🄯 BY-SA
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

4 Strahlensätze, zentrische Streckungen und Ähnlichkeit

4.1 Verhältnisse

Definition 4.1.1 Verhältnis

Das **Verhältnis** einer Grösse a zu einer anderen Grösse b ist der *Quotient* $\frac{a}{b}$ dieser beiden Grössen. Verhältnisse sind reelle Zahlen. Bei Verhältnissen wird oft die «Doppelpunktnotation» verwendet, also

$$\frac{a}{b} = a : b$$ ✎

Sprechweisen: «a zu b» oder «das Verhältnis von a zu b».

4.1.2. In der Mathematik schreibt man Verhältnisse meist als Brüche.

Beispiele 4.1.3.

- Auf Landkarten wird der Massstab als Verhältnis angegegeben, z. B. bedeutet «1:100'000», dass 1 cm auf der Landkarte 100'000 cm in der Wirklichkeit entspricht.
- Mischungen werden oft durch Verhältnisse angegeben. Z. B. besteht Schwarzpulver aus Salpeter, Holzkohle und Schwefel im (Gewichts-)Verhältnis 15 : 3 : 2.
  Dies ist eine Kurzschreibweise dafür, dass das Verhältnis von Salpeter zu Holzkohle 15 : 3 beträgt und das von Holzkohle zu Schwefel 3 : 2.

⚒ **Aufgabe A1** Auf einer Wanderkarte des Massstabs 1:25'000 beträgt die minimale Entfernung von der Kanti bis zum Bodensee 39 cm (Luftlinie). Wie gross ist sie in der Realität in km?

⚒ **Aufgabe A2** Eine 3 m lange Strecke soll im Verhältnis 3 : 2 geteilt werden. Wie lange sind die beiden Teilstücke?

⚒ **Aufgabe A3** Wie viel muss wovon abgewogen werden, um 100 g Schwarzpulver herzustellen?
Hinweis: Die dafür nötigen Angaben findest du in 4.1.3.

⚒ **Aufgabe A4** Mit dem Satz von Pythagoras:

(a) Bestimmen Sie das Verhältnis von Diagonale zu Seite in einem beliebigen Quadrat.
(b) Bestimmen Sie das Verhältnis von Höhe zu Seite in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck.

⚒ **Aufgabe A5** Ein Rennvelo hat (Taschenrechner erlaubt)

- vorne eine Standardkurbel mit 53 und 39 Zähnen an den beiden Kettenblättern (= grosse Zahnräder) und
- hinten zwölf Ritzel (= kleine Zahnräder); das kleinste Ritzel hat 11, das grösste 34 Zähne.

Der Umfang des Hinterreifens beträgt 2146 mm.

(a) Ein Rennvelofahrer fährt in der Ebene mit hoher Geschwindigkeit im grössten Gang (also dem Gang, bei dem das Velo pro Pedalumdrehung die grösstmögliche Strecke zurücklegt).
  - Welches Zahnrad benutzt er vorne, welches hinten?
  - Welches **Übersetzungsverhältnis** hat seine Schaltung in diesem Gang? Das Übersetzungsverhältnis ist definiert als
    $$\text{Übersetzungsverhältnis} = \frac{\text{Anzahl der Zähne vorne am Kettenblatt}}{\text{Anzahl der Zähne hinten am Ritzel}}$$
    Was gibt diese Zahl anschaulich an?
    In der Technik nimmt man als Übersetzungsverhältnis wohl den Kehrwert dieser Zahl, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Ãœbersetzung_(Technik)#Das_ÃœbersetzungsverhÃďltnis_i.
  - Wenn er mit einer Kadenz (= Trittfrequenz) von 80 Umdrehungen pro Minute pedaliert, mit welcher Geschwindigkeit in km/h fährt er?
    Hinweis: Dreisatz Lösung: 49.608 km/h

(b) Nun fährt der Rennvelofahrer eine Pass-Strasse im kleinsten Gang hinauf. Beantworte dieselben Fragen.
Lösung: etwa 11.8 km/h

Bemerkung: Im Internet findet man diverse Seiten, die einem solche Rechnungen abnehmen und eventuell nützlich sind bei einem Velokauf, etwa https://j-berkemeier.de/Ritzelrechner.html.

 © BY-SA

Beispiel 4.1.4 (einer Verhältnisgleichung = Gleichung zwischen Verhältnissen)**.** Der Durchmesser der Sonne ist etwa 109 Mal so gross wie der Durchmesser der Erde. Wenn man annimmt, dass ein Elefant etwa 6 Meter lang ist und ein Hamster etwa 5.5 cm lang ist, so gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{\text{Durchmesser der Sonne}}{\text{Durchmesser der Erde}} = \frac{\text{Länge eines Elefanten}}{\text{Länge eines Hamsters}}$$

oder etwas salopp:

$$\frac{\text{Sonne}}{\text{Erde}} = \frac{\text{Elefant}}{\text{Hamster}}$$

Beispiel 4.1.5 (einer Verhältnisgleichung)**.** Bei einem Heliumatom umkreisen zwei Elektronen den Atomkern (der aus zwei Protonen und zwei Neutronen besteht). Wenn das Heliumatom ein Fussballstadion wäre, so wäre der Atomkern etwa so gross wie ein Reiskorn, d. h. es gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{\text{Heliumatom}}{\text{Atomkern}} = \frac{\text{Stadion}}{\text{Reiskorn}}$$

Merke 4.1.6 (nicht auswendigzulernen, aber man sollte sich dieser Umformungen bewusst sein)

Die folgenden Gleichungen sind äquivalent (für alle reellen Zahlen a, b, x, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$): ✎

Insbesondere sind die vier Verhältnisgleichungen äquivalent.

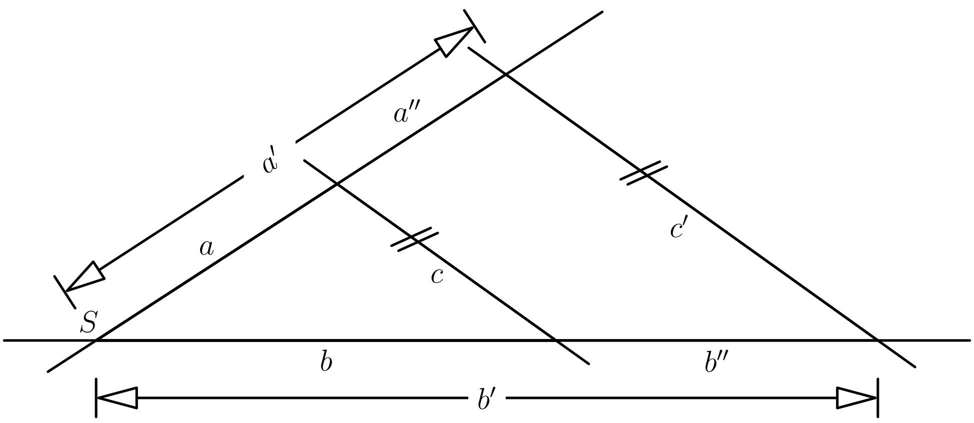
Beispiele 4.1.7.

- Die Verhältnisgleichung $\frac{\text{Sonne}}{\text{Erde}} = \frac{\text{Elefant}}{\text{Hamster}}$ ist gleichbedeutend zu
$$\frac{\text{Sonne}}{\text{Elefant}} = \frac{\text{Erde}}{\text{Hamster}}$$
- Die Verhältnisgleichung $\frac{\text{Heliumatom}}{\text{Atomkern}} = \frac{\text{Stadion}}{\text{Reiskorn}}$ ist gleichbedeutend zu
$$\frac{\text{Heliumatom}}{\text{Stadion}} \frac{\text{Atomkern}}{\text{Reiskorn}}$$

4.2 Strahlensätze

Setting 4.2.1. «**Strahlensatzfigur**»: Zwei parallele Geraden werden von zwei anderen Geraden, die sich in einem Punkt S schneiden, geschnitten. Man bezeichnet den Schnittpunkt S auch als **Scheitel**.

Der Name «Strahlensatz» kommt daher, dass man auch zwei vom Scheitel S ausgehende Strahlen (statt Geraden) betrachten mag.
In der Figur wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die vier beteiligten Geraden paarweise voneinander verschieden sind und dass S nicht auf einer der beiden parallelen Geraden liegt.



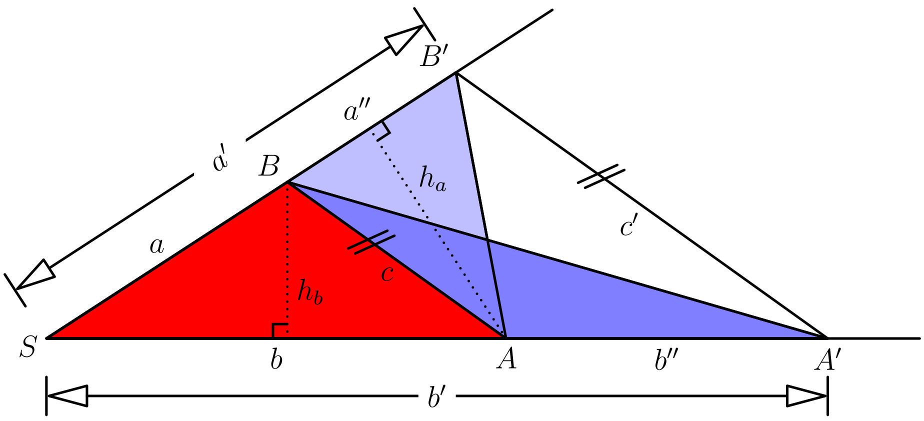
 BY-SA

4.2.1. Es gibt zwei Strahlensätze. Im ersten Strahlensatz tauchen nur die Längen a, a', a'' und b, b', b'' auf den vom Scheitel S ausgehenden «Strahlen» auf, im zweiten Strahlensatz dann zusätzlich die Längen c und c' auf den parallelen Geraden.

Satz 4.2.2 1. Strahlensatz

Wann immer wir im soeben beschriebenen Setting 4.2.1 sind, gilt:
Je zwei Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl, d. h. mit den Bezeichnungen in der obigen Skizze gelten die Verhältnisgleichungen✎

Beweis. Unsere beiden Geraden schneiden die beiden parallelen Geraden in vier Punkten, die wir wie in der folgenden Zeichnung A, B, A' und B' nennen. Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $c = \overline{AB}$ und $c' = \overline{A'B'}$ für die von den Geraden begrenzten Abschnitte der beiden Parallelen.



✎

BY-SA

□

4.2.3. Die drei Verhältnisgleichungen $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ und $\frac{a}{a''} = \frac{b}{b''}$ und $\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$ des 1. Strahlensatzes sind übrigens allesamt gleichbedeutend (wegen $a' = a + a''$ und $b' = b + b''$), d. h.: Ist eine davon bewiesen, folgen die anderen beiden automatisch.

Beweis: Zunächst schreiben wir jede der drei Gleichungen äquivalent um zu «Produktgleichungen» $ab' = a'b$ bzw. $ab'' = a''b$ bzw. $a'b'' = a''b'$. Indem wir darin $a' = a + a''$ und $b' = b + b''$ ersetzen und ausmultiplizieren, werden sie zu $ab + ab'' = ab + a''b$ bzw. $ab'' = a''b$ bzw. $ab'' + a''b'' = a''b + a''b''$. Diese drei Gleichungen sind nun aber offensichtlich gleichbedeutend: Subtrahiere bzw. addiere ab, um zwischen erster und zweiter Gleichung zu wechseln; addiere bzw. subtrahiere $a''b''$ für den Wechsel zwischen zweiter und dritter Gleichung.

(Dieser Beweis wird übrigens geometrisch besonders anschaulich, wenn man ein Rechteck mit Seitenlängen $a' = a + a''$ und $b' = b + b''$ zeichnet.)

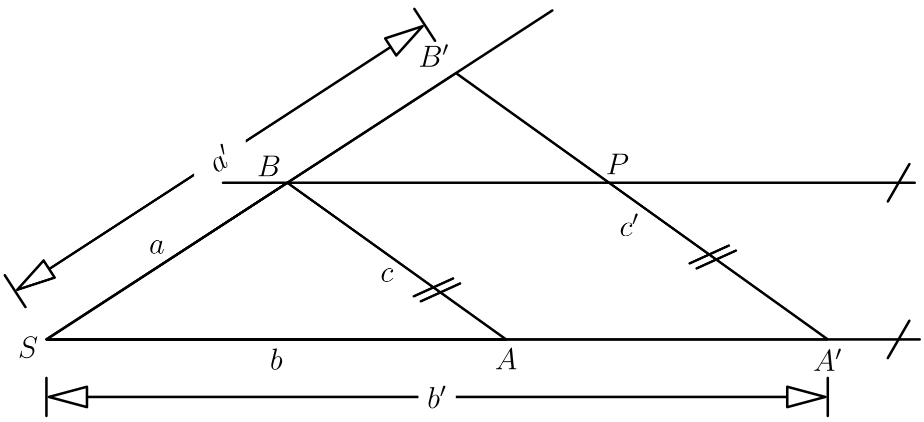
Satz 4.2.4 2. Strahlensatz

Unter denselben Voraussetzungen wie beim 1. Strahlensatz (Setting 4.2.1) gilt: Die beiden Abschnitte auf den parallelen Geraden verhalten sich genauso wie die entsprechenden von S ausgehenden Strecken, d. h. mit den zuvor verwendeten Bezeichnungen gilt ✎

D. h. In den beiden (zueinander ähnlichen) Dreiecken $\triangle ABS$ und $\triangle A'B'S$ sind die Verhältnisse einander entsprechender Seiten gleich.

(Zwei Dreiecksseiten «entsprechen einander», wenn sie an einander entsprechenden, gleich grossen (Stufen-)Winkeln in derselben Reihenfolge anliegen.)

Beweis. Zeichne die Parallele zu (AA') durch B. Sei P ihr Schnittpunkt mit $(A'B')$ wie in der Zeichnung.

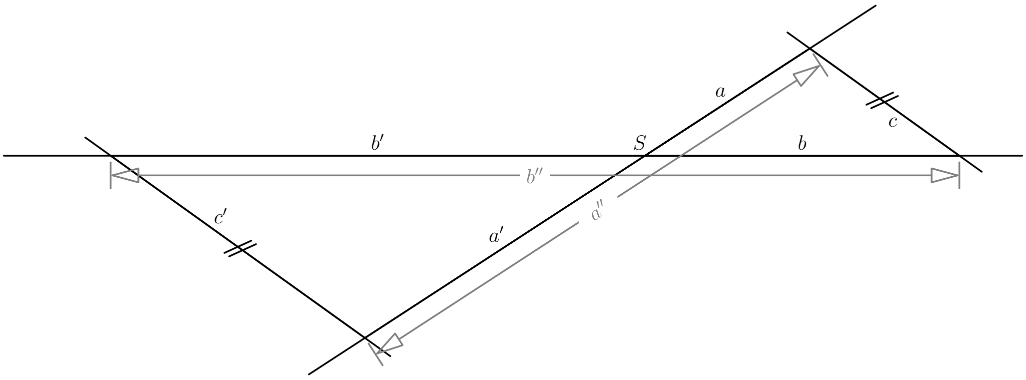


BY-SA

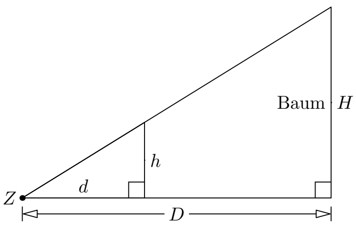
✎

□

4.2.5. Die beiden Strahlensätze gelten auch, wenn der Scheitel S zwischen den beiden parallelen Geraden liegt, also in einem Setting der folgenden Art. (Der Beweis geht fast genauso wie zuvor.)



Aufgabe A6 Baumhöhenbestimmung



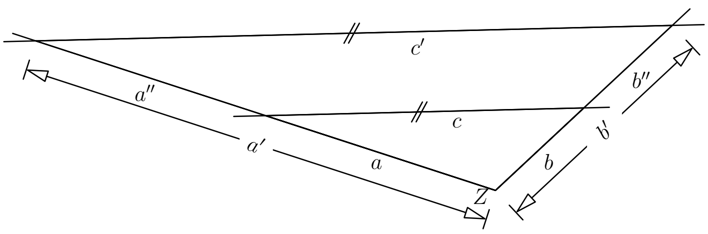
(a) Berechnen Sie die Baumhöhe H im Fall $D = 80$, $d = 0.40$ und $h = 0.12$ (alle Angaben in Meter).

(b) Drücken Sie allgemein die Baumhöhe H durch d, h und D aus. Gesucht ist also eine Formel für H in Abhängigkeit von d, h und D.

Bemerkung: In der Praxis wählt man einen Punkt Z als Standpunkt. Man visiert die Spitze des Baums an und misst d und h (etwa d=Armlänge, h könnte von einem Partner gemessen werden). Der Abstand D von Z zum «Fusspunkt» des Baums ist leicht zu messen.

Alternative: Bei der Baumhöhenbestimmung mit einem 45°-45°-90°-Dreieck wählt man den Standpunkt geeignet (vgl. Wikipedia:Försterdreieck).

Aufgabe A7 Berechnen Sie jeweils aus den gegebenen vier Längen die verbleibenden vier der acht Längen a, a', a'', b, b', b'', c und c'. (Die Zeichnung dient nur dazu, die Bezeichnungen zu erklären und ist nicht massstabsgetreu.)



a) $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$, $c' = 5$

b) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$, $b' = \frac{25}{9}$, $c = \frac{4}{3}$

c) $a' = \frac{25}{9}$, $b' = \frac{20}{9}$, $b'' = \frac{8}{9}$, $c' = \frac{10}{9}$

d) Variante (benötigt etwas Wissen zum Auflösen von Gleichungen): Die drei Längen $c' = 2$, $c = 1.6$, $a'' = 0.5$ sind gegeben. Welche der verbleibenden fünf Längen können Sie mit Sicherheit bestimmen?

Aufgabe A8 Die Grundfläche einer «geraden quadratischen Pyramide» beträgt $36\,\mathrm{m}^2$. Sprechweise: «quadratisch» bedeutet: die Grundfläche ist ein Quadrat; «gerade» bedeutet: die Spitze befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats.

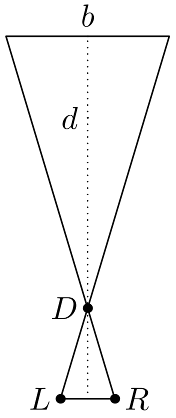
(a) Wenn man die Pyramide auf halber Höhe parallel zur Grundfläche durchschneidet, welche Fläche hat die Schnittfigur?

(b) Wenn man die Pyramide auf einem Drittel und auf zwei Drittel der Höhe parallel zur Grundfläche durchschneidet, welche Fläche hat jede der beiden Schnittfiguren?

(c) Was ändert sich, wenn man stattdessen eine «schiefe quadratische Pyramide» betrachtet?

BY-SA
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe A9 Daumensprung



Sie stehen mittig direkt vor einem Schloss (mit rechteckigem Grundriss), aber in einiger Entfernung. Wenn Sie Ihren Arm nach vorne ausstrecken und abwechselnd nur das linke bzw. das rechte Auge benutzen, springt Ihr Daumen genau vom linken Rand des Schlosses zum rechten Rand des Schlosses (in der nicht-masstabsgerechten Zeichnung gelten: L = linkes Auge, R = rechtes Auge, D = Daumen, b = Breite des Schlosses).

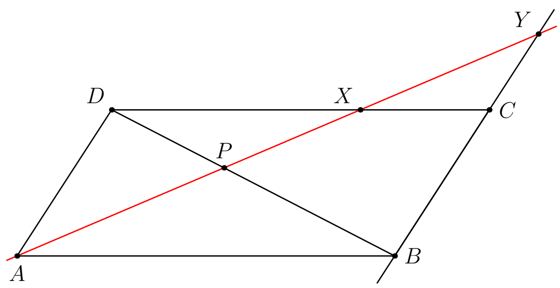
(a) «Zufällig» wissen Sie, dass das Schloss 40 Meter breit ist (z. B. durch Vergleich mit vor dem Schloss stehenden Autos, deren Länge sie schätzen können). Wie weit sind sie vom Schloss entfernt?
Hinweis: Messen oder schätzen Sie den Abstand zwischen ihren Augen und den Abstand von ihrem Nasenansatz bis zu ihrem Daumen.

(b) Erklären Sie die «Daumensprung-Faustregel»:

$$(\text{Abstand zum Objekt}) = 10 \cdot \text{«Sprungweite des Daumens auf dem Objekt»}$$

Aufgabe A10

Gegeben ist ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$. Durch seine Ecke A verläuft eine Gerade wie in der Skizze dargestellt (die einzige Bedingung an die Gerade ist, dass sie das Diagramm «durchquert»). Diese Gerade schneidet die Diagonale $[BD]$ in P, die Seite $[DC]$ in X und die Verlängerung der Seite $[BC]$ in Y. Zeigen Sie: Dann gilt

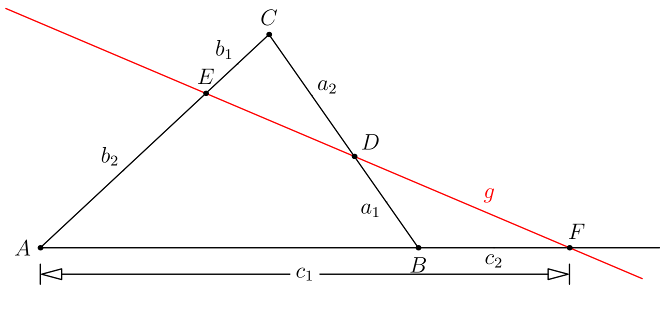


$$\overline{PA}^2 = \overline{PX} \cdot \overline{PY}$$

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung zunächst in eine Verhältnisgleichung um, indem sie durch $\overline{PA}$ und $\overline{PY}$ (oder $\overline{PX}$) dividieren. Diese Verhältnisgleichung können Sie mit Hilfe eines einzigen Zwischenschritts beweisen.

Aufgabe A11 Satz von Menelaos (ca. 100 n. Chr.)

Seien ABC ein beliebiges Dreieck und g eine Gerade, die das Dreieck schneidet, aber zu keiner der drei Dreiecksseiten parallel ist und durch keinen der Eckpunkte des Dreiecks geht. Die Schnittpunkte der Geraden g mit den drei Dreiecksseiten bzw. deren Verlängerungen werden D, E und F genannt.
Zeigen Sie: Dann gilt mit den Bezeichnungen der Zeichnung

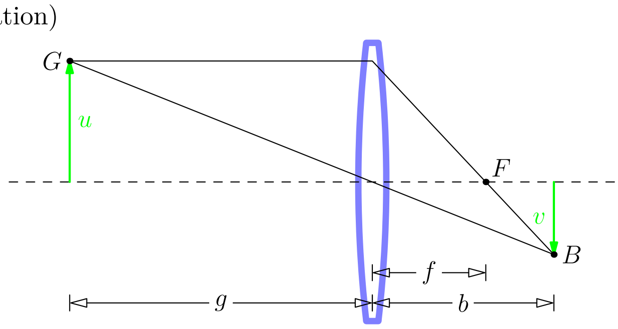


$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$$

Hinweis: Möglicher Lösungsweg: Zeichnen Sie die Parallele zu (AB) durch C ein und zeigen Sie gleichbedeutend $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_2}{c_1}$ (warum ist das gleichbedeutend?). Dafür sind $\frac{a_1}{a_2}$ und $\frac{b_1}{b_2}$ jeweils mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes umzuschreiben – als Scheitel wähle man die beiden naheligenden Punkte zwischen den beiden parallelen Geraden)

Aufgabe A12 Linsen-Gleichung (= thin lens equation)

Die Zeichnung zeigt schematisch eine Linse mit Brennpunkt/Fokus F. Von einem Gegenstand G sind zwei ausgehende Strahlen eingezeichnet. Der waagerechte Strahl wird von der Linse in Richtung des Brennpunkts F gebrochen. Er trifft den Strahl durch die Linsenmitte im sogenannten Bildpunkt B. Zeigen Sie für die in der Skizze dargestellten Längen f, g und b die sogenannte **Linsengleichung**



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Man nennt f die Brennweite der Linse, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite. (Hinweis auf nächster Seite)

© BY-SA

Hinweis: Wenn man die zu zeigende Gleichung mit fgb multipliziert, erhält man $gb = fb + fg$. Es genügt, diese Gleichung zu zeigen. Stellen Sie dazu $\frac{v}{u}$ auf zwei Arten mit Hilfe des Strahlensatzes dar und formen Sie die erhaltene Gleichung um auf $gb = fb + fg$.

Anwendung (vermute ich jedenfalls): Bei gegebener Linsenbrennweite f kann man die Bildweite b (= Abstand von der Linse zum Film/Bildsensor) so berechnen, dass Gegenstände in der gegebenen Entfernung g scharf abgebildet werden.

Bemerkung: Der dargestellte Verlauf der Lichtstrahlen entspricht einer Vereinfachung der geometrischen Optik, der sogenannten paraxialen Optik, vgl. Wikipedia: Thin lens, Image formation oder Wikipedia: Linsengleichung.

4.2.6. In den Strahlensätzen folgert man aus der Parallelität zweier Geraden, dass gewisse Seitenverhältnisse gleich sind. Gilt auch die Umkehrung? Kann man aus der Gleichheit gewisser Seitenverhältnissse auf die Parallelität von Geraden schliessen? Wir werden nun sehen, dass der 1. Strahlensatz umkehrbar ist, der 2. aber nicht.

Satz 4.2.7 Umkehrung des 1. Strahlensatzes

Gegeben sind zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt S schneiden, zwei Punkte A und A' auf der einen Geraden und zwei Punkte B und B' auf der anderen Geraden (jeweils verschieden von S). Falls S zwischen A und A' liegt, muss S auch zwischen B und B' liegen und umgekehrt. Ähnlich wie oben verwenden wir die Bezeichnungen $a = \overline{SB}$, $a' = \overline{SB'}$, $b = \overline{SA}$, $b' = \overline{SA'}$. Dann gilt:

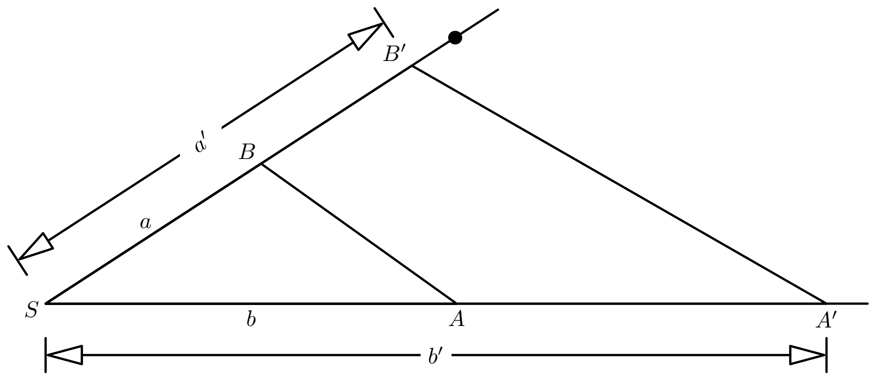
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad \Longrightarrow \qquad (AB) \text{ und } (A'B') \text{ sind parallel}$$

In Worten: «Wenn $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ gilt, so folgt, dass (AB) und $(A'B')$ parallel sind.»

4.2.8. Wie schon einige Male beim Beweis von «Umkehrungen» verwenden wir den Satz, dessen Umkehrung wir beweisen wollen und eine «absichtlich leicht falsche» Zeichnung, die den Beweis besser illustriert als die korrekte Zeichnung.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ gilt und betrachten die folgende «absichtlich leicht falsche» Zeichnung (die Geraden (AB) und $(A'B')$ sind nicht parallel).

Wir zeichnen die Parallele zu (AB) durch A'. Ihren Schnittpunkt mit (SB) nennen wir P.✎



Der erste Strahlensatz liefert ✎

Da P und B' auf demselben, von S ausgehenden *Strahl* (und nicht nur auf derselben Geraden durch S) liegen[1], folgt ✎

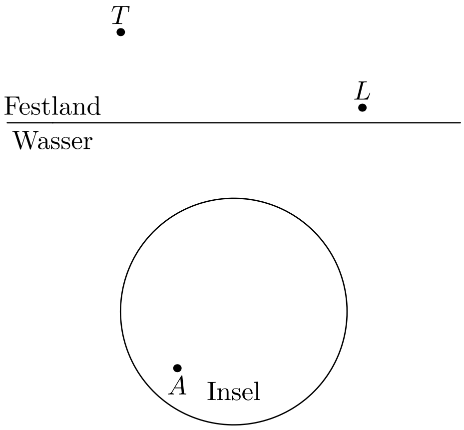
□

1 Dies kann man wie folgt begründen: Sei g die Parallele zu (AB) durch S. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Beachte, dass keiner der vier Punkte A, A', B, B' auf g liegt: Aus $A \in g$ folgt nämlich $g = (AB)$, also $S \in (AB)$, also liegen $(AB) = (AS) = (BS)$ im Widerspruch zur Annahme, dass $(AS$ und (BS) sich in genau einem Punkt schneiden; aus $A' \in g$ folgt $g = (A'S) = (AS)$, also $A \in g$ im Widerspruch zum gerade Bewiesenen; analog für B und B'.
Sei H_+ Halbebene, in der A liegt, und H_- die andere Halbebene. Dann liegt auch B in H_+ (sonst würde die Verbindungsstrecke $[AB]$ die Gerade g schneiden, was auf Grund der Parallelität nicht geht).
Wir behaupten, dass die beiden Punkt A' und B' entweder in H_+ oder in H_- liegen. Dazu genügt es zu zeigen, dass $A' \in H_- \iff B' \in H_-$. Liegt nämlich A' in H_-, so schneidet $[AA']$ die Gerade g notwendig im Punkt S und S liegt zwischen A und A'. Also liegt S auch zwischen B und B' und somit folgt $B' \in H_-$. Dies zeigt $A' \in H_- \implies B' \in H_-$; die Folgerung in die andere Richtung wird genauso bewiesen.
Die im Beweis eingezeichnete Parallele p zu (AB) durch A' liegt ganz in derselben Halbebene wie A' (denn sie schneidet g nicht) und (siehe oben) B'. Also liegt auch P' in dieser Halbebene. Also liegt S nicht zwischen P und B' und somit folgt aus $\overline{SP} = \overline{SB'}$ wirklich $P = B'$.

 BY-SA

Aufgabe A14 Zeigen Sie: Der zweite Strahlensatz ist nicht umkehrbar, d. h. im naheliegenden Setting ist das Folgende im Allgemeinen nicht richtig: Aus $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ folgt, dass die beiden «Geraden» c und c' parallel sind.

Aufgabe A15 Anwendungen der Strahlensätze in der Geodäsie = Erd/-Landvermessung, wörtlich übersetzt «Landzerteilung» (vermutlich Einteilung in Dreiecke = Triangulation)
«Geometrie» heisst übrigens wörtlich übersetzt «Erdvermessung».



Sie befinden sich am Punkt A auf einer Insel. An Land befinden sich zwei Leuchttürme L und T. Sie dürfen die Insel nicht verlassen, aber «elementare Konstruktionen» vornehmen, etwa Punkte und Geraden auf der Insel markieren, Längen und Winkel abmessen/übertragen, den Leuchtturm anpeilen, etc.

(a) Bestimmen Sie den Abstand $\overline{AL}$ mit Hilfe der Strahlensätze. Hinweis: Den Leuchtturm T können Sie in dieser Teilaufgabe ignorieren.

(b) Bestimmen Sie den Abstand $\overline{LT}$ der beiden Türme auf dem Festland mit Hilfe von Teilaufgabe (a) und der Strahlensätze (inklusive Umkehrung).

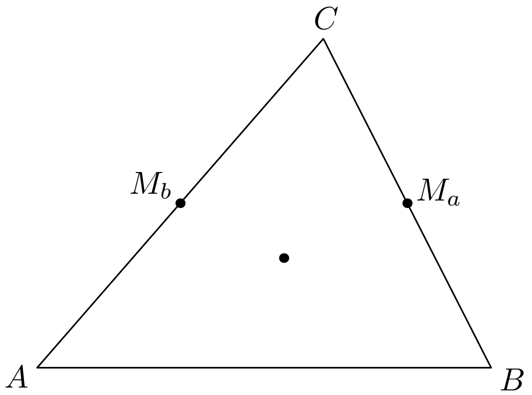
Aufgabe A16 Versuche (zuerst mit Bleistift), die Lücken im Schwerpunktsatz 4.2.9 und seinem Beweis zu füllen. Wer ambitioniert ist, sucht selbst einen Beweis des Schwerpunktsatzes. Eine sehr gute Übung ist auch, sich den Beweis im Nachhinein noch einmal selbst zu überlegen (das gilt für jeden Beweis).

Satz 4.2.9 Schwerpunktsatz

Die Seitenhalbierenden (= Schwerelinien) eines jeden Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Schwerpunkt**. Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis ✎

Der doppelt so lange Abschnitt auf jeder Seitenhalbierenden ist jeweils derjenige vom Schwerpunkt zum Eckpunkt.

Beweis. Die «Mittellinie» (M_bM_a) und (AB) sind ✎



und wir können die Umkehrung des 1. Strahlensatzes (mit Zentrum C) verwenden.

Die Strecke $[AB]$ ist ✎ lang wie $[M_bM_a]$, denn nach dem 2. Strahlensatz mit Zentrum C gilt ✎

Ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b, so gilt nach den Strahlensätzen mit Zentrum S ✎

Also werden s_a und s_b von ihrem Schnittpunkt jeweils in diesem Verhältnis geteilt. Das analoge Argument zeigt dieselbe Aussage für s_b und s_c. Insbesondere folgt, dass s_a und s_c die Seitenhalbierende s_b im selben Punkt schneiden. □

Aufgabe A17 Konstruieren Sie ein Dreieck mit $c = 7\,\text{cm}$ und $s_a = 6\,\text{cm}$ und $s_b = 9\,\text{cm}$.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst das Dreieck ASB mit Hilfe des Schwerpunktsatzes 4.2.9. Sie dürfen dazu benötigte Streckenlängen ausrechnen und dann den Zirkel am Lineal entsprechend einstellen. (Wie das konstruktiv mit dem Strahlensatz geht, lernen Sie im folgenden Problem 4.2.10.)

 BY-SA

Problem 4.2.10 Teilung einer Strecke in einem gegebenen Verhältnis

Teilen Sie eine gegebene Strecke $[AB]$ im Verhältnis $5:2$ durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal (ohne Abmessen und Rechnen), d. h. finden Sie einen Punkt $P \in (AB)$ mit

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2}$$

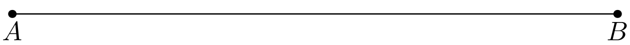
Lösung (geometrisch, mit erstem Strahlensatz)**.**

Kontrolle durch Abmessen und Rechnen:

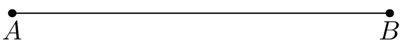
$\overline{AP} =$

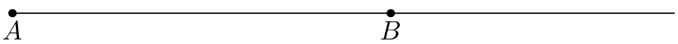
$\overline{BP} =$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} =$



Lösung (geometrisch, mit zweitem Strahlensatz: zwei Lösungen)**.**





Definition 4.2.11 innerer und äusserer $\frac{p}{q}$-Teilungspunkt einer Strecke

Der Punkt $P \in [AB]$ in der obigen Lösung heisst ✎

der Punkt $Q \notin [AB]$ heisst ✎

Allgemeiner existieren solche Teilungspunkte von Strecken zu jedem Verhältnis $v = \frac{p}{q} \geq 0$ mit Ausnahme von ✎

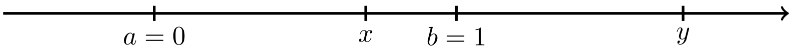
Aufgabe A18 Zeichnen Sie eine Strecke $[AB]$.

(a) Konstruieren Sie zum Verhältnis $\frac{1}{4}$ sowohl den inneren als auch den äusseren Teilungspunkt von $[AB]$.
(b) Konstruieren Sie zum Verhältnis $\frac{4}{1}$ sowohl den inneren als auch den äusseren Teilungspunkt von $[AB]$.

Aufgabe A19 Zeichnen Sie eine Strecke $[AB]$ und markieren Sie darauf einen Punkt P. Wenn man diesen Punkt als inneren Teilungspunkt von $[AB]$ auffasst: Konstruieren Sie den zugehörigen äusseren Teilungspunkt von $[AB]$.
Hinweis: Machen Sie die oben erklärte zweite Konstruktion des Teilungspunktes «rückgängig».

BY-SA

Aufgabe A20 Algebraische/rechnerische Lösung des Teilungsproblems: Fasse $a = 0$ und $b = 1$ als Punkte auf dem Zahlenstrahl auf.



(a) Teilung im Verhältnis $\frac{5}{2}$:
- Berechne die (rationale) Zahl x, die (als Punkt auf dem Zahlenstrahl) die Strecke $[ab]$ innen im Verhältnis $\frac{5}{2}$ teilt.
- Berechne die (rationale) Zahl y, die die Strecke $[ab]$ aussen im Verhältnis $\frac{5}{2}$ teilt.

(b) Teilung im Verhältnis $\frac{p}{q} > 1$: Berechne die Zahlen x und y (in Abhängigkeit von $\frac{p}{q}$), die die Strecke $[ab]$ innen bzw. aussen im Verhältnis $\frac{p}{q}$ teilen.

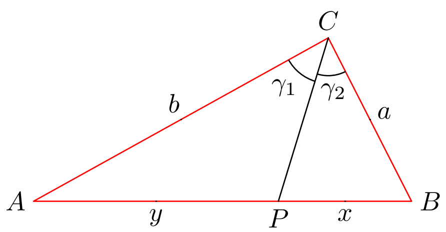
(c) Für x und y wie in der vorigen Teilaufgabe: Betrachte nun die Strecke $[xy]$.
- In welchem Verhältnis teilt der Punkt $a = 0$ diese Strecke?
- Teilt der Punkt $b = 1$ diese Strecke im selben Verhältnis?

Satz 4.2.12 über die Winkelhalbierenden (inklusive Umkehrung)

In jedem Dreieck teilt jede Innenwinkelhalbierende bzw. jede Aussenwinkelhalbierende die Gegenseite innen bzw. aussen im Verhältnis der anliegenden Seiten.
Umgekehrt gilt (mit den Bezeichnungen der Zeichnungen): Teilt ein Punkt P bzw. Q die Dreiecksseite $[AB]$ innen bzw. aussen im Verhältnis $\frac{b}{a}$, so ist (PC) bzw. (QC) die innere bzw. äussere Winkelhalbierende bei C.

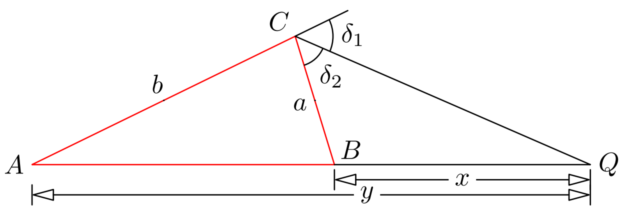
Zusammenfassung dieser Behauptungen:

$$\gamma_1 = \gamma_2 \iff \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

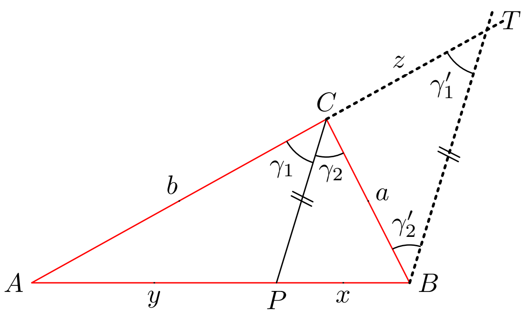


bzw.

$$\delta_1 = \delta_2 \iff \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Beweis. Eingezeichnet ist die Parallele zu (PC) durch B und ihr Schnittpunkt T mit der Geraden (AC).



Mit den Bezeichnungen der Zeichnung gelten

$\gamma_1' =$ da ✎

$\gamma_2' =$ da ✎

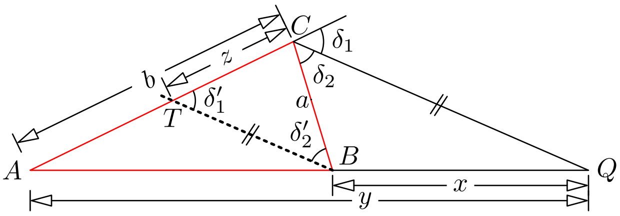
Nach dem Strahlensatz (Zentrum A) gilt (für die Längen x, y, z, b)

✎

Aus diesen Beobachtungen folgt:

(PC) Innenwinkelhalbierende $\iff$ $\iff$ $\iff$ $\triangle BTC$ gleichschenklig $\iff$ $\iff$ $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

BY-SA



Der Beweis für die Aussenwinkelhalbierende geht vollkommen analog mit Hilfe der Zeichnung links.

□

Aufgabe A21 Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $a = 3$ und $b = 4$.

(a) Berechnen Sie die Längen der Winkelhalbierenden w_α und w_β.
Hinweis: Zuerst die Länge c der Hypotenuse mit Pythagoras ausrechnen, dann Satz 4.2.12 verwenden, um zu bestimmen, wo w_α bzw. w_β die Seite a bzw. b schneidet, dann Längen mit Pythagoras berechnen.

(b) Berechnen Sie die Länge der Winkelhalbierenden w_γ.
Hinweis: $\gamma = 90°$.

4.2.13. In Aufgabe 18 (ex-geometrische-orte-apollonius) im Planimetrie-Skript haben Sie hoffentlich die folgende Vermutung aufgestellt: Sind $A \neq B$ zwei Punkte der Ebene, so ist die Menge

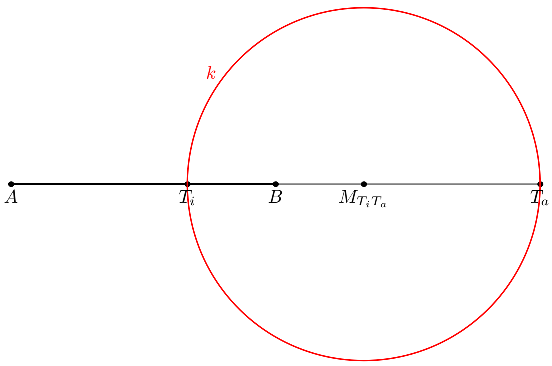
$$\{P \mid \overline{AP} = 2 \cdot \overline{BP}\} = \left\{P \mid \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{1}\right\}$$

ein Kreis. Der folgende Satz zeigt diese Vermutung in allgemeinerer Form.

Definition 4.2.14 v-Apollonioskreis zu einer Strecke

Sei $[AB]$ eine Strecke und sei $v \neq 1$ ein Verhältnis (für die Zeichnung rechts wurde $v = \frac{2}{1}$ gewählt). Seien T_i bzw. T_a der innere bzw. äussere v-Teilungspunkt der Strecke $[AB]$.
Dann heisst der Thaleskreis über der Strecke $[T_iT_a]$ **v-Apollonioskreis** zur Strecke $[AB]$.
Mit anderen Worten: Der v-Apollonioskreis hat den Mittelpunkt $M_{T_iT_a}$ und den Radius $\frac{1}{2}\overline{T_iT_a}$, d. h.

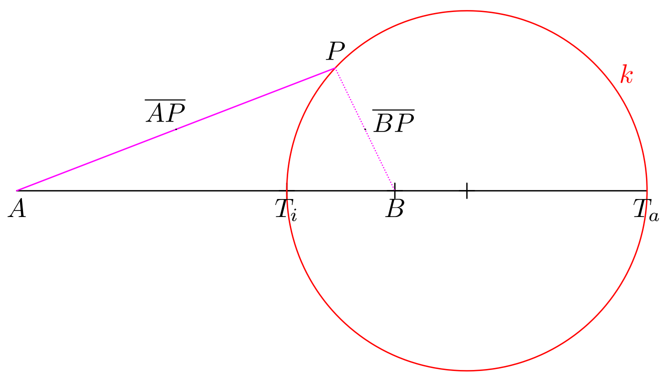
$$(v\text{-Apollonioskreis zu } [AB]) = k\left(M_{T_iT_a}, \frac{1}{2}\overline{T_iT_a}\right)$$



Satz 4.2.15 des Apollonios (ca. 200 v. Chr.)

Seien zwei Punkte A und B und ein Verhältnis $v \neq 1$ gegeben (etwa $v = \frac{5}{2}$ wie in der Zeichnung rechts).
Dann ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen zu A und zu B das konstante Verhältnis v haben, der v-Apollonioskreis zu $[AB]$.

Als Gleichheit von Mengen formuliert: ✎

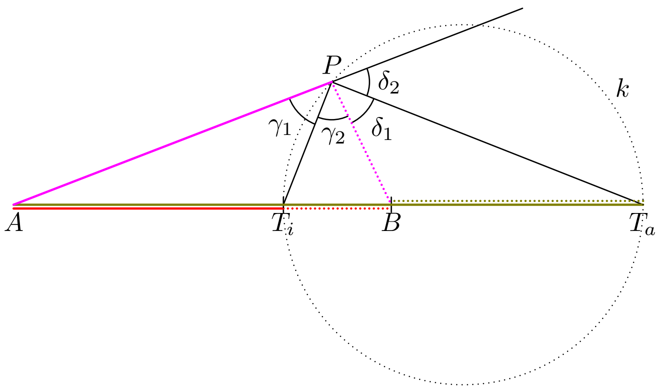


Beweis. Seien T_i und T_a innerer und äusserer v-Teilungspunkt der Strecke $[AB]$. Zu zeigen sind zwei Aussagen:

(a) Erfüllt ein Punkt P die Gleichung $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = v$, so liegt P auf dem angegebenen Thaleskreis über $[T_iT_a]$.

(b) Liegt ein Punkt P auf diesem Thaleskreis, so erfüllt er die Gleichung $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = v$.

Beweis von (a): Sei P ein Punkt der Zeichenebene mit $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = v$. Wir verbinden P mit den vier Punkten A, T_i, B und T_a und erhalten die folgende Zeichnung.



Beachte: Für jede der drei Farben Rot, Olivgrün, Magenta gilt $\frac{\text{durchgezogen}}{\text{gepunktet}} = v$, in Formeln ✎

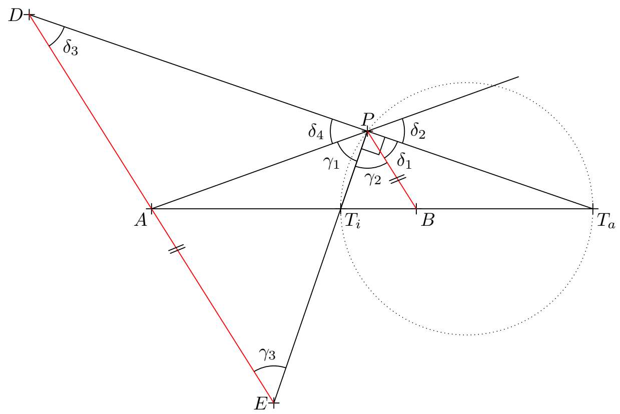
Der Satz über die Winkelhalbierenden (Umkehrung) zeigt, dass ✎

d. h. ✎

✎

✎

Beweis von (b): Sei nun P ein beliebiger Punkt auf dem Thaleskreis.



Nach dem Satz von Thales gilt

$$\sphericalangle = T_iPT_a = 90^\circ$$

Wie in der Zeichnung links verbinde man jeden der vier Punkte A, T_i, B und T_a durch eine Gerade mit P.

Zeichne die (rote) Parallele zu (PB) durch A. Sie schneidet (T_aP) im Punkt D und (T_iP) im Punkt E. Strahlensatz mit Zentrum T_a: ✎

Strahlensatz mit Zentrum T_i: ✎

neu: zeige $\overline{AP} = \overline{AE}$ (und folgere daraus $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = v$).

Kürzere Lösung (Elia, Silas; Gleichheit der Winkel wird nicht benötigt): Aus $\overline{AP} = \overline{AE}$ folgt sofort

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BP}} \overset{\text{siehe oben}}{=} v$$

Fertig.

□

Aufgabe A22 Unterschied zwischen $\frac{3}{7}$-Apollonioskreis und $\frac{7}{3}$-Apollonioskreis über $[AB]$:
Zeichnen Sie eine Strecke $[AB]$ der Länge 4 cm.

(a) Konstruieren Sie den $\frac{3}{7}$-Apollonioskreis über $[AB]$.
Hinweis: Zuerst sind innerer und äusserer $\frac{3}{7}$-Teilungspunkt zu konstruieren.

(b) Wählen Sie einen beliebigen Punkt P auf diesem Kreis (der nicht auf der Geraden (AB) liegt) und prüfen Sie durch Abmessen, ob $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{3}{7}$ gilt, d. h. $7 \cdot \overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$.

(c) (Eventuell eine neue Strecke $[AB]$ zeichnen.) Konstruieren Sie nun den $\frac{7}{3}$-Apollonioskreis über $[AB]$.

Aufgabe A23 Markieren Sie in einem Koordinatensystem die drei Punkte $B = (-4, 0)$, $E = (0, 0)$ und $T = (1, 3)$. Die Lage eines Schatzes S ist wie folgt beschrieben. Von der Buche B ist es zum Schatz S doppelt so weit wie von der Eiche E. Von der Tanne T und der Buche B ist der Schatz gleich weit entfernt.
Finden Sie den Schatz! Hinweis: Apollonios-Kreis

Aufgabe A24 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $c = 7.2\,\text{cm}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ und $s_c = 5.5\,\text{cm}$.

Aufgabe A25 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $c = 7.2\,\text{cm}$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$ und $\gamma = 60°$.
Hinweis: Apollonios-Kreis und eine wichtige Figur aus dem Abschnitt «Kreiswinkelsätze».

Aufgabe A26 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $c = 8\,\text{cm}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ und $s_b = 3.5\,\text{cm}$.

BY-SA

4.3 Zentrische Streckungen

Definition 4.3.1 Zentrische Streckung

Seien Z ein Punkt und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die **zentrische Streckung** (oder kurz **Streckung**) mit **Streckzentrum** Z und **Streckfaktor** $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die wie folgt definierte Abbildung (= Zuordnung) $s = s_{Z,\lambda}$ von der Zeichenebene in sich:

$s = s_{Z,\lambda}$: Zeichenebene $\to$ Zeichenebene,

$P \mapsto s(P) :=$ der Punkt auf der Geraden (ZP), der $|\lambda|$ mal so weit von Z entfernt ist wie P und (im Fall $P = Z$ definieren wir $s(P) = Z$)

- im Fall $\lambda \geq 0$ auf derselben Seite von Z liegt wie P;
- im Fall $\lambda < 0$ auf der anderen Seite von Z liegt als P.

Für jeden Punkt P gilt also

$$\overline{Zs(P)} = |\lambda| \cdot \overline{ZP} \qquad \text{oder gleichbedeutend} \qquad \frac{\overline{Zs(P)}}{\overline{ZP}} = |\lambda|$$

«Homothetie» und «Dilatation» bedeuten im Wesentlichen dasselbe wie «zentrische Streckung».

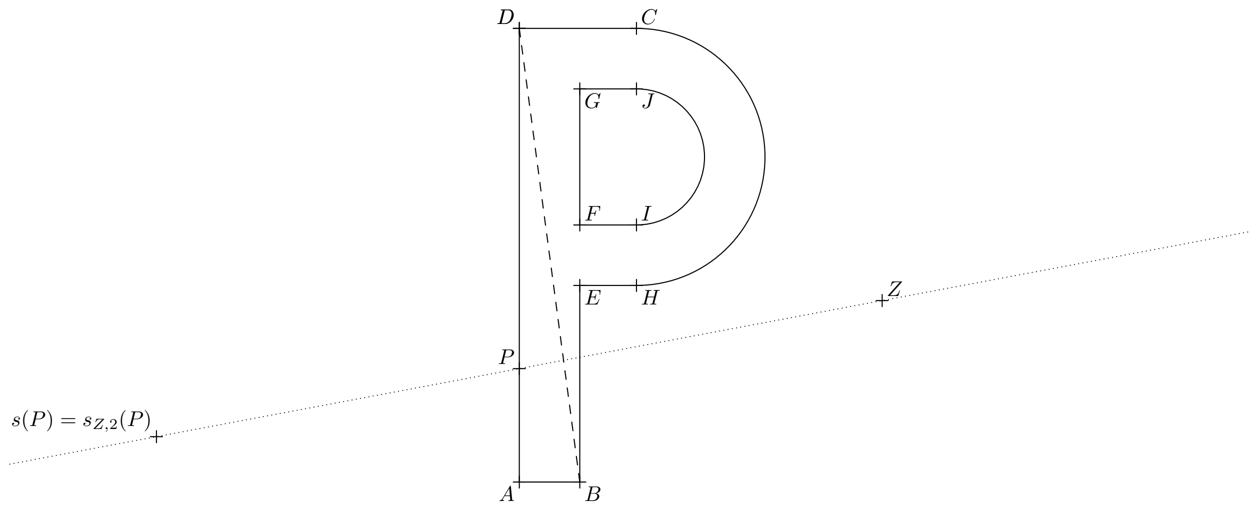
Aufgabe A27

(a) Wenden Sie auf «alle» Punkte der abgebildeten Figur «Buchstabe P» die zentrische Streckung $s = s_{Z,2}$ an und markieren Sie die sogenannten **Bildpunkte** $s(A)$, $s(B)$, $s(C)$, …, $s(J)$. Abmessen erlaubt.

(b) Um welchen Faktor ist die Fläche des Dreiecks ABD bzw. des Buchstabens P gewachsen?

(c) Sei nun t die zentrische Streckung mit Streckzentrum Z und Streckfaktor -1. Wenden Sie t auf die (ursprüngliche) Figur «Buchstabe P» an (d. h. auf all ihre Punkte) und beschriften Sie das sogenannte **Bild** $t(A)$ des Punktes A, das Bild $t(B)$ des Punktes B, …, das Bild $t(J)$ von J.

(d) Beschreiben Sie anschaulich, was eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und (i) Streckfaktor -1; (ii) Streckfaktor 1; (iii) Streckfaktor 0 macht.



Konstruktion 4.3.2 zentrische Streckung konstruktiv ausführen (ohne Abmessen)

Gegeben sind

- ein Punkt Z als Streckzentrum;
- ein Punkt $A \neq Z$;
- ein Punkt A' auf der Geraden (AZ).

Dann gibt es genau eine zentrische Streckung s mit Zentrum Z mit $s(A) = A'$, nämlich diejenige mit Streckfaktor $\lambda = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$.
Will man für einen beliebigen Punkt B, der nicht auf der Geraden (ZA) liegt, den Bildpunkt $s(B)$ konstruieren, so geht man wie folgt vor:

(a) Zeichne die Geraden (ZB) und (AB).
(b) Zeichne die zu (AB) parallele Gerade durch $A' = s(A)$.
(c) Ihr Schnittpunkt mit (ZB) ist der gesuchte Punkt $s(B)$. Beweis: Klar per erstem Strahlensatz.

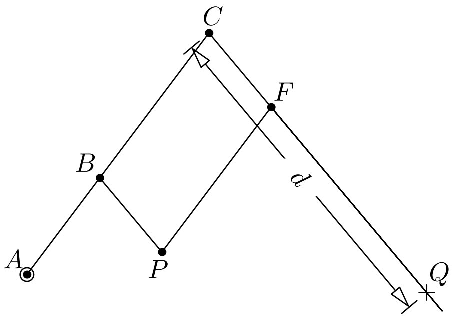
Der Vollständigkeit halber: Für $B = Z$ gilt $s(B) = Z$. Für $B \in (ZA) \setminus \{Z\}$ konstruiere man zuerst $s(C)$ für einen beliebigen Punkt $C \notin (ZA)$ und wende dann das obige Verfahren auf C und $s(C)$ (statt A und $s(A) = A'$) an.

Aufgabe A28 Verstehen Sie die Konstruktion 4.3.2 mit Hilfe einer Handskizze.
Zeichnen Sie dann ein Dreieck ABC. Wählen Sie einen «neuen» Punkt Z als Streckzentrum. Wählen Sie einen «neuen» Punkt A' auf der Geraden (AZ). Schätzen Sie ab, ob genügend Platz auf dem Papier für das Bilddreieck $s(\triangle ABC)$ ist, wenn s die zentrische Streckung mit Zentrum Z ist, die A auf A' abbildet, d. h. $s(A) = A'$ erfüllt. Wenn nicht, ändern Sie die Wahl der Punkte geeignet.

Konstruieren Sie – ohne Messen, sondern mit Konstruktion 4.3.2 – das Bild $s(\triangle ABC)$ des Dreiecks ABC unter der Streckung s.

Aufgabe A29 Pantograph (auch «Storchenschnabel» genannt) = mechanisches Präzisionsinstrument zum Vergrössern oder Verkleinern von Zeichnungen (Pantograph bedeutet wörtlich «Allesschreiber»).

In der Zeichnung ist ein «Gestänge» aus vier Stäben und 5 «Drehpunkten» dargestellt. Der eingekreiste Punkt A ist fix mit der Zeichenebene verbunden. Es gelten $\overline{BP} = \overline{CF}$ und $\overline{BC} = \overline{PF}$.
Wenn man mit dem «Zeichenstift» P eine Figur zeichnet, liefert der «Kopierstift» Q ebenfalls eine Zeichnung. Wie gross muss man die Distanz d wählen, damit Q die Ausgangsfigur zentrisch gestreckt wiedergibt?
Warum ist dies der Fall? Wo befindet sich das Streckzentrum? Wo ist der Streckfaktor im Gestänge «versteckt»?



Bonusaufgabe: Bauen Sie den Pantographen mit GeoGebra nach und experimentieren Sie damit. Bewegen Sie P und lassen Sie die Spur von P und Q anzeigen (Punkte mit rechter Maustaste anklicken, «Spur anzeigen» wählen). Lassen Sie auch die Spur anderer Punkte anzeigen, etwa die von F und C.

Satz 4.3.3 Eigenschaften zentrischer Streckungen

Jede zentrische Streckung s mit Streckfaktor $\lambda \neq 0$

(a) bildet jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade ab:
folgt aus obiger Konstruktion! (einerseits wird jeder Punkt der Geraden auf einen Punkt der parallelen abgebildet. Umgekehrt kommt jeder Punkt C der Parallelen her vom Schnittpunkt der Geraden ZC mit der Ausgangsgeraden (Schnittpunkt existiert).

$$g \text{ beliebige Gerade} \implies s(g) \text{ Gerade mit } s(g) \parallel g$$

(b) bildet jede Strecke der Länge x auf eine dazu parallele Strecke der Länge $|\lambda| \cdot x$ ab:

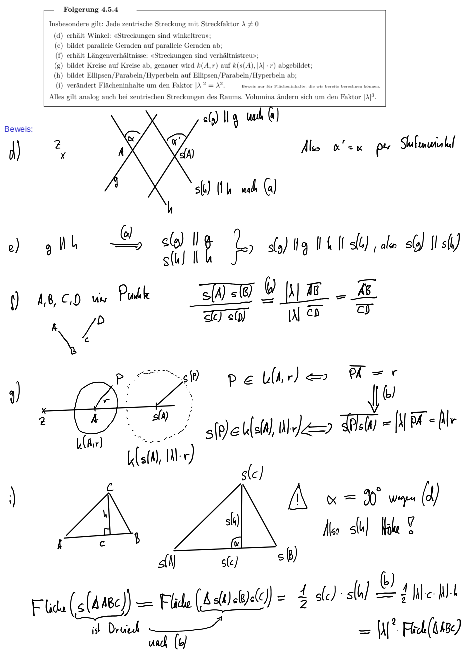
$$A \text{ und } B \text{ beliebige Punkte} \implies \overline{s(A)s(B)} = |\lambda| \cdot \overline{AB}$$

(c) wird rückgängig gemacht durch die zentrische Streckung mit Streckfaktor $\frac{1}{\lambda}$ und demselben Zentrum:

$$s_{Z,\frac{1}{\lambda}}(s_{Z,\lambda}(P)) = P \text{ für alle Punkte } P \text{ der Zeichenebene (mit beliebigem Punkt } Z \text{ als Zentrum)}$$

Beweis. In der Lektion an der Tafel.

Hier das entsprechende pdf, sinnvoll zu verarbeiten:



Folgerung 4.5.4

Insbesondere gilt: Jede zentrische Streckung mit Streckfaktor $\lambda \neq 0$

(d) erhält Winkel: «Streckungen sind winkeltreu»;
(e) bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab;
(f) erhält Längenverhältnisse: «Streckungen sind verhältnistreu»;
(g) bildet Kreise auf Kreise ab, genauer wird $k(A, r)$ auf $k(s(A), |\lambda| \cdot r)$ abgebildet;
(h) bildet Ellipsen/Parabeln/Hyperbeln auf Ellipsen/Parabeln/Hyperbeln ab;
(i) verändert Flächeninhalte um den Faktor $|\lambda|^2 = \lambda^2$. Beweis nur für Flächeninhalte, die wir bereits berechnen können.

Alles gilt analog auch bei zentrischen Streckungen des Raums. Volumina ändern sich um den Faktor $|\lambda|^3$.

Experimentell: Prüfe die Aussagen in der Zeichung für Aufgabe A27. □

BY-SA

Folgerung 4.3.4

Insbesondere gilt: Jede zentrische Streckung mit Streckfaktor $\lambda \neq 0$

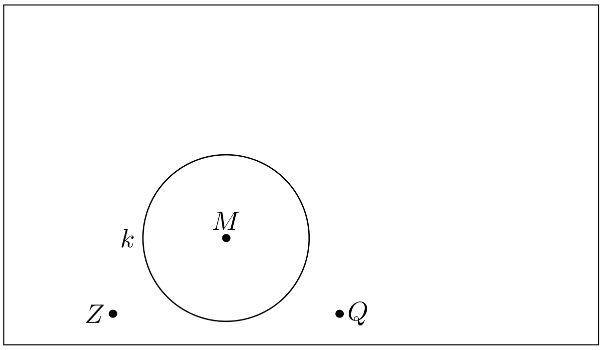
(d) erhält Winkel: «Streckungen sind winkeltreu»;
(e) bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab;
(f) erhält Längenverhältnisse: «Streckungen sind verhältnistreu»;
(g) bildet Kreise auf Kreise ab, genauer wird $k(A, r)$ auf $k(s(A), |\lambda| \cdot r)$ abgebildet;
(h) bildet Ellipsen/Parabeln/Hyperbeln auf Ellipsen/Parabeln/Hyperbeln ab;
(i) verändert Flächeninhalte um den Faktor $|\lambda|^2 = \lambda^2$. Beweis nur für Flächeninhalte, die wir bereits berechnen können.

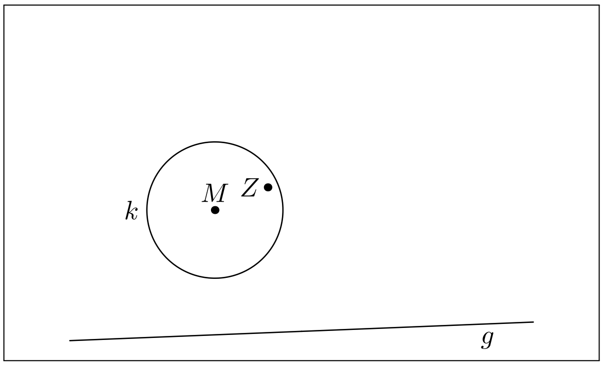
Alles gilt analog auch bei zentrischen Streckungen des Raums. Volumina ändern sich um den Faktor $|\lambda|^3$.

Beweis. In der Lektion an der Tafel. Teilweise in der Zeichung für Aufgabe A27 experimentell überprüfbar. □

Aufgabe A30 Gegeben sind jeweils ein Kreis k und ein Punkt Z. Sie können die Aufgabe direkt auf das Blatt lösen.

(a) In der linken Zeichnung: Strecken Sie den Kreis k an Z (d. h. Z soll das Streckzentrum sein) so, dass der Bildkreis $s(k)$ durch den gegebenen Punkt Q geht. Hinweis: Es gibt zwei Streckungen!
(b) Strecken Sie k an Z so, dass der Bildkreis $s(k)$ die gegebene Gerade g berührt. Hinweis: Es gibt zwei Streckungen!





Aufgabe A31

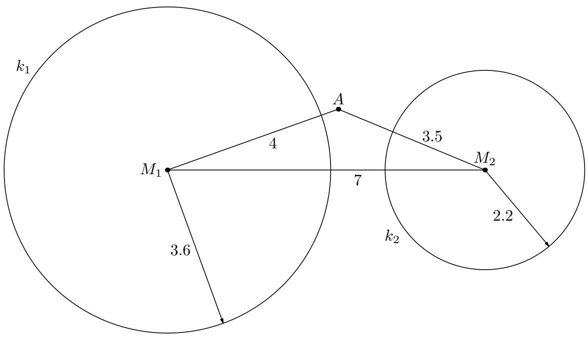
(a) Betrachten Sie zwei Kreise $k = k(M, 2.5\,\text{cm})$ und $\ell = k(N, 1\,\text{cm})$ mit Mittelpunktsabstand $\overline{MN} = 5\,\text{cm}$. Bestimmen Sie Zentrum und Streckfaktor (als Verhältnis zweier Streckenlängen) aller zentrischen Streckungen, die den Kreis k auf den Kreis ℓ abbilden. Hinweis: Es gibt zwei Streckungen.
(b) Lösen Sie die analoge Aufgabe für $\overline{MN} = 1.5\,\text{cm}$ und dieselben Kreisradien. Hinweis: Es gibt zwei Streckungen.

Aufgabe A32 Gegeben ist ein beliebiger Punkt A auf einem beliebigen Kreis $k(M, r)$. Was ist der geometrischer Ort (= die Menge) aller Punkte, welche die Kreissehnen, die durch A gehen, halbieren? Begründen Sie die Behauptung.

Hinweis: Zeichnen Sie einige Kreissehnen in einer ordentlichen Zeichnung ein und denken Sie an das Thema des aktuellen Abschnitts.

Aufgabe A33

Übertragen Sie die Zeichnung rechts auf Papier (im richtigen Massstab). Finden Sie einen Punkt $B \in k_1$ und einen Punkt $C \in k_2$, so dass A auf der Strecke $[BC]$ liegt und diese im Verhältnis $2:1$ teilt.
Hinweis: Handskizze. Strecken Sie einen der Kreise an einem geeigneten Punkt mit einem geeigneten Streckfaktor. Es gibt zwei Lösungen.

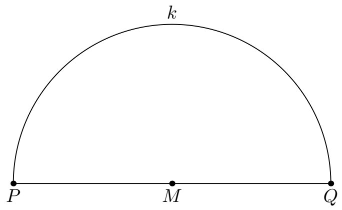


Einbeschreibungsaufgaben und Kreisberührungsaufgaben

Aufgabe A34

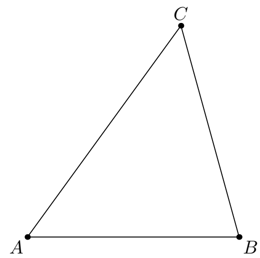
(a) Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$ in einen Halbkreis, so dass A und B auf der Strecke $[PQ]$ liegen und C und D auf dem Halbkreis k.

(b) Konstruieren Sie alle Rechteck $ABCD$ mit Seitenverhältnis $2:3$ in einen Halbkreis, so dass A und B auf der Strecke $[PQ]$ liegen und C und D auf dem Halbkreis k.



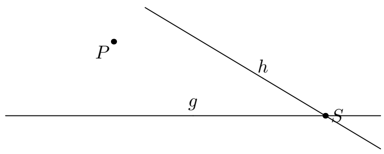
Aufgabe A35

Zeichnen Sie ein Dreieck ABC. Schreiben Sie diesem Dreieck ein Quadrat $PQRS$ ein, das zwei Ecken P, Q auf der Grundseite c hat, die Ecke R auf der Seite a und die Ecke S auf der Seite b.



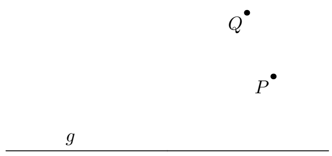
Aufgabe A36

Zeichnen Sie beliebig zwei Geraden g und h und einen Punkt P (der nicht auf den Geraden liegen soll, d. h. $P \notin g \cup h$). Konstruieren Sie alle Kreise, die durch P gehen und sowohl g als auch h berühren.



Aufgabe A37

Zeichnen Sie beliebig eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte P und Q auf einer Seite von g. Die Punkte sollen nicht auf g liegen und ihre Verbindungsgerade (PQ) soll nicht senkrecht auf g stehen. Konstruieren Sie alle Kreise, die durch P und Q gehen und g berühren.



Selbsterkläraufgaben

Aufgabe A38 Erklären Sie in eigenen Worten, was eine zentrische Streckung ist. Wovon hängt sie ab? Verwenden Sie dabei die Begriffe «Abbildung», «Streckzentrum», «Streckfaktor», «Punkt» und «Bildpunkt».

Quelle: Armin Barth: Mathematik fürs Gymnasium, Band 2

Aufgabe A39 Beantworten Sie die folgenden Fragen. Dabei ist Z jeweils ein beliebiger Punkt und $s_{Z,\lambda}$ bezeichnet die (zentrische) Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor λ.

(a) Wie sieht das Bild einer Geraden, die Z enthält, unter $s_{Z,2}$ aus?
(b) Wie sieht das Bild einer Geraden, die Z nicht enthält, unter $s_{Z,3}$ aus?
(c) Wie sieht das Bild einer Kreises unter $s_{Z,3}$ aus?
(d) Wie sieht das Bild eines Kreises, der Z enthält, unter $s_{Z,3}$ aus?
(e) Wie sieht das Bild einer Comic-Figur unter $s_{Z,1}$ aus?
(f) Wie sieht das Bild einer Comic-Figur unter $s_{Z,0}$ aus?
(g) Wie sieht das Bild einer Comic-Figur unter $s_{Z,3}$ aus? Wie verändert sich die Fläche?
(h) Wie sieht das Bild einer Comic-Figur unter $s_{Z,-1}$ aus?
(i) Wie macht man die Streckung $s_{Z,\frac{2}{3}}$ rückgängig?
(j) Ein A4-Papier hat dasselbe Seitenverhältnis wie ein A3-Papier, aber nur die halbe Fläche. Wenn man eine A4-Vorlage auf das Format A3-kopiert, welcher zentrischen Streckung «entspricht dies»?

motiviert durch: Armin Barth: Mathematik fürs Gymnasium, Band 2

BY-SA

relativ einfache Aufgaben zu Flächen- und Volumenänderungen bei Streckungen

Aufgabe A40

a) Ein Dreieck wird mit dem Faktor $\lambda = 3$ gestreckt. Um welchen Faktor verändert sich sein Flächeninhalt?

b) Gleiche Frage mit dem Streckfaktor $\lambda = -4$.

c) Gleiche Frage mit dem Streckfaktor $\lambda = \frac{1}{10}$.

d) Ein allgemeines Viereck wird mit dem Faktor λ gestreckt. Wie verändert sich sein Flächeninhalt?

e) Ein Würfel wird mit dem Faktor $\lambda = \frac{1}{2}$ gestreckt. Wie verändert sich sein Volumen? Wie seine Oberfläche?

f) Gleiche Frage mit allgemeinem Streckfaktor λ.

Aufgabe A41

a) Ursina möchte ihren Drachen mit einem Drittel der ursprünglichen Fläche nachbauen. Mit welchem Faktor muss sie die Längen der Stangen multiplizieren?

b) Urs möchte seinen Drachen mit der dreifachen Fläche nachbauen. Mit welchem Faktor muss er die Längen der Stangen multiplizieren?

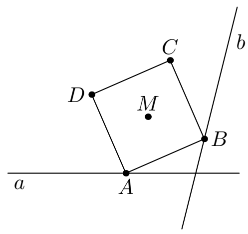
c) Von einer charakteristischen Getränkeflasche mit 1 l Inhalt und 24 cm Höhe wird für einen Souvenirshop eine verkleinerte (ähnliche) Version von 8 cm Höhe hergestellt. Wie viel Inhalt hat die verkleinerte Flasche? Wie viel mal kleiner wird das Etikett?

Aufgabe A42 Ein kegelförmiges Cocktailglas soll mit der Hälfte der maximal möglichen Füllmenge gefüllt werden. Bis auf welche Höhe muss das Glas gefüllt werden? Geben Sie das Resultat als Prozentsatz der Höhe an (100% = volles Glas).

Aufgaben, für deren Lösung man auch an Drehungen denken sollte

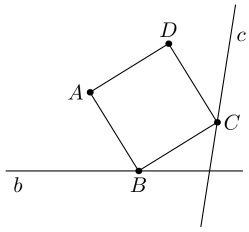
Aufgabe A43

Gegeben sind ein Punkt M und zwei Geraden a und b. Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$ mit Mittelpunkt M und mit Eckpunkten $A \in a$ und $B \in b$ wie in der Zeichnung rechts.
Hinweis: Betrachten Sie einige Punkte $A \in a$ und bestimmen Sie jeweils, wo der zugehörige Punkt B liegen müsste.



Aufgabe A44

Gegeben sind ein Punkt A und zwei Geraden b und c. Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$ zu der vorgegebenen Ecke A mit Eckpunkten $B \in b$ und $C \in c$ wie in der Zeichnung rechts.
Hinweis: Verwenden Sie eine Drehung und eine zentrische Streckung.



🅭 BY-SA

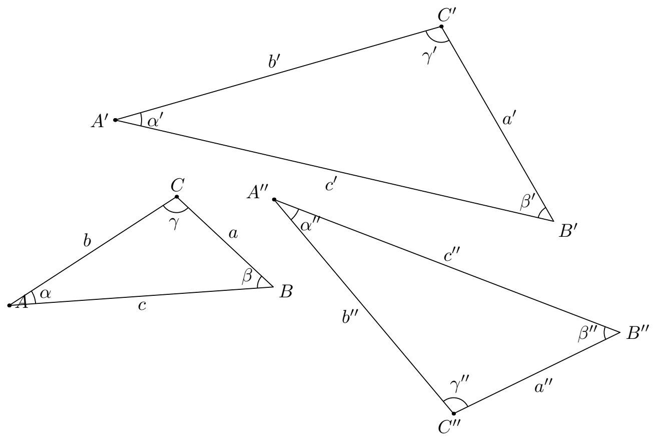
4.4 Ähnlichkeit

Definition 4.4.1 Ähnlichkeit

Zwei Figuren (meist in der Ebene) heissen **ähnlich**, falls die eine Figur durch eine geeignete Kombination endlich vieler

- Verschiebungen,
- Drehungen (= Rotationen),
- Spiegelungen (= Reflexionen) an Geraden bzw. Ebenen und
- zentrischer Streckungen mit Streckfaktor $\neq 0$

in die andere überführt werden kann.
In der Zeichnung rechts sind drei ähnliche Dreiecke abgebildet. Beachte, dass gespiegelte Dreiecke ähnlich sind!



NEU: Führe Notation für Ähnlichkeit ein, z. B. $F \cong F'$. Wenn man Polygone durch ihre Eckpunkte angibt, ist das Symbol so zu verwenden, dass einander entsprechende Ecken an derselben Position auftauchen. Z. B. $\triangle ABC \cong \triangle A''B''C''$. Dann kann man die Verhältnisgleichungen gut ablesen!

4.4.2. Sind zwei Figuren ähnlich, so sind

- «einander entsprechende» Winkel gleich;
- alle Verhältnisse «einander entsprechender Strecken» gleich: Alle Abstände zwischen Punkten in der einen Figur sind um einen konstanten positiven Faktor grösser als alle Abstände zwischen den entsprechenden Punkten in der anderen Figur.

Dies liegt daran, dass (1) Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen Winkel und Abstände erhalten und (2) zentrische Streckungen Winkel erhalten und alle Abstände mit dem Betrag des Streckfaktors multiplizieren.

Definition 4.4.3

Sind zwei Figuren F und F' ähnlich, so gibt der **Ähnlichkeitsfaktor von F zu F'** an, mit welchem Streckfaktor man F strecken muss, um eine zu F' kongruente Figur zu erhalten.
Der Ähnlichkeitsfaktor ist für alle Figuren endlicher Ausdehnung, die aus mindestens zwei Punkten bestehen, eindeutig. Nicht eindeutig ist er beispielsweise, wenn F und F' zwei Geraden sind.

Merke 4.4.4

Beim einem Ähnlichkeitsfaktor $\lambda > 0$ werden

- Längen mit λ,
- Flächeninhalte mit λ^2 und
- Volumen mit λ^3 multipliziert.

Aufgabe A45 Der Kanton St. Gallen hat eine Gesamtfläche von 2028.2 km^2.
Welche Fläche (in cm^2) bedeckt er auf einer Karte des Massstabs 1:300'000?

Aufgabe A46 Der Erddurchmesser ist etwa 3.67 mal grösser als der Monddurchmesser. Wieviel mal grösser ist die Erdoberfläche als die Mondoberfläche? Gleiche Frage für das Volumen.

Aufgabe A47 Eine Firma stellt Gartenzwerge her, die alle zueinander ähnlich sind (in dem Sinne, dass sie auseinander durch Streckungen hervorgehen). Das Modell «Schlafmütze» wird in drei Grössen hergestellt, nämlich mit den Höhen 10 cm, 15 cm und 20 cm. Die Zwerge sind aus massivem Gips. Das kleinste Modell wiegt 600 g. Das grösste Modell benötigt 50 ml Farbe für den Anstrich.
Wie schwer sind die drei Modelle und wieviel Farbe wird für jedes der Modelle benötigt?
Annahme: Die benötigte Farbe ist proportional zur Oberfläche.

Satz 4.4.5 Ähnlichkeitssatz für Dreiecke

Die folgenden drei Aussagen sind für zwei beliebige Dreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ gleichbedeutend:

(a) Die beiden Dreiecke sind ähnlich.

(b) Zwei (und damit drei) der drei Winkel der beiden Dreiecke sind gleich.

(c) Die drei Verhältnisse «einander entsprechender» Seiten sind gleich: Es gibt Seitenbenennungen a, b, c des Dreiecks $\triangle$ und a', b', c' des Dreiecks $\triangle'$ mit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \text{(Diese Zahl ist dann der Ähnlichkeitsfaktor von } \Delta' \text{ zu } \Delta\text{.)}$$

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b) und (c): Klar nach 4.4.2.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei a eine Seite im Dreieck $\triangle$ und a' die «entsprechende» Seite im Dreieck $\triangle'$ («entsprechend» bedeutet: die beiden anliegenden Winkel sind gleich). Strecke nun $\triangle'$ mit dem Streckfaktor $\frac{a}{a'}$ (das Streckzentrum ist beliebig): Das Bild der Seite a' hat dann die Länge a und die anliegenden Winkel bleiben gleich. Folglich ist das Bild des Dreiecks $\triangle'$ kongruent zum Dreieck $\triangle$ nach dem Kongruenzsatz wsw. Also sind $\triangle$ und $\triangle'$ ähnlich.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Das Bild des Dreiecks $\triangle'$ unter einer Streckung mit Streckfaktor $\frac{a}{a'}$ ist kongruent zum Dreieck $\triangle$ nach dem Kongruenzsatz sss. Also sind $\triangle$ und $\triangle'$ ähnlich. $\square$

Lösungsstrategie 4.4.6

Beim Lösen von Aufgaben zur Ähnlichkeit ist das Vorgehen meist so: Finde zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln. Diese beiden Dreiecke sind dann ähnlich und es gilt (siehe Satz 4.4.5)

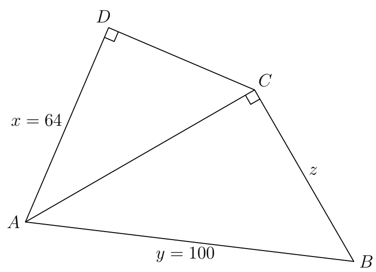
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad = \text{Ähnlichkeitsfaktor}$$

Beachte, dass die Benennung der Seiten hier implizit so vorgenommen wurde, dass a und a' gegenüber des gleichen Winkels liegen, und analog für b und b' bzw. c und c'. Äquivalent gelten

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Aufgabe A48

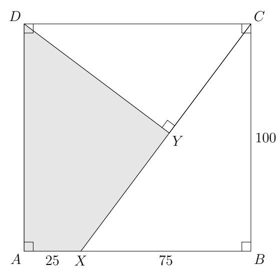
In der Zeichnung rechts halbiert die Strecke $[AC]$ den Winkel $\sphericalangle BAD$. Die Längen der Strecken x und y sind in der Zeichnung angegeben. Berechnen Sie die Länge der Strecke z.



Aufgabe A49

Berechnen Sie den Inhalt der grauen Fläche!

Beachte: Zwei Dreiecke sind auch dann ähnlich, wenn die drei gleichen Winkel in den beiden Dreiecken in unterschiedlicher Reihenfolge auftauchen.



Aufgabe A50

(a) Messen Sie Höhe h und Breite b eines A4-Blatts und berechnen Sie mit dem Taschenrechner das Verhältnis $\frac{h}{b}$. Fällt Ihnen etwas auf?

Das A4-Format ist durch die folgenden drei Eigenschaften definiert:

- Zwei entlang der längeren Seite nebeneinandergelegte A5-Blätter decken genau ein A4-Blatt ab. Analog liefern zwei A$(n+1)$-Blätter ein An-Blatt, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist.
- Alle A-Blätter sind ähnlich.
- Die Fläche eines A0-Blatts ist $1\,\mathrm{m}^2$.

(b) Berechne Sie nur aus diesen drei Eigenschaften die Höhe und Breite eines A0-Blatts.

(c) Berechnen Sie nun Höhe und Breite eines A4-Blatts und vergleichen Sie mit den von Ihnen gemessenen Werten.

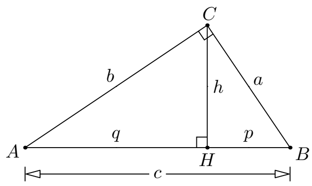
Aufgabe A51

Lässt sich eine der A-Serie von Rechtecken entsprechende Serie von Quadern definieren?

4.4.7. Die beiden folgenden Aufgaben zeigen, wie einfach man mit Hilfe von Ähnlichkeitsargumenten (also im Wesentlichen mit Hilfe der Strahlensätze) wichtige klassische Sätze beweisen kann.

Aufgabe A52

Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC wie in der Zeichnung rechts. Zusätzlich zu den üblichen Bezeichnungen sind die Höhe $h = h_c$ samt Höhenfusspunkt $H = H_c$ und die beiden Hypotenusenabschnitte p und q eingezeichnet (beachte, dass p bei a liegt und q bei b, sozusagen in alphabetischer Reihenfolge).



In der Figur sind drei ähnliche Dreiecke «versteckt». Finden Sie diese und begründen Sie die Ähnlichkeit präzise.

Folgern Sie daraus

(a) den Höhensatz $h^2 = pq$

(b) die Kathetensätze $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$
Hinweis: Schreiben Sie die Gleichungen als Verhältnisgleichungen.

Folgern Sie aus den Kathetensätzen

(c) den Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

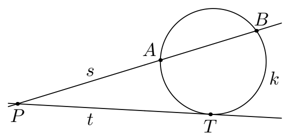
Bemerkung: Diese Beweise sind «kurz und schmerzlos». Später werden wir «bessere» Beweise dieser Sätze kennenlernen, aus denen direkt hervorgeht, warum gewisse Quadrats- und Rechtsecksflächen gleich gross sind.

Aufgabe A53

Zeigen Sie mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

(a) den Sekanten-Tangenten-Satz:

Beliebig gegeben sind ein Kreis k, eine Tangente s (= Kreisberührende) und eine **Sekante** s (= Kreisschneidende), die nicht parallel zur Tangente t ist. Die Schnitt- bzw. Berührpunkte sind wie in der Zeichnung rechts benannt. Dann gilt

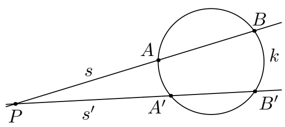


$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

Hinweis: Ähnliche Dreiecke und Kreiswinkelsätze

(b) den Sekanten-Satz:

Beliebig gegeben sind ein Kreis k und zwei sich schneidende Sekanten s und s'. Die Schnitt- bzw. Berührpunkte sind wie in der Zeichnung rechts benannt. Dann gilt

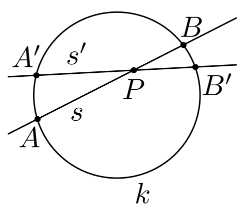


$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Hinweis: Ähnliche Dreiecke und Kreiswinkelsätze oder Folgerung aus dem Sekanten-Tangentensatz

(c) den Sehnen-Satz

Beliebig gegeben sind ein Kreis k und zwei sich schneidende Sehnen s und s'. Die Schnitt- bzw. Berührpunkte sind wie in der Zeichnung rechts benannt. Dann gilt



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Hinweis: Ähnliche Dreiecke und Kreiswinkelsätze.

4.5 Aufgabe: Eulersche Gerade

Aufgabe A54 Zeigen Sie, dass in jedem Dreieck ABC Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden liegen, der sogenannten «eulerschen Geraden» oder «Euler-Geraden», und dass genauer S die Strecke $[UH]$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$ teilt.

Hinweis: Zeichnen Sie in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierenden, deren Schnittpunkt S, die Mittelsenkrechten und deren Schnittpunkt U ein. Nun betrachte man die zentrische Streckung an S mit Streckfaktor -2. Wohin werden die Mittelsenkrechten abgebildet?

Eselsbrücke, um sich zu merken, dass H, S und U auf einer Gerade liegen (nicht aber, im Allgemeinen, der Innkreismittelpunkt I): Im Adjektiv «eulersch» kommen die Buchstaben h, s, u vor, der Buchstabe i aber nicht.

Bemerkung: Übrigens liegt auch der Mittelpunkt des sogenannten Feuerbachkreises auf der Euler-Geraden.

4.6 Anwendungen von Ähnlichkeit in der Astronomie: Aristarchos von Samos: Entfernungen und Radien von Mond und Sonne

4.6.1. Das Folgende habe ich im Wesentlichen aus Wikipedia: On the Sizes and Distances (Aristarchus) gelernt. Es handelt sich dabei um eine moderne Darstellung von Aristarchos' Vorgehen (Aristarchos hat wohl nicht genau dieselben Formeln benutzt, aber ähnliche).

Sinnvolle Zeichnungen sind noch zu ergänzen.

Bestimmung des Erdumfangs durch Eratostenes

4.6.2. Die (ungefähre) Kugelform der Erde ist schon lange bekannt; beispielsweise gab Aristoteles in 4. Jahrhundert v. Chr. drei astronomische Beweise dafür (z. B. Form des Erdschattens auf dem Mond bei einer Mondfinsternis).

Eratosthenes bestimmte den Erdumfang um 240 v. Chr. in etwa wie folgt (vgl. Eratosthenes, Bestimmung des Erdumfangs: Zum Zeitpunkt der Sommersonnenwende warf ein Stab in Assuan (damals Syene) keinen Schatten, die Sonne stand also genau über Assuan (ein senkrechter Brunnenschacht war voll beleuchtet). In Alexandria war die Sonne zum selben Zeitpunkt etwa 7° vom Zenit (= Richtung senkrecht zur Erdoberfläche nach oben) entfernt. Die Entfernung dieser beiden Orte beträgt ca. 835 km. Unter der (leider nicht ganz korrekten) Annahme, dass sich beide Orte auf demselben Längengrad befinden, ergibt sich daraus ein Erdumfang von

$$\frac{360°}{7°} \cdot 835\,\mathrm{km} \approx 42\,942\,\mathrm{km}$$

4.6.3. Der Meter wurde 1799 so definiert, dass er (nach damals durchgeführten Messungen) dem zehnmillionstel Teil der Entfernung vom Nordpol zum Äquator entspricht (heute ist der Meter genauer definiert). Mit anderen Worten beträgt der Erdumfang

$$4 \cdot 10\,000\,000\,\mathrm{m} = 4 \cdot 10\,000\,\mathrm{km} = 40\,000\,\mathrm{km}$$

der Erdradius

$$t = \frac{40\,000\,\mathrm{km}}{2\pi} \approx 6366\,\mathrm{km} \tag{4.1}$$

Sonne und Mond: Entfernungen und Radien nach Aristarchos (ca. 310 - 230 v. Chr.)

4.6.4. Wir bezeichnen mit

- S den Abstand von der Erde zur Sonne und mit s den Sonnenradius («s» wie Sonne, sol);
- L den Abstand von der Erde zum Mond und mit ℓ den Sonnenradius («l» wie luna, Mond);
- t den Erdradius (wie oben bereits verwendet; «t» wie terra, Erde).

Bei den Abständen ist im Prinzip der Abstand zwischen den Mittelpunkten gemeint (aber vielleicht nehmen wir das im Folgenden nicht ganz so genau).

4.6.5 (Sonnenfinsternis)**.** Bei einer totalen Sonnenfinsternis sieht man, dass Sonne und Mond von der Erde aus gesehen gleich gross erscheinen. Also gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{S}{s} \approx \frac{L}{\ell} \qquad \text{oder umgeschrieben} \qquad \frac{S}{L} \approx \frac{s}{\ell} \tag{4.2}$$

🅭 BY-SA

4.6.6 (Halbmond)**.** Bei Halbmond bilden Erde, Mond und Sonne ein rechtwinkliges Dreieck mit der Entfernung Erde-Sonne S als Hypotenuse und Entfernung Erde-Mond L als einer Kathete. Wenn man von der Erde aus den Winkel φ zwischen Sonne und Mond misst, kann man so das Verhältnis $\frac{S}{L}$ bestimmen: Man zeichne ein ähnliches Dreieck in den Sand und bestimme daraus das entsprechende Verhältnis. Aristarchos mass wohl $\varphi \approx 87°$ und kam so auf einen Wert $\frac{S}{L} \approx 19$, der in den folgenden 2000 Jahren (!) von den Astronomen akzeptiert wurde.

Die genaue Messung von φ ist nicht so einfach, da φ sehr nahe bei 90° liegt. Der korrekte Wert ist $\varphi \approx 89.85°$. In jedem rechtwinkligen Dreieck mit diesem Winkel ist die an diesem Winkel anliegende Hypotenuse ca. 390 Mal so lang wie die an diesem Winkel anliegende Kathete, d. h.

$$\frac{s}{\ell} \overset{(4.2)}{\approx} \frac{S}{L} \approx 390 \tag{4.3}$$

4.6.7 (Mondfinsternis)**.** Wenn man bei einer totalen, möglichst zentralen Mondfinsternis die Zeiten der folgenden Ereignisse misst,

- «erster Punkt» des Mondes tritt in den Kernschatten der Erde ein,
- Mond tritt vollkommen in den Kernschatten der Erde ein,
- «erster Punkt» des Mondes verlässt den Kernschatten,

so kann man das Verhältnis $\frac{d}{\ell}$ bestimmen, wobei d der «Radius des Erdkernschattens in Mondentfernung» ist, vgl. die Zeichnung Wikipedia: On the Sizes and Distances (Aristarchus), Lunar eclipse. Es gilt etwa (nach heute bekannten Werten)

$$\frac{d}{\ell} \approx 2.676 \tag{4.4}$$

4.6.8 (Mondfinsternis)**.** In der Zeichung Wikipedia: On the Sizes and Distances (Aristarchus), Lunar eclipse sind drei ähnliche Dreiecke zu erkennen. Sie liefern die Gleichungen

$$\frac{D}{t} = \frac{S}{s-t} = \frac{L}{t-d}$$

Die erste Gleichung benötigen wir gar nicht. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$390 \overset{(4.3)}{\approx} \frac{S}{L} = \frac{s-t}{t-d} \overset{\boxed{\text{Erweitern mit } \frac{1}{\ell}}}{=} \frac{\frac{s}{\ell} - \frac{t}{\ell}}{\frac{t}{\ell} - \frac{d}{\ell}} \overset{(4.3) \text{ und } (4.4)}{\approx} \frac{390 - \frac{t}{\ell}}{\frac{t}{\ell} - 2.676}$$

Diese (Approximations-)Gleichung können wir nach $\frac{t}{\ell}$ auflösen

$$\begin{aligned} 390 \cdot \left(\frac{t}{\ell} - 2.676\right) &\approx 390 - \frac{t}{\ell} \\ 390\frac{t}{\ell} - 390 \cdot 2.676 &\approx 390 - \frac{t}{\ell} \\ 390\frac{t}{\ell} + \frac{t}{\ell} &\approx 390 \cdot 2.676 + 390 \\ 391\frac{t}{\ell} &\approx 390 \cdot 3.676 \\ \frac{t}{\ell} &\approx \frac{390 \cdot 3.676}{391} \approx 3.667 \end{aligned}$$

Die bedeutet, dass der Erdradius $t \overset{(4.1)}{\approx} 6366\,\text{km}$ etwa um den Faktor 3.667 grösser als der Mondradius ℓ ist,

$$\boxed{\text{Mondradius } \ell \approx \frac{t}{3.667} \approx \frac{6366\,\text{km}}{3.667} \approx 1736\,\text{km}} \qquad \text{ca. } \frac{3}{10} \text{ Erdradien}$$

Damit ist das erste Ziel erreicht: Der Mondradius ist berechnet! Daraus folgt

$$\boxed{\text{Sonnenradius } s \overset{(4.3)}{\approx} \ell \cdot 390 \approx 677\,123\,\text{km}} \qquad \text{ca. 110 Erdradien}$$

Von der Erde aus gesehen erscheinen Mond und Sonne unter nahezu demselben Winkel (vgl. Sonnenfinsternis). Dieser Winkel ist relativ einfach messbar (zumindest beim Mond; bei der Sonne könnte man vielleicht den

Schatten eines Stabs verwenden) und beträgt ungefähr ein halbes Grad. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel $\frac{1}{4}^\circ$ ist die an diesem Winkel anliegende Kathete ca. 229 Mal so lang wie die gegenüberliegende Kathete. Damit ergibt sich

$\boxed{\text{Mondentfernung } L \approx 229 \cdot \ell \approx 397\,544\,\text{km}}$ ca. 30 Erddurchmesser (bzw. 60 Erdradien)

$\boxed{\text{Sonnenentfernung } S \approx 229 \cdot s \approx 157\,580\,000\,\text{km}}$ ca. 12'500 Erddurchmesser (bzw. 25'000 Erdradien)

4.6.9. Laut Wikipedia betragen die korrekten Werte:

Mondradius:	$\ell = 1737\,\text{km}$
Mondentfernung:	$L = 384\,400\,\text{km}$
Sonnenradius:	$s = 696\,342\,\text{km}$
Sonnenentfernung:	$S = 150\,000\,000\,\text{km}$

4.7 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-entfernung-kanti-bodensee

9.75 km

Lösung zu A2 ex-strecke-in-verhaeltnis-teilen

1.8 m und 1.2 m (insgesamt $3 + 2 = 5$ Teile).

Formal: Löse das Gleichungssystem $a + b = 3$ und $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

Lösung zu A3 ex-schwarzpulver-zutaten

75 g Salpeter, 15 g Holzkohle, 10 g Schwefel (insgesamt $15 + 3 + 2 = 20$ Teile).

Formal kann man auch ein System dreier Gleichungen in drei Variablen lösen.

Lösung zu A4 ex-verhaeltnisse-aus-geometrie

(a) Wir betrachten ein Quadrat mit Seitenlänge a. Nach Pythagoras ist seine Diagonale

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a.$$

Das gesuchte Verhältnis ist also $d : a = \frac{d}{a} = \sqrt{\sqrt{2}aa} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

(b) Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a. Nach Pythagoras ist seine Höhe

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Das gesuchte Verhältnis ist also $h : a = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 2 \approx 0.866$.

Lösung zu A5 ex-rennvelo-uebersetzung

(a)
- Grösster Gang: vorne das Zahnrad mit 53 Zähnen, hinten das mit 11 Zähnen
- Übersetzungsverhältnis $= \frac{53}{11} = 4.\overline{81}$
  Dies Zahl gibt an, wie viele Umdrehungen das hintere Ritzel (und damit das Hinterrad) bei einer Umdrehung des vorderen Kettenblatts (eine Pedalumdrehung) macht.
  Hier dreht sich das Hinterrad also fast fünfmal so oft wie das Kettenblatt.
-
  - 1 Umdrehung der Pedale vorne entspricht $\frac{53}{11}$ Umdrehungen des Hinterrads
  - 80 Umdrehungen der Pedale (während einer Minute) entsprechen $80 \cdot \frac{53}{11}$ Umdrehungen des Hinterrads.
  - $60 \cdot 80$ Umdrehungen der Pedale (während einer Stunde) entsprechen $60 \cdot 80 \cdot \frac{53}{11}$ Umdrehungen des Hinterrads; dabei wird die folgende Strecke zurückgelegt.

$$\begin{aligned} s = 60 \cdot 80 \cdot \frac{53}{11} \cdot 2145\,\text{mm} &= 49\,608\,000\,\text{mm} \\ &= 49\,608\,\text{m} \\ &= 49.608\,\text{km} \end{aligned}$$

  Also rast der Velofahrer mit der Geschwindigkeit $49.608\,\text{km/h}$.
  Dies stimmt übrigens überein mit https://j-berkemeier.de/Ritzelrechner.html?kb=39,53+rz=34,28,24,21,19,17,15,14,13,12,11+tf=80+dtf=5+ru=214.6+vr=0,1,1,0+ge=true+rt=true

(b)
- kleinster Gang: vorne das Zahnrad mit 39 Zähnen, hinten das mit 34 Zähnen
- Übersetzungsverhältnis $= \frac{39}{34} \approx 1.147$
  Nun drehen sich Hinterrad und Kettenblatt fast gleich schnell (Hinterrad etwa schneller).
- – 1 Umdrehung der Pedale vorne entspricht $\frac{39}{34}$ Umdrehungen des Hinterrads
  – 80 Umdrehungen der Pedale (während einer Minute) entsprechen $80 \cdot \frac{39}{34}$ Umdrehungen des Hinterrads.
  – $60 \cdot 80$ Umdrehungen der Pedale (während einer Stunde) entsprechen $60 \cdot 80 \cdot \frac{39}{34}$ Umdrehungen des Hinterrads; dabei wird die folgende Strecke zurückgelegt.

$$s = 60 \cdot 80 \cdot \frac{39}{34} \cdot 2145\,\text{mm} \approx 11\,810\,117.65\,\text{mm} \approx 11.810\,\text{km}$$

Also fährt der Velofahrer bergauf ungefähr mit der Geschwindigkeit $11.8\,\text{km/h}$.

Lösung zu A6 ex-baumhoehe-1

(a) Da h und H parallel sind, liefert der Strahlensatz $\frac{H}{D} = \frac{h}{d} = \frac{0.12}{0.40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$. Also $H = \frac{3}{10} \cdot D = \frac{3}{10} \cdot 80 = 24$.
(b) $\frac{H}{D} = \frac{h}{d}$. Multiplikation mit D liefert $H = \frac{h}{d} \cdot D$.

Lösung zu A7 ex-strahlensatz-einfach

a) Gegeben: $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$, $c' = 5$. Lösung:
$a' : a = c' : c$, also $a' = \frac{ac'}{c} = \frac{5 \cdot 5}{4} = \frac{25}{4}$
$a'' = a' - a = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$.
$b' : b = c' : c$, also $b' = \frac{bc'}{c} = \frac{2 \cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$
$b'' = b' - b = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

b) Gegeben: $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$, $b' = \frac{25}{9}$, $c = \frac{4}{3}$. Lösung:
$a : a' = b : b'$, also $a' = \frac{ab'}{b} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{25}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{25}{6}$
$b'' = b' - b = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$.
$a'' = a' - a = \frac{25}{6} - \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$. Alternative: Aus $a'' : a = b'' : b$ folgt $a'' = \frac{ab''}{b} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$.
$c' : c = a' : a$, also $c' = \frac{a'c}{a} = \frac{\frac{25}{6} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{20}{9}$.

c) Gegeben: $a' = \frac{25}{9}$, $b' = \frac{20}{9}$, $b'' = \frac{8}{9}$, $c' = \frac{10}{9}$. Lösung:
$b = b' - b'' = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$
$a : a' = b : b'$, also $a = \frac{a'b}{b'} = \frac{\frac{25}{9} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{20}{9}} = \frac{5}{3}$
$a'' : a' = b'' : b'$, also $a'' = \frac{a'b''}{b'} = \frac{\frac{25}{9} \cdot \frac{8}{9}}{\frac{20}{9}} = \frac{10}{9}$
$c : c' = a : a'$, also $c = \frac{ac'}{a'} = \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{10}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{2}{3}$.

d) Nur a und a' sind bestimmbar. «Begründung»: Dreht man die Parallelen c und c' «simultan» um B bzw. B', so ergeben sich verschiedene Werte für b, b, b''.
$\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} = \frac{a''+a}{a}$. Multiplikation mit ac liefert $ac' = a''c + ac$. Subtraktion von ac liefert $ac' - ac = a''c$. Ausklammern von a liefert $a(c' - c) = a''c$. Division durch $c' - c$ liefert $a = \frac{a''c}{c'-c} = \frac{0.5 \cdot 1.6}{2-1.6} = \frac{0.8}{0.4} = 2$.
$a' = a + a'' = 2 + 0.5 = 2.5$.

Bemerkung: Zur Lösung jeder dieser Aufgaben genügt es, nur die vier Gleichungen $a : a' = b : b' = c : c'$ und $a' = a + a''$ und $b' = b + b''$ zu benutzen. Wenn diese nämlich gelten, gilt beispielsweise $a : a'' = b : b''$ automatisch, denn aus $a : a' = b : b'$ folgt $ab' = a'b$, daraus $a(b + b'') = (a + a'')b$, daraus $ab + ab'' = ab + a''b$, daraus $ab'' = a''b$ und daraus $a : a'' = b : b''$.

Lösung zu A8 ex-strahlensatz-pyramide
Die Seitenlänge der Pyramide beträgt $6\,\text{m}$.

(a) Schnitt in halber Höhe: Die Schnittfigur ist ein Quadrat mit Seitenlänge $\frac{6}{2}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Genaugenommen wendet man den Strahlensatz mehrfach an: (1) Die Spitze der Pyramide, der «Fusspunkt der Höhe» und eine beliebige Eck des Grundquadrats bilden ein rechtwinkliges Quadrat, das von unserem waagerechten Schnitt in halber Höhe geteilt wird. Die so entstandene Strahlensatzfigur zeig, dass der waagerechte Schnitt die entsprechende Seitenlinie der Pyramide halbiert. (2) Jede Seitenfläche der Pyramide samt der Schnittlinie ist eine Strahlensatzfigur. Also ist die Seitenlänge auf halber Höhe halb so gross wie dies Seitenlänge des Grundquadrats.
Die Fläche dieses Quadrats beträgt $(3\,\mathrm{m})^2 = 3^2\,\mathrm{m}^2 = 9\,\mathrm{m}^2$.

(b) Die beiden Schnittfiguren sind Quadrate der Seitenlängen $\frac{1}{3} \cdot 6\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$ bzw. $\frac{2}{3} \cdot 6\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$. Ihre Flächen sind $4\,\mathrm{m}^2$ bzw. $16\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu A9 ex-daumensprung

Wie in der Skizze angedeutet, nehmen wir an, dass die Verbindungslinie der Augen parallel zur Schlossfassade ist. Somit ist der Strahlensatz anwendbar und liefert $\frac{b}{d} = \frac{a}{x}$.

Genaugenommen liefert der Strahlensatz $\frac{\frac{b}{2}}{d} = \frac{\frac{a}{2}}{x}$, was aber per Multiplikation mit 2 zur angegebenen Gleichung äquivalent ist.

Daraus folgt $d = \frac{x}{a} \cdot b$ (z. B per Kehrwertbildung und Multiplikation mit b).

(a) Messwerte: Augenabstand: $a = 7$ cm, Abstand Daumen-Nasenansatz: $x = 70$ cm.
Damit gilt $\frac{x}{a} = \frac{70}{7} = 10$, also $d = \frac{x}{a} \cdot b = 10 \cdot b = 10 \cdot 40 = 400$.
Der Abstand zum Schloss beträgt 400 Meter bzw. genaugenommen $400 + x = 400.7$ Meter.

(b) Bei den meisten Menschen beträgt das Verhältnis $\frac{\text{Armlänge}}{\text{Augenabstand}}$ etwa 10, in Formeln $\frac{x}{a} \approx 10$ (so wie bei den oben angegebenen «Messwerten»).
Die Daumensprungregel kann nur angewendet werden, wenn man die «Sprungweite des Daumens» abschätzen kann. Oft gelingt dies durch den Vergleich mit Objekten, deren Abmessungen man grob kennt, etwa Breite eines Hauses, Abstand von Fenstern, Länge eines Autos.
Vergleiche auch Wikipedia:Daumensprung.

Lösung zu A10 ex-parallelogramm-aufgabe-aus-carral

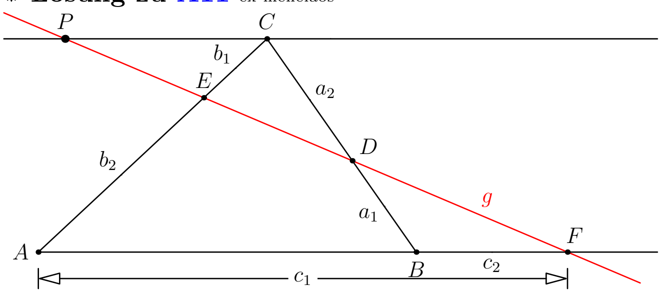
Wenn man die gesuchte Gleichung mit $\frac{1}{\overline{PA} \cdot \overline{PY}}$ multipliziert, erhält man die äquivalente Gleichung

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PA}}$$

Wir wenden den Strahlensatz mit Zentrum P zuerst bezüglich der beiden Parallelen (AD) und (BC) an und dann bezüglich der beiden Parallelen (AB) und (CD):

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PA}}$$

Lösung zu A11 ex-menelaos



Sei P der Schnittpunkt der roten Geraden g mit der Parallelen zu (AB) durch C. Dann gelten

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{\overline{PC}} \quad \text{per Strahlensatz mit Zentrum } D$$
$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\overline{PC}}{c_1} \quad \text{per Strahlensatz mit Zentrum } E$$

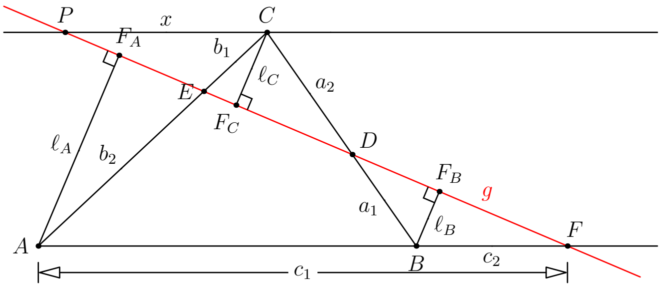
Multiplizert man diese beiden Gleichungen miteinander, so erhält man

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_2}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{c_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Multiplikation mit $\frac{c_1}{c_2}$ liefert dann die gesuchte Gleichung.

BY-SA

«Symmetrischerer» Alternativbeweis: Man fälle die Lote von A, B und C auf g wie in der Zeichnung links angedeutet. Der Rest des Arguments ist dem Leser überlassen.



Lösung zu A12 ex-linsengleichung

Wenn man die Linsengleichung mit bfg multiplizert, erhält man $bg = bf + fg$. Es genügt, diese Gleichung zu zeigen.

Zweimalige Anwendung der Strahlensatzes, einmal mit der Linsenmitte als Zentrum und einmal mit dem Brennpunkt F als Zentrum, liefert

$$\frac{g}{b} = \frac{u}{v} = \frac{f}{b-f}$$

Multiplikation mit $b \cdot (b-f)$ liefert $g(b-f) = bf$, was offensichtlich zu der gesuchten Gleichung äquivalent ist.

Lösung zu A13 ex-geometrisch-multiplizieren-und-dividieren-mit-strahlensatz

Wir erklären nur die Lösungen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) Zeichne von einem Punkt Z ausgehend zwei verschiedene Strahlen. Trage auf dem einen Strahl zuerst die Länge 1 ab (neuer Punkt E) und dann die Länge a (neuer Punkt A). Trage auf dem anderen Strahl die Länge b ab (neuer Punkt B). Verbinde E und B und zeichne die Parallele zu dieser Verbindungslinie durch A. Ihr Schnittpunkt mit dem anderen Strahl sei X. Dann hat $x := \overline{BX}$ die gesuchte Länge, denn nach dem ersten Strahlensatz gilt $x : b = a : 1$ oder äquivalent $x = ab$.

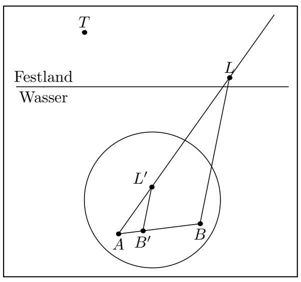
(c) Zeichne von einem Punkt Z ausgehend zwei verschiedene Strahlen. Trage auf dem einen Strahl zuerst die Länge b ab (neuer Punkt B) und dann die Länge a (neuer Punkt A). Trage auf dem anderen Strahl die Länge 1 ab (neuer Punkt E). Verbinde E und B und zeichne die Parallele zu dieser Verbindungslinie durch A. Ihr Schnittpunkt mit dem anderen Strahl sei X. Dann hat $x := \overline{EX}$ die gesuchte Länge, denn nach dem ersten Strahlensatz gilt $x = x : 1 = a : b = \frac{a}{b}$.

Lösung zu A14 ex-zweiter-strahlensatz-nicht-umkehrbar

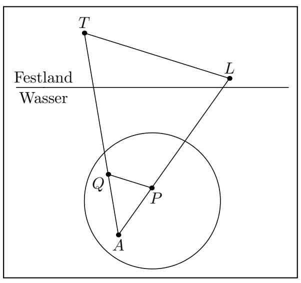
In der Zeichnung im Beweis des zweiten Strahlensatzes: Zeichne einen Kreis um B' mit Radius c'. Dieser schneidet die horizontale Gerade (SA) in einem weitern Punkt $A'' \neq A'$. Sei c'' die Strecke $[B'A'']$ bzw. deren Länge. Nach Konstruktion gilt $c'' = c'$ und somit $\frac{c}{c''} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$, also $\frac{c}{c''} = \frac{a}{a'}$, aber c und c'' sind nicht parallel.

Lösung zu A15 ex-geodaesie

Wie üblich gibt es neben den im Folgenden erkären Lösungsmöglichkeiten einige weitere.



(a) Wähle einen Punkt B auf der Insel und peile von dort den Leuchtturm L an. Dies liefert das Dreieck ABL (nur der Teil auf der Insel ist vom Inselbewohner zu zeichnen). Wähle einen Punkt $B' \in [AB]$ (nahe genug bei A). Zeichne (per Winkelabtragen) die Parallel zu (BL) durch B', was den Punkt L' liefert. Nun haben wir eine Strahlensatzfigur: Im Dreieck $AB'L'$ sind alle Seitenlängen bestimmbar, ebenso $\overline{AB}$. Damit kann man $\overline{AL}$ (und auch $\overline{BL}$) berechnen.



(b) Nach der vorigen Teilaufgabe kennen wir $a = \overline{AL}$ und $b = \overline{AT}$.
Trage von A in Richtung auf L zu die Strecke $\frac{1}{100} \cdot a$ ab und nenne den so erhaltenen Punkt P. Trage von A in Richtung auf T zu die Strecke $\frac{1}{100} \cdot b$ ab und nenne den so erhaltenen Punkt Q. (Statt $\frac{1}{100}$ ist eventuell ein kleinerer Bruch zu wählen, so dass P und Q auf der Insel liegen).
Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes ist (PQ) parallel zu (LT), so dass wir wieder eine Strahlensatzfigut haben. Also ist $\overline{LT} = 100 \cdot \overline{PQ}$ und $\overline{PQ}$ ist abmessbar.

 BY-SA

Lösung zu A16 ex-schwerpunktsatz
Siehe Lehrerversion des Skripts.

Lösung zu A17 ex-dreieck-aus-c-sa-sb
Man konstruiere zunächst das Dreieck ABS mit Seitenlängen $c = 7\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot s_a = \frac{2}{3} 6\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{BS} = \frac{2}{3} 9\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$.

Lösung zu A18 ex-konstruktion-teilungspunkt
Noch zu ergänzen.

Lösung zu A19 ex-konstruktion-zweiter-teilungspunkt
Der Punkt P teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ teilt. Nun mache man die übliche Konstruktion der Teilungspunkte rückgängig (mit $p = \overline{PA}$ und $q = \overline{PB}$):
Man zeichne eine Gerade g durch A (die nicht durch B geht) und ihre Parallele h durch B. Der Kreis $k(A, \overline{PA})$ schneidet g in zwei Schnittpunkten A_1 und A_2. Der Kreis $k(B, \overline{PB})$ schneidet h in zwei Schnittpunkten B_1 und B_2.
Die vier Geraden (A_1B_1), (A_1B_2), (A_2B_1), (A_2B_2) schneiden (AB) in P bzw. dem gesuchten äusseren Teilungspunkt Q. (Genauer: Die Geraden durch die beiden Schnittpunkte «auf derselben Seite» von (AB) liefern den äusseren Teilungspunkt Q.)

Lösung zu A20 ex-teilungspunkte-algebraisch

(a) Teilung im Verhältnis $\frac{5}{2}$:
- Die Zahl x ist die Lösung der Gleichung
$$\frac{\overline{xa}}{\overline{xb}} = \frac{5}{2},$$
die zwischen $a = 0$ und $b = 1$ liegt (denn x soll «innen» teilen). Da x zwischen a und b liegt, gelten $\overline{xa} = x - a = x - 0 = 0$ und $\overline{xb} = b - x = 1 - x$, d. h. unsere Gleichung wird zu
$$\frac{x}{1-x} = \frac{5}{2}$$
Multiplikation mit $(1 - x)$ und 2 liefert $2x = 5(1 - x)$ und auflösen nach x ergibt $x = \frac{5}{7}$.
Alternative: Teile die Strecke $[ab] = [0, 1]$ (der Länge 1) in 7 gleich grosse Teilstücke der Länge $\frac{1}{7}$. Links von x müssen 5 Teilstücke liegen (und rechts davon 2), also $x\frac{5}{7}$.
- Die Zahl y ist die Lösung der Gleichung
$$\frac{\overline{ya}}{\overline{yb}} = \frac{5}{2},$$
die ausserhalb von $[ab]$ liegt. Die Gleichung sagt, dass der Abstand von y zu a grösser ist als der zu b. Deswegen muss y rechts von b liegen (d. h. $b < y$). Damit folgen $\overline{ya} = y - a = y - 0 = y$ und $\overline{yb} = y - b = y - 1$ und unsere Gleichung wird zu
$$\frac{y}{y-1} = \frac{5}{2}$$
Multiplikation mit $(y - 1)$ und 2 liefert $2y = 5(y - 1)$ und auflösen nach y ergibt $y = \frac{5}{3}$.
Alternative: Wenn man in «Teil(stücken)en» denkt: Der Punkt y ist 5 Teile von a entfernt und 2 Teile von b und liegt rechts von b. Das bedeutet, dass a und b 3 Teile auseinander liegen. Also hat ein Teil die Länge $\frac{b-a}{3} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ und es folgt $y = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

Bemerkung: Man kann die beiden Teilungspunkte auch «auf einmal» berechnen: Gesucht ist ein Punkt z mit
$$\frac{\overline{za}}{\overline{zb}} = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{|z-0|}{|z-1|} = \frac{|z|}{|z-1|} = \left|\frac{z}{z-1}\right| = \frac{5}{2}$$
Dies bedeutet, dass $\frac{z}{z-1} = \frac{5}{2}$ (siehe Teilaufgabe (b)) oder $\frac{z}{z-1} = -\frac{5}{2}$ (siehe Teilaufgabe (a)) gelten muss.
Der algebraische Ansatz zeigt also direkt, dass es zwei Teilungspunkte gibt.

(b) Teilung im Verhältnis $\frac{p}{q} > 1$:
Man geht wie in der Lösung der vorigen Teilaufgabe vor, ersetzt aber $\frac{5}{2}$ durch $\frac{p}{q}$. Man erhält

$$\frac{x}{1-x} = \frac{p}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{p}{p+q}$$

bzw.

$$\frac{y}{y-1} = \frac{p}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{p}{p-q}$$

(c)
- Der Punkt $a = 0$ teilt die Strecke $[xy]$ im Verhältnis

$$\frac{\overline{ax}}{\overline{ay}} = \frac{x-a}{y-a} = \frac{x-0}{y-0} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{p}{p+q}}{\frac{p}{p-q}} = \frac{p-q}{p+q} \left[= \frac{\frac{p}{q}-1}{\frac{p}{q}+1}\right]$$

- Der $b = 1$ teilt die Strecke $[xy]$ im Verhältnis

$$\frac{\overline{bx}}{\overline{by}} = \frac{b-x}{y-b} = \frac{1-x}{y-1} = \frac{1-\frac{p}{p+q}}{\frac{p}{p-q}-1} = \frac{\frac{p+q-p}{p+q}}{\frac{p-(p-q)}{p-q}} = \frac{\frac{q}{p+q}}{\frac{q}{p-q}} = \frac{p-q}{p+q} \left[= \frac{\frac{p}{q}-1}{\frac{p}{q}+1}\right]$$

Fazit: Die beiden Verhältnisse sind gleich!

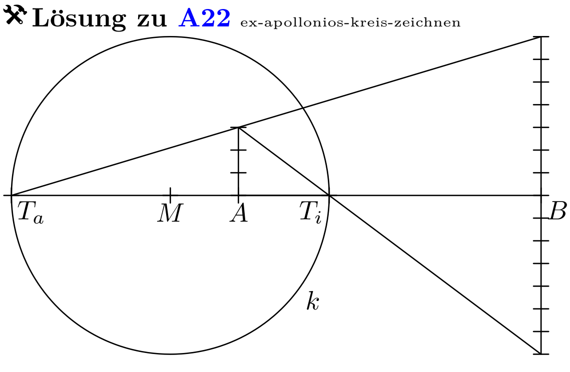
Lösung zu A21 ex-winkelhalbierende-berechnen

Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $a = 3$ und $b = 4$.

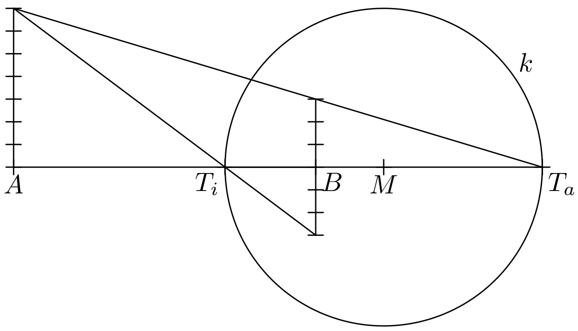
(a) $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
Sei P der Schnittpunkt von a mit w_α. Dann gilt $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ nach dem Satz über die Winkelhalbierenden. Dies bedeutet: Wenn wir die Strecke $a = 3$ in $b + c = 4 + 5 = 9$ gleich grosse Teile der Länge $\frac{a}{b+c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ teilen, so besteht $\overline{PC}$ aus 4 Teilen, d. h. $\overline{PC} = b \cdot \frac{a}{b+c} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.
Pythagoras: $w_\alpha = \sqrt{\overline{PC}^2 + b^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+16} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{144}{9}} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{\sqrt{16\cdot 10}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{10}$.
Ähnlich bestimmt man w_β. Ist Q der Schnittpunkt von b und w_β, so gilt $\overline{QC} = a \cdot \frac{b}{a+c} = 3 \cdot \frac{4}{3+5} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Pythagoras: $w_\beta = \sqrt{\overline{QC}^2 + a^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+9} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{36}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{9\cdot 5}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

(b) Sei R der Schnittpunkt von c mit w_γ. Er teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Fällt man das Lot von R auf die Dreiecksseite b und nennt den Schnittpunkt R_b, so teilt dieser die Strecke $[CA]$ ebenfalls im Verhältnis $\frac{4}{3}$ (Strahlensatz). Daraus folgt $\overline{CR'} = \frac{3}{4+3} \cdot b = \frac{3}{7} \cdot 4 = \frac{12}{7}$ Da das Dreieck $CR'R$ rechtwinklig und gleichschenklig ist (da $\gamma = 90°$), folgt $w_\gamma = \overline{CR'} \cdot \sqrt{2} = \frac{12}{7} \cdot \sqrt{2}$.

Lösung zu A22 ex-apollonios-kreis-zeichnen



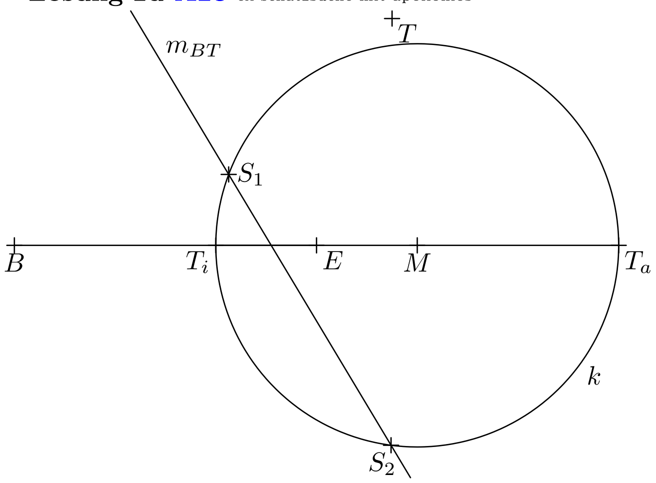
(a) $\frac{3}{7}$-Apollonioskreis: Von A und B ausgehend zeichne man zwei parallele Geraden (hier senkrecht zur Strecke $[AB]$). Von A trage man 3 gleich lange Strecken auf der einen Geraden ab, von B aus 7 gleich lange Strecken in beide Richtungen auf der anderen Geraden (oder umgekehrt). Die Verbindungslinien der «Endpunkte» schneiden die Gerade (AB) nach dem Strahlensatz in den gesuchten Teilungspunkten.
Nun konstruiere man den Mittelpunkt M zwischen T_a und T_i und zeichne den Kreis $k\left(M, \frac{\overline{T_aT_i}}{2}\right)$.



(b) $\frac{7}{3}$-Apollonioskreis: Vorgehen analog wie oben.

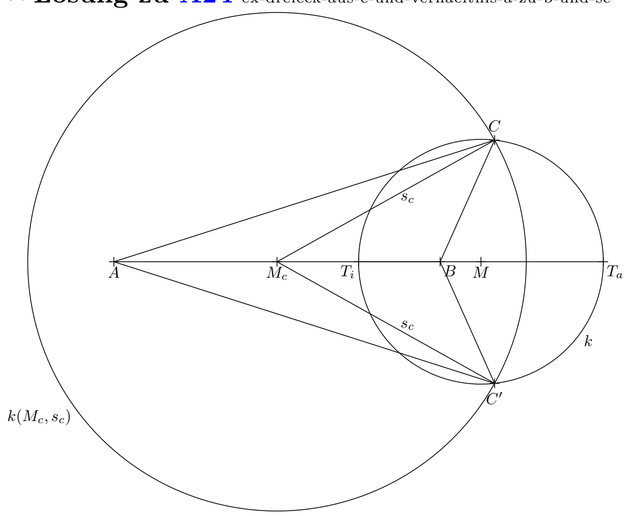
Die $\frac{3}{7}$- und $\frac{7}{3}$-Apollonioskreise zu $[AB]$ gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten m_{AB} auseinander hervor.

⚒ Lösung zu A23 ex-schatzsuche-mit-apollonios



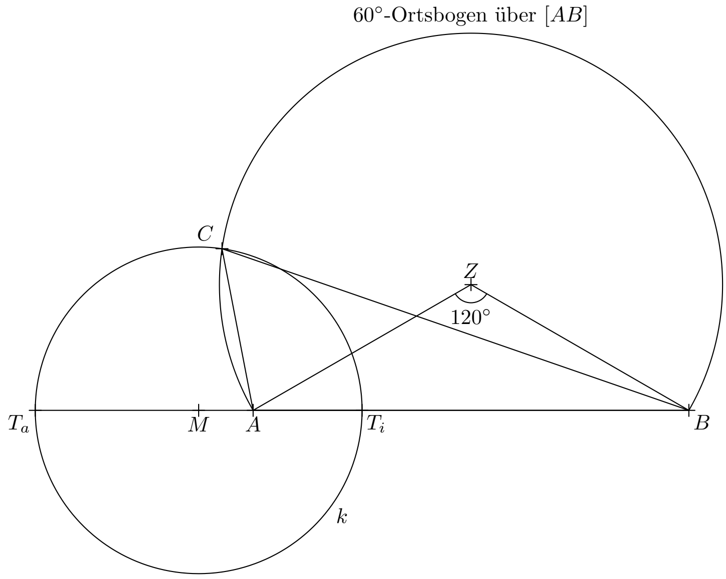
Der Schatz muss laut Beschreibung auf dem $\frac{2}{1}$-Apollonioskreis zu $[BE]$ liegen. Man konstruiert diesen wie folgt: Zuerst inneren $\frac{2}{1}$-Teilungspunkt T_i und äusseren $\frac{2}{1}$-Teilungspunkt T_a der Strecke $[BE]$ bestimmen wie in der Lösung des Problems 4.2.10 bzw. der Aufgabe A22 beschrieben. Dann $[T_iT_a]$ halbieren und den Thaleskreis über $[T_iT_a]$ zeichnen. Dieser Kreis k ist der gesuchte Apollonioskreis.
Der Schatz muss auf der Mittelsenkrechten m_{BT} liegen (diese ist der Apollonios-«Kreis» zum Verhältnis $\frac{1}{1}$). Diese ist leicht zu konstruieren.
Apollonioskreis k und Mittelsenkrechte m_{BT} haben zwei Schnittpunkte S_1 und S_2. An einem dieser Schnittpunkt liegt der Schatz.

⚒ Lösung zu A24 ex-dreieck-aus-c-und-verhaeltnis-a-zu-b-und-sc



Der Apollonios-Kreis k zu $\frac{3}{1}$ (nicht zu $\frac{1}{3}$!) über $c = [AB]$ schneidet den Kreis $k(M_c, s_c)$ in zwei Punkten C und C'.
Die Dreiecke ABC und $AC'B$ sind die gesuchten Lösungen. (Wenn die Eckpunkte des Dreiecks in alphabetischer Reihenfolge in mathematisch positivem Drehsinn durchlaufen werden sollen, so ist nur das Dreick ABC eine Lösung.)

⚒ Lösung zu A25 ex-dreieck-aus-c-gamma-verhaeltnis-a-zu-b



Apollonios-Kreis k zu $\frac{1}{3}$ über $c = [AB]$ mit dem 60°-Ortsbogen über $c = [AB]$ schneiden (wie man letzteren konstruiert, steht im Abschnitt über Kreiswinkelsätze). Dies liefert einen Schnittpunkt C und das gesuchte Dreieck ABC.
(Wir haben hier nur das Dreieck ABC konstruiert, bei dem die alphabetische Benennung der Eckpunkte in mathematisch positivem Drehsinn erfolgt. Wenn man den Punkt C (bzw. sogar die gesamte Konstruktion) an der Geraden (AB) spiegelt, bekommt man einen weiteren Punkt C' und ein weiteres Dreieck $AC'B$, das abgesehen vom Drehsinn eine Lösung der Aufgabe ist.)

Lösung zu A26 ex-dreieck-aus-c-sb-verhaeltnis-a-zu-b

Apollonioskreis besteht aus allen möglichen Punkten C. Diesen muss man von A aus zentrisch strecken mit Faktor $\frac{1}{2}$. Das Bild ist ein Kreis (den man konstruieren kann: Mittelpunkt konstruieren, halber Radius). Der Punkt M_b muss auf diesem Kreis liegen.

Andererseits muss dieser Punkt M_b auf dem Kreis um B mit Radius s_b liegen.

So findet man die zwei möglichen Lagen von M_b. Der Eckpunkt C ist dann einfach zu konstruieren.

Alternativlösungen (ohne zentrische Streckung):

(a) Konstruiere zunächst das Dreieck AM_cM_b, dessen Seitenlängen genau die halben Seitenlängen von ABC sind (deswegen selbes Seitenverhältnis $a' : b'$), per Apollonios über AM_c. Dann Kreis um B mit Radius s_b.

(b) Skizze, um Idee zu verstehen: Dreieck ABC am Punkt M_b spiegeln, um Parallelogramm $ABCD$ zu erhalten (Diagonale BD hat Länge $2s_b$).
Mit $s_b = [BM_b]$ starten und den $a : 0.5b$-Apollonioskreis darüber konstruieren (mögliche Lagen von C). Dann s_b verdoppeln «bis zum Punkt D des Parellogramms». Kreis um D mit Radius c. Schnittpunkt mit Apollonioskreis ist der gesuchte Punkt C (zwei Schnittpunkte).

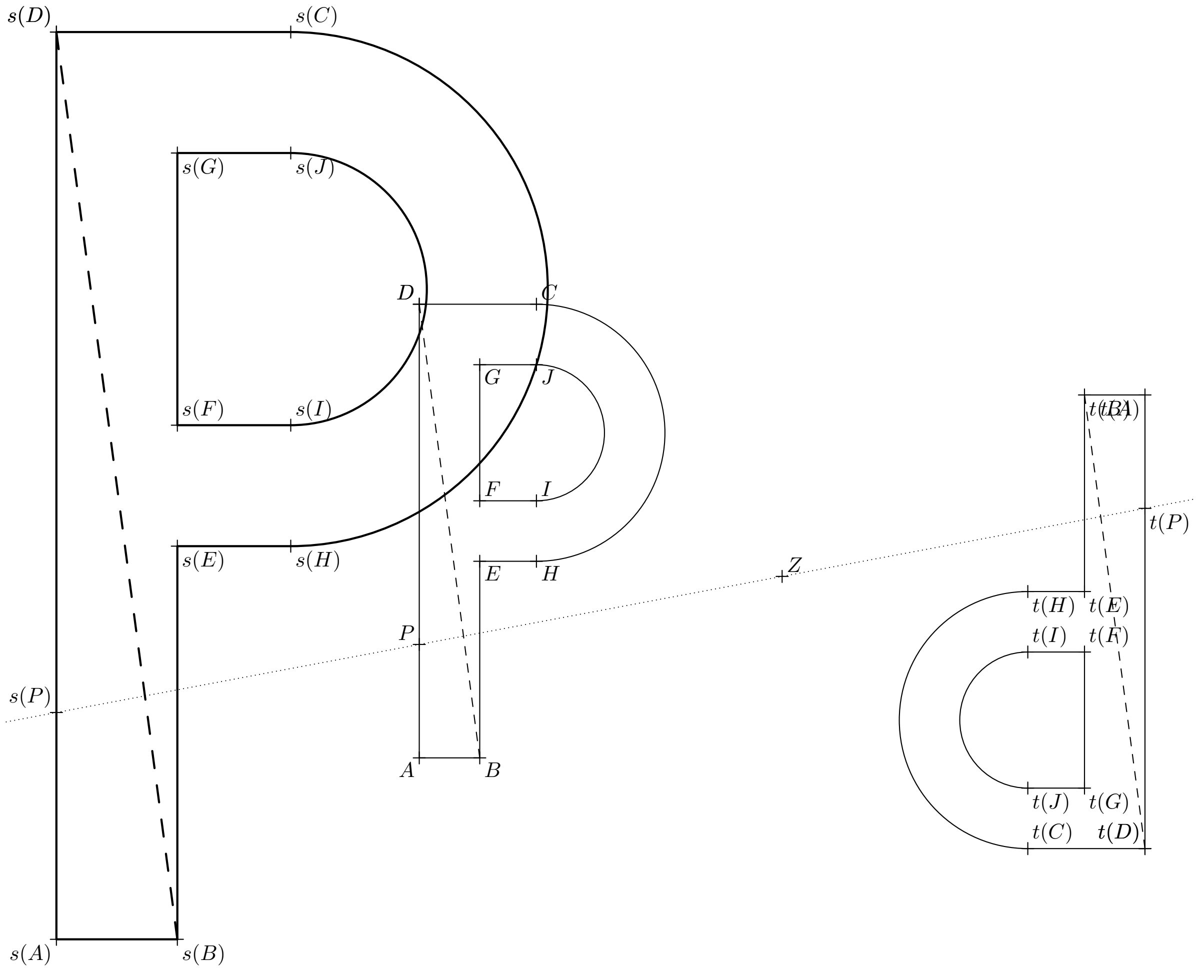
Lösung zu A27 ex-streckung-per-messung

(b) Beide Flächen sind um den Faktor $\lambda^2 = 2^2 = 4$ grösser als die jeweilige Ausgangsfigur.

(d) (i) Eine zentrische Streckfaktor mit Streckfaktor -1 ist dasselbe wie
- eine Punktspiegelung am Punkt Z oder wie
- eine Drehung um 180° um den Punkt Z.

(ii) Streckfaktor 1: Sie bildet jeden Punkt der Zeichenebene auf sich selbst ab, «macht also nichts».

(iii) Streckfaktor 0: Sie bildet alle Punkte der Zeichenebene auf Z ab.



Lösung zu A28 ex-streckung-per-strahlensatz

Lösung zu A29 ex-pantograph

1. Lösung (Idee wird klar, aber nicht optimal aufgeschrieben): «Definiere» Q als den Schnittpunkt von (AP) und (CF). Auf Grund der Voraussetzungen ist $BPFC$ ein Parallelogramm, so dass der 1. Strahlensatz (bezüglich des Zentrums A)

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \overset{\text{Definition}}{=:} \lambda$$

liefert. Dies zeigt $Q = s(P)$, wobei s die zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor λ ist. Nun kann man d mit dem 2. Strahlensatz (Zentrum A) berechnen:

$$\frac{d}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \text{bzw. umgeformt} \qquad d = \overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \overline{BP} \cdot \lambda$$

Problem dieser Lösung: Alles stimmt für eine fixierte Lage des Gestänges. A priori könnte es jedoch sein, dass sich der als Schnittpunkt definierte Punkt Q auf dem Stab CF bewegt, wenn man P und damit das Gestänge bewegt. Wenn man die obige Lösung genau durchdenkt, sieht man, dass dies nicht der Fall ist. Dies sinnvoll aufzuschreiben, ist aber etwas diffizil. Hier mein Versuch (in gewisser Weise die obige Lösung von hinten her aufgeschrieben):

2. Lösung (sorgfältig aufgeschrieben, aber beim ersten Lesen wohl nicht so verständlich): Wir behaupten, dass

$$d := \overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

die richtige Wahl von d ist. Beachte, dass $\overline{BP}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ Längen sind, die nur vom Gestänge abhängen (und nicht von seiner Lage).

Wir fixieren P für einen Moment (und damit die Lage des gesamten Gestänges). Sei Q_P der Schnittpunkt von (AP) mit (CF). Auf Grund der Voraussetzungen ist $BPFC$ ein Pallelogramm, so dass der 2. Strahlensatz mit Zentrum A

$$\frac{\overline{CQ_P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \text{bzw. umgeformt} \qquad \overline{CQ_P} = \overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = d$$

liefert. Da d nicht von der Lage des Gestänges abhängt, bedeutet dies, dass Q_P stets den Abstand d von C hat.

Mit anderen Worten: Wenn Q derjenige Punkt auf dem Stab/Strahl $[CF$ mit $\overline{CQ} = d$ ist, so liegt Q für jede Lage von P auf der Geraden (AP).

Der 1. Strahlensatz mit Zentrum Z zeigt (für jede beliebige Lage des Gestänges, da A, P und Q auf einer Geraden liegen (= kollinear sind))

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \overset{\text{Definition}}{=:} \lambda$$

Mit anderen Worten gilt $Q = s(P)$, wenn s die zentrische Streckung mit Zentrum $Z = A$ und Streckfaktor λ ist. Beachte, dass auch λ nur vom Gestänge abhängt.

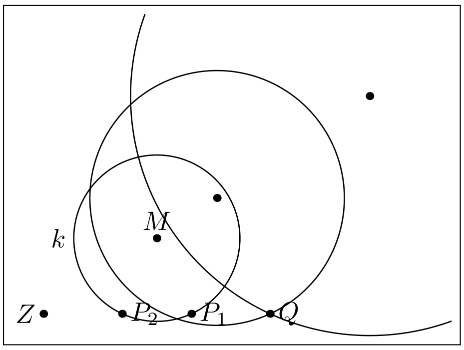
Bonusaufgabe: Im Internet nach «Geogebra, Pantograf» suchen.

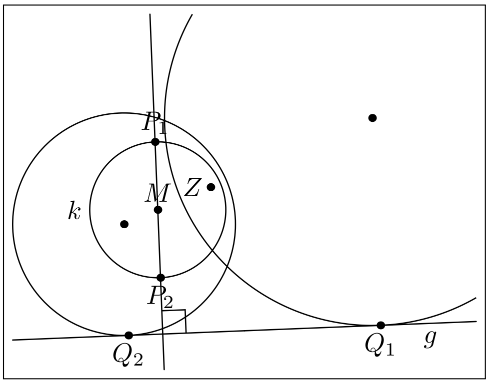
Link (mit Animation): Wikipedia: Pantograf

Lösung zu A30 ex-kreis-geeignet-strecken

(a) Schneide (ZQ) mit dem Kreis k, was zwei Schnittpunkte P_1 und P_2 liefert, siehe Zeichnung. Dann strecke einmal so, dass P_1 auf Q abgebildet wird, und einmal so, dass P_2 auf Q abgebildet wird. Dabei geht es jeweils darum, das Bild von M zu konstruieren. Dann ist der Kreis um diesen Bildpunkt durch Q einzuzeichnen.

(b) Konstruiere die Senkrechte zu g durch M. Sie schneidet den Kreis in zwei Schnittpunkten P_1 und P_2. Die beiden Geraden von Z durch diese Schnittpunkte schneiden g in Q_1 und Q_2.
Strecke nun von Z aus so, dss P_1 auf Q_1 abgebildet wird, bzw. so, dass P_2 auf Q_2 abgebildet wird. Insbesondere ist jeweils das Bild von M zu konstruieren und dann der Kreis um diesen Bildpunkt durch Q_1 bzw. Q_2 einzuzeichnen.

(a)


(b)


Lösung zu A31 ex-zentrum-finden-fuer-kreis-und-bildkreis

Zeichne die Gerade (MN). Das Streckungszentrum muss (MN) liegen. Zeichne die Senkrechte zu (MN) durch M, nenne die Schnittpunkte K_1 und K_2.

Zeichne die Senkrechte zu (MN) durch N, nenne die Schnittpunkte L_1 und L_2.

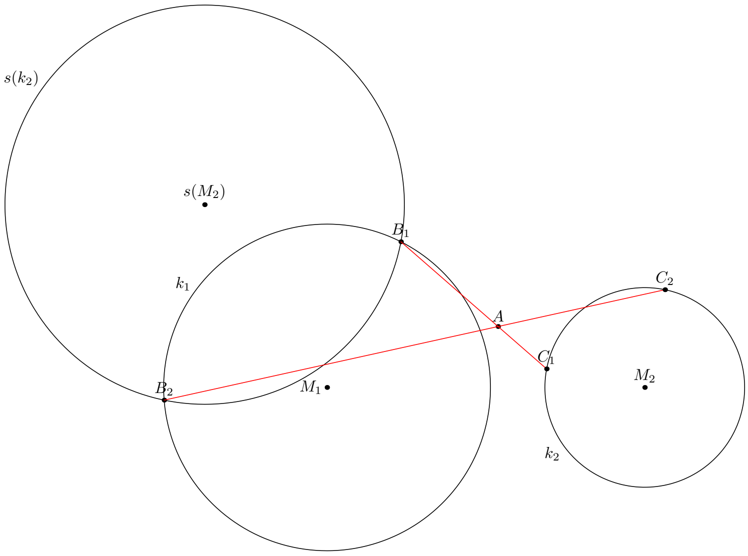
Zeichne die vier Geraden (K_1L_1), (K_1L_2), (K_2, L_1),(K_2L_2). Dies liefert zwei Schnittpunkte Z_1 und Z_2, die auf (MN) liegen. Dies sind die beiden möglichen Streckzentren. Der Streckfaktor ist jeweils das Verhältnis gewisser Strecken (einmal mit negativem Vorzeichen).

Lösung zu A32 ex-geometrischer-ort-sehnenmittelpunkte

Die gesuchte Menge ist das Bild des Kreises k unter der zentrischen Streckung mit Zentrum Z mit Streckfaktor $\frac{1}{2}$.

Lösung zu A33 ex-strecke-zwischen-kreispunkten-finden-zu-A-und-verhaeltnis

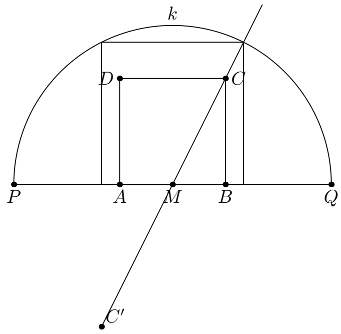
Sei s die Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor 2. Das Bild $s(k_2)$ des Kreises k_2 schneidet k_1 in zwei Punkten B_1 und B_2.
Sei $C_1 \in k_2$ derjenige Punkt mit $s(C_1) = B_1$.
Sei $C_2 \in k_2$ derjenige Punkt mit $s(C_2) = B_2$.
Die rote eingezeichneten Strecken $[B_1, C_1]$ und $[B_2, C_2]$ sind dann die gesuchten Strecken, die von A im Verhältnis $2 : 1$ geteilt werden.



Lösung zu A34 ex-quadrat-in-halbkreis

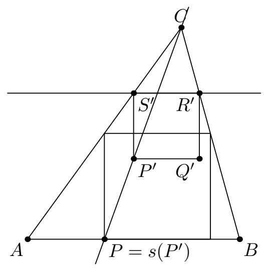
(a) Zuerst zeichne man ein beliebiges Quadrat $ABCD$ auf die Grundseite $[PQ]$, so dass M die Mitte der Seite $[AB]$ ist, siehe Zeichnung. Die Gerade (MC) schneidet den Halbkreis in einem Punkt C'.
Wende nun die zentrische Streckung mit Zentrum M und Streckfaktor $\frac{\overline{MC'}}{\overline{MC}}$ auf das Quadrat $ABCD$ an, um das gesuchte Quadrat zu erhalten. (Kann alles konstruiert werden ohne Abmessen.)

(b) Dies geht ähnlich. Beachte jedoch, dass zwei Lösungen erhält: Einmal steht das Rechteck auf seiner längeren Seite, einmal auf seiner kürzeren Seite.



Lösung zu A35 ex-quadrat-in-dreieck

Zuerste zeichne man ein beliebiges Quadrat $P'Q'R'S'$ wie in der Zeichnung, dessen Seite $[R'S']$ parallel zu c ist. Die Gerade (CP') schneidet c in einem Punkt P. Strecke nun zentrisch von C aus so, dass P' auf P abgebildet wird.



Lösung zu A36 ex-kreis-gerade-gerade-punkt

Konstruiere die Winkelhalbierende w zwischen g und h (diejenige, die durch den Sektor geht, in dem P liegt). Wähle einen beliebigen Punkt M auf $w \setminus \{S\}$ und zeichne den Kreis k mit diesem Mittelpunkt, der g und h berührt (Lot fällen etc.)

Die Gerade (PS) schneidet den Kreis k in zwei Punkten Q_1 und Q_2. Die beiden zentrischen Streckungen mit Zentrum S, die Q_1 bzw. Q_2 auf P abbilden, bilden k auf die beiden gesuchten Kreise ab.

Lösung zu A37 ex-kreis-gerade-punkt-punkt

Lösung zu A38 ex-selbsterklaeren-streckung-abstrakt

Bitte mit Definition 4.3.1 vergleichen; das Wort «Bildpunkt» wird implizit in Aufgabe A27 erklärt.

Eventuell ist es auch hilfreich, wenn ein(e) Mitschüler(in) deinen Text kritisch durchliest.

Lösung zu A39 ex-selbsterklaeren-streckung-konkret

(a) Wie sieht das Bild einer Geraden, die Z enthält, unter $s_{Z,2}$ aus?

Das Bild einer solchen Geraden ist die Gerade selbst.

(b) Wie sieht das Bild einer Geraden, die Z nicht enthält, unter $s_{Z,3}$ aus?
Das Bild ist eine zur Ausgangsgeraden parallele Gerade, die dreimal soweit von Z entfernt ist.

(c) Wie sieht das Bild einer Kreises unter $s_{Z,3}$ aus?
Das Bild ist ein Kreis mit dem dreifachen Radius.

(d) Wie sieht das Bild eines Kreises, der Z enthält, unter $s_{Z,3}$ aus? Das Bild ist ein Kreis mit dem dreifachen Radius, der ebenfalls durch Z geht.

(e) Wie sieht das Bild einer einer Comic-Figur unter $s_{Z,1}$ aus?
Das Bild stimmt mit der Ausgangsfigur überein.

(f) Wie sieht das Bild einer einer Comic-Figur unter $s_{Z,0}$ aus?
Die ganze Comic-Figur wird auf den Punkt Z «zusammengezogen», das Bild ist also die einpunktige Menge $\{Z\}$.

(g) Wie sieht das Bild einer einer Comic-Figur unter $s_{Z,3}$ aus? Wie verändert sich die Fläche?
Das Bild ist eine dreimal so grosse Comic-Figur. Sie hat die 9-fache Fläche.

(h) Wie sieht das Bild einer einer Comic-Figur unter $s_{Z,-1}$ aus?
Das Bild ist die (am Punkt Z) punktgespiegelte Comicfigur; alternativ: die um 180° um Z gedrehte Comic-Figur.

(i) Wie macht man die Streckung $s_{Z,\frac{2}{3}}$ rückgängig?
Man wendet die Streckung $s_{Z,\frac{3}{2}}$ an.

(j) Wenn man eine A4-Vorlage auf das Format A3-kopiert, welcher zentrischen Streckung «entspricht dies»?
Da sich die Fläche beim Streckfaktor λ um den Faktor λ^2 ändert, muss $\lambda^2 = 2$ gelten, also $\lambda = \sqrt{2}$ oder $\lambda = -\sqrt{2}$.
Hier wird implizit angenommen, dass Vorlage und Kopie gleich (oder gerade entgegengesetzt) ausgerichtet sind (sonst benötigt man auch Drehungen und Verschiebungen). Das Streckzentrum bekommt man, wenn man einander entsprechende Punkte durch Geraden miteinander verbindet: Diese Geraden schneiden sich im Zentrum.

Lösung zu A40 ex-dreiecksflaechen-strecken

a) Faktor $\lambda^2 = |\lambda|^2 = 9$
b) Faktor $\lambda^2 = |\lambda|^2 = 16$
c) Faktor $\lambda^2 = |\lambda|^2 = \frac{1}{100}$
d) Faktor $\lambda^2 = |\lambda|^2$. (Das Viereck kann in zwei Dreiecke zerlegt werden.)
e) Volumen: Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Oberfläche: Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
f) Volumen $|\lambda|^3$ (Betrag nicht vergessen!); Oberfläche $|\lambda|^2$

Lösung zu A41 ex-flaeche-und-volumen

a) Die Fläche wird mit dem Faktor λ^2 multipliziert, wobei λ der gesuchte Streckfaktor ist. Damit ist $\lambda^2 = \frac{1}{3}$ und somit müssen die Längen mit $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ multiplizert werden.
b) Die Fläche wird mit dem Faktor λ^2 multipliziert, wobei λ der gesuchte Streckfaktor ist. Damit ist $\lambda^2 = 3$ und somit müssen die Längen mit $\lambda = \sqrt{3}$ multiplizert werden.
c) Der Streckfaktor ist $\lambda = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Damit ist das Volumen $1\,\mathrm{l} \cdot \lambda^3 = \frac{1}{27}\,\mathrm{l}$. Die Fläche des Etiketts wird mit $\lambda^2 = \frac{1}{9}$ multipliziert, wird also 9 mal kleiner.

Lösung zu A42 ex-sektglas

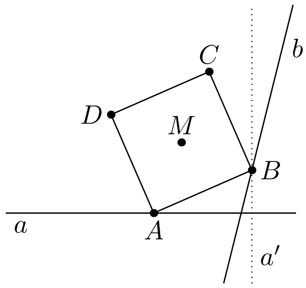
Die verschiedenen Füllstände des Glases entsprechen verschiedenen Kegeln, die durch Streckung ineinander übergeführt werden können. Das volle Glas muss so gestreckt werden, dass sich das Volumen halbiert. Für den Streckungsfaktor gilt also:

$$\lambda^3 = \frac{1}{2} \qquad \left|\sqrt[3]{\cdot}\right.$$
$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$$

Das Glas muss also bis knapp 80% der Höhe gefüllt werden!

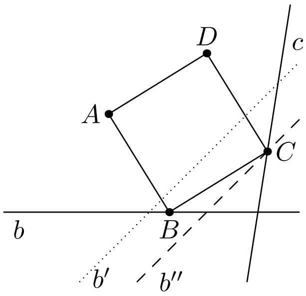
Lösung zu A43 ex-quadrat-zu-mittelpunkt-mit-eckpunkten-auf-zwei-geraden

Beobachtung: Wenn man den Mittelpunkt M eines Quadrats kennt und einen Eckpunkt A, so entsteht der (in mathematisch positivem Drehsinn) nächste Eckpunkt B aus A durch die Drehung um 90° um das Drehzentum M.g
Die Gerade a besteht aus allen möglichen Positionen von A. Die Gerade a' ist das Bild von a unter der Drehung um M um 90°. Nach der obigen Beobachtung muss B auf a' liegen. Da B ausserdem auf b liegen muss, muss B der Schnittpunkt von a' und b sein. Aus A, B und M kann man dann leicht C und D konstruieren.



Lösung zu A44 ex-quadrat-zu-punkt-mit-ecken-auf-zwei-geraden

Wenn man die beiden nebeneinanderliegenden Ecken A und B eines Quadrats kennt, so entsteht die nächste Ecke C aus B per Rotation um 45° um A und anschliessende zentrische Streckung an A mit Streckfaktor $\sqrt{2}$.
Die Gerade b besteht aus allen möglichen Positionen von B. Die Gerade b' ist das Bild von b unter der Drehung um A um 45°. Die Gerade b'' ist das Bild der Streckung von b' an A mit Streckfaktor $\sqrt{2}$. Also besteht die Gerade b'' aus allen möglichen Positionen von C. Da C ausserdem auf c liegen muss, muss C der Schnittpunkt von b'' und c sein. Aus A und C kann man dann recht leicht B und D konstruieren (etwa über die Diagonale, oder man macht die Drehstreckung rückgängig).



Lösung zu A45 ex-st-gallen-flaeche-auf-karte

1. Lösungsweg: Die Karte entsteht aus der (hier als flach angenommen) realen Landschaft durch eine Streckung mit Streckfaktor $\lambda = \frac{1}{300'000} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$. Die Fläche auf der Karte (= neue Fläche = Fläche des *Bildkantons*) entsteht aus der realen Fläche (= alte Fläche = Fläche des *Originalkantons*) durch Multiplikation mit dem Faktor λ^2, d.h. die gesuchte Fläche auf der Karte ist

$$\begin{aligned}\lambda^2 \cdot 2028.2\ \text{km}^2 &= \left(\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot 2028.2\ \text{km}^2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2\ \text{km}^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2 \cdot (10^5\ \text{cm})^2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \cdot 2028.2 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = \frac{1}{9} \cdot 2028.2\ \text{cm}^2 \approx 225.35\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

2. Lösungsweg: (wohl eine Art Dreisatz, die erste Zeile ist einfacher von rechts her zu lesen)

$$\begin{aligned}300'000\ \text{cm} = 3'000\ \text{m} = 3\ \text{km in der Realität} &\quad\widehat{=}\quad 1\ \text{cm auf der Karte} \\ 1\ \text{km in der Realität} &\quad\widehat{=}\quad \frac{1}{3}\ \text{cm auf der Karte} \\ 1\ \text{km}^2\ \text{in der Realität} &\quad\widehat{=}\quad \frac{1}{9}\ \text{cm}^2\ \text{auf der Karte} \\ 2028.2\ \text{km}^2\ \text{in der Realität} &\quad\widehat{=}\quad 2028.2 \cdot \frac{1}{9}\ \text{cm}^2 \approx 225.35\ \text{cm}^2\ \text{auf der Karte}\end{aligned}$$

Lösung zu A46 ex-erde-mond-volumen

Streckungsfaktor $\lambda = 3.67$. Die Oberfläche ist damit $\lambda^2 \approx 13.47$ mal grösser, das Volumen $\lambda^3 \approx 49.43$ mal grösser.

Lösung zu A47 ex-gartenzwerge

Durch Streckung mit dem Faktor $\lambda = \frac{3}{2}$ bzw. $\mu = 2$ erhält man aus dem kleinen Modell das mittlere, bzw. das grosse. Das Volumen und damit das Gewicht wird also mit λ^3 bzw. μ^3 multipliziert.

Gewicht 15 cm Modell: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 0.6\ \text{kg} = \frac{27}{8} \cdot 0.6\ \text{kg} = 2.025\ \text{kg}$.

Gewicht 20 cm Modell: $2^3 \cdot 0.6\ \text{kg} = 4.8\ \text{kg}$.

Vom grossen Modell zu den anderen sind die Streckfaktoren $\lambda = \frac{1}{2}$ bzw. $\mu = \frac{3}{4}$. Die Oberflächen und damit der Farbbedarf werden also mit λ^2 bzw. μ^2 multipliziert.

Farbe für das 15 cm Modell: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 50 \text{ ml} = 28.125 \text{ ml}$

Farbe für das 10 cm Modell: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 50 \text{ ml} = 12.5 \text{ ml}.$

Lösung zu A48 ex-zwei-aehnliche-rechtwinklige-dreiecke-aufeinander

Laut Voraussetzung sind die beiden Winkel bei A gleich gross. Folglich und wegen der eingezeichneten rechten Winkel sind die beiden Dreieck $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ ähnlich. Mit der Bezeichnung $t = \overline{AC}$ gilt also

$$\frac{y}{t} = \frac{t}{x} \quad \text{also} \quad t^2 = xy = 6400 \quad \text{also} \quad t = 80$$

Mit Pythagoras berechnen wir

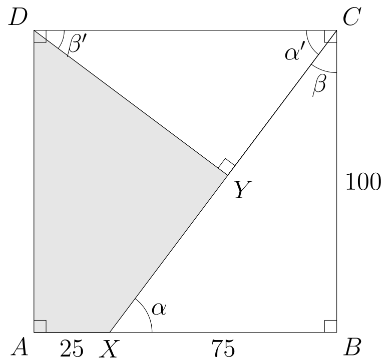
$$z = \sqrt{y^2 - t^2} = \sqrt{10'000 - 6'400} = \sqrt{3'600} = 60.$$

Lösung zu A49 ex-flaeche-viereck

Die beiden Dreiecke $\triangle XBC$ und $\triangle YCD$ sind ähnlich, denn beide haben einen rechten Winkel und es gilt

$$\alpha = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta = \alpha'$$

und somit auch $\beta = \beta'$.



Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle XBC$ hat nach Pythagoras die Länge

$$\overline{XC} = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$$

(Es entsteht aus dem wohlbekannten rechtwinkligen Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5 durch Streckung mit dem Faktor 25.)

Rest der Lösung per Streckung: Der Streckfaktor vom grossem zum kleinem Dreieck ist

$$\lambda = \frac{\text{Hypotenuse im kleinen Dreieck}}{\text{Hypotenuse im grossen Dreieck}} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

(Genaugenommen muss man mit diesem Faktor strecken und zusätzlich an einer Dreiecksseite spiegeln.) Das grosse Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 = 3'750$, das kleine somit den Flächeninhalt $\lambda^2 \cdot 3'750 = 2'400$. Die graue Fläche hat somit den Inhalt $10'000 - 3'750 - 2'400 = 3'850$.

Rest der Lösung per Berechnung der Katheten des kleinen Dreiecks: Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke gilt

$$\frac{\text{Seite gegenüber } \alpha'}{\text{Seite gegenüber } \alpha} = \frac{\text{Seite gegenüber } \beta'}{\text{Seite gegenüber } \beta} = \frac{\text{Hypotenuse im kleinen Dreieck}}{\text{Hypotenuse im grossen Dreieck}}$$

bzw. durch Einsetzen der bekannten Werte

$$\frac{\overline{DY}}{100} = \frac{\overline{CY}}{75} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Daraus berechnet man die Länge der beiden Katheten des kleinen Dreiecks zu

$$\overline{DY} = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80 \qquad \text{und} \qquad \overline{CY} = 75 \cdot \frac{4}{5} = 60.$$

Der graue Flächeninhalt ist die Fläche des Quadrats minus die Fläche der beiden Dreiecke, also

$$100^2 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 60 = 3'850.$$

Lösung zu A50 ex-dina-papier

(a) Vergleichen Sie Ihre Werte mit den unten theoretisch ausgerechneten Werten.

(b) Seien h und b Höhe und Breite eines A0-Blatts. Das A1-Blatt hat dann Höhe b und Breite $\frac{1}{2}h$. Da A0- und A1-Blatt ähnlich sind, müssen die Verhältnisse «Höhe zu Breite» übereinstimmen:

$$\frac{h}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2}h} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}h^2 = b^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2} = \frac{b^2}{h^2} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b}{h} \quad\Longrightarrow\quad b = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Da das A0-Blatt einen Quadratmeter gross ist, folgt

$$1 = h \cdot b = \frac{h^2}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad h^2 = \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad h = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189\,\mathrm{m}$$

und

$$b = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx 0.841\,\mathrm{m}$$

(c) Die Breite $b = \frac{h}{\sqrt{2}}$ des A0-Blatts ist die Höhe des A1-Blatts usw. (wegen der Ähnlichkeit aller A-Blätter). Mit anderen Worten bekommt man die Höhe des nächsten A-Blatts jeweils aus der Höhe des aktuellen A-Blatts per Division durch $\sqrt{2}$. Folglich ist die Höhe des A4-Blatts

$$\frac{h}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{h}{4} \approx 0.297\,\mathrm{m}$$

Seine Breite ist die Höhe des A5-Blatts, also

$$\frac{h}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2}} \approx 0.210\,\mathrm{m}$$

Lösung zu A51 ex-dina-quader

Gemeint ist, dass

- alle Quader der „3-dimensionalen A-Serie“ zueinander ähnlich sein sollen;
- je zwei entlang der grössten Seitenfläche nebeneinandergelegte Quader den nächsten Quader (mit der um eins kleineren Nummer) ergeben sollen; (alternativ und auch korrekt: das Halbieren eines Quaders «an der längsten Seite» liefert den nächstkleineren Quader (mit der um eins grösseren Nummer)).
- das Volumen des A0-Quaders $1\,\mathrm{m}^3$ sein soll (dies ist eine Normierung).

Es kann gut sein, dass jemand die richtige Lösung errät und überprüft, dass alles passt: Beim zweidimensionalen A-Format waren die Verhältnisse der Seiten $\sqrt{2}$. Wenn jemand annimmt/errät, dass im dreidimensionalen Fall $\frac{\text{kleine Seite}}{\text{mittlere Seite}} = \frac{\text{mittlere Seite}}{\text{grosse Seite}} = \sqrt[3]{2}$ gilt (die beiden Verhältnisse also übereinsimmen und den Wert $\sqrt[3]{2}$ haben), kommt er wegen der Normierung auf die folgenden drei Seitenlängen des A0-Quaders

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 79.37\,\mathrm{cm} \qquad b = 1 = 100.00\,\mathrm{cm} \qquad c = \sqrt[3]{2} \approx 125.99\,\mathrm{cm}$$

Beim Übergang zum nächstkleineren Quader werden alle Seiten mit $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ multipliziert: Der A1-Quader hat die Seitenlängen

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}a = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{1}{2}c \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = a \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}c = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1 = b$$

Lösung «ohne Raten»: Da der A0-Quader zum A1-Quader ähnlich ist und das doppelte Volumen hat, muss der Ähnlichkeitsfaktor $\lambda = \sqrt[3]{2}$ betragen (Faktor vom A1-Quader zum A0-Quader, sonst der Kehrwert).

Seien $a \leq b \leq c$ die Seitenlängen des A0-Quaders und $a' \leq b' \leq c'$ die Seitenlängen des A1-Quaders. Dann gelten

$$a = \sqrt[3]{2}a' \qquad b = \sqrt[3]{2}b' \qquad c = \sqrt[3]{2}c'$$

Auf Grund der Nebeneinanderlegprozedur (die grösste Seitenfläche des A1-Quaders hat die Fläche $b'c'$) hat der A0-Quader die Seitenlängen $2a'$, b' und c'. Diese drei Zahlen, aufsteigend geordnet, müssen mit den drei Zahlen $a \leq b \leq c$ übereinstimmen.

Wir behaupten, dass $2a'$ grösser-gleich c' ist, d.h. $b' \leq c' \leq 2a'$ gilt und somit $a = b'$, $b = c'$ und $c = 2a'$. Der Beweis dieser Behauptung (sie ist sicherlich plausibel, bitte zuerst einmal glauben) ist etwas nervig und steht

BY-SA

in dieser[2] Fussnote. Wir folgern daraus und aus der Ähnlichkeit der beiden Quader

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$

d.h. für alle Quader gilt $\frac{\text{kleine Seite}}{\text{mittlere Seite}} = \frac{\text{mittlere Seite}}{\text{grosse Seite}}$. Wir bezeichnen dieses Verhältnis mit v. Es gilt also $c = vb = v^2 a = v^2 \sqrt[3]{2}a'$. Da auch $c = 2a'$ gilt, folgt $v^2\sqrt[3]{2} = 2$, also $v = \sqrt[3]{2}$.

Nun folgen $b = va = \sqrt[3]{2}a$ und $c = vb = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 a$.

Da der A0-Quader das Volumen 1 (in Kubikmetern) haben soll, folgt $1 = abc = a \cdot \sqrt[3]{2}a \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 a = 2a^3$, also

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 79.37\,\text{cm} \qquad b = \sqrt[3]{2}a = 1 = 100.00\,\text{cm} \qquad c = \sqrt[3]{2}b = \sqrt[3]{2} \approx 125.99\,\text{cm}$$

Lösung zu A52 ex-pythagoras-etc-per-aehnlichkeit

Die drei Dreiecke ABC, AHC und BCH sind ähnlich, denn ihre Winkel stimmen überein (jeweils ein rechter Winkel, ein Winkel $\alpha = 90° - \beta$ und ein Winkel $\beta = 90° - \alpha$).

(a) Höhensatz: Die Dreiecke AHC und BCH sind ähnlich: Das Verhältnis der dem Winkel α gegenüberliegenden Seiten stimmt mit dem Verhältnis der dem Winkel β gegenüberliegenden Seiten überein, d. h.

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$$

Multiplikation mit hp liefert den Höhensatz $h^2 = pq$.
Alternativ: Ähnlichkeit liefert $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$. Multiplikation mit hp liefert $pq = h^2$.

(b)
- Die Dreiecke ABC und BCH sind ähnlich, folglich gilt

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p} \implies pc = a^2$$

- Die Dreiecke ABC und AHC sind ähnlich, folglich gilt

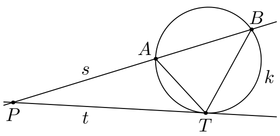
$$\frac{c}{b} = \frac{b}{q} \implies qc = b^2$$

(c) Addition der beiden Kathetensatzgleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ liefert

$$a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c = c^2$$

Lösung zu A53 ex-sekantentangenten-sekanten-sehnensatz

(a) Sekanten-Tangenten-Satz:



Die beiden Dreiecke PTA und PTA sind ähnlich, denn zwei Winkel stimmen überein:
- Sie haben den Winkel bei P gemeinsam ($\sphericalangle TPA = \sphericalangle TPB$).
- Betrachte die Kreissehne $[AT]$: Der Peripheriewinkel $\sphericalangle ABT$ darüber stimmt mit dem Sehne-Tangente-Winkel ATP überein.

Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}}$$

Multiplikation mit $\overline{PA} \cdot \overline{PT}$ liefert

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

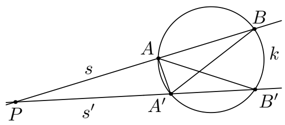
[2] Sonst gelte $2a' < c'$. (Diese Annahme ist zum Widerspruch zu führen). Beachte, dass dann $c' = c$ gelten muss. Weiter folgt $2a' = a$ (und somit $b' = b$) oder $2a' = b$ (und somit $b' = a$).
- Fall $2a' = a$: Dies führt zu $2a' = a = \sqrt[3]{2}a'$ und zum Widerspruch $2 = \sqrt[3]{2}$.
- Fall $2a' = b$: In diesem Fall muss $b' = a$ gelten. Aus diesen beiden Gleichungen und $a = \sqrt[3]{2}a'$ und $b = \sqrt[3]{2} = b'$ folgt

$$2a' = b = \sqrt[3]{2}b' = \sqrt[3]{2}a = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}a' = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 a'$$

Dies ergibt den Widerspruch $2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$.

(b) den Sekanten-Satz:

Die beiden Dreiecke $PA'B$ und $PB'A$ sind ähnlich, denn zwei Winkel stimmen überein:



- Sie haben den Winkel bei P gemeinsam ($\sphericalangle A'PB = \sphericalangle B'PA$).
- Betrachte die Kreissehne $[AA']$: Die beiden Peripheriewinkel $\sphericalangle AB'A'$ und $\sphericalangle ABA'$ darüber stimmen überein.

Aus der Ähnlichkeit folgt

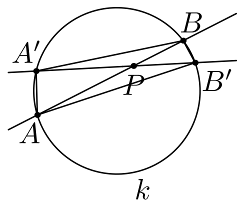
$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB'}}$$

Multiplikation mit $\overline{PB} \cdot \overline{PB'}$ liefert

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

(c) Sehnen-Satz

Die beiden Dreiecke PBA' und PAB' sind ähnlich, denn zwei Winkel stimmen überein:



- Betrachte die Kreissehne $[AA']$: Die beiden Peripheriewinkel $\sphericalangle AB'A'$ und $\sphericalangle ABA'$ darüber stimmen überein.
- Betrachte die Kreissehne $[BB']$: Die beiden Peripheriewinkel $\sphericalangle B'AB$ und $\sphericalangle B'A'B$ darüber stimmen überein.

Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB'}}$$

Multiplikation mit $\overline{PB} \cdot \overline{PB'}$ liefert

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Lösung zu A54 ex-euler-gerade

Die im Hinweis erklärte Streckung bildet die Seitenmitten des Dreiecks ABC auf die Eckpunkte A, B, C ab, denn der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1 : 2$; beispielsweise wird die Seitenmitte M_a auf A abgeblidet. Die Mittelsenkrechte $m_a = m_{BC}$ wird auf eine dazu parallele Gerade durch A aufgebildet, welche folglich die Höhe h_a sein muss (denn sie geht durch A und ist senkrecht auf a). Die drei Mittelsenkrechten werden also auf die Höhen abgebildet und somit wird ihr Schnittpunkt U, der Umkreismittelpunkt, auf den Höhenschnittpunkt H abgebildet. Folglich liegen U, S und H auf einer Geraden und es ist klar,dass S die Strecke $[UH]$ im Verhältnis $1 : 2$ teilt.