 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

5 Terme

5.0.1. Ein wichtiger Teil des mathematischen Handwerks besteht darin, Terme umzuformen. Dazu müssen einerseits die Rechengesetze gut verinnerlicht sein, andererseits muss die Natur von Termen rasch erfasst werden.

Definition 5.0.2 Term (vage Definition)

Ein **Term** ist eine «sinnvolle Kombination» von Zahlen, Variablen, Symbolen für mathematische Verknüpfungen (etwa Additionszeichen «+», Multiplikationszeichen «·» etc.) und Klammern.

5.1 Darstellungsarten von Termen

5.1.1. Die drei gebräuchlichsten Darstellungsarten für Terme sind:

- mathematische Notation (für die Darstellung auf Papier)[1] ;
- Computer-Notation (für die Eingabe auf Computern);
- Darstellung als Baum (zur Veranschaulichung; computer-interne Darstellung).

Wir erklären dies an einem Beispiel.

(a) **Mathematische Notation**

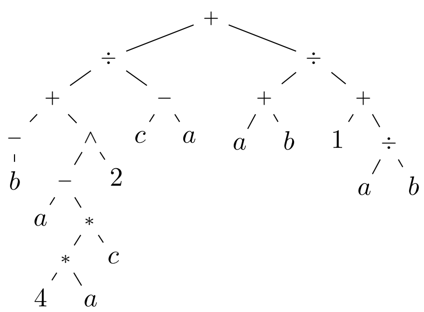
$$\frac{-b+(a-4\cdot a\cdot c)^2}{c-a}+\frac{a+b}{1+\frac{a}{b}}$$

(b) **Computer-Notation**

```
(-b+(a-4*a*c)^2)/(c-a)+(a+b)/(1+a/b)
```

Diese Notation ist in den meisten Programmiersprachen und Computeralgebrasystemen gebräuchlich (Potenzen werden bisweilen anders notiert, etwa in Python per «Doppelstern», also `a**b` für a^b).

(c) **Darstellung als Baum**



Beachte:

- Diese Darstellung benötigt keine Klammern!
- Bäume wachsen in der Mathematik und Informatik meist nach unten: Die Wurzel ist oben, die Blätter sind unten.

Jeder Baum besteht aus **Knoten** und **Kanten** (= Verbindungen zwischen den Knoten); an jedem «inneren» Knoten steht eine Verknüpfung, an den «äusseren» Knoten, den **Blättern**, stehen Zahlen oder Variablen. Der oberste Knoten heisst **Wurzel**.

An der Wurzel steht die Operation, die «zuletzt» ausgeführt wird. Diese Operation bestimmt das «Wesen» des Terms, d.h. sie entscheidet, ob der Term letzlich eine Summe oder ein Produkt etc. ist.

Diese Darstellung verdeutlicht die Struktur eines Terms für meinen Geschmack am besten, ist aber nicht sehr platzsparend.

Definition 5.1.2 Term (präzise, induktive Definition)

Ein **Term** ist jeder Ausdruck, der nach den folgenden Regeln aufgebaut ist.

(a) Jede Zahl und jeder Buchstabe (= jede Variable) ist ein Term.

(b) Hängt man an die «Eingänge» eines beliebigen Verknüpfungssymbols Terme, so ist das Ergebnis wieder ein Term.

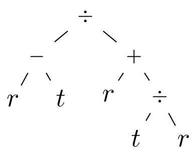
Diese Beschreibung orientiert sich an der Baumdarstellung für Terme. In den anderen beiden Darstellungen sind bei jedem Verknüpfungssymbol zunächst «Schutzklammern» um alle beteiligten Terme zu setzen (die man auf Grund von Konventionen wie «Punkt-vor-Strich» oft sofort wieder weglässt).

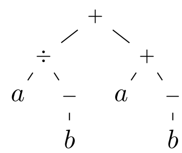
[1] Genauer ist dies die sogenannte **Infixnotation**, bei der man die Verknüpfungszeichen zwischen die zu verknüpfenden Terme schreibt, z. B. $2\cdot 3+5$. Man kann das Verknüpfungszeichen auch nach rechts schreiben (Postfixnotation = UPN = umgekehrte polnische Notation), z. B. $2\ 3\ \cdot\ 5\ +$, oder nach links (Präfixnotation), z. B. $+\ \cdot\ 2\ 3\ 5$.

Aufgabe A1 Schreiben Sie jeden der folgenden Terme in den beiden anderen Darstellungsweisen auf. Die Terme sind nicht zu vereinfachen.

a) $\dfrac{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}$

b) `(x-y)^2/3-x*y^z`

c) 

d) 

e) $\dfrac{\left(a^b+b^a\right)^{c-d}}{a+b}$

f) `-a^b+(-a)^b*c+d`

g) `1/a+1/-b-c`

h) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{2\cdot a+b}$

Definition 5.1.3 Gleichheit von Termen

Wir nennen zwei Terme t_1 und t_2 **gleich** und schreiben $t_1 = t_2$, wenn sie für jede erlaubte Belegung der vorkommenden Variablen durch reelle Zahlen denselben Wert liefern.
Das Wort «erlaubt» bezieht sich darauf, dass man in einem Term wie $\frac{1}{x}$ nicht $x = 0$ einsetzen darf. Auch dürfen wir in Potenzen a^e bisher für den Exponenten e nur natürliche Zahlen einsetzen.

Aufgabe A2 Stimmen folgende Gleichheiten von Termen? Wenn ja, begründen Sie mit Hilfe der Rechengesetze! Wenn nein, erklären Sie den Fehler und geben Sie ein Gegenbeispiel an. Z.B. $a-b \neq b-a$, für $a=1$ und $b=0$ erhält man $1-0=1\neq 0-1=-1$.

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^e = \dfrac{a^e}{b^e}$

b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{b}+\dfrac{c}{\cancel{a}} = \dfrac{1}{b}+\dfrac{c}{1}$

c) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{\cancel{b}}\cdot\dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$

d) $\dfrac{ax+bx}{cx} = \dfrac{a\cancel{x}+b\cancel{x}}{c\cancel{x}} = \dfrac{a+b}{c}$

e) $\dfrac{a+bx}{cx} = \dfrac{a+b\cancel{x}}{c\cancel{x}} = \dfrac{a+b}{c}$

f) $(a^e)^f = a^{e+f}$

g) $(a^e)^f = \left(a^f\right)^e$

h) $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$

i) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

j) $a^e+a^e = (2a)^e$

k) $\dfrac{a^9}{a^3} = \dfrac{a^{\cancel{9}3}}{a^{\cancel{3}1}} = \dfrac{a^3}{a^1}$

l) $\dfrac{a^9}{a^3} = \left(\dfrac{a^3}{a}\right)^3$

m) $c^{12}-c^8 = c^4$

n) $x^4+x^8 = x^2(x^2+x^4)$

o) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

p) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$

q) $5^{3^7} = 5^{21}$

r) $-\dfrac{(-1)^{123}}{(-1)^{1234}} = 1$

s) $32\cdot 32 = 1024$

t) $-5^2 = 25$

u) $((a+b)\cdot(c+d))^6 = a+b^6\cdot c+d^6$

v) $\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\right)^e = \dfrac{a^e}{b}\cdot\dfrac{c^e}{d}$

w) $(x+y)^2 = x^2+y^2$

x) $(x-y)^2 = x^2-y^2$

y) $(x-y)^2 = (y-x)^2$

z) $\dfrac{a}{-a} = -1$

Das Alphabet ist zu kurz ...

a) $\dfrac{x-y}{y-x} = -1$

b) $\dfrac{s^3-x+t^2}{-t^2-s^3+x} = -1$

5.2 Diverse Übungsaufgaben (zum eigenständigen Üben zu Hause)

Aufgabe A3 Berechnen Sie (vor dem Ausmultiplizieren kürzen!):

a) $\frac{24}{35} \cdot \frac{63}{16}$ b) $\frac{14}{27} \cdot \frac{63}{49}$ c) $\frac{48}{121} \cdot \frac{77}{32}$ d) $\frac{169}{39} \cdot \frac{28}{91} \cdot \frac{27}{6}$

Aufgabe A4 (Lösung in Rot angegeben)

a) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}}$ b) $\dfrac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$

d) $-2 - \dfrac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}}$ e) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127}$

Aufgabe A5 Berechnen Sie. Empfehlung: Zuerst mit den Potenzgesetzen vereinfachen.

Beispiel: $\dfrac{\frac{20^6}{2^8}}{5^5} = \dfrac{(2^2\cdot 5)^6}{2^8} \cdot \dfrac{1}{5^5} = \dfrac{\left(2^2\right)^6\cdot 5^6}{2^8\cdot 5^5} = \dfrac{2^{12}}{2^8} \cdot \dfrac{5^6}{5^5} = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 10 = 80$

a) $\dfrac{\frac{100^4}{2^7}}{25^3}$ b) $\dfrac{16^5}{8^6}$ c) $\dfrac{3^{3^2}}{(3^3)^2}$

Aufgabe A6 Berechnen Sie bzw. vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \cdot \left(a^2 - b^2\right)$ b) $\dfrac{-17^{17} - (-17)^{17} + 17}{\left(3^2 + 2^3\right)^2}$

c) $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{\left(2\cdot 5^2\cdot 7\right)^3}{\left(11\cdot 13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\cdot 5^3\cdot 7^2\right)^4}{\left(11^2\cdot 13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot 121}{14^2}}$ d) $\dfrac{\frac{2^{4^3}}{(-2^4)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}}$

e) $\left|\left|5 - 7\right|^2 - 10\right| \cdot \left|2^3 - 1\right|$ f) $\dfrac{\frac{125}{77} \cdot \left(\frac{2^2}{7} + \frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}}$

g) $\dfrac{\dfrac{\left|\frac{3}{17} - \frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot 17}}}{\frac{1}{512}}$ h) $\dfrac{\dfrac{\frac{2^6\cdot 5^6}{10^4}}{3} - \dfrac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot 2^2}}$

Aufgabe A7 Zusammenfassen, rationalen Faktor vollständig gekürzt nach vorne schreiben:

a) $\left(-\frac{1}{2}d^2\right) \cdot \frac{1}{2}a^5d^4g^4 \cdot \frac{12}{7}g$ b) $\left(-\frac{7}{9}h^3m^3n^5\right) \cdot \frac{2}{7}n^2 \cdot \left(-\frac{15}{2}m\right)$

c) $\frac{13}{8}y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}f^4m^4\right) \cdot \frac{24}{13}f^2m^2$ d) $\frac{2}{11}t^4z \cdot \left(-\frac{11}{7}gt^2z^2\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}g^3t^4\right)$

e) $\left(-\frac{5}{8}c^4t^2x^2\right) \cdot \frac{1}{3}tx^4 \cdot \left(-\frac{9}{5}ct^3\right)$ f) $\frac{7}{6}c \cdot \frac{5}{13}t^3 \cdot \frac{12}{7}c^5t^2$

Aufgabe A8 Auspotenzieren:

a) $\left(\frac{5}{2}e^2s^5u\right)^3$ b) $\left(-\frac{5}{2}b^3d^3h^2\right)^4$ c) $\left(\frac{5}{2}cm^5y^4\right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{2}d^5m^3p\right)^2$

e) $\left(-\frac{3}{2}dt^3w\right)^2$ f) $\left(-\frac{5}{2}a^3m^4s^5\right)^3$ g) $\left(\frac{5}{2}a^5b^2e\right)^4$ h) $\left(-\frac{3}{2}f^4h^3y\right)^2$

Aufgabe A9 Kürzen und rationale Zahl als Faktor vor den Bruch schreiben:

a) $\dfrac{-\frac{11}{2}b^3h^2n^5}{\frac{11}{7}bh^7n^4}$ b) $\dfrac{\frac{9}{2}d^7qt^8}{-\frac{9}{7}d^4q^2t^8}$ c) $\dfrac{\frac{5}{2}g^5m^7n^5}{\frac{5}{9}g^3m^8n^5}$

d) $\dfrac{\frac{7}{2}w^4x^6z}{\frac{7}{3}w^4x^8z}$ e) $\dfrac{-\frac{3}{2}bu^4w^6}{\frac{1}{3}bu^8w^2}$ f) $\dfrac{\frac{5}{2}b^3e^3s^7}{-\frac{5}{11}b^3e^2s}$

Aufgabe A10 Auspotenzieren:

a) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{f^3km^2s^3}\right)^5$ b) $\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{m^3x^3}{su^4y^4}\right)^4$ c) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{m^5}{e^3n^4s^5u^3}\right)^5$

d) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{k^2p^2q^4t^5}\right)^4$ e) $\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{g^4}{c^4fh^4y}\right)^4$ f) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{c^5t^4u^4y^5}\right)^4$

Aufgabe A11 Ausmultiplizieren:

a) $\left(-\frac{7}{5}g+\frac{1}{3}p^2\right)\left(-\frac{5}{3}g-\frac{2}{3}p^2\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{4}b\right)\left(\frac{7}{9}a^2-\frac{9}{11}b\right)$

c) $\left(-\frac{7}{3}h-\frac{2}{3}n^2\right)\left(\frac{4}{3}h-\frac{6}{11}n^2\right)$ d) $\left(-\frac{5}{12}m^2-\frac{11}{2}w^2\right)\left(-\frac{5}{8}m^2+\frac{3}{4}w^2\right)$

e) $\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{2}w\right)\left(-\frac{5}{6}t^2+\frac{4}{5}w\right)$ f) $\left(-\frac{5}{9}s+\frac{8}{7}u\right)\left(-\frac{7}{4}s+\frac{1}{5}u\right)$

Aufgabe A12 Ausmultiplizieren:

a) $\left(\frac{5}{4}n^2w+\frac{11}{4n^2w^4}\right)\left(-\frac{6}{11}n^2w-\frac{12}{5n^2w^4}\right)$ b) $\left(\frac{f^3}{2w^2}+\frac{5w^3}{11f^3}\right)\left(-\frac{9f^3}{8w^2}+\frac{5w^3}{4f^3}\right)$

c) $\left(\frac{9a^2}{4w}+\frac{5}{4}w\right)\left(-\frac{3a^2}{2w}-\frac{9}{2}w\right)$ d) $\left(\frac{5}{7}p^3t-\frac{1}{2p^3t^2}\right)\left(-\frac{3}{5}p^3t-\frac{7}{3p^3t^2}\right)$

Aufgabe A13 Klammern Sie den Faktor mit «kleinstmöglichem» Nenner aus, so dass in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen und keine gemeinsamen Faktoren.

a) $-\frac{5}{4}c^3k^2+\frac{3}{4ck^2}$ b) $-\frac{3}{8}gx^2+\frac{5x^3}{4g^3}$ c) $-\frac{10}{3}bk^2-\frac{4k^3}{7b^3}$ d) $-\frac{5}{7}mp^2+\frac{4m}{5p^2}$

e) $\frac{2q^3}{5k}+\frac{9}{10k^2q^3}$ f) $\frac{q^3}{2m}+\frac{7q}{5m^3}$ g) $-\frac{7e^3}{2s^2}-\frac{1}{2}e^2s^3$ h) $\frac{4y^3}{5b}-\frac{3y}{5b}$

5.3 Binomische Formeln

5.3.1. Die binomischen Formeln (bi = zweifach, nomen = name; Summe/Differenz zweier Variablen) sind einfach zu beweisen. Sie sind einerseits beim schnellen Ausmultiplizieren, andererseits («rückwärts gelesen») beim Faktorisieren von Termen nützlich.

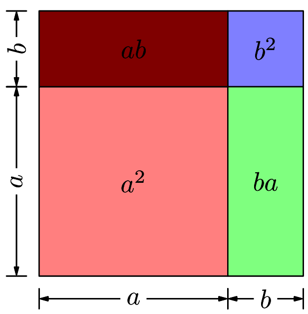
Satz 5.3.2 Binomische Formeln

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten:

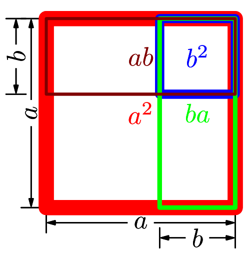
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	**erste binomische Formel** (Plus-Formel)
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	**zweite binomische Formel** (Minus-Formel)
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$	**dritte binomische Formel** (Plus-Minus-Formel)

Beweis. Einfaches Ausmultiplizieren. □

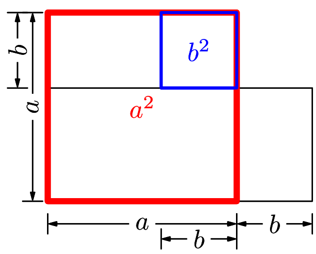
5.3.3. Die drei binomischen Formeln kann man auch geometrisch verstehen (zumindest für $a>0$ und $b>0$). (Aber meiner Meinung nach ist nur die Illustration der ersten binomischen Formel «schön».)



$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$



$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$



$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Aufgabe A14 Berechnen Sie geschickt mit Hilfe der binomischen Formeln (ohne Taschenrechner, ohne schriftliches Multiplizieren). Beispiel $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

a) 21^2 b) 13^2 c) 19^2
d) 37^2 e) $38 \cdot 42$ f) $105 \cdot 95$

Aufgabe A15 Mit Hilfe der binomischen Formeln: Schreiben Sie als klammerfreien Ausdruck:

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+3)^2$ c) $(x+2y)^2$ d) $(2x+3y)^2$
e) $(2x^5+3y^7)^2$ f) $(x-3)^2$ g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ h) $(5\sqrt{2}+7\sqrt{3})^2$
i) $(2x-3)^2$ j) $(x-2y)^2$ k) $(2x-3y)^2$ l) $(2x^5-3y^7)^2$
m) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ n) $(5\sqrt{2}-7\sqrt{3})^2$ o) $(-x-y)^2$ p) $(-x+y)^2$
q) $(2u-v)\cdot(2u+v)$ r) $(-a+2)\cdot(a-2)$ s) $(2x^5-3y^7)\cdot(2x^5+3y^7)$ t) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

Aufgabe A16 Binomische Formeln rückwärts: Was muss in der Lücke stehen, so dass Sie den Term mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisieren, d. h. als Produkt von Faktoren, schreiben können? Füllen Sie die Lücke (falls es eine gibt) und faktorisieren Sie.

Beispiele: (i) $s^2 + st + \boxed{\frac{1}{4}t^2} = \left(s + \frac{1}{2}t\right)^2$ (ii) $s^2 - 3t^4 = (s - \sqrt{3}t^2)(s + \sqrt{3}t^2)$

a) $4s^2 + 8st + \boxed{}$ b) $4s^2 + \boxed{} + 9t^2$ c) $\boxed{} + 12s^2t^3 + 9t^6$
d) $4s^2 - 8st + \boxed{}$ e) $4s^2 - \boxed{} + \frac{1}{4}t^2$ f) $\frac{4}{9}s^2 - \boxed{} + \frac{49}{16}t^4$
g) $\boxed{} - 12s^2t^3 + 9t^6$ h) $t^2 + \boxed{} + 1$ i) $t^2 + 2 + \boxed{}$
j) $t^2 + 1 + \boxed{}$ k) $s^2 - t^2$ l) $s^6 - t^4$
m) $4s^2 - 9t^2$ n) $2s^2 - 3t^2$ o) $2s^6 - 3t^{2024}$

Bemerkung: Faktorisieren ist im Allgemeinen schwieriger als Multiplizieren.

Aufgabe A17 Binomische Formeln rückwärts: Faktorisieren Sie, d. h. schreiben Sie als Produkt von Faktoren, und geben Sie jeweils an, für welche(n) Wert(e) von x der Ausdruck Null wird.
Beispiel: $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$. Dieses Produkt wird genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null wird, wenn also $x - \sqrt{3} = 0$ oder $x + \sqrt{3} = 0$ gilt, d. h. $x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$.

a) $x^2 + 10x + 25$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ c) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$
d) $x^2 - 8x + 16$ e) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ f) $9x^2 - 5x + \frac{25}{36}$
g) $x^2 - 9$ h) $x^2 - 2$ i) $2x^2 - 3$

Aufgabe A18 Bisweilen hilft das Faktorisieren von Nenner oder Zähler beim Kürzen.
Beispiel: $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}} = \frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}} = x - \sqrt{3}$
Faktorisieren Sie Zähler oder Nenner und kürzen Sie.

a) $\frac{x^2-4}{x+2}$ b) $\frac{x^2-2xt+t^2}{x-t}$ c) $\frac{x^2-2xt+t^2}{t-x}$
d) $\frac{a^2+6at+9t^2}{a+3t}$ e) $\frac{a^2+6at+9t^2}{a^2-9t^2}$ f) $\frac{a^2+3t^3}{a^4+6a^2t^3+9t^6}$

Aufgabe A19 In der Regel versucht man, Wurzeln aus Nennern zu entfernen. Dies kann durch Erweitern oder mit Hilfe der dritten binomischen Formel erreicht werden.
Beispiele: (i) $\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4\cdot(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})} = \frac{12-4\sqrt{5}}{9-5} = 3 - \sqrt{5}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$
Beseitige die Wurzeln aus den Nennern und kürze!

a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) $\frac{2}{5-\sqrt{27}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

5.4 Binomischer Lehrsatz: Potenzen von $a+b$ und Pascalsches Dreieck

5.4.1. Die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gibt die zweite Potenz $(a+b)^2$ als klammerfreien Ausdruck an. In der folgenden Aufgabe lernen Sie, wie Sie das **Pascalsche Dreieck** berechnen und mit seiner Hilfe höhere Potenzen wie $(a+b)^{10}$ mit wenig Rechenaufwand als klammerfreien Ausdruck angeben können.

5.4.2. Blaise Pascal (1623 Clermont-Ferrand - 1662 Paris): französischer Mathematiker, Physiker, Literat, Philosoph, vgl. Wikipedia: Blaise Pascal.

⚒ Aufgabe A20

(a) Berechnen Sie auf einem separaten Blatt die folgenden Potenzen von $a+b$ durch Ausmultiplizieren und fassen Sie die Resultate «alphabetisch geordnet» zusammen (was damit gemeint ist, ist unten erklärt). Verwenden Sie jeweils das Resultat aus der vorherigen Zeile.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 && = 1 \\
(a+b)^1 &= a+b && = a+b \\
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && = a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)^2 && = \text{✎} \\
(a+b)^4 &= (a+b)\cdot(a+b)^3 && = \text{✎} \\
(a+b)^5 &= (a+b)\cdot(a+b)^4 && = \text{✎} \\
(a+b)^6 &= (a+b)\cdot(a+b)^5 && = \text{✎}
\end{aligned}$$

Beispielsweise wurde $(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2$ zu $a^2+2ab+b^2$ zusammengefasst und nicht zu $2ab+b^2+a^2$, denn im Alphabet kommt zuerst $a^2 = aa$, dann ab und dann $b^2 = bb$. (In jedem Produkt sollen ausserdem die a's links von den b's stehen: ba wird sofort zu ab umgeschrieben.)

Haben Sie richtig gerechnet? Es gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
&= \boxed{1}\cdot a^6 + \boxed{6}\cdot a^5b + \boxed{15}\cdot a^4b^2 + \boxed{20}\cdot a^3b^3 + \underbrace{\boxed{15}}_{\text{Koeffizient von } a^2b^4} \cdot a^2b^4 + \boxed{6}\cdot ab^5 + \boxed{1}\cdot b^6.
\end{aligned}$$

Die eingerahmten Zahlen nennt man die **Koeffizienten** von $(a+b)^6$. Genauer ist 1 der **Koeffizient von** a^6 und 6 ist der Koeffizient von a^5b und 15 ist der Koeffizient von a^4b^2 etc. Diese Koeffizienten sind in Abbildung 1 auf Seite 7 bereits in der 6. Zeile eingetragen (in derselben „alphabetischen" Reihenfolge).

(b) Tragen Sie die Koeffizienten aller von Ihnen berechneten Potenzen in Abbildung 1 ein (die Zeilen 7 bis 10 bleiben noch leer).

(c) Was fällt Ihnen auf? Wenn Sie eine Zeile kennen: Wie können Sie die nächste Zeile berechnen?

(d) Wenn Sie das System verstehen: Füllen Sie die restlichen Zeilen aus!

Wenn man dieses Vorgehen fortsetzt, erhält man das sogenannte **Pascalsche Dreieck**. Sie haben das Pascalsche Dreieck bis zur Zeile 10 aufgeschrieben.

(a) Wenn man $(a+b)^{10}$ ausmultiplizert, was kommt wohl heraus?

$(a+b)^{10} =$

(b) Können Sie in eigenen Worten aufschreiben, wie man $(a+b)^{13}$ mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks berechnet?
Hinweis: Verwenden Sie die Produkte $a^{13}, a^{12}b, a^{11}b^2, \ldots, ab^{12}, b^{13}$.

(c) Dieselbe Frage mit $(a+b)^n$ statt $(a+b)^{13}$.

(d) Erklären Sie, warum dies stimmt!
Hinweis: In Teilaufgabe (a) entsteht jede Zeile (ausser der nullten) aus der vorherigen Zeile durch Multiplikation mit $(a+b)$.

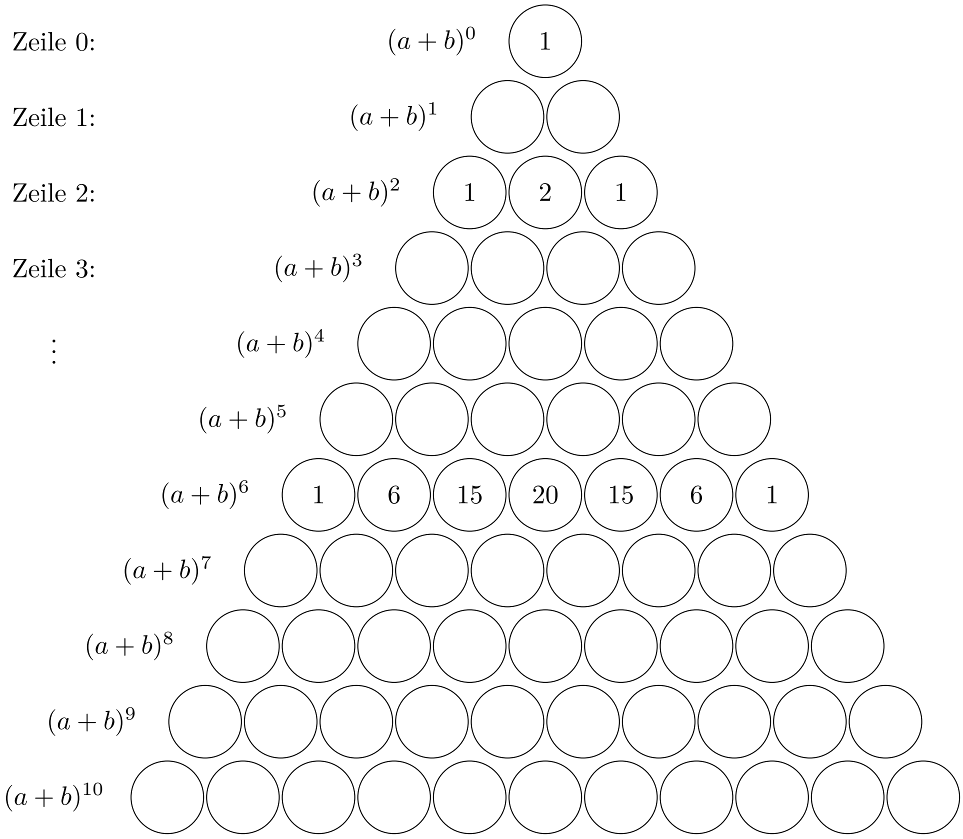


Abbildung 1: Das noch nicht vollständig ausgefüllte Pascalsche Dreieck (es geht nach unten unendlich weiter)

Algorithmus 5.4.3 Pascalsches Dreieck erstellen

In einem «Dreiecks-Schema» wie in Abbildung 1: Tragen Sie auf der linken und rechten Dreiecksseite lauter Einsen ein. Füllen Sie dann die Lücken Zeile für Zeile nach dem Rezept «jeder Eintrag ist die Summe der beiden Einträge darüber».

Satz 5.4.4 Binomischer Lehrsatz (noch ohne Summenzeichen und Binomialkoeffizienten formuliert)

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wenn man $(a+b)^n$ ausmultipliziert und die erhaltene Summe in «alphabetischer Reihenfolge» schreibt als

$$(a+b)^n = \boxed{}\, a^n + \boxed{}\, a^{n-1}b + \boxed{}\, a^{n-2}b^2 + \cdots + \boxed{}\, a^2b^{n-2} + \boxed{}\, ab^{n-1} + \boxed{}\, b^n$$

so sind die eingerahmten Koeffizienten genau die Einträge der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks. Beachte, dass die Zählung der Zeilen des Pascalschen Dreiecks bei Null beginnt und die n-te Zeile aus $n+1$ Zahlen besteht.

Aufgabe A21 Geben Sie mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks als klammerfreien Term an (sofern es nicht anderweitig deutlich einfacher geht).
Wenn möglich, ist das Ergebnis zu vereinfachen.

a) $(a+b)^4$
b) $(a-b)^4$
c) $(a+b)^4-(a-b)^4$
d) $(2x+y)^4$
e) $(2x-y)^4$
f) $(x-1)^5$
g) $(x-2)^5$
h) $(x-\frac{1}{2})^4$
i) $(t+\frac{1}{t})^4$
j) $(t+\frac{1}{t})^4-(t-\frac{1}{t})^4$
k) $(2x^2+3y^3)^3$
l) $(2xy-3y)^4$
m) $(a+b)^6-(a-b)^6$
n) $(11-14)^4$
o) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^4$

Aufgabe A22 Verwenden Sie das Pascalsche Dreieck rückwärts.

a) $s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

b) $s^3 - 3s^2 + 3s - 1$

c) $t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1$

d) $s^8 + 4s^6t^3 + 6s^4t^6 + 4s^2t^9 + t^{12}$

Aufgabe A23

(a) Berechnen Sie für jede Zeile des Pascalschen Dreiecks die Summe aller Zahlen dieser Zeile. Was fällt Ihnen auf? Können Sie es erklären? Hinweis: $1 + 1$.

(b) Berechnen Sie für jede Zeile des Pascalschen Dreiecks die alternierende Summe aller Zahlen dieser Zeile. Was fällt Ihnen auf? Können Sie es erklären? Hinweis: $1 - 1$.
Hinweis: *alternierend* bedeutet *abwechselnd*; hier ist gemeint, dass abwechselnd als Vorzeichen plus bzw. minus gewählt wird. Beispiel: Die alternierende Summe über die Einträge der sechsten Zeile ist $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$.

Aufgabe A24 Berechne jeweils den Wert das angegebenen Ausdrucks.

(a) $\frac{1}{\sqrt{4}}\left(\left(2+\sqrt{4}\right)^3 - \left(2-\sqrt{4}\right)^3\right)$ (sehr einfach!)

Lösung: 32

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(4+\sqrt{2}\right)^3 - \left(4-\sqrt{2}\right)^3\right)$

Lösung: 100

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^4 - \left(2-\sqrt{3}\right)^4\right)$

Lösung: 112

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^5 - \left(1-\sqrt{2}\right)^5\right)$

Lösung: 58

Aufgabe A25 Erklären Sie die Formel $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ geometrisch mit Hilfe eines Würfels der Seitenlänge $a + b$.

Aufgabe A26

(a) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5}$$

(b) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

(c) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

(d) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

(e) Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

(f) Berechne den folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{0}{0}$$

(g) Fällt dir etwas auf?

(h) Kannst du dies abstrakt erklären? Denke an den binomischen Lehrsatz 5.4.4 und an die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten.

Satz 5.4.5 Binomischer Lehrsatz – binomial theorem

Multipliziert man $(a+b)^n$ aus, so ist der Koeffizient bei $a^{n-k}b^k$ genau der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$.
Daher kommt der Name «Binomialkoeffizient»: Koeffizient einer Potenz des Binoms $a+b$.
Zum Beispiel gilt

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

Kombiniert mit Satz 5.4.4 bedeutet dies: Die n-te Zeile des Pascalschen Dreiecks besteht genau aus den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \ldots, n$. Zum Beispiel ist die 4-te Zeile gegeben durch (Achtung, Zeilenzählung beginnt bei 0)

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1$$

Zeile 0: $(a+b)^0$ $1 = \binom{0}{0}$

Zeile 1: $(a+b)^1$ $1 = \binom{1}{0}$ $1 = \binom{1}{1}$

Zeile 2: $(a+b)^2$ $1 = \binom{2}{0}$ $2 = \binom{2}{1}$ $1 = \binom{2}{2}$

Zeile 3: $(a+b)^3$ $1 = \binom{3}{0}$ $3 = \binom{3}{1}$ $3 = \binom{3}{2}$ $1 = \binom{3}{3}$

Zeile 4: $(a+b)^4$ $1 = \binom{4}{0}$ $4 = \binom{4}{1}$ $6 = \binom{4}{2}$ $4 = \binom{4}{3}$ $1 = \binom{4}{4}$

Abbildung 2: Pascalsches Dreieck

Beweis. Erklärung am Beispiel $n = 5$. Wenn man

$$(a+b)^5 = \underbrace{(a+b)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{Faktor 2}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{Faktor 3}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{Faktor 4}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{Faktor 5}}$$

ausmultipliziert, so nimmt man aus dem ersten Faktor entweder a oder b, dann aus dem zweiten Faktor entweder a oder b, usw.
Wir interessieren uns beispielsweise dafür, wie oft man dabei a^2b^3 erhält, denn das ist der gesuchte Koeffizient von a^2b^3.
Man erhält beim Ausmultiplizieren genau dann a^2b^3, wenn man aus genau 2 der 5 Faktoren a wählt (und aus den anderen 3 Faktoren b). Dafür gibt es nach der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten genau $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten (die 5 unterscheidbaren Objekte, aus denen man zwei auswählt, sind die durchnummerierten und dadurch unterscheidbaren 5 Faktoren).
Also ist der Koeffizient von a^2b^3 genau $\binom{5}{2}$. □

Aufgabe A27 Die folgenden Aussagen sind bereits klar, denn das Pascalsche Dreieck ist «spiegelsymmetrisch» zur Mittelachse, jeder Eintrag ist die Summe seiner beiden «oberen Nachbarn» und seine Einträge sind die Binomialkoeffizienten.
Beweisen Sie allein aus der Definition von $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

(a) Symmetrie: Es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{also zum Beispiel} \qquad \binom{7}{2} = \binom{7}{5}$$

für alle n, k mit $0 \leq k \leq n$.

(b) Summationseigenschaft: Es gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{also zum Beispiel} \qquad \binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$$

für alle n, k mit $0 \leq k \leq n-1$.

(c) Können Sie diese beiden Formeln auch aus der Bedeutung der Binomialkoeffizienten herleiten?

(d) Setzt man $a = 1$ und $b = 1$ in der Formel $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n$ ein, so erhält man (wie bereits in Aufgabe A23 beobachtet)

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Versuchen Sie, dies mit der alternativen Formulierung im Satz über die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten zu erklären.

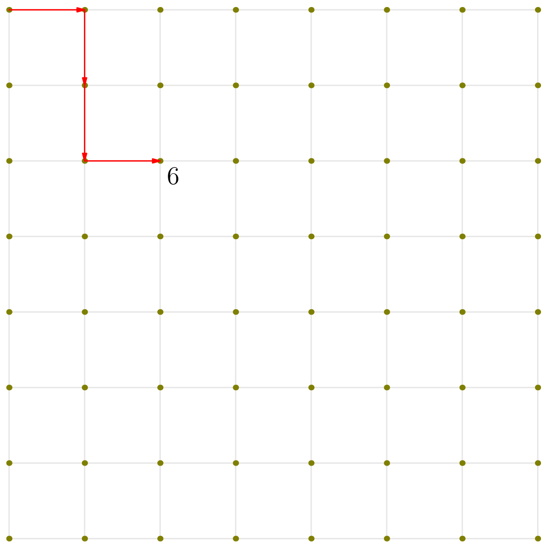
Aufgabe A28 Gitterpfade zählen

Das rechts dargestellte Raster von Punkten nennt man ein Gitter.

Ein **Gitterpfad** muss

- im Gittterpunkt links oben starten;
- entlang der Linien, die die Gitterpunkte verbinden, verlaufen und
- dabei bei jedem Schritt entweder nach rechts oder nach unten gehen.

In rot ist ein Gitterpfad dargestellt.



(a) Überlege dir, dass es genau 6 Gitterpfade gibt, die am Endpunkt des roten Gitterpfades enden. Dies ist der Grund, dass an diesem Punkt die Zahl 6 steht.

(b) Schreibe an jeden Punkt des Gitters die Anzahl der Gitterpfade, die dort enden.
Hinweise:
- An allen Punkte in der obersten Zeile und in der Spalte ganz links steht die Zahl 1.
- Beginne bei den Punkten links oben und arbeite dich dann «diagonal» nach rechts unten durch.
- Wie kann man die Zahl an einem Punkt berechnen, wenn man die beiden Zahlen am Punkt direkt darüber und am Punkt direkt links davon kennt? Warum ist das so?

(c) Was fällt dir auf?

(d) Man kann den roten Gitterpfad durch das Wort «abba» darstellen, wenn man den Buchstaben «a» als «gehe nach rechts» und den Buchstaben «b» als «gehe nach unten» auffasst.
In dieser Kodierung von Wegen sind die sechs Gitterpfade, die am Endpunkt des roten Weges enden, wie folgt gegeben (in alphabetischer Reihenfolge).
- aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa

Dies sind alle Wörter der Länge 4, die aus 2 «a» und 2 «b» bestehen.
Begründe, warum es genau $\binom{4}{2}$ solche Wörter gibt.
Hinweis: Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten.
Lösung: Aus den 4 Positionen wählt man 2 aus, an die man den Buchstaben «a» schreibt, an die verbleibenden schreibt man «b».

(e) Wie viele Gitterpfade gibt es, die genau 5 Mal nach rechts gehen und genau 2 Mal nach unten?

(f) Wenn man $(a+b)^3$ ausmultipliziert und das Kommutativgesetz nicht verwendet, so erhält man

$$aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb$$

Wie tauchen diese 8 Summanden, als Wörter und dann als Gitterpfade interpretiert, auf? Wo enden sie?

(g) Denke darüber nach, dass dies «beide Versionen» des binomischen Lehrsatzes zeigt (also einmal Berechnung der Koeffizienten per Pascalschem Dreieck und andererseits, dass diese Koeffizienten die Binomialkoeffizienten sind).

(Aufgabe recht flott formuliert, könnte man sicherlich noch verbessern.)

5.5 Lösungen

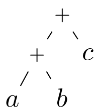
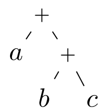
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

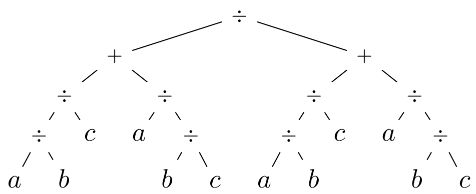
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

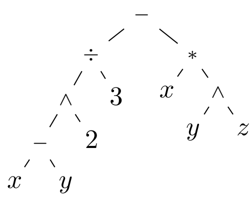
Lösung zu A1 ex-termnotationen

In einigen Teilaufgaben gibt es auch andere korrekte Lösungen. Zum Beispiel kann $a+b+c$ als $(a+b)+c$ oder als $a+(b+c)$ interpretiert werden, was zu  bzw.  führt.

a) `(a/b/c+a/(b/c))/(a/b/c+a/(b/c))`



b) $\frac{(x-y)^2}{3} - x \cdot y^z$

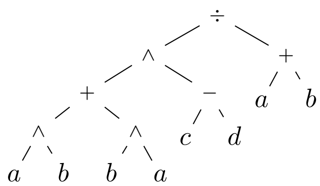


c) `(r-t)/(r+t/r)`

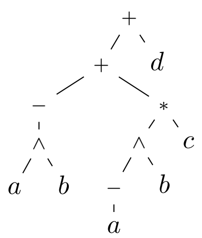
d) $\dfrac{r-t}{r+\frac{t}{r}}$

e) $\frac{a}{-b} + (a + -b)$ `a/-b+(a+-b)`

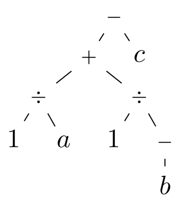
f) `(a^b+b^a)^(c-d)/(a+b)`



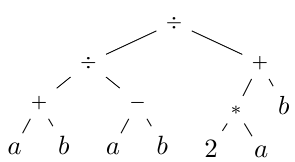
g) $-a^b + (-a)^b \cdot c + d$



h) $\frac{1}{a} + \frac{1}{-b} - c$



i) `(a+b)/(a-b)/(2*a+b)`



Lösung zu A2 ex-umformungsverbrechen

a) Richtig, Potenzgesetz.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

b) Falsch (z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$).

c) Wahr (aus Produkten darf (und soll) man kürzen).

d) Richtig, zuerst x im Zähler ausklammern, dann kürzen: $\dfrac{ax+bx}{cx} = \dfrac{(a+b)x}{cx} = \dfrac{(a+b)\cancel{x}}{c\cancel{x}} = \dfrac{a+b}{c}$

e) Falsch, $\dfrac{1+1\cdot 2}{1\cdot 2} \neq \dfrac{1+1}{1}$

f) Falsch $a^{e\cdot f}$ wäre richtig.

g) Wahr (beides ist gleich $a^{e\cdot f}$).

h) Falsch ($\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$)

i) Wahr. $\frac{a+b}{c} = \frac{1}{c}\cdot(a+b) = \frac{1}{c}\cdot a + \frac{1}{c}\cdot b$.

j) Falsch, $2a^e$ ist richtig. (sonst wird die 2 mitpotenziert).

k) Falsch, würde a^6 ergeben (Potenzgesetz).

l) Wahr (Potenzgesetz).

m) Falsch (Summen sind doof, man könnte c^8 ausklammern).

n) Falsch, man könnte x^4 ausklammern.

o) Falsch, erst erweitern, ergäbe $\frac{ad+bc}{bd}$.

p) Wahr (Nenner auf einen Bruchstrich, dann Kehrwert).

q) Falsch ($\left(5^3\right)^7 = 5^{21}$).

r) Wahr ($= -\frac{-1}{1}$)

s) Wahr ($2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$.

t) Falsch ($(-5)^2 = 25 \neq -5^2 = -(5^2)$. Potenzen vor Multiplikation und Gegenzahlbildung.

u) Falsch, ergäbe $(a+b)^6 \cdot (c+d)^6$.

v) Falsch, auch die Nenner werden potenziert.

w) Falsch, etwa $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$

x) Falsch, etwa $(2-1)^2 \neq 2^2 - 1^2$

y) Richtig, denn $x-y$ ist das Negative von $y-x$ (denn $-(y-x) = -y+x = x-y$) und beim Quadrieren «verschwindet das Minuszeichen»: $(x-y)^2 = (-(y-x))^2 = ((-1)\cdot(y-x))^2 = (-1)^2\cdot(y-x)^2 = 1\cdot(y-x)^2 = (y-x)^2$.
Alternativ: Beides ergibt ausmultipliziert $x^2 - 2xy + y^2$.

z) Richtig per Kürzen: $\frac{a}{-a} = \frac{1\cdot a}{(-1)\cdot a} = \frac{1\cdot\cancel{a}}{(-1)\cdot\cancel{a}} = \frac{1}{-1} = \frac{1\cdot(-1)}{(-1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{1} = -1$

Das Alphabet ist zu kurz ...

a) Richtig, denn $x-y = -(y-x)$ und somit folgt es aus $\frac{a}{-a} = -1$, wenn man $a = x-y$ ersetzt.

b) Richtig, wie Teilaufgabe zuvor, da im Nenner das Negative des Zählers steht (und umgekehrt).

Lösung zu A3 ex-bruchmultiplikation

a) $\frac{27}{10}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{21}{22}$

d) 6

Lösung zu A4 ex-doppelbrueche

a) $$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{3}}{4}} = \frac{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{12}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}+\frac{2}{12}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{17}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{12}}{8} = \frac{17}{8}$$

b) $$\frac{2-\frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}}+2} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{6}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}+2} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}+\frac{6}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{14}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{14}_7} - \frac{2}{3} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} = \frac{3}{21} - \frac{14}{21} = -\frac{11}{21}$$

c) $\frac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{\frac{64+36+25}{2\cdot(32-27)^2}}{\frac{5^3}{4^3}} = \frac{125}{2\cdot(5)^2}\cdot\frac{4^3}{5^3} = \frac{\cancel{5^3}}{\cancel{2}\cdot 5^2}\cdot\frac{2^{\cancel{6}5}}{\cancel{5^3}} = \frac{32}{25}$

d) $-2-\frac{-2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}} = -2-\frac{-2-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{-\frac{3}{2}}} = -2-\frac{-2-\frac{4}{9}}{-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = -2-\frac{-\frac{18}{9}-\frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} = -2-\left(-\frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{9}_3}\right)\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} =$
$-2-\left(-\frac{11}{6}\right) = -\frac{12}{6}+\frac{11}{6} = -\frac{1}{6}$

e) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

f) $\frac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}}\cdot\frac{\frac{1}{117}}{127} = \frac{117^4}{127^4}\cdot\frac{127^5}{117^3}\cdot\frac{1}{117}\cdot\frac{1}{127} = \frac{117^4\cdot 127^5}{127^4\cdot 117^3\cdot 117\cdot 127} = \frac{117^4\cdot 127^5}{127^5\cdot 117^4} = 1$

Lösung zu A5 ex-potenzgesetze-brueche

a) $\frac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^4}{2^7}\cdot\frac{1}{\left(5^2\right)^3} = \frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(5^2\right)^4}{2^7\cdot 5^6} = \frac{2^8\cdot 5^8}{2^7\cdot 5^6} = 2\cdot 5^2 = 2\cdot 25 = 50$

b) $\frac{\left(2^4\right)^5}{\left(2^3\right)^6} = \frac{2^{20}}{2^{18}} = 2^2 = 4$

c) $\frac{3^9}{3^6} = 3^3 = 27$

Lösung zu A6 ex-vereinfachen-und-berechnen

a) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\cdot\left(a^2-b^2\right) = \frac{\frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2}{a\cdot b}-\frac{b^2}{a\cdot b}}\cdot\left(a^2-b^2\right) = \frac{\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}}\cdot\left(a^2-b^2\right) = \frac{a^2+b^2}{\cancel{ab}}\cdot\frac{\cancel{ab}}{\cancel{a^2-b^2}}\cdot\cancel{\left(a^2-b^2\right)} =$
a^2+b^2

b) $\frac{-17^{17}-(-17)^{17}+17}{\left(3^2+2^3\right)^2} = \frac{-17^{17}--17^{17}+17}{(9+8)^2} = \frac{17}{17^2} = \frac{1}{17}$

c) $\frac{\frac{\left(\frac{\left(2\cdot 5^2\cdot 7\right)^3}{\left(11\cdot 13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\cdot 5^3\cdot 7^2\right)^4}{\left(11^2\cdot 13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot 121}{14^2}} = \frac{\frac{\left(\frac{2^3\cdot\left(5^2\right)^3\cdot 7^3}{11^2\cdot\left(13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(5^3\right)^4\cdot\left(7^2\right)^4}{\left(11^2\right)^3\cdot\left(13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot 11^2}{(2\cdot 7)^2}} = \frac{\frac{\frac{\left(2^3\cdot 5^6\cdot 7^3\right)^2}{\left(11^2\cdot 13^4\right)^2}}{\frac{2^8\cdot 5^{12}\cdot 7^8}{11^6\cdot 13^9}}}{\frac{13\cdot 11^2}{2^2\cdot 7^2}} = \frac{2^6\cdot 5^{12}\cdot 7^6}{11^4\cdot 13^8}\cdot\frac{11^6\cdot 13^9}{2^8\cdot 5^{12}\cdot 7^8}\cdot\frac{2^2\cdot 7^2}{13\cdot 11^2} =$
$\frac{2^8\cdot 5^{12}\cdot 11^6\cdot 7^{14}\cdot 13^9}{2^8\cdot 5^{12}\cdot 11^6\cdot 7^{14}\cdot 13^9} = 1$

d) $\frac{\frac{2^{4^3}}{\left(-2^4\right)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}} = \frac{\frac{2^{64}}{-2^{12}}}{-2^{50}} = \frac{-2^{52}}{-2^{50}} = 2^2 = 4$

e) $\left|\left|5-7\right|^2-10\right|\cdot\left|2^3-1\right| = \left|\left|-2\right|^2-10\right|\cdot|7| = \left|2^2-10\right|\cdot 7 = |4-10|\cdot 7 = |-6|\cdot 7 = 6\cdot 7 = 42$

f) $\frac{\frac{125}{77}\cdot\left(\frac{2^2}{7}+\frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}} = \frac{5^3}{11\cdot 7}\cdot\left(\frac{2^2\cdot 5^2}{7\cdot 5^2}+\frac{3\cdot 7}{7\cdot 5^2}\right)\cdot\frac{7^2}{11} = \frac{5^3}{11\cdot 7}\cdot\frac{100+21}{7\cdot 5^2}\cdot\frac{7^2}{11} = \frac{5^3\cdot 7^2\cdot 11^2}{11^2\cdot 7^2\cdot 5^2} = 5$

g) $\frac{\frac{\left|\frac{3}{17}-\frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot 17}}}{\frac{1}{512}} = \left|\frac{3\cdot 11}{17\cdot 11}-\frac{17^2}{11\cdot 17}\right|\cdot\frac{11\cdot 17}{2^{18}}\cdot 2^9 = \left|\frac{33-289}{11\cdot 17}\right|\cdot\frac{11\cdot 17}{2^9} = \left|\frac{-256}{11\cdot 17}\right|\cdot\frac{11\cdot 17}{2^9} =$
$\frac{2^8}{11\cdot 17}\cdot\frac{11\cdot 17}{2^9} = \frac{1}{2}$

h) $\frac{\frac{\frac{2^6\cdot 5^6}{10^4}}{3}-\frac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot 2^2}} = \left(\frac{\frac{(2\cdot 5)^6}{10^4}}{3}-\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{3\cdot 2^2}{19} = \left(\frac{100\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{13\cdot 3}{4\cdot 3}\right)\cdot\frac{3\cdot 2^2}{19} = \frac{400-39}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 2^2}{19} =$
$\frac{361}{3\cdot 2^2}\cdot\frac{3\cdot 2^2}{19} = \frac{19^2}{19} = 19$

Lösung zu A7 ex-potenzen-mul-only

a) $-\frac{3}{7}a^5d^6g^5$
b) $\frac{5}{3}h^3m^4n^7$
c) $-\frac{3}{2}f^6m^6y^2$
d) $\frac{1}{2}g^4t^{10}z^3$
e) $\frac{3}{8}c^5t^6x^6$
f) $\frac{10}{13}c^6t^5$

Lösung zu A8 ex-monome-power

a) $\frac{125}{8}e^6s^{15}u^3$
b) $\frac{625}{16}b^{12}d^{12}h^8$
c) $\frac{25}{4}c^2m^{10}y^8$
d) $\frac{9}{4}d^{10}m^6p^2$
e) $\frac{9}{4}d^2t^6w^2$
f) $-\frac{125}{8}a^9m^{12}s^{15}$
g) $\frac{625}{16}a^{20}b^8e^4$
h) $\frac{9}{4}f^8h^6y^2$

Lösung zu A9 ex-monome-division

a) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{b^2n}{h^5}$
b) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{d^3}{q}$
c) $\frac{9}{2}\cdot\frac{g^2}{m}$
d) $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$
e) $-\frac{9}{2}\cdot\frac{w^4}{u^4}$
f) $-\frac{11}{2}es^6$

Lösung zu A10 ex-monome-quotient-power

a) $-\frac{243}{32}\cdot\frac{p^5}{f^{15}k^5m^{10}s^{15}}$
b) $\frac{625}{16}\cdot\frac{m^{12}x^{12}}{s^4u^{16}y^{16}}$
c) $\frac{243}{32}\cdot\frac{m^{25}}{e^{15}n^{20}s^{25}u^{15}}$
d) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{k^8p^8q^{16}t^{20}}$
e) $\frac{625}{16}\cdot\frac{g^{16}}{c^{16}f^4h^{16}y^4}$
f) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{c^{20}t^{16}u^{16}y^{20}}$

Lösung zu A11 ex-ausmultiplizieren-einfach

a) $\frac{7}{3}g^2-\frac{5}{9}gp^2+\frac{14}{15}gp^2-\frac{2}{9}p^4=\frac{7}{3}g^2+\frac{17}{45}gp^2-\frac{2}{9}p^4$
b) $-\frac{7}{18}a^4+\frac{9}{22}a^2b+\frac{7}{4}a^2b-\frac{81}{44}b^2=-\frac{7}{18}a^4+\frac{95}{44}a^2b-\frac{81}{44}b^2$
c) $-\frac{28}{9}h^2-\frac{8}{9}hn^2+\frac{14}{11}hn^2+\frac{4}{11}n^4=-\frac{28}{9}h^2+\frac{38}{99}hn^2+\frac{4}{11}n^4$
d) $\frac{25}{96}m^4-\frac{5}{16}m^2w^2+\frac{55}{16}m^2w^2-\frac{33}{8}w^4=\frac{25}{96}m^4+\frac{25}{8}m^2w^2-\frac{33}{8}w^4$
e) $-\frac{5}{18}t^4-\frac{5}{12}t^2w+\frac{4}{15}t^2w+\frac{2}{5}w^2=-\frac{5}{18}t^4-\frac{3}{20}t^2w+\frac{2}{5}w^2$
f) $\frac{35}{36}s^2-2su-\frac{1}{9}su+\frac{8}{35}u^2=\frac{35}{36}s^2-\frac{19}{9}su+\frac{8}{35}u^2$

Lösung zu A12 ex-ausmultiplizieren-bruch-monome

a) $-\frac{15}{22}n^4w^2-\frac{33}{5n^4w^8}-\frac{3}{w^3}-\frac{3}{2w^3}=-\frac{15}{22}n^4w^2-\frac{33}{5n^4w^8}-\frac{9}{2w^3}$
b) $-\frac{9f^6}{16w^4}+\frac{25w^6}{44f^6}-\frac{45}{88}w+\frac{5}{8}w=-\frac{9f^6}{16w^4}+\frac{25w^6}{44f^6}+\frac{5}{44}w$
c) $-\frac{27a^4}{8w^2}-\frac{81}{8}a^2-\frac{15}{8}a^2-\frac{45}{8}w^2=-\frac{27a^4}{8w^2}-12a^2-\frac{45}{8}w^2$
d) $-\frac{3}{7}p^6t^2+\frac{7}{6p^6t^4}-\frac{5}{3t}+\frac{3}{10t}=-\frac{3}{7}p^6t^2+\frac{7}{6p^6t^4}-\frac{41}{30t}$

Lösung zu A13 ex-ausklammern-nennerfrei

a) $\frac{1}{4ck^2}\cdot\left(3-5c^4k^4\right)$
b) $\frac{x^2}{8g^3}\cdot\left(-3g^4+10x\right)$
c) $\frac{2k^2}{21b^3}\cdot\left(-35b^4-6k\right)$
d) $\frac{m}{35p^2}\cdot\left(28-25p^4\right)$
e) $\frac{1}{10k^2q^3}\cdot\left(9+4kq^6\right)$
f) $\frac{q}{10m^3}\cdot\left(14+5m^2q^2\right)$
g) $\frac{e^2}{2s^2}\cdot\left(-7e-s^5\right)$
h) $\frac{y}{5b}\cdot\left(-3+4y^2\right)$

Lösung zu A14 ex-binomische-formeln-geschickt-rechnen

a) $21^2=(20+1)^2=400+40+1=441$
b) $13^2=(10+3)^2=100+60+9=169$
c) $19^2=(20-1)^2=400-40+1=361$
d) $37^2=(40-3)^2=1600-240+9=1369$
e) $38\cdot42=(40+2)(40-2)=1600-4=1596$
f) $105\cdot95=(100+5)(100-5)=10000-25=9975$

Lösung zu A15 ex-binomische-formeln-vorwaerts

a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

c) $(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

d) $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

e) $(2x^5+3y^7)^2 = 4x^{10} + 12x^5y^7 + 9y^{14}$

f) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2 + 2\cdot\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

h) $(5\sqrt{2}+7\sqrt{3})^2 = 50+2\cdot 35\sqrt{2}\sqrt{3}+147 = 197+70\sqrt{6}$

i) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

j) $(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

k) $(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

l) $(2x^5-3y^7)^2 = 4x^{10} - 12x^5y^7 + 9y^{14}$

m) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$

n) $(5\sqrt{2}-7\sqrt{3})^2 = 197 - 70\sqrt{6}$

o) $(-x-y)^2 = (-(x+y))^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

p) $(-x+y)^2 = (y-x)^2 = y^2-2xy+x^2 = x^2-2xy+y^2$

q) $(2u-v)\cdot(2u+v) = 4u^2 - v^2$

r) $(-a+2)\cdot(a-2) = (-1)(a-2)(a-2) = -(a-2)^2 = -(a^2-4a+4) = -a^2+4a-4$

s) $(2x^5-3y^7)\cdot(2x^5+3y^7) = 4x^{10} - 9y^{14}$

t) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2 - 3 = -1$

Lösung zu A16 ex-binomische-formeln-rueckwaerts

a) $4s^2 + 8st + \boxed{4t^2} = (2s+2t)^2 = 4(s+t)^2$

b) $4s^2 + \boxed{12st} + 9t^2 = (2s+3t)^2$

c) $\boxed{4s^4} + 12s^2t^3 + 9t^6 = (2s^2+3t^3)^2$

d) $4s^2 - 8st + \boxed{4t^2} = 4(s^2-2st+t^2) = 4(s-t)^2 = 4(t-s)^2$

e) $4s^2 - \boxed{2st} + \frac{1}{4}t^2 = (2s - \frac{1}{2}t)^2$

f) $\frac{4}{9}s^2 - \boxed{\frac{14}{6}st^2} + \frac{49}{16}t^4 = \left(\frac{2}{3}s - \frac{7}{4}t^2\right)^2$

g) $\boxed{4s^4} - 12s^2t^3 + 9t^6 = (2s^2-3t^3)^2$

h) $t^2 + \boxed{2t} + 1 = (t+1)^2$

i) $t^2 + 2 + \boxed{\frac{1}{t^2}} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2$

j) $t^2 + 1 + \boxed{\frac{1}{4t^2}} = \left(t + \frac{1}{2t}\right)^2$

k) $s^2 - t^2 = (s+t)(s-t)$

l) $s^6 - t^4 = (s^3+t^2)(s^3-t^2)$

m) $4s^2 - 9t^2 = (2s+3t)(2s-3t)$

n) $2s^2 - 3t^2 = (\sqrt{2}s+\sqrt{3}t)(\sqrt{2}s-\sqrt{3}t)$

o) $2s^6 - 3t^{2024} = (\sqrt{2}s^3+\sqrt{3}t^{1012})(\sqrt{2}s^3-\sqrt{3}t^{1012})$

Lösung zu A17 ex-binomische-formeln-zum-gleichung-loesen

a) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$, Lösung $x = -5$

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, Lösung $x = -\frac{1}{2}$

c) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$, löse $2x + \frac{1}{2} = 0$, Lösung $x = -\frac{1}{4}$

d) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$, Lösung $x = 4$

e) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, Lösung $x = \frac{1}{2}$

f) $9x^2 - 5x + \frac{25}{36} = \left(3x - \frac{5}{6}\right)^2$, Lösung $x = \frac{5}{18}$

g) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, löse $x+3=0$ oder $x-3=0$, Lösungen $x=-3$ und $x=3$

h) $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$

i) $2x^2 - 3 = (\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})$, Lösungen $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Lösung zu A18 ex-binomische-formeln-zum-kuerzen

a) $\frac{x^2-4}{x+2} = x-2$

b) $\frac{x^2-2xt+t^2}{x-t} = x-t$

c) $\frac{x^2-2xt+t^2}{t-x} = \frac{(x-t)^2}{t-x} = \frac{(t-x)^2}{t-x} = t-x$

d) $\frac{a^2+6at+9t^2}{a+3t} = a+3t$

e) $\frac{a^2+6at+9t^2}{a^2-9t^2} = \frac{(a+3t)^2}{(a+3t)(a-3t)} = \frac{a+3t}{a-3t}$

f) $\frac{a^2+3t^3}{a^4+6a^2t^3+9t^6} = \frac{a^2+3t^3}{(a^2+3t^3)^2} = \frac{1}{a^2+3t^3}$

Lösung zu A19 ex-binomische-formeln-zum-wurzeln-aus-nenner-beseitigen

a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\frac{2}{5-\sqrt{27}} = \frac{2(5+\sqrt{27})}{(5-\sqrt{27})(5+\sqrt{27})} = \frac{10+2\sqrt{27}}{25-27} = \frac{10+2\sqrt{27}}{-2} = \frac{-10-2\sqrt{27}}{2} = -5-\sqrt{27} = -5-3\sqrt{3}$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Lösung zu A20 ex-pascalsches-dreieck

Teilweise Lösung: Sie finden das Pascalsche Dreieck zum Beispiel hier: Wikipedia: Pascalsches Dreieck.

Lösung zu A21 ex-pascalsches-dreieck-vorwaerts

a) $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

b) $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

c) $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8a^3b+8ab^3$

d) $(2x+y)^4 = (2x)^4+4(2x)^3y+6(2x)^2y^2+4(2x)y^3+y^4 = 16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

e) $(2x-y)^4 = (2x)^4-4(2x)^3y+6(2x)^2y^2-4(2x)y^3+y^4 = 16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4$

f) $(x-1)^5 = x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

g) $(x-2)^5 = x^5-5x^4\cdot 2+10x^3\cdot 2^2-10x^2\cdot 2^3+5x\cdot 2^4-2^5 = x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

h) $(x-\frac{1}{2})^4 = x^4-4x^3\left(\frac{1}{2}\right)+6x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-4x\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4 = x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

i) $(t+\frac{1}{t})^4 = t^4+4t^2+6+4\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}$

j) $(t+\frac{1}{t})^4-(t-\frac{1}{t})^4 = 8t^2+8\frac{1}{t^2}$

k) $(2x^2+3y^3)^3 = \left(2x^2\right)^3+3\left(2x^2\right)^2\left(3y^3\right)+3\left(2x^2\right)\left(3y^3\right)^2+\left(3y^3\right)^3 = 8x^6+36x^4y^3+54x^2y^6+27y^9$

l) $(2xy-3y)^4 = (2xy)^4+4(2xy)^3(3y)+6(2xy)^2(3y)^2+4(2xy)(3y)^3+(3y)^4 = 16x^4y^4+96x^3y^4+216x^2y^4+216xy^4+243y^4$

m) $(a+b)^6-(a-b)^6 = 12a^5b+20a^3b^3+12ab^5$

n) $(11-14)^4 = (-3)^4 = 3^4 = 81$

o) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{3-2}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{36^2} = \frac{1}{(30+6)^2} = \frac{1}{900+2\cdot 180+36} = \frac{1}{900+360+36} = \frac{1}{1296}$

Lösung zu A22 ex-pascalsches-dreieck-rueckwaerts

a) $s^3+3s^2+3s+1 = (s+1)^3$

b) $s^3-3s^2+3s-1 = (s-1)^3$

c) $t^6+3t^4+3t^2+1 = (t^2+1)^3$

d) $s^8+4s^6t^3+6s^4t^6+4s^2t^9+t^{12} = (s^2+t^3)^4$

Lösung zu A23 ex-pascalsches-dreieck-zeilensummen-bzw-alternierend

(a) Die Summe über alle Zahlen in der n-ten Zeile ist $(1+1)^2 = 2^n$. (Man setzt also in die allgemeine Formel für $(a+b)^n$ ein $a=1$ und $b=1$.)
(b) Die alternierende Summe über alle Zahlen in der n-ten Zeile ist $(1-1)^2 = 0^2 = 0$. (Man setzt also in die allgemeine Formel für $(a+b)^n$ ein $a=1$ und $b=-1$.)

Lösung zu A24 ex-binomischer-lehrsatz-motiviert-durch-fibonacci-explizit

Lösung zu A25 ex-pascalsches-dreieck-dritte-zeile-als-quader

Men betrachte einen Würfel mit Kantenlänge $a+b$. Von einem Eckpunkt aus «zersäge» man den Würfel im Abstand a dreimal parallel zu den Würfelseiten. Dies ergibt 8 Teilquader.

- 1 a-a-a-Quader = Würfel
- 3 a-a-b-Quader
- 3 a-b-b-Quader
- 1 b-b-b-Quader = Würfel

Das Volumen des grossen Würfels ist $(a+b)^3$. Es setzt sich zusammen aus den Volumina der 8 Quader, d.h.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Wer vierdimensional denken kann, kann analog die Formel $(a+b)^4$ erklären (die Sägeschnitte sind dann dreidimensional), und dasselbe geht genauso in höheren Dimensionen.

Lösung zu A26 ex-binomialkoeffizienten-ausrechnen-pascalsches-dreieck

Die berechneten Binomialkoeffizienten sind genau die Einträge der fünften, vierten, dritten, zweiten, ersten und nullten Zeile des Pascalschen Dreiecks.

Warum dies so ist, wird im Beweis von Satz 5.4.5 erklärt.

Lösung zu A27 ex-binomialkoeff-symmetrie-summe

(a) Symmetrie:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} && \text{beachte } k = n-(n-k)\\
&= \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}\\
&= \binom{n}{n-k}
\end{aligned}$$

(b) Summationseigenschaft: Beim Auf-einen-gemeinsamen-Nenner-Bringen verwenden wir $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$ und $(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!}\\
&= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} && \text{Hauptnenner ist } (k+1)!\cdot(n-k)!\\
&= \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}\\
&= \frac{n!\cdot(k+1+n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}\\
&= \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} && \text{Beachte } n-k = (n+1)-(k+1)\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

(c) (i) Die erste Formel folgt daraus, dass jeder Auswahl von k Objekten aus n Objekten die «komplementäre» Auswahl der verbliebenen $n-k$ Objekte entspricht (und umgekehrt), es also genauso viele «k aus n Auswahlen» wie «$(n-k)$ aus n Auswahlen» gibt.

(ii) Die zweite Formel folgt sieht man so (am Beispiel $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$ erklärt):
Sind 8 Objekte gegeben, so greift man ein beliebiges davon heraus und nennt es a. Nun teilen sich die $\binom{8}{3}$ Auswahlen «3 aus 8» in zwei Gruppen:

- Diejenigen Auswahlen, die a enthalten: Davon gibt es $\binom{7}{2}$, denn man muss aus den 7 verbliebenen Objekten 2 auswählen.
- Diejenigen Auswahlen, die a nicht enthalten: Davon gibt es $\binom{7}{3}$, denn man muss aus den 7 verbliebenen Objekten 3 auswählen.

Daraus folgt $\binom{8}{3}=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$.

(d) Eine n-elementige Menge A hat bekanntlich 2^n Teilmengen (war ein Satz im Mengenlehre-Skript).
Die Ansammlung/Menge dieser Teilmengen teilt sich in $n+1$ Gruppen:

- $\binom{n}{0}=1$ 0-elementige Teilmenge (= die leere Menge)
- $\binom{n}{1}=n$ 1-elementige Teilmengen
- $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 2-elementige Teilmengen
- ...
- $\binom{n}{n-1}=n$ $(n-1)$-elementige Teilmengen
- $\binom{n}{n}=1$ n-elementige Teilmenge (= die Menge A selbst)

Daraus folgt, dass 2^n die Summe aller Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ist, für $k=0$ bis n.

Lösung zu A28 ex-gitterpfade