehe Proposition 4.2.11) und Neutralität der 0). Also hat die Gleichung $b + x = a$ genau diese $x = a - b$.

Proposition 4.2.11 Gegenzahl einer Gegenzahl, einer Summe, einer Differenz

Für alle reellen Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Identitäten (= sehr allgemein gültige Gleichheiten)

$-(-a) = a$	Gegenzahl der Gegenzahl = Ausgangszahl
$a + (-a) = 0$	Zahl plus Gegenzahl = Null = neutrales Element der Addition
$-(a + b) = (-a) + (-b)$	Gegenzahl einer Summe = Summe der Gegenzahlen
$-(a - b) = -a + b$	Gegenzahl einer Differenz

Bemerkungen: Die zweite Identität kann man auch als $a - a = 0$ schreiben. Statt $(-a) + (-b) = (-a) - b$ schreibt man abkürzend $-a - b$. Damit wird die die dritte Identität zu

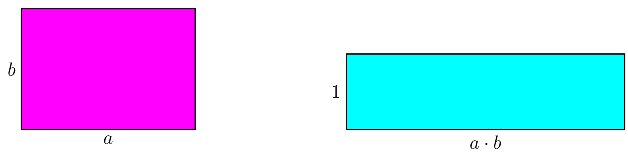
$$-(a + b) = -a - b$$

Aufgabe A20 Überzeuge dich graphisch am Zahlenstrahl, dass die vier Identitäten in Proposition 4.2.11 stets gelten.

- Nimm zuerst an, dass sowohl a als auch b positiv sind (also als Pfeile nach rechts zeigen).
- Betrachte dann auch einmal den Fall, dass a oder b negativ ist/sind (also genau eine der beiden Zahlen oder beide).

4.2.12. Wer genau aufpasst, mag bemerkt haben, dass wir bisher auf die Zahl 1 auf dem Zahlenstrahl hätten verzichten können (wir haben sie nur zur Festlegung der positiven Richtung genutzt). Zur Definition der Multiplikation benötigen wir sie aber.

Definition 4.2.13 Multiplikation zweier reeller Zahlen, Produkt, Faktor



Seien a und b reelle Zahlen. Definiere

(Mit $a \times b$-Rechteck meine ich das Rechteck, dessen Seiten so lang sind wie die Pfeile a und b.)

$$a \cdot b := \pm \left(\text{Fläche des } a \times b\text{-Rechtecks, gemessen in } \underbrace{\text{Einheitsquadraten}}_{=\text{ Quadraten der Seitenlänge } 1} \right)$$
$$= \pm \begin{pmatrix} \text{diejenige Länge, so dass das Rechteck der Höhe 1 über dieser Länge} \\ \text{dieselbe Fläche hat wie das } a \times b\text{-Rechteck} \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen ist hierbei

- $+$, falls a und b dasselbe Vorzeichen haben (d. h. beide positiv oder beide negativ);
- $-$, falls a und b verschiedene Vorzeichen haben;
- egal, falls $a = 0$ oder $b = 0$ (dann gilt $a \cdot b = 0 = +0 = -0$).

Mit anderen Worten gelten

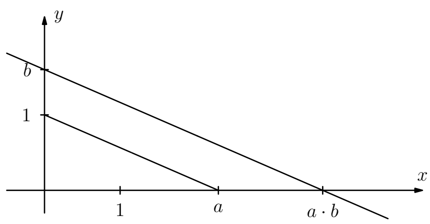
- plus mal plus = plus = minus mal minus,
- plus mal minus = minus = minus mal plus.

Die Rechenoperation $\cdot$ heisst **Multiplikation**, a und b heissen **Faktoren** und $a \cdot b$ heisst **Produkt**.

Algorithmus 4.2.14 zur Konstruktion von $a \cdot b$ aus a und b mit Hilfe des Strahlensatzes

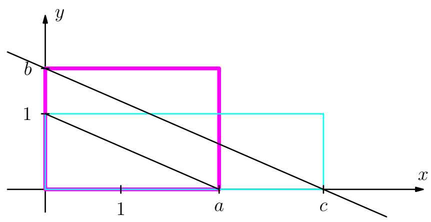
Gegeben reelle Zahlen a und b kann man $a \cdot b$ wie folgt konstruieren.

- Ergänze den reellen Zahlenstrahl (= die x-Achse) durch eine y-Achse zu einem zweidimensionalen Koordinatensystem.
- Markiere a auf der x-Achse und b auf der y-Achse.
- Verbinde «1 auf der y-Achse» mit a und zeichne parallel dazu eine Gerade durch b.
- Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse ist dann die gesuchte reelle Zahl $a \cdot b$.



Beweis. Wenn wir die Höhe des pinken Rechtecks von b auf 1 verringern (also beispielsweise halbieren), müssen wir seine Breite «entsprechend» vergrössern (also bspw. verdoppeln), um ein gleich grosses Rechteck zu erhalten.

Nun besagt der Strahlensatz, dass das Verhältnis von b zu 1 genauso gross ist wie das Verhältnis von c zu a. Dies bedeutet, dass eine Verringerung der Höhe von b auf 1 bei gleichzeitiger Vergrösserung der Breite von a auf c ein Rechteck derselben Fläche liefert. Dass die Vorzeichen stets korrekt sind, überlege sich der Leser selbst. Also gilt $c = a \cdot b$.



Formal besagt der Strahlensatz $\frac{b}{1} = \frac{c}{a}$, und Multiplikation mit a liefert wie gewünscht $a \cdot b = c$. Ich habe den Beweis nicht so aufgeschrieben, denn Division ist noch nicht erklärt.

Aufgabe A21

(a) Zeichne einen reellen Zahlenstrahl, wähle darauf zwei positive Zahlen a und b und konstruiere geometrisch ihr Produkt $a \cdot b$ mit Hilfe des Algorithmus 4.2.14.

(b) Per Abmessen mit einem Lineal: Schreibe deine Zahlen a und b und das konstruierte Produkt $a \cdot b$ als Kommazahlen (hoffentlich ist klar, wie das geht; beachte die Einheitslänge).
Teste mit dem Taschenrechner, ob das Taschenrechnerprodukt von a und b mit dem von dir konstruierten Produkt übereinstimmt.

(c) Wiederhole die obigen Schritte, wähle nun aber eine der beiden Zahlen a, b positiv und die andere negativ.

(d) Überlege dir geometrisch, dass Multiplikation mit -1 dasselbe ist wie das Bilden der Gegenzahl. Als Gleichung geschrieben bedeutet dies $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$.

Satz 4.2.15 Rechengesetze der Multiplikation

Für alle reellen Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ gelten

$a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz der Multiplikation**
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	**Assoziativgesetz der Multiplikation**
$1 \cdot a = a = a \cdot 1$	Eins ist **neutrales Element** bezüglich der Multiplikation

Beweis. Kommutativgesetz: ✎

Assoziativgesetz: ✎

Eins neutrales Element der Multiplikation: ✎ □

4.2.16 (Gegenzahl und Multiplikation)**.** Für alle reellen Zahlen a, b gilt

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$$

Dies folgt beispielsweise aus den Rechengesetzen der Multiplikation und der Erkenntnis $-a = (-1) \cdot a$ (siehe A21 wie folgt: $-(a \cdot b) = (-1) \cdot (a \cdot b) = ((-1) \cdot a) \cdot b = (-a) \cdot b$ und $-(a \cdot b) = (-1) \cdot (a \cdot b) = ((-1) \cdot a) \cdot b = (a \cdot (-1)) \cdot b = a \cdot ((-1) \cdot b) = a \cdot (-b)$.

4.2.17. Wegen des Assoziativgesetzes können wir beim Multiplizieren mehrerer Faktoren die Klammern weglassen (vgl. Aufgabe A22, wo gezeigt wird, dass bei Produkten mit vier Faktoren alle Klammerungen dasselbe Ergebnis liefern).

Aufgabe A22 Seien v, w, x, y vier natürliche Zahlen. Dann gibt es neben

$$v \cdot (w \cdot (x \cdot y)) \qquad \text{und} \qquad (v \cdot w) \cdot (x \cdot y)$$

noch drei weitere Möglichkeiten, im Ausdruck $v \cdot w \cdot x \cdot y$ sinnvoll 2 Klammerpaare zu ergänzen. Finden Sie diese drei Möglichkeiten und zeigen Sie mit Hilfe des Assoziativgesetzes der Multiplikation, dass all diese fünf Ausdrücke gleich sind.

Beispiel: Wir erklären, wie man sieht, dass die beiden oben angegebenen Klammerausdrücke gleich sind. Ersetze im Assoziativgesetz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ die Variablen wie folgt: $a = v$ und $b = w$ und $c = x \cdot y$. Dies liefert wie gewünscht $v \cdot (w \cdot (x \cdot y)) = (v \cdot w) \cdot (x \cdot y)$.

Aufgabe A23 Betrachten Sie das Spiel «Schere, Stein, Papier» oder auf Englisch «rock, paper, scissors». Sei $M = \{r, p, s\}$ die Menge der Symbole r = rock, p = paper und s = scissors.

Wir definieren die Verknüpfung $\heartsuit$ auf der Menge $M = \{r, p, s\}$ so, dass das Resultat das siegreiche Symbol ist, z.B. gilt $r \heartsuit p = p$, weil paper rock schlägt. Weiter definieren wir $x \heartsuit x = x$ für jedes $x \in M$ (Unentschieden).

Ist die Verknüpfung $\heartsuit$ kommutativ? Ist sie assoziativ?

Merke 4.2.18 Potenz-vor-Punkt-vor-Strich-Regel

Wir folgen der **Punkt-vor-Strich-Regel**: Sie bedeutet, dass zuerst Multiplikationen («Malpunkt») und noch nicht erklärte Divisionen ausgeführt werden und danach Additionen und Subtraktionen (die Zeichen $+$ und $-$ bestehen aus Strichen).
Ausserdem verwenden wir die **Potenz-vor-Punkt-Regel**: Zuerst werden Potenzen ausgerechnet, dann Produkte oder noch nicht erklärt Quotienten (= Ergebnisse von Divisionen).

Beispiel 4.2.19 (Potenz-vor-Punkt-vor-Strich)**.**

$a+bc$	bedeutet	$a+(bc)$	und nicht	$(a+b)c$
$a\cdot b^n$	bedeutet	$a\cdot(b^n)$	und nicht	$(a\cdot b)^n$

Merke 4.2.20 Reihenfolge bei gleichberechtigten Rechenzeichen, iterierte Potenzen

Ausdrücke mit «gleichberechtigten» Rechenzeichen werden von links nach rechts her aufgelöst. Dabei sind per Vereinbarung:

- Additionszeichen (Plus $+$) und Subtraktionszeichen (Minus $-$) gleichberechtigt (Strichrechenzeichen);
- Multiplikationzeichen (Mal $\cdot$) und Divisionszeichen ($\frac{?}{?}$) gleichberechtigt (Punktrechenzeichen).

Bei iterierten Potenzen wird zuerst der Exponent berechnet.

Beispiel 4.2.21.

$a-b+c$	bedeutet	$(a-b)+c$	und nicht	$a-(b+c)$
a^{m^n}	bedeutet	$a^{(m^n)}$	und nicht	$(a^m)^n \quad \left[=a^{mn}\right]$

Merke 4.2.22 abkürzende Schreibweisen

Wir lassen meistens das Multiplikationszeichen (den «Malpunkt» $\cdot$) weg, schreiben also ab statt $a\cdot b$.

Beispiel 4.2.23. Das Distributivgesetz schreiben wir im nachfolgenden Satz 4.2.25 als

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{was ausführlich bedeutet} \qquad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Auch die Punkt-vor-Strich-Regel wurde rechts angewendet – sonst müssten wir $(ab)+(ac)$ schreiben.

4.2.24. Das Distributivgesetz beschreibt die Kompatibilität von Multiplikation und Addition. In ihm kommen im Gegensatz zu den bisher diskutierten Rechengesetzen zwei verschiedene Rechenoperationen vor (Multiplikation und Addition).

Satz 4.2.25 Distributivgesetz

Für alle reellen Zahlen $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ gelten

$a(b+c)=ab+ac$	**Distributivgesetz** (Ausmultiplizieren bzw. Ausklammern)
$(b+c)a=ba+ca$	**Distributivgesetz** (Ausmultiplizieren bzw. Ausklammern)

lateinisch: *distribuere* = verteilen; die Multiplikation mit a wird auf die beiden Summanden verteilt.

Beweis. ✎

Das «zweite» Distributivgesetz zeigt man genauso oder folgert es aus dem «ersten» Distributivgesetz durch dreimaliges Anwenden der Kommutativität der Multiplikation: $(b+c)a=a(b+c)=ab+ac=ba+ca$. □

4.2.26. Im Distributivgesetz (und jedem anderen Rechengesetz) darf man die vorkommenden Variablen durch beliebige Terme (= Ausdrücke) ersetzen, die reelle Zahlen liefern. Zum Beispiel gilt für alle reellen Zahlen x, y, u, v

$(x+y)(u+v) =$ ✎ nach dem «ersten» Distributivgesetz» mit $a = x+y$, $b = u$, $c = v$

$=$ ✎ nach dem zweimal verwendeten «zweiten» Distributivgesetz»

4.3 Einschub (vor Definition der Division): Betrag, Abstand und einige Aufgaben

Definition 4.3.1 natürliche und ganze Zahlen, Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Alle Zahlen, die man von 0 aus ausgehend durch wiederholte **Addition von** 1 erhält (also 0, $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$, etc.), werden als **natürliche** Zahlen bezeichnet. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird als $\mathbb{N}$ notiert.
Alle Zahlen, die man von 0 aus ausgehend durch wiederholte **Addition oder Subtraktion von** 1 erhält (also 0, $0+1=1$, $0-1=-1$, $1+1=2$, $-1-1=-2$, etc.), werden als **ganze** Zahlen bezeichnet. Die Menge aller ganzen Zahlen wird als $\mathbb{Z}$ notiert.
Man könnte $\mathbb{Z}$ auch definieren als «$\mathbb{N}$ und alle Gegenzahlen», also als $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definition 4.3.2 Betrag = Länge

Der **Betrag** oder die **Länge** $|a|$ einer reellen Zahl a ist definiert als

$$\begin{aligned} |a| &:= (\text{nach rechts zeigender Pfeil, der genauso lang wie der Pfeil } a \text{ ist}) \\ &= \begin{cases} a & \text{falls } a \text{ positiv oder Null;} \\ -a & \text{falls } a \text{ negativ.} \end{cases} \end{aligned}$$

Informelle Definition: $\boxed{\text{«Lass das Minuszeichen weg!»}}$ Dabei ist mit dem «Minuszeichen» das eventuell vorhandene negative Vorzeichen gemeint.

Beispiele 4.3.3.

$$\left|\xrightarrow{\;3\;}\right| = \xrightarrow{\;3\;} \qquad \left|\xleftarrow{\;-3\;}\right| = \xrightarrow{\;3\;}$$

$$|3| = 3 = |-3| \qquad |-7| = 7 = |7| \qquad |0| = 0 = |-0|$$

$$|a| = |-a| \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

Definition 4.3.4 Abstand zweier reeller Zahlen = Betrag der Differenz

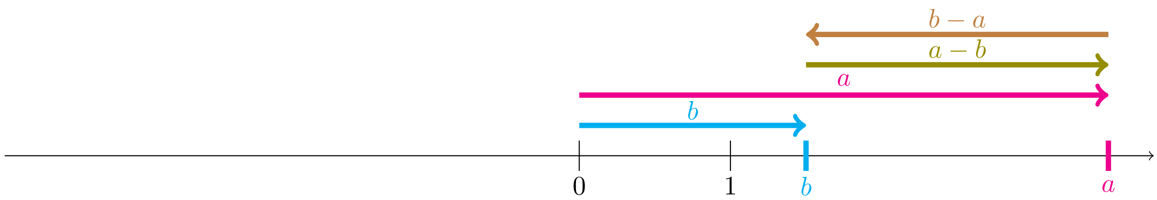
Seien a und b reelle Zahlen. Wir erinnern daran, dass $a-b$ der Pfeil von b nach a ist.
Wir nennen die Länge dieses Pfeils den **Abstand** zwischen a und b und schreiben ihn wie folgt.

$$\text{Abstand}(a,b) := (\text{Abstand zwischen } a \text{ und } b) = |a-b|$$

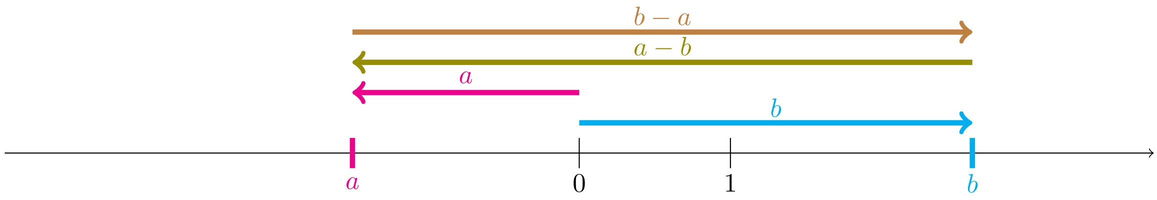
4.3.5. Der Pfeil $a-b$ von b nach a ist genauso lang wie der Pfeil $b-a$ von a nach b. Also gilt (wie man dies von einem sinnvoll definierten «Abstand» erwarten sollte)

$$\text{Abstand}(a,b) = |a-b| = |b-a| = \text{Abstand}(b,a)$$

Die folgende Zeichnung illustriert dies für zwei positive reelle Zahlen.
Da hier a rechts von b liegt, weist $a-b$ nach rechts und es gilt $\text{Abstand}(a,b) = |a-b| = a-b$.



Die folgende Zeichnung illustriert dies für negatives a und positives b.
Nun weist $a-b$ nach links und es gilt $\text{Abstand}(a,b) = |a-b| = -(a-b) = b-a$.



Aufgabe A24 Berechnen Sie!

a) $-|-5|$
b) $|-5|^3$
c) $-(-(-(-(-3))))$
d) $-(1-(2-(4-(8-16))))$
e) $-|1-|2-|4-|8-16||||$
f) $|1-5|-|5-1|$
g) $(-1)^{2023}$
h) $(-1)^{2022}$
i) $(-2)^9$
j) $(-2)^{10}$
k) $(-10)^{13}$
l) $3^{|2-5|}$

Aufgabe A25 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Klammern und fassen Sie zusammen! (Die Variablen stehen für beliebige reelle Zahlen.)

a) $3(a+c+7+e)$
b) $5x-5y-(2y-5x)$
c) $5x+3y-(7x+3y-z)$
d) $-(a-b+c-3-d+e)$
e) $a-(-b+a-(7-d+e))$
f) $2a-\Big(3a+(2b-c)-4c+\big[2a-(3b-[c-2b])\big]\Big)$
g) $a(b-c+d)$
h) $(a-b)(c-d)$
i) $(a-b+3)(b-c+5)$
j) $-\big(c-(a-(b-c))\big)$
k) $-\Big(5a-b-17-\big(6c-3+2a-(-b+c-3a+15)\big)+2b\Big)$
l) $a(-a+c-(7-d+e))$
m) $a^2(-a^3+a(7+2a^2))$

Aufgabe A26 Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen bzw. die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen. Wenn die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ aus unendlich vielen Zahlen besteht, ist sie oft einfach in Intervallschreibweise angebbar (z. B. $\mathbb{L} = [-2, \infty)$).

Bemerkung: Das Kleiner-gleich-Zeichen $\leq$ ist noch nicht «offiziell» definiert. Die Schreibweise $a \leq b$ bedeutet, dass die reelle Zahl a auf dem Zahlenstrahl links von b liegt oder die beiden Zahlen gleich sind.

Bemerkung: Die Aufgaben sind teilweise nicht ganz einfach, aber man kann einige nützliche Tricks lernen!

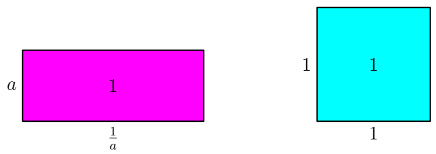
a) $x-3=5$
b) $x+3=-5$
c) $x-3=-5$
d) $x^2=9$
e) $x^2=-9$
f) $(x+100)^2=9$ (Welche Eigenschaft hat $x+100$?)
g) $x^2=-x^2$
h) $|x|=3$ (linke Seite ist Länge; zwei Lösungen!)
i) $|x|=-3$
j) $|-x|=3$
k) $-|-x|=3$
l) $x(x-3)=0$ (Wann ist ein Produkt Null?)
m) $(x+2)(x-3)=0$ (Wann ist ein Produkt Null?)
n) $|x-2|=10$ (Linke Seite ist Abstand.)
o) $x^2-10=6$
p) $x^2-10=-6$
q) $|x^2-10|=6$
r) $|10-x^2|=6$
s) $|x^2-17|=8$
t) $|x|=x$
u) $|x|=-x$
v) $|x-3|=x-3$
w) $|x-3|=|3-x|$
x) $|x|\leq 3$
y) $|x-10|\leq 3$
z) $|10-|x-1||=100$

Auch gut: $|x+2|=10$

4.4 Fortsetzung: Definition der Grundrechenarten

4.4.1. Die folgende Definition der Division verläuft ganz analog wie die obige Definition der Subtraktion, jedoch ausgehend von der Multiplikation statt der Addition. Statt zuerst eine Zahl $-a$ mit $(-a)+a=0$ und dann $a-b=a+(-b)$ zu definieren, definieren wir nun eine Zahl $\frac{1}{a}$ mit $\frac{1}{a}\cdot a=1$ und dann $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$.

Definition 4.4.2 Kehrwert = multiplikatives Inverses



Ist $a\neq 0$ eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl, so definieren wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &:= \text{(diejenige Zahl, die mit } a \text{ multipliziert 1 ergibt)}\\ \text{(etwas informell)} &= \pm\begin{pmatrix}\text{diejenige Länge, so dass das Rechteck der Höhe } a \text{ über dieser Länge}\\ \text{die Fläche 1 hat (also so gross wie das Einheitsquadrat ist)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir nennen $\frac{1}{a}$ den **Kehrwert** oder das **multiplikative Inverse** von a.

Beispiel 4.4.3. $\frac{1}{-1}=-1$, denn $\frac{1}{-1}=$ (die Zahl, die mit -1 multipliziert 1 ergibt) und $(-1)\cdot(-1)=1$.

Definition 4.4.4 Division zweier reeller Zahlen, Quotient, Dividend, Divisor

Für beliebige reelle Zahlen a, b mit $b\neq 0$ definieren wir

$$\frac{a}{b}:=a\cdot\frac{1}{b}$$

Die Rechenoperation heisst **Division**, a heisst **Dividend** (= «der zu Dividierende/Teilende»), b heisst **Divisor** (= «der Teilende»), das Ergebnis $\frac{a}{b}$ der Division heisst **Quotient**. Man nennt $\frac{a}{b}$ auch einen **Bruch** und das Divisionssymbol **Bruchstrich**. Die Zahl über dem Bruchstrich heisst **Zähler**, die Zahl unter dem Bruchstrich **Nenner**.
Sprechweisen: «(bilde den Quotienten/Bruch) a durch b», «dividiere a durch b», «teile a durch b».

Man beachte, dass a und $b\neq 0$ hier beliebige reelle Zahlen sind. Oft werden in der Schule nur Brüche der Form $\frac{z}{n}$ mit $z\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}_{>0}$ betrachtet, was diverse unangenehme Konsequenzen hat.

Proposition 4.4.5 Quotient als eindeutige Lösung einer Gleichung

Der Quotient $\frac{a}{b}$ ist

- ✎
- ✎

Beweis. Zuerst rechnen wir nach (Probe), dass $\frac{a}{b}$ eine Lösung Gleichung $bx=a$ ist: ✎

Nun zeigen wir, dass dies die einzige Lösung dieser Gleichung ist: Wenn x eine Lösung ist, so gilt $bx=a$. Multipliziert man diese Gleichung (von links) mit $\frac{1}{b}$, so erhält man die dritte der folgenden Gleichheiten.

$$x=1\cdot x=\frac{1}{b}\cdot b\cdot x=\frac{1}{b}\cdot a=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

Die anderen Gleichheiten gelten wegen der Rechengesetze. Also gilt $x=\frac{a}{b}$. Dies zeigt, dass jede Lösung unserer Gleichung mit $\frac{a}{b}$ übereinstimmt. □

Proposition 4.4.6 Bruchrechnen = Rechnen mit Quotienten

Für alle reellen Zahlen a, b, $s \neq 0$, $t \neq 0$ gelten:

$\dfrac{a}{s} = \dfrac{at}{st}$	Kürzen bzw. Erweitern (mit $t \neq 0$)
$\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} = \dfrac{at+bs}{st}$	Addition von Brüchen (Subtraktion analog mit $-$ statt $+$)
$\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{s} = \dfrac{a+b}{s}$	Addition von Brüchen mit demselben Nenner (Subtraktion analog)
$\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$	Multiplikation von Brüchen
$\dfrac{1}{\frac{a}{s}} = \dfrac{s}{a}$	Kehrwertbildung durch Vertauschen von Zähler und Nenner ($a \neq 0$
$\dfrac{\frac{a}{s}}{\frac{b}{t}} = \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{t}{b} = \dfrac{at}{bs}$	Division von Brüchen ($b \neq 0$): Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors
$\dfrac{a}{1} = a$	Division durch 1

Der folgende Beweis zeigt, dass das Wissen, dass eine Gleichung genau eine Lösung hat, sehr nützlich sein kann. Zugegebenermasse ist es (leider?) eher unüblich, ihn in der Schule zu erklären – vermutlich bestehen Zweifel an der abstrakten Denkfähigkeit der Eleven.

Beweis. Alle Aussagen folgen aus der Charakterisierung des Quotienten $\frac{p}{q}$ als eindeutige Lösung der Gleichung $qx = p$ (siehe Proposition 4.4.5).

Addition: Zu zeigen ist die Gleichheit ✎

Die rechte Seite $\frac{at+bs}{st}$ der behaupteten Gleichheit ist die eindeutige Lösung der Gleichung ✎

Wir rechnen nun nach, dass die linke Seite $\frac{a}{s} + \frac{b}{t}$ ebenfalls diese Gleichung (4.2) löst: ✎

Damit haben wir gezeigt, dass beide Seiten der zu beweisenden Gleichheit 4.1 die Gleichung (4.2) lösen. Da diese Gleichung aber genau eine Lösung hat (Proposition 4.4.5), müssen beide Seiten übereinstimmen, d. h. die Gleichheit 4.1 ist bewiesen.

Kürzen bzw. Erweitern: Es gilt $s \cdot \frac{a}{s} = a$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit t (und verwenden Kommutativität der Multiplikation), so folgt $st\frac{a}{s} = at$. Also löst $\frac{a}{s}$ die Gleichung $st \cdot x = at$. Andererseits löst aber auch $\frac{at}{st}$ diese Gleichung. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $\frac{a}{s} = \frac{at}{st}$.

Addition von Brüchen mit demselben Nenner: Beide Seiten lösen die Gleichung $sx = a + b$.

Multiplikation von Brüchen: Beide Seiten lösen die Gleichung $stx = ab$.

Division durch 1: Beide Seiten lösen die Gleichung $1x = a$.

Kehrwertbildung: Beide Seiten lösen die Gleichung $\frac{a}{s}x = ab$ (beim Nachrechnen verwende man die beiden zuvor gezeigten Aussagen).

Division von Brüchen (zweite Gleichung dort bereits gezeigt): Sowohl $\frac{\frac{a}{s}}{\frac{b}{t}}$ und $\frac{at}{bs}$ lösen die Gleichung $\frac{b}{t}x = \frac{a}{s}$ (beim Nachrechnen darf man kürzen, das wurde schon gezeigt). □

Aufgabe A27 Nach der Erklärung der Formel für die Addition im Beweis von Proposition 4.4.6: Beweise die restlichen Aussagen in ähnlicher Weise (und lies den Beweis weiter, wenn du Anregungen benötigst).

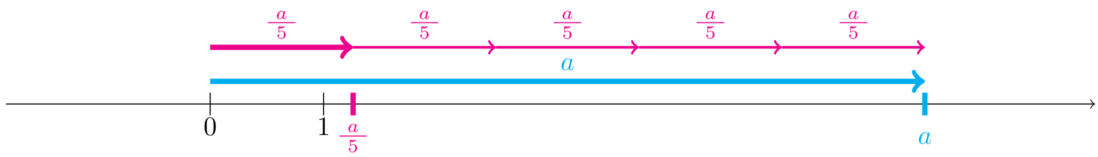
4.4.7 (Multiplikation mit einer natürlichen Zahl als mehrfache Addition)**.** Für alle $\boxed{\text{natürlichen Zahlen } n}$ und alle reellen Zahlen x gilt nach dem Distributivgesetz

$$nx = \underbrace{(1+1+\ldots+1+1)}_{n \text{ Summanden}} x = \underbrace{x+x+\ldots+x+x}_{n \text{ Summanden}} \tag{4.3}$$

4.4.8 (Division einer rellen Zahl durch eine positive natürliche Zahl)**.** Insbesondere gilt (wähle $x = \frac{a}{n}$ in (4.3))

$$\underbrace{\frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \ldots + \frac{a}{n} + \frac{a}{n}}_{n \text{ Summanden}} \overset{(4.3)}{=} n \cdot \frac{a}{n} = a$$

Also ist $\frac{a}{n}$ der Pfeil, der n-Mal hintereinandergelegt a ergibt. Mit anderen Worten ist $\frac{a}{n}$ «ein n-tel des Pfeils a».



4.5 Rationale Zahlen

Definition 4.5.1 rationale Zahl, Menge der rationalen Zahlen

Eine reelle Zahle a heisst genau dann **rational**, wenn sie als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden kann, wenn also gilt

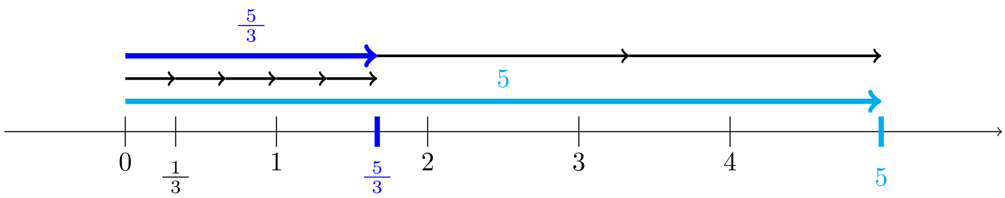
$$a = \frac{z}{n} \qquad \text{für geeignete ganze Zahlen } z, n \text{ mit } n \neq 0.$$

Die **Menge der rationalen Zahlen** wird als $\mathbb{Q}$ notiert:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \neq 0 \right\}$$

«rational» kommt von lateinisch «ratio» = «Verhältnis»; der Buchstabe $\mathbb{Q}$ kommt von «Quotient», lateinisch «quotiens» = «wie oft?»; wohl im Sinne von: «Wie oft passt die 5 in die 23 hinein?» Antwort: «$\frac{23}{5}$ mal»

4.5.2. Die Zeichnung illustriert zwei Sichtweisen, wie man sich die rationale Zahl $\frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$ vorstellen kann: Als 3-tel des Pfeiles 5 oder als 5-faches des Pfeiles $\frac{1}{3}$.



4.5.3.

- Jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist rational, denn $z = \frac{z}{1} \in \mathbb{Q}$. Also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Jede rationale Zahl kann als Quotient einer ganzen Zahl durch eine $\boxed{\text{positive}}$ natürliche Zahl geschrieben werden: Erweitere mit (-1), falls der Nenner negativ ist. Beispiele:

  $$\frac{7}{-5} = \frac{7\cdot(-1)}{(-5)\cdot(-1)} = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5} \qquad\qquad \frac{-7}{-5} = \frac{(-7)\cdot(-1)}{(-5)\cdot(-1)} = \frac{7}{5}$$

  In der obigen Definition hätten wir also genausogut eine Darstellung $a = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ verlangen können.

  Den Buchstaben «n» habe ich also nicht nur wegen «Nenner», sondern auch wegen «natürlich» gewählt; bei «z» habe ich an Zähler und «in $\mathbb{Z}$» gedacht.
- Jede rationale Zahl kann auf unendlich viele Weisen als Quotient ganzer Zahlen dargestellt werden. Beispiel:

  $$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15} = \frac{28}{20} = \ldots = \frac{70}{50} = \ldots$$

Definition 4.5.4 vollständig gekürzt

Eine als Quotient dargestellte rationale Zahl $\pm\frac{a}{b}$ mit a, $b \in \mathbb{N}$ heisst genau dann **vollständig gekürzt**,

- wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler ausser der 1 haben;
- gleichbedeutend: wenn $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ gilt.

Aufgabe A28 Kürzen Sie die folgenden Brüche vollständig.

a) $\frac{21}{35}$ b) $\frac{-500}{25}$ c) $\frac{-25}{25}$

d) $\frac{-13}{91}$ e) $\frac{2^{2023} \cdot 3^{2025} \cdot 5^{2027}}{2^{2026} \cdot 3^{2025} \cdot 5^{2024}}$ f) $\frac{2^{2023} \cdot 3^{2024} \cdot 5^{2025}}{30^{2024}}$

Definition 4.5.5 Grössenvergleich reeller Zahlen, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$

Seien a und b relle Zahlen. Wir verwenden die Schreib- und Sprechweisen

	$a < b$	«a **(echt) kleiner** als b»
oder gleichbedeutend:	$b > a$	«b **(echt) grösser** als a»

genau dann, wenn a links von b auf dem Zahlenstrahl liegt und $a \neq b$ gilt;

	$a \leq b$	«a **kleiner-gleich** b»
oder gleichbedeutend:	$b \geq a$	«b **grösser-gleich** a»

genau dann, wenn a links von b auf dem Zahlenstrahl liegt oder $a = b$ gilt.

Merke 4.5.6 Grössenvergleich rationaler Zahlen

Um (zwei oder mehr) rationale Zahlen zu vergleichen, bringt man sie durch Erweitern auf denselben **positiven** Nenner (= man macht sie gleichnamig mit positivem Nenner) und vergleicht dann die Zähler.

Beispiel 4.5.7. Beispiel: Die rationalen Zahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{10}$ sind zu vergleichen.
Gleichnamig machen mit positivem Nenner: Gemeinsamer Nenner $\operatorname{kgV}(3, 4, 10) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (oder irgendein Vielfaches davon, etwa $3 \cdot 4 \cdot 10$).

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}, \qquad \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \qquad \frac{3}{10} = \frac{18}{60}$$

Also gilt $\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Aufgabe A29 Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Grösse nach (vgl. Beispiel 4.5.7).

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{-4}{3}, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{-3}{2}, \quad \frac{4}{6}, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad \frac{2}{2023}$$

Hinweis: Finde die richtige Position für die Zahl $\frac{2}{2023}$ erst am Ende.

4.5.8 (Geschicktes Addieren von rationalen Zahlen)**.** Die naive Formel für die Summe liefert

$$\frac{7}{12} + \frac{11}{30} = \frac{7 \cdot 30 + 12 \cdot 11}{12 \cdot 30} = \frac{210 + 132}{360} = \frac{342}{360} = \frac{171}{180} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$$

Geschickter ist es, als gemeinsamen Nenner den **Hauptnenner** $\operatorname{kgV}(12, 30) = 60$ zu verwenden:

$$\frac{7}{12} + \frac{11}{30} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{11 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{35 + 22}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$$

Allgemein ist zu empfehlen, bei Rechnungen mit Brüchen zuerst alle beteiligten Brüche zu kürzen (sonst hätte man im folgenden Beispiel viel Freude am Berechnen von $266 \cdot 21$ und $133 \cdot 21$ etc.):

$$\frac{133}{266} + \frac{7}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

4.5.9 (Geschicktes Multiplizieren von rationalen Zahlen)**.** In der Formel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ muss man die Produkte ac und bd oft nicht ausrechnen, wenn man sieht, dass man das Ergebnis kürzen kann:

$$\frac{21}{32} \cdot \frac{8}{3} = \frac{21 \cdot 8}{32 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 8}{32} = \frac{7}{4}$$

Hier spart Kürzen jede Menge Rechenarbeit:

$$\frac{2023}{746} \cdot \frac{1492}{2023} = \frac{2023 \cdot 1492}{746 \cdot 2023} = \frac{2}{1} = 2$$

Ein weiteres Beispiel, in dem frühzeitiges Ausmultiplizieren äusserst ungeschickt wäre:

$$\frac{2^{100} \cdot 3^2}{7^5} \cdot \frac{7^3 \cdot 3}{2^{90}} = \frac{2^{100} \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 3}{7^5 \cdot 2^{90}} = \frac{2^{10} \cdot 3^3}{7^2}$$
$$\text{(falls konkretes Ergebnis gesucht)} = \frac{1024 \cdot 27}{49} = \frac{27648}{49}$$

Aufgabe A30 Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)! Die Ergebnisse sind vollständig gekürzt anzugeben. Statt $\frac{-3}{2}$ schreibt man meist $-\frac{3}{2}$.

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{6} + \frac{3}{42}$ d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-7}{3}$

e) $\frac{5}{9} + \frac{9}{5}$ f) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{21}$ g) $2 + \frac{5}{6}$ h) $2 \cdot \frac{5}{6}$

i) $\frac{7}{8} + 3$ j) $\frac{7}{2} + \frac{14}{3} - \frac{7}{6}$ k) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ l) $-6 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}$

Aufgabe A31 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $\frac{2}{3} + x = 0$ b) $\frac{2}{3} + x = \frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3} - x = 0$ d) $\frac{2}{3} - x = \frac{3}{4}$

e) $x \cdot \frac{2}{3} = 1$ f) $x \cdot \frac{2}{3} = 2$ g) $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ h) $x^2 = \frac{25}{9}$ (zwei Lösungen!)

i) $x^3 = \frac{8}{27}$ j) $x^3 = -\frac{8}{27}$ k) $|x| = \frac{1}{2}$ l) $|x - 3| = \frac{1}{2}$

4.5.10 (Geschicktes Erweitern bei «Doppelbrüchen»)**.** Berechne $\frac{1+\frac{2}{3}}{4+\frac{5}{6}}$. «Naives» Vorgehen:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{4 + \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{29}{6}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{29} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 29} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 29} = \frac{5 \cdot 2}{29} = \frac{10}{29}$$

«Geschickteres» Vorgehen: Erweitern mit $6 = \text{kgV}(3, 6)$ beseitigt oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs alle Nenner:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{4 + \frac{5}{6}} = \frac{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)}{6 \cdot \left(4 + \frac{5}{6}\right)} = \frac{6 + 4}{24 + 5} = \frac{10}{29}$$

Auch die «Formel» $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ kann man als Erweitern mit bd (= dem «kleinsten» gemeinsamen Vielfachen der Nenner b und d) erhalten:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{bd \cdot \frac{a}{b}}{bd \cdot \frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Aufgabe A32 Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)! Die Ergebnisse sind vollständig gekürzt und mit **positivem** Nenner bzw. als ganze Zahl ohne Bruchstrich anzugeben.

a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-3}{4}}$ b) $\frac{1}{\frac{3}{7}}$ c) $\frac{2}{\frac{3}{5}}$ d) $\frac{\frac{2}{3}}{5}$

e) $\frac{\frac{-3}{2} - 1}{3 + \frac{4}{-5}}$ f) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$ g) $\left(\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}\right)^2$ h) $\frac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \frac{\frac{1}{117}}{127}$

Aufgabe A33 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $\frac{x}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{x} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{\frac{7}{11}}{x} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{13+x}{6} = 4$ f) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{9}{16}$ g) $\left|\frac{1}{x}\right| = 3$ h) $\frac{x}{1-x} = \frac{5}{2}$.

Beispiel 4.5.11 (Einsetzen von Zahlen in arithmetische Ausdrücke (= Rechenausdrücke))**.**
Aufgabe: Betrachten Sie den Ausdruck $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ und berechnen Sie $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Lösung: Man ersetze in $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ jedes Auftreten von x durch $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (also die eingeklammerte Zahl $-\frac{1}{2}$) und vereinfache das Ergebnis:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 4}{\frac{1}{4}\cdot 4} = \frac{6}{1} = 6$$

Achtung: Bitte unbedingt Klammern verwenden (ausser bei ganz einfachen Ausdrücken). Wer im gerade erklärten Beispiel im Nenner x^2 zu $-\frac{1}{2}^2 = -\frac{1^2}{2} = -\frac{1}{2}$ berechnet, macht vieles falsch. Wer x^2 zu $-\frac{1}{2}^2 = -\frac{1}{4}$ berechnet, ebenfalls.

Aufgabe A34

(a) Für den Ausdruck $f(x) = x^2 + 3x$: Berechnen Sie $f(3)$, $f(0)$, $f(-3)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(b) Für den Ausdruck $f(x) = \frac{x(1+x)}{x-\frac{1}{2}}$: Berechnen Sie $f(1)$, $f(0)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Aufgabe A35 Bonus-Aufgabe (die eigentlich weiter nach vorne gehört): Erkläre, wie man mit dem Strahlensatz $\frac{1}{a}$ und $\frac{a}{b}$ konstruktiv bestimmt. (Also so ähnlich, wie ich die Konstruktion des Produkts $a \cdot b$ aus a und b erklärt habe.)
Damit kann man dann alle Grundrechenarten geometrisch durchführen, also per Zirkel und Lineal mit Punkten auf der reellen Zahlengeraden rechnen.

4.6 Warum ist Division durch Null nicht definiert?

4.6.1. Antwort: Weil dann alles Null wäre (wenn die üblichen Rechenregeln weiterhin gelten). Wir erklären dies nun etwas genauer.

4.6.2. Nehmen wir beispielsweise an, dass $\frac{3}{0}$ in irgendeiner geeigneten Weise als reelle Zahl definiert ist.
Allgemein gilt $a = b \cdot \frac{a}{b}$. In unserem Fall liefert dies $3 = 0 \cdot \frac{3}{0} = 0$, d. h. $3 = 0$. Division durch 3 liefert $1 = 0$. Multiplikation mit jeder beliebigen reellen Zahl s liefert $s = s \cdot 1 = s \cdot 0 = 0$. Also ist jede relle Zahl 0, was bedeutet, dass der ganze Zahlenstrahl auf die Null zusammengeschrumpft ist, als Formel $\mathbb{R} = \{0\}$. Die Mathematik wäre sehr langweilig!
In diesem Argument kann man 3 durch jede reelle Zahl ungleich Null ersetzen.

4.6.3. Kann denn wenigstens $\frac{0}{0}$ sinnvoll definiert werden (unter Beibehaltung der üblichen Bruchrechenregeln)? Nehmen wir an, dass $\frac{0}{0} = r$ für eine geeignete reelle Zahl r gilt. Addition von 1 auf beiden Seiten liefert $r+1 = \frac{0}{0} + 1 = \frac{0}{0} + \frac{1}{1} = \frac{0\cdot 1 + 0 \cdot 1}{0 \cdot 1} = \frac{0}{0} = r$, also $r+1 = r$. Zieht man r auf beiden Seiten ab, so folgt $1 = 0$. Daraus folgt wiederum $s = s \cdot 1 = s \cdot 0 = 0$ für jede reelle Zahl s.

4.6.4. Fazit: Wer die Division durch Null erlaubt, macht alles zu Null.

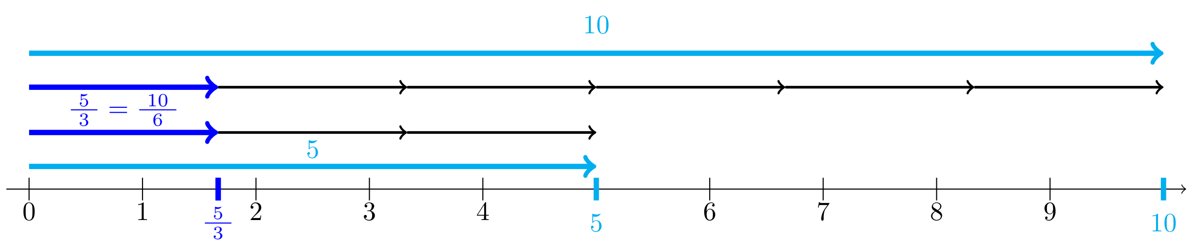
Geometrische Anschauung für die Bruchrechenregeln bei rationalen Zahlen

Merke 4.6.5 Erweitern bzw. Kürzen – geometrische Anschauung

Die Zeichnung illustriert die allgemeine Formel

$$\frac{z}{n} = \frac{zm}{nm} \qquad \text{am Beispiel} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5\cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6}$$

Wenn man einen Pfeil der Länge $z = 5$ in $n = 3$ gleich lange Teilpfeile zerlegt, kommt dasselbe heraus, wie wenn man einen $m = 2$ Mal so langen Pfeil in $m = 2$ Mal so viele Teilpfeile zerlegt.

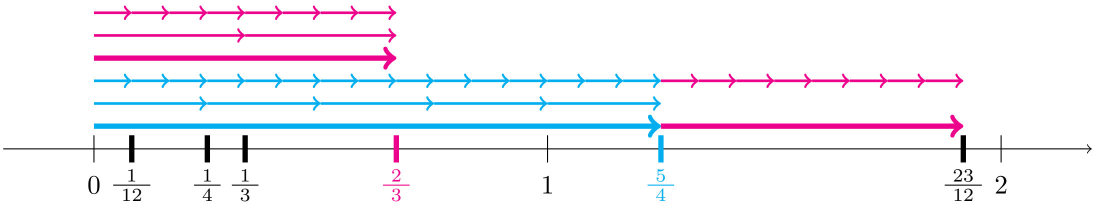


Merke 4.6.6 Addition – geometrische Anschauung

Wir illustrieren die allgemeine Additionsformel

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{nm}=\frac{an+bm}{mn} \qquad \text{am Beispiel} \qquad \frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{15}{12}+\frac{8}{12}=\frac{15+8}{12}=\frac{23}{12}$$

In der ersten Gleichheit werden die beiden Brüche auf denselben Nenner mn gebracht («gleichnamig machen»), in der zweiten Gleichheit werden die Zähler addiert und der Nenner wird beibehalten.
In der Zeichnung ist $\frac{5}{4}$ als 5-faches des Pfeils $\frac{1}{4}$ dargestellt und $\frac{2}{3}$ als 2-faches des Pfeils $\frac{1}{3}$.
Damit wir die beiden Brüche addieren können, stellen wir beide Brüche als Vielfache desselben Pfeils $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ dar, nämlich als das 15-fache $\frac{5}{4}=15\cdot\frac{1}{12}$ bzw. das 8-fache $\frac{2}{3}=8\cdot\frac{1}{12}$. Der Pfeil $\frac{1}{12}$ ist also eine Art «Basispfeil» (oder eine Einheit, ein gemeinsames Mass), bezüglich dem wir unsere beiden Brüche als Vielfache schreiben können.
Die Summe ist dann das $(15+8)=23$-fache dieser Basispfeils $\frac{1}{12}$, also $23\cdot\frac{1}{12}=\frac{23}{12}$.
Damit ist $\frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{23}{12}$ geometrisch begründet.



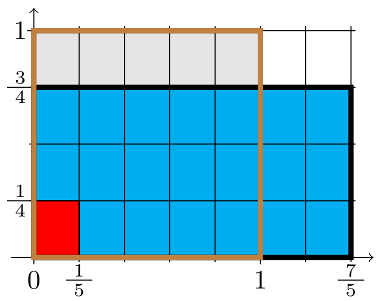
Aufgabe A36 Verstehen Sie die geometrische Erklärung in Merke 4.6.6 und erklären Sie in ähnlicher Weise geometrisch, warum $\frac{10}{3}+\frac{7}{2}=\frac{41}{6}$ gilt.

Merke 4.6.7 Multiplikation – geometrische Anschauung

Wir illustrieren die allgemeine Multiplikationsformel

$$\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}=\frac{ab}{mn} \qquad \text{am Beispiel} \qquad \frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$$

«Bruch mal Bruch, wie machts der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner!»



Das Produkt $\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ist die Fläche des blauen $\frac{7}{5}\times\frac{3}{4}$-Rechtecks, gemessen in braunen 1×1-Einheitsquadraten.
Wenn man $\frac{7}{5}$ als das 7-fache von $\frac{1}{5}$ schreibt und $\frac{3}{4}$ als das 3-fache von $\frac{1}{4}$, so ergibt sich die dargestellte Unterteilung des blauen Rechtecks in $7\cdot 3=21$ rote $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$-Rechtecke.
Da das Einheitsquadrat mit Seitenlängen $1=5\cdot\frac{1}{5}$ und $1=4\cdot\frac{1}{4}$ aus $5\cdot 4=20$ roten $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$-Rechtecken besteht, hat das rote Rechteck in Einheitsquadraten gemessen die Fläche $\frac{1}{20}$.
Das blaue Rechteck, das aus 21 roten Rechtecken besteht, hat also in Einheitsquadraten gemessen die Fläche $21\cdot\frac{1}{20}=\frac{21}{20}$.
Damit ist $\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{20}$ geometrisch begründet.

Aufgabe A37 Verstehen Sie die geometrische Erklärung in Merke 4.6.7 und erklären Sie in ähnlicher Weise geometrisch, warum $\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{70}{12}$ gilt.

4.7 Reelle Zahlen als Kommazahlen im Dezimalsystem

4.7.1. Alle Aussagen, die wir in diesem Abschnitt über Kommazahlen im Dezimalsystem zeigen, gelten sinngemäss auch für Kommazahlen in jedem anderen Stellenwertsystem, also beispielsweise im Binärsystem (vgl. St. Galler Bahnhofsuhr).

4.7.2. Reelle Zahlen können als **Kommazahlen** (im Dezimalsystem)[2] dargestellt werden. Beispielsweise meint die Kommazahl

$$42.1234567890123456789001234567890001234567890000123\ldots$$

denjenigen Punkt auf dem Zahlenstrahl, dem sich die folgenden rationalen Zahlen

$$\begin{aligned}
42 &= 42\\
42.1 &= 42 + 1\cdot\tfrac{1}{10}\\
42.12 &= 42 + 1\cdot\tfrac{1}{10} + 2\cdot\tfrac{1}{100}\\
42.123 &= 42 + 1\cdot\tfrac{1}{10} + 2\cdot\tfrac{1}{100} + 3\cdot\tfrac{1}{1000}\\
42.1234 &= 42 + 1\cdot\tfrac{1}{10} + 2\cdot\tfrac{1}{100} + 3\cdot\tfrac{1}{1000} + 4\cdot\tfrac{1}{10000}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

immer besser annähern. Umgekehrt ist anschaulich klar, dass man jeden Punkt auf dem Zahlenstrahl auf diese Weise beschreiben kann.

4.7.3. Es gibt zwei Arten von Kommazahlen:

- **periodische** Kommazahlen:
  - «nicht-abbrechende» wie $0.2222\ldots = 0.\overline{2}$ oder $0.45623232323\ldots = 0.456\overline{23}$
  - «abbrechende» wie $3.57 = 3.5700000\ldots = 3.57\overline{0}$ [3]
- **nicht-periodische** Kommazahlen wie $1.010010001000010000001\ldots$ oder «zufällige» wie $-67.25686\ldots$. Wir werden bald sehen, dass $\sqrt{2}$ nicht-periodisch ist (siehe Satz 4.10.2). Viele wichtige mathematische Konstanten wie die Kreiszahl π (= Umfang eines jeden Kreises geteilt durch seinen Durchmesser) und die Eulersche Zahl e sind ebenfalls nicht-periodisch.

4.7.4. Wir erinnern daran, dass jede rationale Zahl reell ist, dass also in Mengenschreibweise $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt.

Definition 4.7.5 irrationale Zahl

Eine reelle Zahl heisst genau dann **irrational**, wenn sie nicht rational ist.
Die Menge der irrationalen Zahlen ist also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposition 4.7.6 Wann ist eine Kommazahl rationaler bzw. irrational?

Für jede reelle Zahl x gilt:

$$\begin{aligned}
x \text{ ist rational} &\iff x \text{ als Kommazahl ist periodisch}\\
x \text{ ist irrational} &\iff x \text{ als Kommazahl ist nicht-periodisch}
\end{aligned}$$

In Mengenschreibweise gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} &= \{\text{rationale Zahlen}\} = \{\text{periodische Kommazahlen}\}\\
\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} &= \{\text{irrationale Zahlen}\} = \{\text{nicht-periodische Kommazahlen}\}
\end{aligned}$$

Insbesondere gibt es «sehr viele» irrationale Zahlen (genaueres dazu später).

[2] Gebräuchlich ist auch die Sprechweise *Dezimalzahl*. Ich finde *Kommazahl* aussagekräftiger. Eigentlich wäre der etwas sperrige Begriff *Dezimalkommazahl* noch besser.
Auch wird der Begriff *Dezimalbruch* für Kommazahlen verwendet. Das kommt wohl daher, dass 42.7 für $42 + \frac{7}{10}$ steht und da eben ein Bruch vorkommt. Mir gefällt dieser Begriff aber nicht, denn wenn ich eine Kommazahl schreibe, denke ich eigentlich gerade nicht an einen Bruch und – wie wir sehen werden – können nur periodische Kommazahlen als rationale Zahl (= Bruch mit ganzem Zähler und Nenner) dargestellt werden – also sind «Dezimalbrüche» in diesem Sinne gar keine Brüche.

[3] Man kann diese Zahl auch als $3.56\overline{9}$ schreiben (wie unten begründet wird); «abbrechend» bedeutet also genaugenommen: «Kann als abbrechende Kommazahl geschrieben werden.»

Beweis. (a) Behauptung: Jede rationale Zahl ist als Kommazahl periodisch.

Dies liegt daran, dass sich beim schriftlichen Dividieren ab einem gewissen Schritt dieselbe Folge von Rechnungen immer wieder wiederholt. Als Beispiel berechnen wir per schriftlicher Division $\frac{6139}{606}$: ✎

Beachte:

- Jede dabei berechnete Differenz liegt zwischen 0 und $605 = 606 - 1$.
- «Von oben herunter kommen nur noch Nullen, sobald man hinter dem Komma angelangt ist.»

Im Allgemeinen gilt: Teilt man eine natürliche Zahl z schriftlich durch eine positive natürliche Zahl n, so liegt jede Differenz zwischen 0 und $n-1$ und ab einem geeigneten Schritt «kommen nur noch Nullen von oben herunter». Da es nur n mögliche Differenzen gibt, muss sich die Rechnung irgendwann wiederholen.[4]
Also ist $\frac{z}{n}$ als Kommazahl periodisch.[5]

(b) Jede periodische Kommazahl ist rational.
Wenn die Kommazahl abbrechend ist, ist dies mehr oder weniger offensichtlich. Beispiel: $45.678 = \frac{45678}{1000}$.

Wir erklären einen recht bekannten Umwandlungsalgorithmus an einem Beispiel. ✎

Sorgt dafür, dass die periodische Ziffernfolge direkt hinter dem Komma startet.

Sorgt dafür, dass die periodische Ziffernfolge nach dem Komma «einmal nach links verschoben wird».

Sorgt dafür, dass die Nachkommastellen wegfallen.

Abstrakte Formulierung dieses Algorithmus, der eine periodische Kommazahl x in einen Quotienten rationaler Zahlen umwandelt
(vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Repeating_decimal#Converting_repeating_decimals_to_fractions).

(1) Multipliziere x mit einer geeigneten Zehnerpotenz 10^n, so dass beim Ergebnis $10^n x$ die Ziffernfolge direkt nach dem Komma periodisch ist. (Ist dies bereits bei x der Fall, so ist $n = 0$ die einfachste Wahl.)
(2) Sei ℓ die (kürzeste) Periodenlänge der nach dem Komma startenden Ziffernfolge.
(3) Ergebnis: Die gesuchte Darstellung ist $x = \frac{z}{10^{n+\ell} - 10^n}$.

Dieser Algorithmus funktioniert auch bei abbrechenden Kommazahlen, ist aber dann etwas umständlich.

□

[4] Als Wiederholung gilt auch, wenn irgendwann nur noch Nullen herauskommen, die Kommazahl also abbricht.

[5] Hierbei wird als bekannt vorausgesetzt, dass der schriftliche Divisionsalgorithmus jede als Quotient natürlicher Zahlen gegebene rationale Zahl in die Kommadarstellung derselben Zahl verwandelt. Es ist eine gute Übung, sich das einmal genau zu überlegen.

4.7.7. Eine etwas kuriose Folgerung aus diesem Beweis: Jede rationale Zahl kann dargestellt werden als Quotient einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl der Form $10^{n+\ell} - 10^n = \underbrace{999\ldots999}_{\ell \text{ Neuner}}\underbrace{000\ldots000}_{n \text{ Nullen}}$.

Beispiel: $\frac{46}{55} = \frac{828}{990}$ und $990 = 10^{2+1} - 10^1$.

Aufgabe A38

(a) Per schriftlicher Division (Taschenrechner nur zur Probe erlaubt): Wandle die folgenden Quotienten natürlicher Zahlen in Kommazahlen um.

$$\frac{1}{7} \qquad \frac{9876}{21} \qquad \frac{201}{132} \qquad \frac{5533}{606}$$

Lösungen (bitte beachten, wo der Periodenstrich beginnt!): $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, $\frac{9876}{21} = 470.\overline{285714}$, $\frac{201}{132} = 1.52\overline{27}$, $\frac{5533}{606} = 9.1\overline{3036}$

(b) (Taschenrechner nur zur Probe erlaubt) Wandle die folgenden Kommazahlen in Quotienten natürlicher Zahlen um und gib diese vollständig gekürzt an.

$$12.34 \qquad 0.\overline{1} \qquad 0.\overline{01} \qquad 0.\overline{001} \qquad 0.0\overline{01} \qquad 0.\overline{9} \qquad 41.\overline{9} \qquad 12.\overline{34} \qquad 12.3\overline{4} \qquad 12.3\overline{45}$$

Lösungen: $12.34 = \frac{1234}{100}$, $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0.\overline{01} = \frac{1}{99}$, $0.\overline{001} = \frac{1}{999}$, $0.0\overline{01} = \frac{1}{990}$, $0.\overline{9} = 1$, $41.\overline{9} = 42$, $12.\overline{34} = \frac{1222}{99}$, $12.3\overline{4} = \frac{1111}{90}$, $12.3\overline{45} = \frac{12222}{990} = \frac{2037}{165}$

Weitere Umrechnungsaufgaben dieser Art in beide Richtungen kann man in offensichtlicher Weise selbst kreieren. Wer schriftliches Dividieren üben möchte, verwende zum Beispiel https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/dividieren1.htm.

Merke 4.7.8

Manche reellen Zahlen können durch zwei verschiedene Kommazahlen dargestellt werden: Alle Kommazahlen, die auf «Periode 9» enden, können auch als «abbrechende Kommazahl» dargestellt werden. Beispielsweise gelten (wie hoffentlich durch Aufgabe A38 gelernt)

$$1 = 0.999999\ldots = 0.\overline{9} \qquad -0.3\overline{9} = -0.4 \qquad 123.456\overline{9} = 123.457 \qquad 129.\overline{9} = 130$$

Dies ist aber die einzige Mehrdeutigkeit bei der Angabe reeller Zahlen durch Kommazahlen.

Genaugenommen mag man auch führende Nullen (also 0042.3 statt 42.3) und Nullen am Ende einer abbrechenden Kommazal (also 42.3000 statt 42.3) als Mehrdeutigkeit auffassen.
«Beweis»: Gegeben seien zwei reelle Zahlen mit verschiedenen Darstellungen als Kommazahl. Betrachte die erste Stelle von links, in der sich die zwei Kommazahldarstellungen unterscheiden. Nur wenn die beiden Ziffern an dieser Stelle sich um genau eins unterscheiden und in der Zahl mit der kleineren Ziffer nachfolgend ausschliesslich 9er und in der anderen Zahl nachfolgend ausschliesslich 0er vorkommen, sind die beiden Zahlen gleich, sonst sind sie «offensichtlich» verschieden (warum?).

4.8 Wurzeln

4.8.1. Eine reelle Zahl ist genau dann **nicht-negativ**, wenn sie positiv oder Null ist. Analog bedeutet **nicht-positiv** negativ oder Null.

Definition 4.8.2

Sei $r \geq 0$ eine nicht-negative reelle Zahl. Wir definieren

die **Quadratwurzel von** r: $\sqrt{r}$:= die nicht-negative reelle Zahl, deren Quadrat r ist
die **dritte Wurzel von** r: $\sqrt[3]{r}$:= die nicht-negative reelle Zahl, deren dritte Potenz r ist
...
die n**-te Wurzel von** r: $\sqrt[n]{r}$:= die nicht-negative reelle Zahl, deren n-te Potenz r ist

Hier ist $n \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Beachte $\sqrt[1]{r} = r$ und $\sqrt[2]{r} = \sqrt{r}$.

4.8.3. Der aufmerksame Leser mag sich fragen, warum $\sqrt{r}$ «wohldefiniert» ist, warum also überhaupt eine nicht-negative reelle Zahl w existiert mit $w^2 = r$ und warum nur genau eine solche Zahl existiert (in der Definition steht «**die** nicht-negative reelle Zahl» statt «**eine** nicht-negative ...»). Anschaulich mag man dies wie folgt begründen.

Lässt man x bei Null starten und auf dem reellen Zahlenstrahl nach rechts wandern und betrachtet währenddessen x^2, so startet x^2 bei $0^2 = 0$ und wird kontinuierlich (= ohne Sprünge = stetig) – als Flächeninhalt des Quadrates mit Seitenlänge x – stets grösser (= ist streng monoton wachsend) und beliebig gross (= strebt gegen ∞) (denn es gilt $x^2 > x$, wenn $x \geq 1$).

Insbesondere nimmt x^2 jede nicht-negative reelle Zahl r genau einmal als Wert an. Dies bedeutet, dass $\sqrt{r}$ wohldefiniert ist.

In ähnlicher Weise (Volumina dreidimensionaler Würfel, Volumina vierdimensionaler Würfel, ...) begründet man anschaulich, dass die anderen Wurzeln wohldefiniert sind.

Aufgabe A39 Berechnen Sie:

a) $\sqrt{144}$

b) $\sqrt{\frac{9}{4}}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{-1}$

f) $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4}$

g) $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}}$

h) $\sqrt{2^{42} \cdot (-3)^{2024} \cdot 7^4}$

i) $\sqrt{(-2024)^2}$

j) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges x

k) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x \geq 0$

l) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x < 0$

Aufgabe A40 Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[5]{1024}$

c) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

d) $\sqrt[5]{(-1)^5}$

e) $\sqrt[6]{(-1)^6}$

f) $\sqrt[3]{3^{225} \cdot 7^6}$

g) $\sqrt[7]{\frac{3^{56}}{7^{14}}}$

h) $\sqrt[4]{22^3 \cdot 6^3 \cdot 44 \cdot 66^3 \cdot 22 \cdot 9}$

Merke 4.8.4 Wurzel eines Quadrats ist Betrag = Länge

- Für alle reellen Zahlen x gilt✎
- Wurzeln dürfen nur aus nicht-negativen reellen Zahlen gezogen werden. (Komplexe Zahlen sind noch nicht bekannt.)

Satz 4.8.5 Wurzelgesetze

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen $a, b \geq 0$ gelten (mit $b \neq 0$ in der rechten Formel) ✎

Allgemeiner gilt dasselbe auch für beliebige n-te Wurzeln: ✎

Beweis. Wir zeigen, dass $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ die beiden definierenden Eigenschaften von $\sqrt{ab}$ hat:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist nicht-negativ: Das folgt sofort aus $\sqrt{a} \geq 0$ und $\sqrt{b} \geq 0$, denn das Produkt nicht-negativer Zahlen ist nicht-negativ.
- Das Quadrat von $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist ab: Das rechnen wir nach: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.

Also gilt die erste Gleichung. Der Beweis der zweiten Gleichung geht genauso. Analog zeigt man die Aussagen über n-te Wurzeln. □

Merke 4.8.6

Bei der Angabe von Ergebnissen sind Quadratwurzeln von natürlichen Zahlen im Nenner zu beseitigen, indem man mit der entsprechenden Quadratwurzel erweitert. Beispiel:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Quadratwurzeln natürlicher Zahlen sind in der Regel so weit zu vereinfachen, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen keine Quadratzahl mehr als Teiler hat. Beispiele:

$$\sqrt{1800} = \sqrt{8 \cdot 9 \cdot 25} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5 = 30\sqrt{2}$$
$$\sqrt{17^{2025} \cdot 19^{21}} = \sqrt{17^{2024} \cdot 17 \cdot 19^{20} \cdot 19} = 17^{1012} \cdot 19^{10} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{19}$$

Ähnlich sind n-te Wurzeln natürlicher Zahlen so weit zu vereinfachen, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen keine n-te Potenz mehr als Teiler hat.

Aufgabe A41 In der Geometrie haben wir es meist mit positiven Grössen zu tun, etwa mit Längen von Strecken. Deswegen nehmen wir in dieser Aufgabe an, dass die Variable a eine beliebige positive reelle Zahl ist. Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) $\sqrt{3^{2025}}$

b) $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5}$

c) $\sqrt{a^2}$

d) $\sqrt{2a^2}$

e) $\sqrt{3a^2}$

f) $\sqrt{4a^2}$

g) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

h) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

i) $\sqrt{\frac{75a^2}{8}}$

j) $\sqrt{\frac{50}{6}}$

4.9 Zur Angabe von Zahlen: Brüche und Wurzelzeichen etc. statt Kommazahlen!

4.9.1. Ich empfehle stark, in der Mathematik nur sehr selten Kommazahlen zu schreiben, sondern so gut wie immer mit Brüchen und Wurzelausdrücken etc. zu arbeiten. Hier einige Argumente:

- $\sqrt{2}$ ist präzise, das gerundete 1.4142135 nicht und bei 1.4142135 … kann es irgendwie weitergehen.
- $\sqrt{\frac{25}{49}}$ kann man sofort angeben, aber wohl kaum jemand sieht sofort die Wurzel aus der entsprechenden Kommazahl
$$0.51\overline{020408163265306122448979591836734693877551}$$
- Generell: Kommazahlen (insbesondere unperiodische) sind schrecklich zum Rechnen! Berechne etwa $\frac{1}{13} + \frac{1}{17}$ als Kommazahl! Das Ergebnis ist wohl

  «0 Komma Periode 135746606334841628959276018099547511312217194570», Periodenlänge 48.
- Wer Kommazahlen «während einer Rechnung» rundet, handelt sich automatisch Fehler ein! Beispiel: Wer schreibt, dass die Diagonale im Einheitsquadrat $d = 1.414$ beträgt und nun die Fläche des Quadrats mit Seitenlänge d berechnet, erhält $d^2 = 1.999396$. Die wahre Fläche dieses Quadrats ist aber natürlich $(\sqrt{2})^2 = 2$.
- Bei einer Kommazahl wie $\frac{7}{42}$ hat man sofort die brauchbare Vorstellung «17 42stel». (Zugegebenermassen hat man bei Kommazahlen auch sofort eine Vorstellung, wie gross die Zahl ist, und genau für diesen Zweck mag man Kommazahlen verwenden.) Trotzdem kann ich persönlich $\frac{1}{3}$ schneller aufnehmen als $0.\overline{3}$.
- Es ist in der Mathematik oft wichtig zu wissen, mit welcher Art von Rechnungen man eine Zahl erhalten kann (etwa bei der Konstruierbarkeit von Zahlen); dieses Wissen geht bei Kommazahlen leicht verloren. Beispiel: Der goldene Schnitt ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$. Die linke Seite kann als explizite Anweisung zum Ausrechnen aufgefasst werden (und man sieht sofort, dass man beispielsweise keine dritte Wurzel ziehen muss), die rechte ist unpräzise und es ist vollkommen unklar, woher die Zahl kommt.

4.9.2 (Zur Verwendung des Gleichheitszeichens)**.** Die Aussage $\sqrt{2} = 1.414$ falsch. Man sollte $\sqrt{2} \approx 1.414$ schreiben; das Zeichen $\approx$ bedeutet «ungefähr gleich». Erlaubt ist meinetwegen $\sqrt{2} = 1.414\ldots$.

Wer in der Prüfung $\sqrt{2} = 1.414$ schreibt, kann Punkte abgezogen bekommen. Der vermeintliche Ausweg, weniger Gleichheitszeichen zu schreiben, kann aber ebenfalls zu Punktabzügen führen, denn oft ist es sehr wichtig, die Gleichheit zweier Ausdrücke anzugeben.

4.9.3. Warum ist die Notation $\frac{\sqrt{2}}{2}$ besser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$? Ich denke, dass viele Leute wissen, dass $\sqrt{2}$ ungefähr 1.4 ist (denn $1.4^2 = \left(\frac{14}{10}\right)^2 = \frac{196}{100} = 1.96$). Daraus folgt, dass $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ungefähr 0.7 ist. Mehr Zeit benötige ich, um $\frac{1}{1.4}$ auszurechnen.

Warum ist die Notation $12 \cdot \sqrt{2}$ besser als $\sqrt{288}$? Auch hier denke ich, dass man beim ersten Ausdruck ein besseres Gefühl für die Grösse der Zahl hat (etwa $12 \cdot 1.4 = 16.8$).

4.9.4. Abschliessend sei noch bemerkt, dass die Wochenmarkt-Notation von Brüchen in der Mathematik zu vermeiden ist. An Marktständen sieht man oft Angaben wie $3\frac{1}{2}$ kg für $\left(3 + \frac{1}{2}\right)$ kg $= \frac{7}{2}$ kg $= 3.5$ kg. Diese «gemischte Schreibweise» hat in der Mathematik nichts verloren, denn es besteht grosse Verwechslungsgefahr zu $3\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

4.10 Irrationalität von $\sqrt{2}$ und (in späterem Abschnitt) von diversen anderen Wurzeln

4.10.1. Sicherlich gibt es sehr viele nicht-periodische Kommazahlen (warum?). Da all diese irrational sind (siehe Proposition 4.7.6), gibt es sehr viele irrationale Zahlen.

Man mag sich aber fragen, ob solche Zahlen auch «im täglichen Leben» als Lösungen von Problemen vorkommen. Dies ist der Fall.

Wir erklären nun den klassischen Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, sich also nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt.

Mit Hilfe der Primfaktorzerlegung rationaler Zahlen werden wir bald sehen (siehe Folgerung 4.12.4), dass viele andere Wurzeln rationaler Zahlen ebenfalls irrational sind, etwa $\sqrt[3]{7}$ oder $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Wurzeln irrationaler Zahlen sind stets irrational (etwa $\sqrt{\pi}$ oder $\sqrt[7]{\pi}$, wenn man weiss, dass π irrational ist) – dies ist sehr einfach zu zeigen, siehe Aufgabe A43.

Satz 4.10.2 $\sqrt{2}$ ist irrational (Hippasos von Metapont, ca. 500 v. Chr.)

Die Quadratwurzel aus 2 ist irrational:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Mit anderen Worten: Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine rationale Lösung (= Lösung in der Menge der rationalen Zahlen).

Erster Beweis (ohne Primfaktorzerlegung). ✎

□

Zweiter Beweis (mit Primfaktorzerlegung). Schreibe sonst $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Quadrieren und Umformen liefert $2b^2 = a^2$. In der Primfaktorzerlegung der linken Seite ist der Exponent von 2 ungerade (denn der Primfaktor 2 kommt in b^2 doppelt so oft vor wie in b), rechts ist er aber gerade (denn der Primfaktor 2 kommt in a^2 doppelt so oft vor wie in a). Dies kann nicht sein wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. □

Aufgabe A42 Lies dir den zweiten Beweis für $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ durch, der auf der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung beruht. Beweise in ähnlicher Weise, dass

a) $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ b) $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{9}} \notin \mathbb{Q}$

Aufgabe A43 Wurzeln irrationaler Zahlen sind irrational: Seien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl und $m > 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass $\sqrt[m]{x}$ irrational ist.
Hinweis: Der Beweis ist sehr einfach: Schreibe $\sqrt[m]{x}$ sonst als $\frac{a}{b}$ und folgere daraus den Widerspruch, dass x rational ist.

Definition 4.10.3

Die alten Griechen nannten zwei Strecken (= positive reelle Zahlen) a, b genau dann **kommensurabel** (= zusammen messbar = mit demselben Grundmass messbar),

- wenn sie (natürliche) Vielfache einer dritten Strecke/Zahl ℓ sind.

Für die Verneinung «nicht kommensurabel» wird meist das Wort **inkommensurabel** verwendet.
Vorstellung: Es gibt also eine «Mass-Einheit» ℓ (etwa einen Stock einer geeigneten Länge), so dass a und b in dieser Masseinheit gemessen natürliche Zahlen sind.

Folgerung 4.10.4 Quadratseite und Diagonale sind inkommensurabel

In jedem Quadrat sind Seite und Diagonale inkommensurabel (= nicht kommensurabel).

Beweis. Sei a die Seitenlänge eines beliebigen Quadrats und d die Länge seiner Diagonalen.

Die Annahme, dass a und d kommensurabel sind, bedeutet, dass es eine Streckenlänge ℓ gibt mit ✎

Andererseits gilt nach Pythagoras ✎

□

4.10.5. Die Vorstellung, dass alle «im normalen Leben auftauchenden» Strecken kommensurabel sind, klingt möglicherweise auf den ersten Blick überzeugend. Dann mag die obige Folgerung 4.10.4 eine Art «intelektuellen Schock» darstellen.

Die alten Griechen sahen die Entdeckung nicht kommensurabler Strecken als Errungenschaft.Es gibt Legenden, dass die Pythagoreer die Irrationalität von $\sqrt{2}$ verheimlichen wollten und deswegen Hippasos ertränkten; dies entspricht aber wohl nicht den Tatsachen, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/InkommensurabilitÃďt_(Mathematik)#Geschichte.

4.10.6. Es ist leicht zu zeigen, dass zwei Strecken a und b (alias positive reelle Zahlen) genau dann kommensurabel sind, wenn $\frac{a}{b}$ rational ist.

Wir überlassen die Begründung dem Leser. Die Implikation (= Schlussfolgerung) «a, b kommensurabel $\implies \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$» steht im Wesentlichen im Beweis der Folgerung 4.10.4, die Implikation in die andere Richtung ist noch zu begründen.

4.11 Potenzen mit ganzzahligen (insbesondere negativen) Exponenten

4.11.1. Bisher haben wir nur Potenzen mit natürlichen Exponenten definiert, also etwa 3^5 oder $(-2)^3$ oder $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. Wie man Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten sinnvoll definieren kann, wird hoffentlich durch die folgende Aufgabe klar.

Aufgabe A44

(a) Tragen Sie zunächst in die grauen Kästchen der Tabelle die richtigen Werte ein (bei Unsicherheit mit Bleistift)! Einige Werte sind bereits korrekt eingetragen.

(b) Überlegen Sie sich dann (eventuell zuerst mit Bleistift), welche Werte sinnvollerweise in den restlichen Kästchen stehen sollten!

Hinweis: Wie ändert sich der Wert in einer fixierten Zeile, wenn man ein Kästchen nach rechts bzw. nach links geht?

a	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
2				1	2	4		
3								
$\frac{1}{3}$								
$-\frac{2}{3}$							$-\frac{8}{27}$	
$-\frac{3}{2}$								

Definition 4.11.2 Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Sei $a \neq 0$ eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl und sei $m > 0$ eine positive natürliche Zahl. Dann definieren wir

$$a^{-m} := ✎$$

Beachten Sie:

$$a^{-m} = ✎ \qquad a^{-1} = ✎$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = ✎ \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = ✎$$

Aufgabe A45 Berechnen Sie!

a) 5^{-1} b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{3^{-1}}{5^{-1}}\right)^{-1}$

f) 3^{-2} g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ h) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ j) $\left(\frac{5^{-2}}{3^{-2}}\right)^{-2}$

k) 10^6 l) 10^3 m) 10^0 n) 10^{-3} o) 10^{-6}

p) 0.1^6 q) 0.1^{-6} r) $(0.25)^{-3}$ s) 4^{-5} t) $(-1)^{-2024}$

u) $(-2)^{-2}$ v) $\frac{\left(2^{-3}3^2\right)^{-2}}{\left(2^3 3^{-1}\right)^{-2}}$ w) $0.\overline{2}^2$ x) $(0.\overline{2})^{-2}$ y) $(\sqrt{2})^{-3}$

Aufgabe A46 Formen Sie den Term (= Rechenausdruck) jeweils so um, dass jede Variable maximal einmal auftaucht (mit positivem oder negativem Exponenten) und keine Klammern oder Bruchstriche vorkommen.

Versuchen Sie anschliessend, ihr Ergebnis so umzuschreiben (etwa in Rot wie in den nachfolgenden Beispielen), dass es durch die Basen und Exponenten des Ausgangsterms in «möglichst einfacher Form», aber verschieden vom Ausgangsterm, ausgedrückt wird. Dabei dürfen wieder Klammern und und Bruchstriche verwendet werden.

Beispiele:

(i) $\frac{1}{c^{-5}} = \frac{1}{\frac{1}{c^5}} = \frac{c^5}{1} = c^5 = c^{-(-5)}$

(ii) $b^{-5} \cdot b^2 = \frac{1}{b^5} \cdot b^2 = \frac{b^2}{b^5} = \frac{1}{b^3} = b^{-3} = b^{-5+2}$

Bemerkung: Verwenden Sie nur Definition 4.11.2 und die bereits bekannten Potenzgesetze für natürliche Exponenten. Dass diese sinngemäss auch für ganzzahlige Exponenten gelten, sollen Sie in dieser Aufgabe selbst entdecken.

a) $a^3 \cdot a^5$ b) $a^{-3} \cdot a^5$ c) $a^3 \cdot a^{-5}$ d) $a^{-3} \cdot a^{-5}$

e) $\left(a^3\right)^5$ f) $\left(a^{-3}\right)^5$ g) $\left(a^3\right)^{-5}$ h) $\left(a^{-3}\right)^{-5}$

i) $\frac{a^3}{a^5}$ j) $\frac{a^{-3}}{a^5}$ k) $\frac{a^3}{a^{-5}}$ l) $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$

m) $(ab)^5$ n) $(ab)^{-5}$ o) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ p) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}$

Satz 4.11.3 Potenzgesetze = Rechengesetze für Potenzen; ganzzahligen Exponenten

Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $\boxed{e, f \in \mathbb{Z}}$ gelten: Zuvor waren diese Gesetze nur für natürliche Exponenten $e, f \in \mathbb{N}$ bekannt.

$a^e \cdot a^f =$ ✎ Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis (bei Produkten)

$a^e \cdot b^e =$ ✎ Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten (bei Produkten)

$(a^e)^f =$ ✎ Potenz einer Potenz

Als Spezialfälle ergeben sich ✎

denn $a^{-e} = a^{e\cdot(-1)} = (a^e)^{-1} = \frac{1}{a^e}$ bzw. $\frac{a^e}{a^f} = a^e \cdot \frac{1}{a^f} = a^e \cdot a^{-f} = a^{e-f}$ bzw. $\frac{a^e}{b^e} = a^e \cdot \frac{1}{b^e} = a^e \cdot b^{-e} = a^e \cdot b^{(-1)\cdot e} = a^e \cdot (b^{-1})^e = (a \cdot b^{-1})^e = \left(\frac{a}{b}\right)^e$.

Beweis. Weggelassen, denn: Das, was Sie hoffentlich in Aufgabe A46 in aussagekräftigen Beispielen nachgerechnet haben, müsste man nun abstrakt aufschreiben, also mit Variablen statt mit konkreten Zahlen. □

Aufgabe A47 Mit Hilfe der obigen Potenzgesetze: Schreiben Sie jeden der Ausdrücke

- einerseits als Produkt von Potenzen mit **ganzzahligen** Exponenten und
- andererseits als Quotienten, so dass oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs ein Produkt von Potenzen mit **positiven** Exponenten steht.

Dabei sind die Variablen alphabetisch zu ordnen. Ganz vorne darf ein Vorzeichen stehen.

Beispiel:

$$\frac{(-a)^3 \cdot b^7 \cdot c^8}{a^{15} \cdot c^2 \cdot d^2} = \frac{((-1)\cdot a)^3}{a^{15}} \cdot \frac{b^7}{1} \cdot \frac{c^8}{c^2} \cdot \frac{1}{d^2} = (-1)^3 \cdot \frac{a^3}{a^{15}} \cdot \frac{b^7}{1} \cdot \frac{c^8}{c^2} \cdot \frac{1}{d^2} = \boxed{-a^{-12} \cdot b^7 \cdot c^6 \cdot d^{-2}} = \boxed{-\frac{b^7 \cdot c^6}{a^{12} \cdot d^2}}$$

a) $x^{-4} \cdot x^5 \cdot x^{-7}$
b) $\left(\left(-x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$
c) $(x^{-4} \cdot y^2)^{-3} \cdot x^3$
d) $\dfrac{(-a)^2 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^4}{(-a)^4 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^2 \cdot (-d)}$
e) $\left(\dfrac{a^3 \cdot b^7 \cdot c^8}{a^{15} \cdot c^2 \cdot d^2}\right)^{-2}$
f) $\left(\dfrac{a^{2^3} \cdot a^{-2}}{(a^2)^3}\right)^{2024}$

Aufgabe A48 Bestimmen Sie jeweils alle ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, für die die jeweilige Gleichung gilt. Hinweis: Schreiben Sie die Potenzen der Gleichungen jeweils so um, dass auf beiden Seiten die gleiche Basis steht. In der ersten Gleichung sollten Sie beispielsweise verwenden, dass $8 = 2^3$ gilt.

a) $2^x = 8^{-4}$
b) $4^x = 8^{-10}$
c) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$
d) $27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-12}$

Aufgabe A49 Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\left(3^2 + 2^{-3}\right)^{-1}$ Lösung: $\frac{8}{73}$
(b) $\left((\sqrt{2})^{-1} + \sqrt{2}\right)^{-4}$ Lösung: $\frac{4}{81}$
(c) $\left((1 + (-2)^{-1}) \cdot ((2 - 4^{-1})^{-1})\right)^{-3}$ Lösung: $\frac{343}{8}$
(d) $\left(\sqrt{2 \cdot 3^{-1}} + \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^{-1}\right)^{-2} - 0.24$ Lösung: 0
(e) $\left((\sqrt[3]{2})^{-1} + \sqrt[3]{2^{-2}}\right) \cdot \sqrt[3]{4}$ Lösung: $1 + \sqrt[3]{2}$

4.12 Primfaktorzerlegung rationaler Zahlen

Aufgabe A50 «Primfaktorzerlegung» für rationale Zahlen: Schreiben Sie jeden der Ausdrücke

- einerseits als Produkt von Primzahlpotenzen mit **ganzzahligen** Exponenten und
- andererseits als Quotienten, so dass oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs ein Produkt von Primzahlpotenzen mit **positiven** Exponenten steht.

Dabei sind die Primzahlen jeweils der Grösse nach aufsteigend zu ordnen. Ganz vorne darf ein Vorzeichen stehen.
Beispiel:

$$\frac{2^3 \cdot 3^7 \cdot (-5)^8}{(-2)^{15} \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{(-1)^8}{(-1)^{15}} \cdot \frac{2^3}{2^{15}} \cdot \frac{3^7}{1} \cdot \frac{5^8}{5^2} \cdot \frac{1}{7^2} = \boxed{-2^{-12} \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^{-2}} = \boxed{-\frac{3^7 \cdot 5^6}{2^{12} \cdot 7^2}}$$

a) $\dfrac{6^2 \cdot (-15)^{-3} \cdot 35^4}{35^2 \cdot 6^{-3} \cdot 15^4}$
b) $\dfrac{90^{2024} \cdot 14^{-1000}}{(30^{250} \cdot 42^{-506})^4}$
c) $\dfrac{\frac{12^{-7}}{35^{-8}}}{\frac{30^{-5}}{28^{-6}}} \cdot \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{-12}$

4.12.1. Der folgende Satz unterscheidet sich von seinem Analogon für positive natürliche Zahlen (Satz 3.1.23) nur durch die eingerahmten Worte.

Satz 4.12.2 Satz über die Primfaktorzerlegung $\boxed{\text{rationaler Zahlen}}$

Jede positive $\boxed{\text{rationale}}$ Zahl $a > 0$ lässt sich eindeutig (= auf genau eine Weise) als Produkt

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m}$$

von Primzahlpotenzen schreiben, wobei

- $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der vorkommenden Primzahlen ist,
- die Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_m$ Primzahlen sind, die sogenannten **Primfaktoren von** a, und $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ gilt und
- die Exponenten $e_1, e_2, \dots, e_m$ von Null verschiedene $\boxed{\text{ganze}}$ Zahlen sind.

Die obige Darstellung von a als Produkt von Primzahlpotenzen heisst **Primfaktorzerlegung** oder kurz **PFZ** von a.

Beweis. Existenz der behaupteten Zerlegung: Dies haben Sie in Aufgabe A50 in instruktiven Beispielen nachgerechnet. Im allgemeinen schreibt man $a = \frac{m}{n}$ mit positiven natürlichen Zahlen m und n und fasst die Primfaktorzerlegungen von m und n in naheliegender Weise zusammen.

Eindeutigkeit der behaupteten Zerlegung (für Interessierte): Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für positive natürliche Zahlen: Sind $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m} = q_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \dots \cdot q_n^{f_n}$ zwei Primfaktorzerlegungen der gegebenen rationalen Zahl a, so multipliziere man diese Gleichung so lange mit positiven Potenzen der beteiligten Primzahlen, bis alle Exponenten positiv sind. Dann greift die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 3.1.23 und liefert sofort die behauptete Eindeutigkeit. □

4.12.3. Das folgende nette Resultat (Folgerung 4.12.4) beruht auf zwei einfachen Beobachtungen zur PFZ:

- In der PFZ der n-ten Potenz jeder rationalen Zahl a sind alle Exponenten durch n teilbar.

  Beispiel für $n = 2025$: Starte mit der PFZ von a. ✎

  (Dass die mittlere Zeile die PFZ von a^{2025} ist, folgt aus der Eindeutigkeit der PFZ.)

- Wenn alle Exponenten in der PFZ einer rationalen Zahl a durch n teilbar sind, so ist die n-te Wurzel von a ebenfalls rational (und hat die offensichtliche PFZ), in Formeln $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$.

  Beispiel: ✎

  (Genaue Begründung: Die Zahl $2^{12} \cdot 3^{-2} \cdot 19$ ist offensichtlich positiv und ihre 7-te Potenz ist a (dieselbe Rechnung wie bei der ersten Beobachtung). Also handelt es sich um die n-te Wurzel von a, d. h. die erste Gleichung ist begründet. Dass $2^{12} \cdot 3^{-2} \cdot 19$ rational ist, ist klar.
  Für die Klammerbemerkung: Dass die angegebene Darstellung die PFZ von $\sqrt[7]{a}$ ist, folgt wieder aus der Eindeutigkeit der PFZ.)

Folgerung 4.12.4 Irrationalität von Wurzeln rationaler Zahlen

Seien $q > 0$ eine positive rationale Zahl und $n > 1$ eine natürliche Zahl. Dann gilt: ✎

In Worten: Genau dann ist $\sqrt[n]{q}$ rational, wenn aus der Primfaktorzerlegung von q «direkt ersichtlich ist», welche rationale Zahl die n-te Wurzel von q ist.

Man kann die obige Aussage auch gleichbedeutend wie folgt umformulieren (durch Verneinung der Aussagen auf beiden Seiten des Äquivalenzpfeils $\iff$): ✎

Beweis. Dies folgt sofort aus den Beobachtungen in 4.12.3.

Implikation $\implies$: Ist $\sqrt[n]{q}$ rational, so wissen wir laut der ersten Beobachtung, dass alle Exponenten in der n-ten Potenz von $\sqrt[n]{q}$ durch n teilbar sind. Diese n-te Potenz ist aber $(\sqrt[n]{q})^n = q$.

Implikation $\impliedby$: Sind umgekehrt alle Exponenten in der PFZ von q durch n teilbar, so ist $\sqrt[n]{q}$ laut der zweiten Beobachtung rational. □

Beispiel 4.12.5. Alle Wurzeln aus 2 sind Primzahlen, also alle Zahlen

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[5]{2}, \quad \sqrt[6]{2}, \quad \dots$$

Der Grund ist, dass in der PFZ $2 = 2^1$ der Primzahlexponent 1 durch keine der Zahlen $2, 3, 4, 5, 6, \dots$ teilbar ist.

Allgemeiner gilt mit demselben Argument: Ist p eine beliebige Primzahl, so sind alle Wurzeln aus p irrational, also alle Zahlen $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[4]{p}$, $\sqrt[5]{p}$, $\sqrt[6]{p}$, $\dots$.

Beispiele 4.12.6.

(a) $n = 2$, Quadratwurzeln:
- $\sqrt{28} = \sqrt[2]{28}$ irrational, denn PFZ $28 = 2^2 \cdot 7^1$ und der Exponent 1 ist nicht durch 2 teilbar.
- $\sqrt{\frac{49}{72}}$ irrational, denn PFZ $\frac{49}{72} = \frac{7^2}{2^3 \cdot 3^2} = 2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 7^2$ und 2 kein Teiler des Exponenten -3.

(b) $n = 3$, Kubikwurzeln:
- $\sqrt[3]{9}$ irrational, denn $9 = 3^2$ und der Exponent 2 ist nicht durch 3 teilbar.
- $\sqrt[3]{54}$ irrational, denn $54 = 2^2 \cdot 3^3$ und der Exponent 2 ist nicht durch 3 teilbar.

Aufgabe A51 Entscheide und begründe jeweils, welche der folgenden Zahlen rational bzw. irrational (= nicht rational) ist. Wenn die Zahl rational ist, so ist sie anzugeben (PFZ reicht bei den entsprechenden Aufgaben mit grösseren Exponenten)

(a) $\sqrt{12}$
(b) $\sqrt{2500}$
(c) $\sqrt{2025}$
(d) $\sqrt[3]{2025}$
(e) $\sqrt[4]{2025}$
(f) $\sqrt{\frac{3}{5}}$
(g) $\sqrt{\frac{9}{196}}$
(h) $\sqrt{\frac{3}{196}}$

4.13 Vergleich unendlicher Mengen - verschiedene Arten von Unendlichkeit

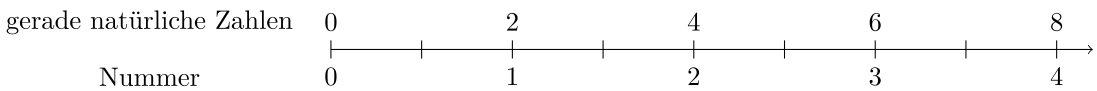
Motivation 4.13.1. Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Die naive Antwort ist ja, denn $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist eine echte Teilmenge. Für den Mathematiker sind dennoch beide Mengen «gleich gross», wie wir nun erklären.

Definition 4.13.2 abzählbar-unendlich

Eine Menge M heisst **abzählbar-unendlich**, wenn man all ihre Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen wie folgt abzählen (= «durchnummerieren») kann:
-
  - genau ein Element bekommt die Nummer 0,
  - genau ein Element bekommt die Nummer 1,
  - genau ein Element bekommt die Nummer 2,
  - genau ein Element bekommt die Nummer 3, etc.
- Jedes Element bekommt eine Nummer.

Dann hat M «gleich viele» Elemente wie $\mathbb{N}$; der Mathematiker sagt, dass M und $\mathbb{N}$ die gleiche **Mächtigkeit** haben oder **gleich mächtig** sind.

Beispiel 4.13.3. Die Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$ der geraden natürlichen Zahlen ist abzählbar-unendlich, wie aus der Abbildung hervorgeht, also gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ (obwohl sie eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist).



Aufgabe A52 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen abzählbar-unendlich ist, indem Sie in Abbildung 1 jeder ganzen Zahl eine geeignete Nummer geben (durch darunterschreiben).

ganze Zahl	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nummer										

Abbildung 1: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar-unendlich

Also sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gleich mächtig (obwohl $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ eine echte Teilmenge ist).

Aufgabe A53 «Forschungsaufgabe»: Bevor du weiterliest: Halte einen Moment inne und überlege dir,

(a) ob die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar-unendlich ist;

(b) ob die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abzählbar-unendlich ist.

Satz 4.13.4 Georg Cantor, 1891

(a) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist ✎

(b) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist ✎

Beweis. (a) **Cantors erstes Diagonalargument**: Schreibe alle Brüche wie in Abbildung 2 angegeben auf. Streiche alle nicht vollständig gekürzten Brüche (Geraden durch den «Ursprung» •; der erste Bruch auf jeder Geraden ist vollständig gekürzt, die anderen nicht). Nummeriere die vollständig gekürzten Brüche (etwa «entlang der Diagonalen»); genaue Erklärung in Lektion.

$\frac{-5}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{-5}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{-5}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{-5}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{-5}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
					•					

Abbildung 2: Ist $\mathbb{Q}$ abzählbar-unendlich?

Fazit: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar-unendlich.

(b) **Cantors zweites Diagonalargument**: Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar-unendlich ist. Sei $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ eine Nummerierung aller reeller Zahlen. Wir schreiben diese Zahlen wie folgt im Dezimalsystem auf, wobei die $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ die Ziffern an den Nachkommastellen sind:

✎

$$x_0 = \pm m_0.\ \underline{a_{00}}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03}\ a_{04}\ \dots$$
$$x_1 = \pm m_1.\ a_{10}\ \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \dots$$
$$x_2 = \pm m_2.\ a_{20}\ a_{21}\ \underline{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ \dots$$
$$x_3 = \pm m_3.\ a_{30}\ a_{31}\ a_{32}\ \underline{a_{33}}\ a_{34}\ \dots$$
$$x_4 = \pm m_4.\ a_{40}\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \underline{a_{44}}\ \dots$$
$$\vdots$$

Die Ziffern auf der «Diagonalen» sind unterstrichen. Wir definieren Ziffern $b_0, b_1, b_2, \dots \in \{4, 5\}$ wie folgt:

$$b_i := \begin{cases} 4 & \text{falls } a_{ii} = 5 \\ 5 & \text{falls } a_{ii} \neq 5 \end{cases}$$

Betrachte die Kommazahl

$$y := 0.b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \in \mathbb{R}$$ ✎

Diese Zahl unterscheidet sich von x_0 an der ersten Nachkommastelle (da $b_0 \neq a_{00}$), von x_1 an der zweiten Nachkommastelle (da $b_1 \neq a_{11}$), etc. Sie taucht also **nicht** in unserer Liste $x_0, x_1, x_3, \dots$ aller reeller Zahlen auf (Widerspruch zur Annahme).
Fazit: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar-unendlich.
Beachte: Bei der Definition der Ziffern b_i haben wir bewusst weder die Ziffer 0 noch die Ziffer 9 gewählt, denn sonst könnte es eventuell Probleme geben wegen der Uneindeutigkeit der Darstellung einer reellen Zahl als Kommazahl («$1 = 0.\overline{9}$»).

□

4.13.5. Dies zeigt, dass es in der Mathematik verschiedene Arten von Unendlichkeit gibt! Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ haben dieselbe «Unendlichkeit». Die «Unendlichkeit» von $\mathbb{R}$ ist echt grösser.

4.13.6. Der Fernsehsender Arte hat eine sehr empfehlenswerte Serie von Mathematik-Videos («Mathewelten»), zum Beispiel ein Video namens «Auf dem Weg in die Unendlichkeit», in dem sowohl Cantors Diagonalargument als auch Hilberts Hotel, ein bekanntes Gedankenexperiment zum Begriff der Unendlichkeit, vorkommen (Hilberts Hotel (Link auf Wikipedia)):
`https://www.arte.tv/de/videos/097454-005-A/mathewelten/`

4.13.7 (Die reellen Zahlen ohne die rationalen als Schweizer Käse)**.** Wir geben noch ein Gedankenexperiment, das recht deutlich zeigt, wie «klein» die Teilmenge $\mathbb{Q}$ im Vergleich zu $\mathbb{R}$ ist.
Sei $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ eine Liste aller rationalen Zahlen (sie existert, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist). Wir löschen auf dem reellen Zahlenstrahl per Tipp-Ex gewisse Bereiche. Sei $\ell > 0$ eine fixierte reelle Zahl.

- Wir löschen q_0 mit einem Tipp-Ex-Strich der Länge ℓ.
- Wir löschen q_1 mit einem Tipp-Ex-Strich der Länge $\frac{1}{10} \cdot \ell$.
- Wir löschen q_2 mit einem Tipp-Ex-Strich der Länge $\frac{1}{100} \cdot \ell$.
- etcetera.

Die Summe der Längen aller Tipp-Ex-Striche ist

$$1 \cdot \ell + \frac{1}{10} \cdot \ell + \frac{1}{100} \cdot \ell + \ldots = \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) \cdot \ell = 1.11111 \ldots \cdot \ell = 1.\overline{1} \cdot \ell$$

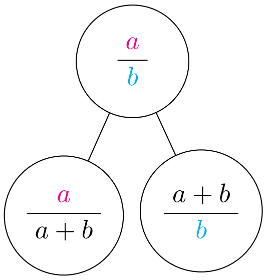
Stellen wir uns $\mathbb{R}$ als Käse ohne Löcher vor (dessen Länge unendlich ist) und dann die gelöschten Bereiche als Löcher um alle rationalen Zahlen (= rationalen Käsepunkte), so ist die Gesamtlänge aller Löcher endlich und genauer sogar beliebig klein wählbar (denn man darf ℓ so klein wählen, wie man will).

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

4.14 Calkin-Wilf-Baum

Algorithmus 4.14.1 zur Erstellung des Calkin-Wilf-Baums

(1) Schreibe den Bruch $\frac{1}{1}$ auf (oben in der Mitte des Blattes).
(2) Von jedem bereits aufgeschriebenen Bruch $\frac{a}{b}$ zeichne
- eine Strecke diagonal nach links unten und schreibe an sein Ende den Bruch $\frac{a}{a+b}$;
- eine Strecke diagonal nach rechts unten und schreibe an sein Ende den Bruch $\frac{a+b}{b}$.



4.14.2. Die entstehende Struktur ist ein Beispiel eines **Graphen** und genauer eines **Baumes**.
Die «Verzweigungspunkte» nennt man **Knoten**, die «Verbindungslinien» **Kanten**. Der Knoten ganz oben heisst **Wurzel** des Baumes. Die Knoten, die man von einem Knoten nach unten gehend über eine Kante erreichen kann, heissen die **Kinder** dieses Knotens.

Satz 4.14.3

Im Calkin-Wilf-Baum taucht jede positive rationale Zahl genau einmal in vollständig gekürzter Darstellung auf.

Beweis. Siehe etwa Links unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Calkin%E2%80%93Wilf_tree`. □

4.14.4. Wenn man den Calkin-Wilf-Baum zeilenweise durchgeht, erhält man die sogenannte Calkin-Wilf-Folge. Sie stellt eine Nummerierung der rationalen Zahlen dar. Der obige Satz zeigt also in besonders schöner Weise, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar-unendlich ist.

Aufgabe A54 Zeichne den Calkin-Wilf-Baum mindestens bis zu den 16 Grossgrossenkelkindern von $\frac{1}{1}$.
Zur Kontrolle: In der Grossgrossenkelkinderzeile steht
- an erster Position $\frac{1}{5}$;
- an dritter Position $\frac{4}{7}$;
- an zehnter Position $\frac{7}{5}$.
- an letzter (= sechzehnter) Position $\frac{5}{1}$.

4.15 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-kopfrechnen-ueben

Lösung zu A2 ex-einmaleins-auswendiglernen

Lösung zu A3 ex-teilbarkeitsregeln-selbst-beweisen

- Teilbarkeit durch 4 am Beispiel $1234ab$:

$$1234ab = 1234 \cdot 100 + ab = \underbrace{1234 \cdot 25 \cdot 4}_{\text{durch 4 teilbar}} + ab$$

- Teilbarkeit durch 5 am Beispiel $1234567z$:

$$1234567z = 1234567 \cdot 10 + z = \underbrace{1234567 \cdot 2 \cdot 5}_{\text{durch 5 teilbar}} + z$$

- Teilbarkeit durch 8 am Beispiel $123abc$:

$$123abc = 123 \cdot 1000 + abc = \underbrace{123 \cdot 125 \cdot 8}_{\text{durch 8 teilbar}} + abc$$

- Teilbarkeit durch 10 am Beispiel $1234567z$:

$$1234567z = \underbrace{1234567 \cdot 10}_{\text{durch 10 teilbar}} + z$$

Lösung zu A4 ex-teilbarkeit-einfach

Auch wenn wir sie noch nicht behandelt haben, sind diverse Primfaktorzerlegungen angegeben.

(a)
- $140612164 = 2^2 \cdot 7^4 \cdot 11^4$; gesuchte Teiler sind $1, 2, 4, 7, 11$.
- $389061369015 = 3 \cdot 5 \cdot 11^{10}$; gesuchte Teiler sind $1, 3, 5, 11$.
- $1073741824 = 2^{30}$; gesuchte Teiler sind $1, 2, 4, 8$.
- $39916800 = 11!$; gesuchte Teiler sind $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$
- Zahl geändert, ich wollte eine Null am Ende statt einer 9. $27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; gesuchte Teiler sind $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

(b) Die Zahl muss durch $8 = 2^3$ und $9 = 3^2$ und 5 und 7 und 11 teilbar sein. Dann ist sich automatisch durch alle Zahlen von 1 bis 11 teilbar. Die gesuchte Zahl ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$. (Das war die letzte Zahl in der vorherigen Aufgabe.)

(c) Gib jeweils alle Teiler der angegebenen Zahl an (der Grösse nach aufsteigend geordnet).
- $20 = 2^2 \cdot 5$; die Teiler sind: 1, 2, 4, 5, 10, 20.
- $91 = 7 \cdot 13$; die Teiler sind: 1, 7, 13, 91.
- $100 = 2^2 \cdot 5^2$; die Teiler sind: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
- $484 = 2^2 \cdot 11^2$; die Teiler sind: 1, 2, 4, 11, 22, 44, 121, 242, 484.
- $625 = 5^4$; die Teiler sind: 1, 5, 25, 125, 625.
- $726 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$; die Teiler sind: 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66, 121, 242, 363, 726.

- $1024 = 2^{10}$; die Teiler sind: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
- 1; es gibt nur einen Teiler, nämlich 1.
- 0; die Teiler sind alle natürlichen Zahlen, also 0, 1, 2, 3, 4, ...

(d) Zeige durch (möglichst kleine) Gegenbeispiele, dass die folgenden Teilbarkeitsregeln falsch sind:

- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 7 teilbar ist.»
  Das kleinste Gegenbeispiel ist 14 mit Quersumme 5.
- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 7 teilbar ist.»
  Das kleinste Gegenbeispiel ist 14 mit alternierender Quersumme $4 - 1 = 3$.
- «Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 5 teilbar ist.»
  Das kleinste Gegenbeispiel ist 10 mit Quersumme 1.

Lösung zu A5 ex-ggt-kgv

(a)

a) $\operatorname{ggT}(9,4) = 1$, $\operatorname{kgV}(9,4) = 36$

b) $\operatorname{ggT}(18,12) = 6$, $\operatorname{kgV}(18,12) = 36$

c) $\operatorname{ggT}(25,10) = 5$, $\operatorname{kgV}(25,5) = 25$

d) $\operatorname{ggT}(60,90) = 30$, $\operatorname{kgV}(60,90) = 180$

(b) Die Produkte $\operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b)$ stimmen jeweils mit dem Produkt $a \cdot b$ überein. (Dass dies allgemein so stimmt, werden wir bald mit Hilfe der Primfaktorzerlegung sehen.)

Lösung zu A6 ex-primzahlen-bis-100

Es gibt 25 Primzahlen im angegebenen Intervall:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Lösung zu A7 ex-primzahl-test

(a) 211 ist weder durch 2 (letzte Ziffer) noch durch 3 (Quersumme) noch durch 5 Quersumme teilbar. 211 ist nicht durch 7 teilbar (da 210 Vielfaches von 7). 211 ist nicht durch 9 teilbar (Quersumme). 211 ist nicht durch 11 teilbar (alternierende Quersumme). 211 ist nicht durch 13 teilbar (Rechnung: $211 : 13 = 16$ Rest 3).
Also ist 211 eine Primzahl. Warum dies genügt, wird in der letzten Teilaufgabe begründet.

(b) Wegen $18^2 = 324$ genügt es, die Primzahlen bis 17 darauf zu testen, ob sie Teiler von 323 sind.
2, 3, 5, 9, 11 scheiden auf Grund von Teilbarkeitskriterien als Teiler von 323 aus.
Durch schriftliche Division bleiben zu prüfen:

- 7 (liefert Rest 1);
- 13 (liefert Rest 11);
- 17 liefert Rest 0).

Also ist 17 ein Teiler von 323 und 323 ist keine Primzahl ($323 = 17 \cdot 19$).

(c) Wenn eine Zahl n keine Primzahl ist, so hat sie einen Teiler t mit $1 < t < n$. Da t ein Teiler von n ist, gibt es ein s mit $n = ts$ und s ist ebenfalls Teiler von n.
Wenn sowohl $t > \sqrt{n}$ als auch $t > \sqrt{n}$ gelten, so folgt $n = ts > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, Widerspruch. Also muss $t \leq \sqrt{n}$ oder $t \leq \sqrt{n}$ gelten.

Lösung zu A8 ex-neue-primzahlen-konstruieren

(a) $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ ist bereits eine Primzahl, d.h. 31 ist die neue Primzhahl.

(b) $a = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = 3 \cdot 5$, also liefert der Beweis als neue Primzahl die 3.

(c)
- Startliste: 2.
- $2 + 1 = 3$ ist Primzahl, neue Liste 2, 3.
- $2 \cdot 3 + 1 = 7$ ist Primzahl, neue Liste 2, 3, 7.
- $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ ist Primzahl, neue Liste 2, 3, 7, 43.
- $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807$ hat 13 als kleinsten Teiler $\neq 1$, neue Liste 2, 3, 7, 43, 13.
- $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 + 1 = 23479$ hat 53 als kleinsten Teiler $\neq 1$, neue Liste 2, 3, 7, 43, 13, 53.

- $2\cdot 3\cdot 7\cdot 43\cdot 13\cdot 53+1 = 1244335$ hat 5 als kleinsten Teiler $\neq 1$, neue Liste 2, 3, 7, 43, 13, 53, 5. (Diese besteht aus 7 Elementen, also fertig.)

Lösung zu A9 ex-primzahllluecken-neu

Lösung zu A10 ex-potenzgesetze-ueben

a) x^5y^8

b) $t^{58}u^{58}w^{23}$

c) $a^{84}s^{63}t^{21}$

d) $p^{105}q^{51}$

e) $2^{xy}\cdot 3^{5xy}\cdot 5^{4xy}$

f) $p^{2x^3}\cdot q^{x^3+x^2}$

Lösung zu A11 ex-potenzgesetze-beliebte-fehler

a) Für $a=b=1$, $e=2$ gilt $(a+b)^e = 4 \neq a^e + b^e = 2$.

b) Für $a=e=2$, $f=3$ gilt $(a^e)^f = 64 \neq a^{e+f} = 32$.

c) Für $a=e=2$, $f=3$ gilt $(a^e)^f = 64 \neq a^{e^f} = 256$

Lösung zu A12 ex-primfaktorzerlegung-einfach

a) $24 = 2^3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^1$; $m=2$; $p_1=2<p_2=3$; $e_1=3$, $e_2=1$

b) $31 = 31^1$; $m=1$, $p_1=31$, $e_1=1$

c) $72 = 8\cdot 9 = 2^3\cdot 3^2$; $m=2$; $p_1=2<p_2=3$; $e_1=3$, $e_2=2$

d) $91 = 13\cdot 17 = 13^1\cdot 17^1$; $m=2$; $p_1=13<p_2=17$; $e_1=1$, $e_2=1$

e) $2100 = 21\cdot 100 = 3\cdot 7\cdot 10\cdot 10 = 3\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$;$m=4$; $p_1=2<p_2=3<p_3=5<p_4=7$; $e_1=2$, $e_2=1$, $e_3=2$, $e_4=1$

f) $2023 = 7\cdot 289 = 7\cdot 17\cdot 17 = 7^1\cdot 17^2$; $m=2$; $p_1=7<p_2=17$; $e_1=1$, $e_2=2$

g) $2024 = 2\cdot 1012 = 2^2\cdot 506 = 2^3\cdot 253 = 2^3\cdot 11\cdot 23$; $m=3$; $p_1=2<p_2=11<p_3=23$; $e_1=3$, $e_2=2$, $e_3=1$

h) $1024 = 2\cdot 512 = 2\cdot 2\cdot 256 = \cdots = 2^{10}$; $m=1$, $p_1=2$, $e_1=10$

i) Hier und in den folgenden Teilaufgaben verwenden wir die zuvor bestimmten Primfaktorzerlegungen $24 = 2^3\cdot 3^1$ und $72 = 2^3\cdot 3^2$. Damit gilt (unter Verwendung von Potenzgesetzen)

$$24\cdot 72 = 2^3\cdot 3^1\cdot 2^3\cdot 3^2 = 2^3\cdot 2^3\cdot 3^1\cdot 3^2 = 2^{3+3}\cdot 3^{1+2} = 2^6\cdot 3^3$$

$m=2$; $p_1=2<p_2=3$; $e_1=6$, $e_2=3$

j) $24^3 = (2^3\cdot 3)^3 = (2^3)^3\cdot 3^3 = 2^{3\cdot 3}\cdot 3^3 = 2^9\cdot 3^3$;
$m=2$; $p_1=2<p_2=3$; $e_1=9$, $e_2=3$

k) $24^3\cdot 72^2 = (2^3\cdot 3)^3\cdot(2^3\cdot 3^2)^2 = (2^3)^3\cdot 3^3\cdot(2^3)^2\cdot(3^2)^2 = 2^{3\cdot 3}\cdot 3^3\cdot 2^{3\cdot 2}\cdot 3^{2\cdot 2} = 2^9\cdot 3^3\cdot 2^6\cdot 3^4 = 2^{9+6}\cdot 3^{3+4} = 2^{15}\cdot 3^7$
$m=2$, $p_1=2<p_2=3$, $e_1=15$, $e_2=7$

l) $(24^7)^2\cdot 72^{5^3} = 24^{7\cdot 2}\cdot 72^{125} = (2^3\cdot 3)^{14}\cdot(2^3\cdot 3^2)^{125} = (2^3)^{14}\cdot 3^{14}\cdot(2^3)^{125}\cdot(3^2)^{125} = (2^{3\cdot 14}\cdot 3^{14}\cdot 2^{3\cdot 125}\cdot 3^{2\cdot 125} = (2^{42}\cdot 3^{14}\cdot 2^{375}\cdot 3^{250} = (2^{42}\cdot 2^{375}\cdot 3^{14}\cdot 3^{250} = (2^{42+375}\cdot 3^{14+250} = (2^{417}\cdot 3^{264}$
$m=2$, $p_1=2<p_2=3$, $e_1=417$, $e_2=264$

Lösung zu A13 ex-primfaktorzerlegung

a) $294\cdot 7500\cdot 2300 = 2\cdot 3\cdot 7^2 \cdot 3\cdot 5^2\cdot 10^2 \cdot 10^2\cdot 23 = 2\cdot 3\cdot 7^2 \cdot 3\cdot 5^2\cdot(2\cdot 5)^2 \cdot (2\cdot 5)^2\cdot 23 = 2\cdot 3\cdot 7^2 \cdot 2^2\cdot 3\cdot 5^4 \cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 23 = 2^5\cdot 3^2\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 23$

b) $315\cdot 154000\cdot 29000 = 3^2\cdot 5\cdot 7 \cdot 2\cdot 7\cdot 10^3\cdot 11 \cdot 10^3\cdot 29 = 3^2\cdot 5\cdot 7 \cdot 2\cdot 7\cdot(2\cdot 5)^3\cdot 11 \cdot (2\cdot 5)^3\cdot 29 = 3^2\cdot 5\cdot 7 \cdot 2^4\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11 \cdot 2^3\cdot 5^3\cdot 29 = 2^7\cdot 3^2\cdot 5^7\cdot 7^2\cdot 11\cdot 29$

c) $84\cdot 16500\cdot 1900 = 2^2\cdot 3\cdot 7 \cdot 3\cdot 5\cdot 10^2\cdot 11 \cdot 10^2\cdot 19 = 2^2\cdot 3\cdot 7 \cdot 3\cdot 5\cdot(2\cdot 5)^2\cdot 11 \cdot (2\cdot 5)^2\cdot 19 = 2^2\cdot 3\cdot 7 \cdot 2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 11 \cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 19 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7\cdot 11\cdot 19$

d) $525 \cdot 1800 \cdot 19000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 19 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 19$

e)

$$\begin{aligned}\left(5 \cdot 2^2 \cdot 7^4\right)^{10} &= \left(2^2 \cdot 5 \cdot 7^4\right)^{10}\\ &= \left(2^2\right)^{10} \cdot 5^{10} \cdot \left(7^4\right)^{10}\\ &= 2^{2 \cdot 10} \cdot 5^{10} \cdot 7^{4 \cdot 10}\\ &= 2^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{40}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\left(6^2 \cdot 54^4\right)^{10} &= \left((2 \cdot 3)^2 \cdot \left(2 \cdot 3^3\right)^4\right)^{10}\\ &= \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot \left(3^3\right)^4\right)^{10}\\ &= \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^{3 \cdot 4}\right)^{10}\\ &= \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^{12}\right)^{10}\\ &= \left(2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{12}\right)^{10}\\ &= \left(2^{2+4} \cdot 3^{2+12}\right)^{10}\\ &= \left(2^6 \cdot 3^{14}\right)^{10}\\ &= \left(2^6\right)^{10} \cdot \left(3^{14}\right)^{10}\\ &= 2^{6 \cdot 10} \cdot 3^{14 \cdot 10}\\ &= 2^{60} \cdot 3^{140}\end{aligned}$$

Lösung zu A14 ex-primfaktorzerlegung-quadrat-kubikzahl

(a) Wegen $(3^x \cdot 13^y \cdot 19^z)^2 = 3^{2x} \cdot 13^{2y} \cdot 19^{2z}$ müssen alle Exponenten in der Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl durch zwei teilbar sein. Damit bleiben nur b, d und h Kandidaten für Quadratzahlen. Dass es sich dabei wirklich um Quadratzahlen handelt, sieht man so:

$$\begin{aligned}b &= 3^{24} \cdot 13^{2026} \cdot 19^6 = (3^{\frac{24}{2}} \cdot 13^{\frac{2026}{2}} \cdot 19^{\frac{6}{2}})^2 = (3^{12} \cdot 13^{1013} \cdot 19^3)^2\\ d &= (3^2 \cdot 13^{1014} \cdot 19^5)^2\\ h &= (3^{12} \cdot 13^{1014} \cdot 19^6)^2\end{aligned}$$

(b) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung

jeder der Exponenten $e_1, \ldots, e_m$ durch 2 teilbar ist. Alternativ (ohne Variablennamen): jeder Exponent bei jedem Primfaktor durch 2 teilbar ist. Alternativ (ohne Variablennamen): jeder Primfaktor in eine durch 2 teilbare Potenz erhoben wird.

(c) Es gilt $(3^x \cdot 13^y \cdot 19^z)^3 = 3^{3x} \cdot 13^{3y} \cdot 19^{3z}$. Alle Exponenten in der Primfaktorzerlegung einer Kubikzahl müssen also durch 3 teilbar sein. Damit bleiben als Kandidaten für Kubikzahlen nur e und h (Quersummentest für Teilbarkeit durch drei!). Es gilt

$$\begin{aligned}e &= 3^{24} \cdot 13^{2025} \cdot 19^{21} = (3^{\frac{24}{3}} \cdot 13^{\frac{2025}{3}} \cdot 19^{\frac{21}{3}})^3 = (3^8 \cdot 13^{675} \cdot 19^7)^3\\ h &= 3^{24} \cdot 13^{2028} \cdot 19^{12} = (3^{\frac{24}{3}} \cdot 13^{\frac{2028}{3}} \cdot 19^{\frac{12}{3}})^3 = (3^8 \cdot 13^{676} \cdot 19^4)^3\end{aligned}$$

Für die Rechenfaulen: Wenn man weiss, dass 2025 durch drei teilbar ist (Quersummenregel), so muss man den Wert von $\frac{2025}{3}$ eigentlich gar nicht ausrechnen.

(d) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine Kubikzahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung

jeder der Exponenten $e_1, \ldots, e_m$ durch 3 teilbar ist.

(e) Ähnlich wie oben bleibt nur h als Kandidat, und in der Tat ist h die sechste Potenz von $3^4 \cdot 13^{338} \cdot 19^2$.

(f) Eine positive natürliche Zahl ist genau dann eine sechste Potenz einer natürlichen Zahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung $\boxed{\text{jeder der Exponenten } e_1, \dots, e_m \text{ durch 6 teilbar ist.}}$

Lösung zu A15 ex-pfz-der-teiler

(a) Naiv muss man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 500 darauf testen, ob sie ein Teiler von 500 sind.
Etwas weniger naiv: Man muss nur die Zahlen von 1 bis zur abgerundeten Wurzel von 500 testen ($\sqrt{500} \approx 22.36$), denn die Teiler kommen in «Paaren»: Wenn $500 = x \cdot y$ gilt, muss einer der Faktoren x oder y kleiner-gleich $\sqrt{500}$ sein (denn sonst wäre das Produkt $x \cdot y > \sqrt{500} \cdot \sqrt{500} = 500$.)
Die 12 Teiler sind also 1, 2, 4, 5, 10, 20 (und zugehörig) 25, 50, 100, 125, 250, 500.

(b)

$$
\begin{aligned}
500 &= 2^2 \cdot 5^3 \\
250 &= 2^1 \cdot 5^3 \\
125 &= 2^0 \cdot 5^3 = 5^3 \\
100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\
50 &= 2^1 \cdot 5^2 \\
25 &= 2^0 \cdot 5^2 = 5^2 \\
20 &= 2^2 \cdot 5^1 \\
10 &= 2^1 \cdot 5^1 \\
5 &= 2^0 \cdot 5^1 = 5^1 = 5 \\
4 &= 2^2 \cdot 5^0 = 2^2 \\
2 &= 2^1 \cdot 5^0 = 2^2 \\
1 &= 2^0 \cdot 5^0 = 1
\end{aligned}
$$

(c) Man erhält alle Teiler von 500, wenn man in der Primfaktorzerlegung $500 = 2^2 \cdot 5^3$ die beiden Exponenten verkleinert.
Dabei gibt es für den Exponenten beim Primfaktor 2 die $3 = 2 + 1$ Möglichkeiten 2, 1, 0; für den Exponenten beim Primfaktor 5 gibt es die $4 = 3 + 1$ Möglichkeiten 3, 2, 1, 0. Insgesamt gibt es $(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Jede davon entspricht genau einem der 12 Teiler von 500.

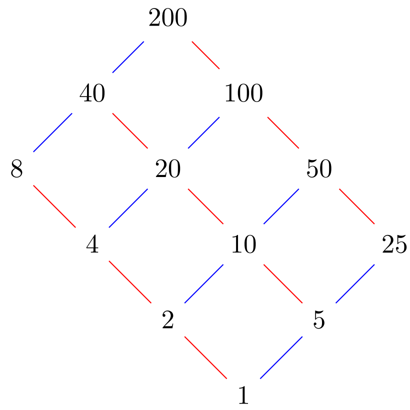
(d) Verallgemeinere deine Erkenntnis und versuche, den Inhalt von Satz 3.1.26 zu erraten.

Lösung zu A16 ex-teiler-anzahl-der-teiler-teilerbild

(a)
- Die Zahl

$$200 = 8 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2$$

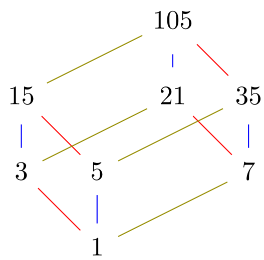
hat $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ Teiler.
Teilerdiagramm:



- Die Zahl

$$105 = 5 \cdot 21 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

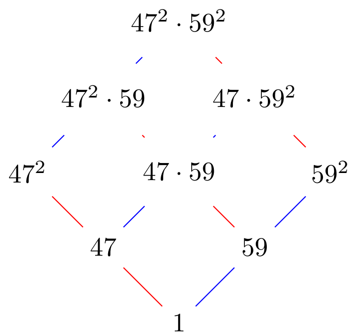
hat $(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 8$ Teiler.
Teilerdiagramm:



- Die Zahl

$$47^2 \cdot 59^2$$

hat $(2+1) \cdot (2+1) = 9$ Teiler.
Teilerdiagramm:



(b)
- Die Zahl

$$5 \cdot 13^{10} \cdot 17^{19} \cdot 19^{29}$$

hat $2 \cdot 11 \cdot 20 \cdot 30 = 12 \cdot 11 \cdot 100 = 13200$ Teiler, nämlich

$$5^e \cdot 13^f \cdot 17^g \cdot 19^h \text{ für beliebige natürliche Zahlen } e,\, f,\, g,\, h \text{ mit } \begin{array}{l} 0 \leq e \leq 1 \text{ und} \\ 0 \leq f \leq 10 \text{ und} \\ 0 \leq g \leq 19 \text{ und} \\ 0 \leq h \leq 29. \end{array}$$

- Die Zahl

$$\begin{aligned}
\left(50^{10}\cdot 20^{11}\right)^4 &= \left((2\cdot 5^2)^{10}\cdot (2^2\cdot 5)^{11}\right)^4\\
&= \left(2^{10}\cdot (5^2)^{10}\cdot (2^2)^{11}\cdot 5^{11}\right)^4\\
&= \left(2^{10}\cdot 5^{2\cdot 10}\cdot 2^{2\cdot 11}\cdot 5^{11}\right)^4\\
&= \left(2^{10}\cdot 5^{20}\cdot 2^{22}\cdot 5^{11}\right)^4\\
&= \left(2^{10}\cdot 2^{22}\cdot 5^{20}\cdot 5^{11}\right)^4\\
&= \left(2^{10+22}\cdot 5^{20+11}\right)^4\\
&= \left(2^{32}\cdot 5^{31}\right)^4\\
&= \left(2^{32}\right)^4\cdot \left(5^{31}\right)^4\\
&= 2^{32\cdot 4}\cdot 5^{31\cdot 4}\\
&= 2^{128}\cdot 5^{124}
\end{aligned}$$

hat $129\cdot 125 = 16125$ Teiler, nämlich

$$2^e\cdot 5^f \text{ für beliebige natürliche Zahlen } e,\ f \text{ mit } \begin{array}{l} 0\le e\le 128 \text{ und}\\ 0\le f\le 124.\end{array}$$

Alternative Bestimmung der Primfaktorzerlegung (auch mit etwas weniger Zwischenschritten):

$$\begin{aligned}
\left(50^{10}\cdot 20^{11}\right)^4 &= 50^{40}\cdot 20^{44}\\
&= (2\cdot 5^2)^{40}\cdot (2^2\cdot 5)^{44}\\
&= 2^{40}\cdot 5^{80}\cdot 2^{88}\cdot 5^{44}\\
&= 2^{128}\cdot 5^{124}
\end{aligned}$$

Lösung zu A17 ex-ggt-kgv-per-pfz

(a) ggT: Alle Teiler beider Zahlen ermitteln, etwa per tapferem Ausprobieren bis zur Wurzel jeder Zahl. Damit den ggT ermitteln.
kgV: Das Produkt $a\cdot b$ schriftlich ausrechnen. Es ist sicherlich ein gemeinsames Vielfaches. Ausprobieren, ob es ein kleineres gemeinsame Vielfaches gibt.

(b)

$$\begin{aligned}
a &= 3'500 = 2^2 \qquad\ \cdot 5^3\cdot 7 &&= 2^2\cdot 3^0\cdot 5^3\cdot 7^1\\
b &= 10'584 = 2^3\cdot 3^3 \qquad \cdot 7^2 &&= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^0\cdot 7^2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{ggT}(a,b) &= 2^2\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7 &&= 28\\
\operatorname{kgV}(a,b) &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^2 &&\overset{\text{schriftliches Multiplizieren}}{=} 1'323'000
\end{aligned}$$

(d) linke Seite: $a\cdot b = 3'500\cdot 10'584 = 37'044'000$; rechte Seite: $\operatorname{ggT}(a,b)\cdot\operatorname{kgV}(a,b) = 28\cdot 1'323'000 = 37'044'000$; also stimmt die Folgerung im Beispiel.

Lösung zu A18 ex-ggt-kgv-a-b-vier-aus-drei

(a)

$$a = \frac{\operatorname{ggT}(a,b)\cdot\operatorname{kgV}(a,b)}{b} = \frac{8\cdot 96}{24} = 32$$

(b)

$$b = \frac{\operatorname{ggT}(a,b)\cdot\operatorname{kgV}(a,b)}{a} = \frac{6\cdot 90}{30} = 18$$

(c) Entweder $a = 7^{100} \cdot 11^{700}$ und $b = 7^{200} \cdot 11^{700}$ oder andersherum.

(d)

$$\mathrm{ggT}(a,b) = 6 = 2 \cdot 3$$
$$\mathrm{kgV}(a,b) = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Bei jedem Primfaktor, der mit zwei verschiedenen Exponenten in ggT und kgV vorkommt, kann man für a entweder den grösseren oder den kleineren wählen. Das gibt «s hoch Anzahl der PF mit verschiedenen Exponenten» Möglichkeiten.

- $a = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 6$ und $b = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 168$
- $a = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 42$ und $b = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 24$
- $a = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 24$ und $b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 42$
- $a = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 168$ und $b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 6$

(e) Nein, denn der ggT ist stets kleiner als der kgV.

(f) Ja, etwa $a = 100$ und $b = 400$.

(g) Nein, denn der kgV ist stets ein Vielfaches des ggT.

(h) Sobale k ein positives Vielfaches von g ist, gibt es a und b wie gewünscht, etwa $a = g$ und $b = k$.

Lösung zu A19 ex-euklidischer-algorithmus

Bestimme jeweils mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT der beiden angegebenen Zahlen.

(a) 3151 und 1472 Lösung: 23

$$3151 = 2 \cdot 1472 + 207$$
$$1472 = 7 \cdot 207 + 23$$
$$207 = 9 \cdot 23 + 0$$

(b) 450 und 195 Lösung: 15

$$450 = 2 \cdot 195 + 60$$
$$195 = 3 \cdot 60 + 15$$
$$60 = 4 \cdot 15 + 0$$

(c) 3224 und 288 Lösung: 8

$$3224 = 11 \cdot 288 + 56$$
$$288 = 5 \cdot 56 + 8$$
$$56 = 7 \cdot 8 + 0$$

(d) 1025 und 78 Lösung: 1

$$1025 = 13 \cdot 78 + 11$$
$$78 = 7 \cdot 11 + 1$$
$$11 = 11 \cdot 1 + 0$$

(e) 1572 und 678 Lösung: 6

$$1572 = 2 \cdot 678 + 216$$
$$678 = 3 \cdot 216 + 30$$
$$216 = 7 \cdot 30 + 6$$
$$216 = 7 \cdot 30 + 6$$

(f) 144 und 452 Lösung: 4

$$144 = 0 \cdot 452 + 144$$
$$452 = 3 \cdot 144 + 20$$
$$144 = 7 \cdot 20 + 4$$
$$144 = 7 \cdot 20 + 4$$

Lösung zu A20 ex-gegenzahl-von-gegenzahl-summe-differenz

Lösung zu A21 ex-multiplikation-per-zahlenstrahl

Lösung zu A22 ex-assoziativ-vier-faktoren

Die fünf Möglichkeiten sind

$$v\cdot((w\cdot x)\cdot y) \quad \text{und} \quad v\cdot(w\cdot(x\cdot y)) \quad \text{und} \quad (v\cdot w)\cdot(x\cdot y) \quad \text{und} \quad ((v\cdot w)\cdot x)\cdot y \quad \text{und} \quad (v\cdot(w\cdot x))\cdot y$$

Gleichheit der ersten beiden Ausdrücke: Nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation gilt $(w\cdot x)\cdot y = w\cdot(x\cdot y)$. Nun multipliziere man beide Seiten der Gleichung von links mit v.

Gleichheit von zweitem und drittem Ausdruck: Dies folgt sofort aus dem Assoziativgesetz mit $a = v$, $b = w$ und $c = x\cdot y$.

Gleichheit von drittem und viertem Ausdruck: Dies folgt sofort aus dem Assoziativgesetz mit $a = v\cdot w$, $b = x$ und $c = y$.

Gleichheit von viertem und fünftem Ausdruck: Multipliziere $(v\cdot w)\cdot x = v\cdot(w\cdot x)$ (was nach dem Assoziativgesetz gilt) von rechts mit y.

Lösung zu A23 ex-kommutativ-aber-nicht-assoziativ

Die Verknüpfung $\heartsuit$ ist kommutativ, aber nicht assoziativ:

Die Kommutativität ergibt sich direkt aus den Spielregeln, denn das siegreiche Symbol von «x gegen y» ist auch das siegreiche Symbol von «y gegen x» (die Reihenfolge spielt keine Rolle), d.h. es gilt $x\heartsuit y = y\heartsuit x$ für alle $x, y \in M$.

Um zu zeigen, dass die Verknüpfung nicht assoziativ ist (d.h. dass nicht $x\heartsuit(y\heartsuit z) = (x\heartsuit y)\heartsuit z$ für alle $x, y, z \in M$ gilt), genügt ein Gegenbeispiel:

$$\underbrace{(r\heartsuit p)\heartsuit s}_{=p\heartsuit s=s} \neq \underbrace{r\heartsuit(p\heartsuit s)}_{=r\heartsuit s=r}$$

Lösung zu A24 ex-rechnen-in-Z

a) $-|-5| = -5$

b) $|-5|^3 = 5^3 = 125$

c) $-(-(-(-(-3)))) = -(-(-3)) = -3$

d) $-(1-(2-(4-(8-16)))) = -(1-(2-(4-(-8)))) = -(1-(2-(4+8))) = -(1-(2-12)) = -(1-(-10)) = -(1+10) = -11$ oder $-(1-(2-(4-(8-16)))) = -1+(2-(4-(8-16))) = -1+(2-4+(8-16)) = -1+2-4+8-16 = -11$

e) $-|1-|2-|4-|8-16|||| = -|1-|2-|4-|-8|||| = -|1-|2-|4-8||| = -|1-|2-|-4||| = -|1-|2-4|| = -|1-|-2|| = -|1-2| = -|-1| = -1$

f) $|1-5|-|5-1| = |-4|-|4| = 4-4 = 0$

g) $(-1)^{2023} = -1$

h) $(-1)^{2022} = +1$

i) $(-2)^9 = -512$; mit Potenzgesetz: $(-2)^9 = ((-1)\cdot 2)^9 = (-1)^9\cdot 2^9 = (-1)\cdot 2^9 = (-1)\cdot 512 = -512$

j) $(-2)^{10} = 1024$

k) $(-10)^{13} = -10'000'000'000'000$

l) $3^{|2-5|} = 3^{|-3|} = 3^3 = 27$

Lösung zu A25 ex-ausdruecke-vereinfachen-Z

a) $3(a+c+7+e) = 3a+3c+21+3e$

b) $5x-5y-(2y-5x) = 5x-5y-2y+5x = 10x-7y$

c) $5x+3y-(7x+3y-z) = 5x+3y-7x-3y+z = -2x+z$

d) $-(a-b+c-3-d+e) = -a+b-c+3+d-e$

e) $a-(-b+a-(7-d+e)) = a+b-a+7-d+e = 7+b+e-d$

f) $2a-\Big(3a+(2b-c)-4c+\big[2a-(3b-[c-2b])\big]\Big) = 2a-(3a+2b-c-4c+[2a-(3b-c+2b)]) = 2a-(3a+2b-c-4c+[2a-3b+c-2b]) = 2a-(3a+2b-c-4c+2a-3b+c-2b) = 2a-3a-2b+c+4c-2a+3b-c+2b = (2-3-2)a+(-2+3+2)b+(1+4-1)c = -3a+3b+4c$

g) $a(b-c+d) = ab-ac+ad$ oder ausführlich: $a(b-c+d) = a(b+(-c)+d) = a(b+((-c)+d)) = ab+a((-c)+d) = ab+a(-c)+ad = ab+(-ac)+ad = ab-ac+ad$

h) $(a-b)(c-d) = a(c-d)-b(c-d) = ac-ad-bc+bd$ oder ausführlich: $(a-b)(c-d) = (a+(-b))\cdot(c+(-d)) = a\cdot(c+(-d))+(-b)\cdot(c+(-d)) = a\cdot c+a\cdot(-d)+(-b)\cdot c+(-b)\cdot(-d) = a\cdot c+(-(a\cdot d))+(-(b\cdot c))+(-b)\cdot(-d) = ac-ad-bc+bd$

i) $(a-b+3)(b-c+5) = ab-ac+5a-b^2+bc-5b+3b-3c+15 = ab-ac+5a-b^2+bc-2b-3c+15$

j) $-\big(c-(a-(b-c))\big) = -c+a-b+c = a-b$

k) $-\Big(5a-b-17-\big(6c-3+2a-(-b+c-3a+15)\big)+2b\Big) = -\Big(5a-b-17-\big(6c-3+2a+b-c+3a-15\big)+2b\Big) = -\Big(5a-b-17-6c+3-2a-b+c-3a+15+2b\Big) = -5a+b+17+6c-3+2a+b-c+3a-15+-2b = 17+6c-3-c-15 = -1+5c$

l) $a(-a+c-(7-d+e)) = -a^2+ac-7a+ad-ae$

m) $a^2(-a^3+a(7+2a^2)) = a^2(-a^3+7a+2a^3) = -a^5+7a^3+2a^5 = a^5+7a^3$

Lösung zu A26 ex-einfache-gleichungen-Z

a) $x=8$

b) $x=-8$

c) $x=-2$

d) $x=3$ und $x=-3$

e) keine Lösung, da x^2 stets nicht-negativ (= positiv oder Null)

f) $y=x+100$ hat die Eigenschaft $y^2=9$, d.h. $y=3$ (und somit $x=y-100=-97$) oder $y=-3$ (und somit $x=y-100=-103$

g) x^2 ist stets nicht-negativ, damit $-x^2$ stets nicht-positiv. Die einzige Zahl, die nicht-negativ und nicht-positiv ist, ist Null, also $x^2=0=-x^2$, also $x=0$.
Einfacher: Addieren Sie x^2 auf beiden Seiten: $2x^2=0$; Division durch 2 liefert $x^2=0$, also $x=0$.

h) $|x|=3$ bedeutet $x=3$ oder $x=-3$

i) $|x|=-3$ hat keine Lösung, denn Beträge sind nie negativ.

j) $|-x|=3$; beachte $|-x|=|x|$, also $|x|=3$, d.h. wie oben $x=3$ oder $x=-3$.
Alternativ: $|-x|=3$ bedeutet $-x=3$ oder $-x=-3$, also $x=-3$ oder $x=3$

k) $-|-x|=3$: keine Lösung, da die linke Seite negativ oder Null ist (da Beträge nicht-negativ)

l) $x(x-3)=0$: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist, wenn also $x=0$ oder $x-3=0$, d.h. $x=0$ oder $x=3$.

m) $(x+2)(x-3)=0$: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist, wenn also $x+2=0$ oder $x-3=0$ gelten, d.h. $x=-2$ oder $x=3$.

n) $|x-2|=10$: Der Abstand von x zu 2 muss 10 betragen, d.h. $x=2-10=-8$ oder $x=2+10=12$.
Alternativ: $x-2$ muss Länge 10 (als Pfeil) haben (oder der Punkt $x-2$ muss Abstand 10 vom Nullpunkt haben), also $x-2=10$ oder $x-2=-10$, also $x=12$ oder $x=-8$.

o) $x^2 - 10 = 6$: Addition von 10 liefert $x^2 = 16$, also $x = 4$ oder $x = -4$

p) $x^2 - 10 = -6$: Addition von 10 liefert $x^2 = 4$, also $x = 2$ oder $x = -2$

q) $|x^2-10| = 6$ bedeutet $x^2-10 = 6$ oder $x^2-10 = -6$, also (siehe die beiden Aufgaben zuvor) Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-4, -2, 2, 4\}$

r) $|10 - x^2| = 6$, wie bei der Aufgabe zuvor, denn $|10 - x^2| = |-(10 - x^2)| = |-10 + x^2| = |x^2 - 10|$.

s) $|x^2 - 17| = 8$ bedeutet $x^2 - 17 = \pm 8$, also $x^2 = 17 \pm 8$, d.h. $s^2 = 25$ oder $x^2 = 9$, also $\mathbb{L} = \{-5, -3, 3, 5\}$.

t) $|x| = x$: Die linke Seite ist stets nicht-negativ, also muss auch die rechte Seite diese Eigenschaft haben, d.h. $x \geq 0$. Für all solche $x \geq 0$ stimmt die Gleichung. Also Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$.

u) $|x| = -x$. Linke Seite stets ≥ 0, also muss die rechte Seite dieselbe Eigenschaft haben, d.h. $-x \geq 0$ bzw. per Addition von x erhalte $0 \geq x$, d.h. $x \leq 0$. Für alle $x \leq 0$ gilt die Gleichung, d.h. $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$.

v) $|x - 3| = x - 3$: Dies bedeutet, dass $y = x - 3$ eine Lösung der Gleichung $|y| = y$ ist, d.h. dass $y \geq 0$ gilt (siehe Gleichung $|x| = x$ zwei Teilaufgaben zuvor). Also $x - 3 \geq 0$, d.h. $x \geq 3$, d.h. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, \infty)$.

w) $|x - 3| = |3 - x|$: Gilt für alle x, denn $|y| = |-y|$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Beachte $-(x - 3) = -x + 3 = 3 - x$. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

x) $|x| \leq 3$ bedeutet $-3 \leq x \leq 3$ (denn genau dann ist die Länge des Pfeils x kleiner-gleich 3). Also $\mathbb{L} = [-3, 3]$.

y) $|x-10| \leq 3$ bedeutet anschaulich, dass der Abstand von x zu 10 höchstens 3 sein darf, dass also x zwischen 7 und 13 liegen muss, d.h. $\mathbb{L} = [7, 13]$.

z) $|10 - |x - 1|| = 100$ bedeutet $10 - |x - 1| = 100$ oder $10 - |x - 1| = -100$.
   - $10 - |x - 1| = 100$: Gleichbedeutend ist $10 - 100 = |x - 1|$, d.h. $-90 = |x - 1|$, was keine Lösung hat, da Beträge nie negativ sind.
   - $10 - |x - 1| = -100$: Gleichbedeutend ist $10 + 100 = |x - 1|$, d.h. $110 = |x - 1|$, d.h. der Abstand von x zu 1 (= die Länge des Pfeils $x - 1$) muss 110 sein, d.h. $x = 111$ oder $x = -109$. (Oder rechnerisch: $x - 1 = 110$ führt zu $x = 111$; $x - 1 = -110$ führt zu $x = -109$.)

   Also $\mathbb{L} = \{-109, 111\}$.

Lösung zu A27 ex-bruchrechnen-beweise-per-eindeutigkeit

Bitte nachfragen.

Lösung zu A28 ex-vollstaendig-kuerzen

a) $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{-500}{25} = \frac{-20}{1} = -20$

c) $\frac{-25}{25} = \frac{-1}{1} = -1$

d) $\frac{-13}{91} = \frac{-1}{7}$

e) $\frac{2^{2023} \cdot 3^{2025} \cdot 5^{2027}}{2^{2033} \cdot 3^{2025} \cdot 5^{2024}} = \frac{5^3}{2^{10}} = \frac{125}{1024}$

f) $\frac{2^{2023} \cdot 3^{2024} \cdot 5^{2025}}{30^{2024}} = \frac{2^{2023} \cdot 3^{2024} \cdot 5^{2025}}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{2024}} = \frac{2^{2023} \cdot 3^{2024} \cdot 5^{2025}}{2^{2024} \cdot 3^{2024} \cdot 5^{2024}} = \frac{5}{2}$

Lösung zu A29 ex-vergleich-rationaler-zahlen

Die Zahl $\frac{2}{2023}$ wird am Ende einsortiert. Der Hauptnenner der anderen Brüche ist 60.

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}, \quad \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \quad \frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \quad \frac{4}{3} = \frac{80}{60}, \quad \frac{2}{3} = \frac{40}{60}, \quad \frac{-4}{3} = \frac{-80}{60}, \quad \frac{-2}{3} = \frac{-40}{60},$$
$$\frac{3}{5} = \frac{36}{60}, \quad \frac{-3}{2} = \frac{-90}{60}, \quad \frac{4}{6} = \frac{40}{60}, \quad 0 = \frac{0}{60}, \quad 1 = \frac{60}{60}, \quad -1 = \frac{-60}{60}$$

Also

$$\frac{-3}{2} = \frac{-90}{60} < \frac{-4}{3} = \frac{-80}{60} < -1 = \frac{-60}{60} < \frac{-2}{3} = \frac{-40}{60} < 0 = \frac{0}{60} < \frac{1}{4} = \frac{15}{60} < \frac{1}{3} = \frac{20}{60}$$
$$< \frac{3}{5} = \frac{36}{60} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{40}{60} < \frac{3}{4} = \frac{45}{60} < 1 = \frac{60}{60} < \frac{4}{3} = \frac{80}{60}$$

bzw.

$$\frac{-3}{2} < \frac{-4}{3} < -1 < \frac{-2}{3} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$$

Schliesslich sieht man, dass $\frac{2}{2023} = \frac{8}{8092}$ zwischen $0 = \frac{0}{8029}$ und $\frac{1}{4} = \frac{2023}{8092}$ einzuordnen ist.

Lösung zu A30 ex-addieren-und-multiplizieren-in-Q

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{3}{42} = \frac{7}{42} + \frac{3}{42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$

d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-7}{3} = \frac{3 \cdot (-7)}{7 \cdot 3} = \frac{-7}{7} = \frac{-1}{1} = -1$

e) $\frac{5}{9} + \frac{9}{5} = \frac{25+81}{45} = \frac{106}{45}$

f) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{21} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 21} = \frac{1}{2 \cdot 7} = \frac{1}{14}$

g) $2 + \frac{5}{6} = \frac{2}{1} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

h) $2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

i) $\frac{7}{8} + 3 = \frac{7}{8} + \frac{3}{1} = \frac{7}{8} + \frac{24}{8} = \frac{31}{8}$

j) $\frac{7}{2} + \frac{14}{3} - \frac{7}{6} = \frac{21+28-7}{6} = \frac{42}{6} = 7$

k) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

l) $-6 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -6 \cdot \frac{10-9}{6} + \frac{1}{2} = -6 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Lösung zu A31 ex-einfache-gleichungen-in-Q

a) $\frac{2}{3} + x = 0$; Lösung $x = -\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{3} + x = \frac{3}{4}$; Lösung $x = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{-2 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{12} = \frac{1}{12}$

c) $\frac{2}{3} - x = 0$; Lösung $x = \frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3} - x = \frac{3}{4}$; addiere $x - \frac{3}{4}$: Lösung $x = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 3}{12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$

e) $x \cdot \frac{2}{3} = 1$; Lösung $x = \frac{3}{2}$

f) $x \cdot \frac{2}{3} = 2$; Lösung $x = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

g) $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$; Lösung $x = \frac{3}{4} \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$

h) $x^2 = \frac{25}{9}$; Lösungen $x = \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{5}{3}$

i) $x^3 = \frac{8}{27}$; Lösung $x = \frac{2}{3}$

j) $x^3 = -\frac{8}{27}$; Lösung $x = -\frac{2}{3}$

k) $|x| = \frac{1}{2}$; Lösungen $x = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$

l) $|x-3| = \frac{1}{2}$; geometrisch: Der Abstand von x zu 3 beträgt $\frac{1}{2}$, d. h. $x = 3+\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ oder $x = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Alternative: Es muss $x - 3 = \frac{1}{2}$ oder $x - 3 = -\frac{1}{2}$ gelten. Man erhält daraus dieselben Lösungen.

Lösung zu A32 ex-dividieren-in-Q-rechnungen

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $\frac{2}{15}$

e) $-\frac{25}{22}$ f) $\frac{5}{3}$ g) $\left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{169}{81}$ h) 1

Lösung zu A33 ex-dividieren-in-Q-gleichungen

a) $x = \frac{10}{21}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = \frac{15}{2}$ d) $x = \frac{21}{11}$

e) $x = 11$ f) $x = \frac{4}{3}$ oder $x = -\frac{4}{3}$ g) $x = \frac{1}{3}$ oder $x = -\frac{1}{3}$ h) $x = \frac{5}{7}$

Lösung zu A34 ex-werte-einsetzen-Q

(a) $f(x) = x^2 + 3x$. Mit diversen unnötigen Klammern; bei negativen Zahlen sollten die Klammern jedoch verwendet werden, da beispielsweise $(-2)^2 \neq -2^2$.

$$\begin{aligned}
f(3) &= (3)^2 + 3 \cdot (3) = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18\\
f(0) &= (0)^2 + 3 \cdot 0 = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0\\
f(-3) &= (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 9 + (-9) = 9 - 9 = 0\\
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \frac{x(1+x)}{x-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1(1+1)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{4}{1} = 4\\
f(0) &= \frac{0(1+0)}{0-\frac{1}{2}} = \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0\\
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{0} = \text{nicht definiert (Division durch Null)}\\
f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{-1} = \frac{\frac{-1}{4}}{-1} = \frac{\frac{-1}{4} \cdot (-1)}{-1 \cdot (-1)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Lösung zu A35 ex-division-mit-strahlensatz

Lösung zu A36 ex-addieren-bildlich-in-Q

Lösung zu A37 ex-multiplizieren-bildlich-in-Q

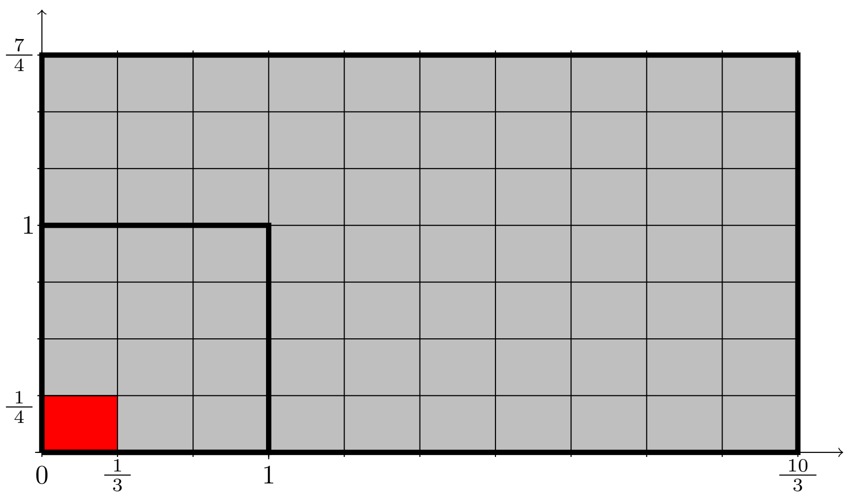


Abbildung 3: $\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{70}{12}$ geometrisch

Lösung zu A38 ex-umwandlung-kommazahl-bruch-ganzer-zahlen

(a) $1.000000 : 7 = 0.\overline{142857}$
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1

$9876.000000 : 21 = 470.\overline{285714}$
84
147
147
06.0
4.2
1.80
1.68
120
105
150
147
30
21
90
84
6

$201.0000 : 132 = 1.52\overline{27}$
132
69.0
66.0
3.00
2.64
360
264
960
924
36

$5533.00000 : 606 = 9.1\overline{3036}$
5454
79.0
60.6
18.40
18.18
2200
1818
3820
3636
184

(b) Lösungen in rot in Aufgabenstellung. Lösungsweg bitte selbst finden laut Beispiel im Unterricht.

Lösung zu A39 ex-wurzeln

a) $\sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

c) $\sqrt{1} = 1$

d) $\sqrt{0} = 0$

e) $\sqrt{-1} =$ nicht definiert

f) $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4} = 3^{1012} \cdot 7^2$

g) $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}} = \frac{3^{1012}}{7^2}$

h) $\sqrt{2^{42} \cdot (-3)^{2024} \cdot 7^4} = 2^{21} \cdot 3^{1012} \cdot 7^2$

i) $\sqrt{(-2024)^2} = 2024$

j) $\sqrt{x^2} = |x|$; Achtung, ohne Betragsstriche falsch (für negatives x)!
Man kann dies auch mit einer Fallunterscheidung aufschreiben: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$;

k) $\sqrt{x^2} = x$ für beliebiges $x \geq 0$

l) $\sqrt{x^2} = -x$ für beliebiges $x < 0$

Lösung zu A40 ex-n-te-wurzeln

a) 3

b) 4

c) $\frac{5}{2}$

d) nicht definiert

e) 1

f) $3^{75} \cdot 7^2$

g) $\frac{3^8}{7^2}$

h) $2^3 \cdot 11^2 \cdot 3^2$

Lösung zu A41 ex-wurzelgesetze

a) $\sqrt{3^{2025}} = \sqrt{3^{2024} \cdot 3} = \sqrt{3^{2024}} \cdot \sqrt{3} = 3^{1012} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5} = \sqrt{3^{2025}} \cdot \sqrt{7^5} = 3^{1012} \cdot 7^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 7}$

c) $\sqrt{a^2} = a$

d) $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$

e) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$

f) $\sqrt{4a^2} = 2a$

g) $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

h) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

i) $\sqrt{\frac{75a^2}{8}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{6}\,a$

j) $\sqrt{\frac{50}{6}} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

Lösung zu A42 ex-alternativbeweis-wurzel-zwei-irrational

(a) Beweise ähnlich, dass $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
Beweis: Schreibe sonst $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$. Quadrieren und Umformen liefert $2 \cdot 3 \cdot b^2 = a^2$. In der Primfaktorzerlegung der linken Seite ist der Exponent von 2 (und auch der von 3) ungerade, rechts ist er aber gerade.

(b) Beweise ähnlich, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.
Beweis: Schreibe sonst $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$. Quadrieren und Umformen liefert $2 \cdot b^3 = a^3$. In der Primfaktorzerlegung der linken Seite ist der Exponent von 2 nicht durch 3 teilbar, rechts aber schon.

(c) Beweise ähnlich, dass $\sqrt[3]{\frac{8}{9}} \notin \mathbb{Q}$.
Beweis: Schreibe sonst $\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \frac{a}{b}$. Dritte-Potenz-Nehmen und Umformen liefert $2^3 \cdot b^3 = 3^2 a^3$. In der Primfaktorzerlegung der linken Seite ist der Exponent von 3 durch 3 teilbar, rechts aber nicht.

Lösung zu A43 ex-wurzeln-irrationaler-zahlen-sind-irrational

Lösung zu A44 ex-negative-ganzzahlige-exponenten

Lösung zu A45 ex-rechenuebung-negative-ganzzahlige-exponenten

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

c) $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^{-1} = \frac{1}{5}$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$

e) $\left(\frac{3^{-1}}{5^{-1}}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$

f) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

h) $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-2} = \frac{1}{81}$

i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \frac{9}{25}$

j) $\left(\frac{5^{-2}}{3^{-2}}\right)^{-2} = \frac{625}{81}$

k) $10^6 = 1'000'000$

l) $10^3 = 1'000$

m) $10^0 = 1$

n) $10^{-3} = \frac{1}{1'000} = 0.001$

o) $10^{-6} = \frac{1}{1'000'000} = 0.000001$

p) $0.1^6 = 0.000001$

q) $0.1^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-6} = 10^6 = 1'000'000$

r) $(0.25)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^3 = 4^3 = 64$

s) $4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}$

t) $(-1)^{-2024} = \frac{1}{(-1)^{2024}} = \frac{1}{1} = 1$

u) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

v) $\frac{(2^{-3}3^2)^{-2}}{(2^3 3^{-1})^{-2}} = \frac{\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{-2}}{\left(\frac{2^3}{3}\right)^{-2}} = \frac{\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{2}}{\left(\frac{3}{2^3}\right)^{2}} = \frac{\frac{2^6}{3^4}}{\frac{3^2}{2^6}} = \frac{2^6}{3^4} \cdot \frac{2^6}{3^2} = \frac{2^{12}}{3^6} = \frac{4096}{729}$

w) $0.\overline{2}^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$

x) $(0.\overline{2})^{-2} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

y) $(\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Lösung zu A46 ex-vorbereitung-potenzgesetze-negative-ganzzahlige-exponenten

Beachte: Wir verwenden Potenzgesetze nur bei **positiven** Exponenten.

Die rot geschriebenen Ausdrücke zeigen jeweils, dass das «erwartete» Potenzgesetz weiterhin gilt, auch wenn die Exponenten negativ sind. Sie waren in der Aufgabenstellung nicht verlangt, illustrieren aber den Inhalt der nachfolgenden Merkebox.

a) $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$ (nach bekanntem Potenzgesetz, da alle Exponenten positiv)

b) $a^{-3} \cdot a^5 = \frac{1}{a^3} \cdot a^5 = \frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{-3+5}$

c) $a^3 \cdot a^{-5} = a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}$

d) $a^{-3} \cdot a^{-5} \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{-3+(-5)}$

e) $\left(a^3\right)^5 = a^{3\cdot 5} = a^{15}$ (nach bekanntem Potenzgesetz, da alle Exponenten positiv)

f) $\left(a^{-3}\right)^5 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^5 = \frac{1}{(a^3)^5} = \frac{1}{a^{3\cdot 5}} = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{(-3)\cdot 5}$ (auch hier und in den nachfolgenden Teilaufgaben werden Potenzgesetze für positive Exponenten verwendet)

g) $\left(a^3\right)^{-5} = \frac{1}{(a^3)^5} = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{3\cdot(-5)}$

h) $\left(a^{-3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{a^3}\right)^{-5} = \left(a^3\right)^5 = a^{15} = a^{(-3)\cdot(-5)}$

i) $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3-5}$

j) $\frac{a^{-3}}{a^5} = \frac{\frac{1}{a^3}}{a^5} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{a^5}{1}} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3 \cdot a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{-3-5}$

k) $\frac{a^3}{a^{-5}} = \frac{a^3}{\frac{1}{a^5}} = \frac{a^3}{1} \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{1} \cdot \frac{a^5}{1} = \frac{a^8}{1} = a^8 = a^{3-(-5)}$

l) $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^5}} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^5}{1} = \frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{-3-(-5)}$

m) $(ab)^5 = a^5 b^5$

n) $(ab)^{-5} = \frac{1}{(ab)^5} = \frac{1}{a^5 b^5} = \frac{1}{a^5} \frac{1}{b^5} = a^{-5} b^{-5}$

o) $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5} = a^5 b^{-5}$

p) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \left(\frac{b}{a}\right)^5 = \frac{b^5}{a^5} = a^{-5} b^5 = \frac{a^{-5}}{b^{-5}}$ die letzte Gleichheit gilt, denn $\frac{a^{-5}}{b^{-5}} = \frac{a^{-5}}{1} \cdot \frac{1}{b^{-5}} = a^{-5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^5}} = a^{-5} \cdot b^5$

Lösung zu A47 ex-potenzgesetze-negative-exponenten

a) $x^{-4} \cdot x^5 \cdot x^{-7} = x^{-4+5-7} = x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}$

b) Beachte (egal, ob der Exponent positiv oder negativ ist):
- $(-a)^{\text{ungerade ganze Zahl } n} = -a^n$
- $(-a)^{\text{gerade ganze Zahl } n} = a^n$

Damit können wir in den folgenden ersten beiden Umformungen das Minuszeichen «herauswandern» lassen. $\left(\left(-x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \overset{a=x^{-1}}{=} \left(-\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \overset{a=(x^{-1})^{-1}}{=} -\left(\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = -\left(x^{(-1)\cdot(-1)}\right)^{-1} = -x^{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)} = -x^{-1} = -\dfrac{1}{x}$

Alternativer Lösungsweg mit Hilfe von $(a^e)^f = a^{ef}$ angewandt auf $a = -x^{-1}$ ergibt $\left(\left(-x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(-x^{-1}\right)^{(-1)\cdot(-1)} = \left(-x^{-1}\right)^1 = -x^{-1}$

c) $(x^{-4} \cdot y^2)^{-3} \cdot x^3 = (x^{-4})^{-3} \cdot (y^2)^{-3} \cdot x^3 = x^{12} \cdot y^{-6} \cdot x^3 = x^{15} \cdot y^{-6} = \dfrac{x^{15}}{y^6}$

d) Verwende die Bemerkung unter (b), um die Minuszeichen bei ungeraden Exponenten herauswandern zu lassen bzw. bei geraden Exponenten zu beseitigen:
$\dfrac{(-a)^2 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^4}{(-a)^4 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^2 \cdot (-d)} = \dfrac{a^2 \cdot (-b^3) \cdot c^4}{a^4 \cdot (-b^3) \cdot c^2 \cdot (-d)} = -\dfrac{a^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{a^4 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot d} = -\dfrac{a^2}{a^4} \cdot \dfrac{b^3}{b^3} \cdot \dfrac{c^4}{c^2} \cdot \dfrac{1}{d} = -a^{-2} \cdot b^0 \cdot c^2 \cdot d^{-1} = -\dfrac{c^2}{a^2 d}$

e)

$$\left(\frac{a^3 \cdot b^7 \cdot c^8}{a^{15} \cdot c^2 \cdot d^2}\right)^{-2} = \frac{\left(a^3 \cdot b^7 \cdot c^8\right)^{-2}}{\left(a^{15} \cdot c^2 \cdot d^2\right)^{-2}} = \frac{\left(a^3\right)^{-2} \cdot \left(b^7\right)^{-2} \cdot \left(c^8\right)^{-2}}{\left(a^{15}\right)^{-2} \cdot \left(c^2\right)^{-2} \cdot \left(d^2\right)^{-2}} = \frac{a^{-6} \cdot b^{-14} \cdot c^{-16} \cdot d^0}{a^{-30} \cdot c^{-4} \cdot d^{-4}}$$
$$= a^{-6-(-30)} \cdot b^{-14} \cdot c^{-16-(-4)} \cdot d^{0-(-4)} = a^{24} \cdot b^{-14} \cdot c^{-12} \cdot d^4 = \frac{a^{24} \cdot d^4}{b^{14} \cdot c^{12}}$$

f)

$$\left(\frac{a^{2^3}\cdot a^{-2}}{(a^2)^3}\right)^{2024} = \left(\frac{a^8\cdot a^{-2}}{a^6}\right)^{2024} = \left(a^{8-2-6}\right)^{2024} = \left(a^0\right)^{2024} = 1^{2024} = 1$$

Lösung zu A48 ex-exponentialgleichungen

a) $2^x = \left(2^3\right)^{-4} = 2^{-12}$, also $x = -12$.

b) $\left(2^2\right)^x = \left(2^3\right)^{-10}$ oder umgeformt $2^{2x} = 2^{-30}$, also $2x = -30$, also, $x = -15$.

c) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \left(3^{-1}\right)^{10} = 3^{-10}$, also $x = -10$

d) $27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-12}$; linke Seite $27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$, rechte Seite $\left(\frac{1}{9}\right)^{-12} = (3^{-2})^{-12} = 3^{24}$; zu lösen ist also $3^{3x} = 3^{24}$, also $3x = 24$ d.h. $x = 8$.

Lösung zu A49 ex-bruchrechnen-negative-exponenten

Lösung zu A50 ex-potenzgesetze-primfaktorzerlegung-rationaler-zahlen

a)

$$\begin{aligned}\frac{6^2\cdot(-15)^{-3}\cdot 35^4}{35^2\cdot 6^{-3}\cdot 15^4} &= -\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-3}\cdot 5^4\cdot 7^4}{5^2\cdot 7^2\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^4\cdot 5^4} = -2^{2-(-3)}\cdot 3^{3-3-(-3)}\cdot 5^{-3+4-2-4}\cdot 7^{4-2}\\ &= -2^5\cdot 3^3\cdot 5^{-5}\cdot 7^2 = -\frac{2^5\cdot 3^3\cdot 7^2}{5^5}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{90^{2024}\cdot 14^{-1000}}{(30^{250}\cdot 42^{-506})^4} &= \frac{(2\cdot 3^2\cdot 5)^{2024}\cdot(2\cdot 7)^{-1000}}{((2\cdot 3\cdot 5)^{250}\cdot(2\cdot 3\cdot 7)^{-506})^4} = \frac{2^{2024}\cdot 3^{4048}\cdot 5^{2024}\cdot 2^{-1000}\cdot 7^{-1000}}{(2^{250}\cdot 3^{250}\cdot 5^{250}\cdot 2^{-506}\cdot 3^{-506}\cdot 7^{-506})^4}\\ &= \frac{2^{1024}\cdot 3^{4048}\cdot 5^{2024}\cdot 7^{-1000}}{(2^{-256}\cdot 3^{-256}\cdot 5^{250}\cdot 7^{-506})^4} = \frac{2^{1024}\cdot 3^{4048}\cdot 5^{2024}\cdot 7^{-1000}}{2^{-1024}\cdot 3^{-1024}\cdot 5^{1000}\cdot 7^{-2024}} = 2^{2048}\cdot 3^{5072}\cdot 5^{1024}\cdot 7^{-1024}\\ &= \frac{2^{2048}\cdot 3^{5072}\cdot 5^{1024}}{7^{1024}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{12^{-7}}{35^{-8}}}{\frac{30^{-5}}{28^{-6}}}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-12} &= \frac{12^{-7}}{35^{-8}}\cdot\frac{28^{-6}}{30^{-5}}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{12} = \frac{35^8}{12^7}\cdot\frac{30^5}{28^6}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2^2}{5}\right)^{12}\\ &= \frac{5^8\cdot 7^8}{2^{14}\cdot 3^7}\cdot\frac{2^5\cdot 3^5\cdot 5^5}{2^{12}\cdot 7^6}\cdot\frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{2^{24}}{5^{12}} = 2^{5+24-14-12}\cdot 3^{5+2+7}\cdot 5^{8+5-12}\cdot 7^{8-6-2} = 2^3\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^0\\ &= 2^3\cdot 5 = 8\cdot 5 = 40\end{aligned}$$

Lösung zu A51 ex-entscheide-ob-wurzel-rational

Lösung zu A52 ex-Z-abzaehlbar

Es gibt viele Lösungsmöglichkeiten. Die naheliegendste ist wohl folgende Nummerierung: 0 hat Nummer 0, 1 hat Nummer 1, -1 hat Nummer 2, 2 hat Nummer 3, -2 hat Nummer 4

Man kann diese Nummerierung auch angeben, indem man die ganzen Zahlen in der Reihenfolge ihrer Nummern aufschreibt: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.

Lösung zu A53 ex-Q-R-abzaehlbar

Die Antwort wird in Satz 4.13.4 gegeben.

Lösung zu A54 ex-calkin-wilf-baum