

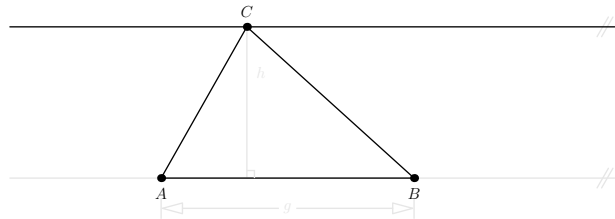


## Vorbemerkung: Scherungen von Dreiecken und Parallelogrammen

eventuell Wiederholung an der Tafel: Flächeninhalt der folgenden Figuren: Rechteck, rechtwinkliges Dreieck, beliebiges Dreieck (Wenn das Lot von einem Punkt die Grundseite trifft: Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke; sonst: Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke), beliebiges Parallelogramm.

### Merke Scheren von Dreiecken

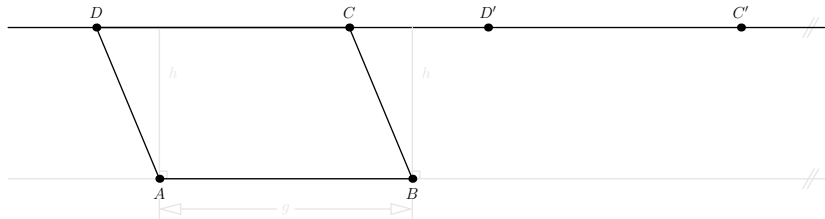
Sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck. Ist  $C'$  ein beliebiger Punkt auf der Parallelen zur Dreiecksseite  $[AB]$  durch  $C$ , so



Sprechweise: «Das Dreieck  $ABC'$  geht durch eine *Scherung* aus dem Dreieck  $ABC$  hervor.»

### Merke Scheren von Parallelogrammen

Sei  $ABCD$  ein beliebiges Parallelogramm. Dann hat jedes andere Parallelogramm mit derselben Grundseite  $[AB]$ , dessen weitere Eckpunkte  $C'$  und  $D'$  auf der Geraden  $(CD)$  liegen,

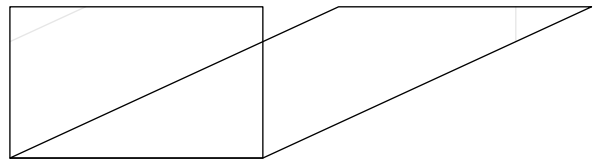


Sprechweise: «Das Parallelogramm  $ABC'D'$  geht durch eine *Scherung* aus dem Parallelogramm  $ABCD$  hervor.»

### 8.0.3 (Beweis per Zerlegungspuzzle (= Legepuzzle, englisch *dissection puzzle*)).

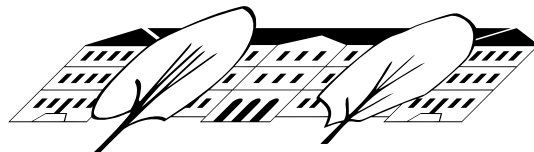
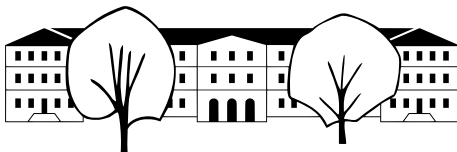
Einige kennen vielleicht Legepuzzle wie Tangram.

Wie rechts angedeutet, kann man jedes Parallelogramm in geeignete Puzzlesteine zerteilen und diese dann zu einem flächengleichen Rechteck mit derselben Grundseite zusammensetzen.



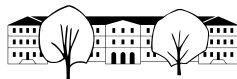
Somit liefert jede Scherung eines Rechtecks (oder Parallelogramms) ein Zerlegungspuzzle.

8.0.4. Zur Illustration des allgemeinen Begriff einer **Scherung** (den wir hier nicht formal definieren): Wendet man auf das Kanti-Logo eine geeignete Scherung an, so erhält man die rechte gescherte/«verzerrte» Version.



### Merke 8.0.5 Scherungen sind flächentreu

Bei Scherungen bleiben *alle* Flächeninhalte erhalten.



## 9 Rechtwinklige Dreiecke (Pythagoras, Katheten-, Höhensatz)

### 9.1 Der Satz des Pythagoras

9.1.1 (Beweis des Satzes von Pythagoras durch Scherungen).

An der Tafel: Satz des Pythagoras formulieren, Beweis mit Hilfe von Scherungen von Rechtecken bzw. Parallelogrammen (Dreieck mit Thaleskreis zeichnen; Parallelogramme mit Farben markieren (nur den Rand) statt Punkte zu benennen); mit Kongruenzsatz begründen, dass  $c$  die Höhe der beiden «oberen Rechtecke» ist, die deswegen so gross wie die «unteren Rechtecke» sind.

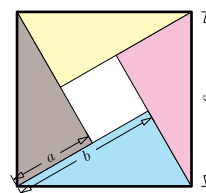
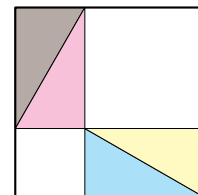
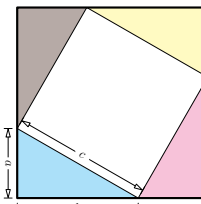


Animation: [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_des\\_Pythagoras#Beweis\\_durch\\_Scherung](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras#Beweis_durch_Scherung)

#### ✂ Aufgabe A1

Drei weitere Beweise des Satzes von Pythagoras:

- (a) Beweis durch Ergänzung: Erklären Sie, warum das rechts in zwei Anordnungen abgebildete «Lege-Puzzle» den Satz des Pythagoras beweist (gemeint sind die beiden abgebildeten Möglichkeiten, die vier zueinander kongruenten Puzzlesteine in dasselbe Quadrat zu legen).
- (b) Beweis durch Berechnung einer Quadratfläche auf zwei Arten: Betrachten Sie nur die linke Figur mit den vier Puzzlesteinen in den Ecken des Quadrats. Berechnen Sie die Fläche des grossen Quadrats auf zwei Arten – dies liefert eine Gleichung. Folgern Sie daraus durch algebraische Umformungen den Satz des Pythagoras.
- (c) Beweis durch Berechnung einer Quadratfläche auf zwei Arten. Berechnen Sie die Fläche des rechts abgebildeten (grossen) Quadrats auf zwei Arten. Folgern Sie daraus ähnlich wie oben den Satz des Pythagoras.



#### ✂ Aufgabe A2 Pythagoras-Puzzle: Verwenden Sie

- den an der Tafel erklärten Beweis des Satzes von Pythagoras durch Scherung und
- die in 8.0.3 erklärte Tatsache, dass Scherungen von Parallelogrammen Zerlegungspuzzle liefern,

um Legesteine zu erzeugen (etwa aus Papier/Holz/Plastik per 3D-Druck), mit denen man einerseits die beiden Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und andererseits das Quadrat über der Hypotenuse auslegen kann.

### 9.2 Standardbezeichnungen bei rechtwinkligen Dreiecken

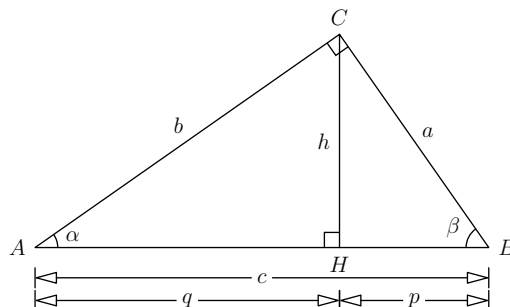
9.2.1. In jedem rechtwinkligen Dreieck nennt man

- die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite
- die anderen beiden (am rechten Winkel anliegenden) Seiten
- die Hypotenuse wird vom Höhenfusspunkt in zwei Teilstrecken zerlegt (siehe Skizze unten). Diese nennt man

Dreieck (fast mit  $\alpha$ ):  
• Hypotenuse, (Gegensatz) «rechter Winkel, senkrecht»; Hypotenuse steht im Sinn von «die sich unter dem rechten Winkel anschließende Seite»  
• Katheten, (Ankathete) «Senkrechte, Lot», eigentlich «die Beine/Beine»

9.2.2 (Konventionen und Standardbezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck). Der Eckpunkt beim rechten Winkel wird  $C$  genannt. Die anderen Eckpunkte, Seiten und Winkel werden wie üblich bezeichnet (mathematisch positiver Drehsinn;  $\gamma = 90^\circ$ ).

- $c$  ist die **Hypotenuse**
- $a$  und  $b$  sind die **Katheten**
- Mit der **Höhe** meint man **fast immer** die Höhe  $h = h_c$  über der Hypotenuse  $c$ .
- Der Fusspunkt  $H$  der Höhe  $h$  teilt die Hypotenuse in zwei **Hypotenusenabschnitte**, die man mit  $p$  und  $q$  bezeichnet, genauer gelten  $p = [BH]$  und  $q = [AH]$ .  
Merkhilfe:  $p$  liegt bei  $a$ ;  $q$  liegt bei  $b$  (alphabetische Reihenfolge)





### 9.3 Sätze über rechtwinklige Dreiecke

**9.3.1.** Wir geben hier die wichtigsten Sätze über rechtwinklige Dreiecke in einer Art Zusammenfassung an, damit man sie sich auf einmal einprägen kann. Die Beweise werden an der Tafel erklärt. Weitere Beweise finden sich in den Aufgaben.

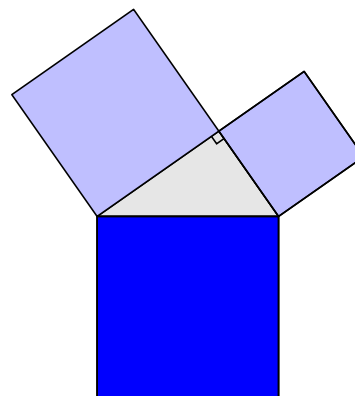
**9.3.2.** Für die alten Griechen waren die folgenden Sätze vorrangig Aussagen über den Flächeninhalt gewisser Quadrate und Rechtecke (was vermutlich vor allem daran lag, dass unsere elegante «moderne» Formelschreibweise damals noch nicht existierte). Dieser Aspekt wird in den folgenden Formulierungen besonders betont.

**Satz 9.3.3** Satz des Pythagoras samt Umkehrung

Das Quadrat über der Hypotenuse ist so gross wie die beiden Quadrate über den Katheten zusammen (hellblau = blau). 🖊

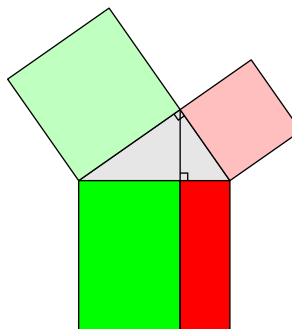
Umkehrung des Satzes des Pythagoras: In jedem Dreieck  $UVW$  gilt: 🖊

Beachte: Die Gleichung  $u^2 + v^2 = w^2$  kann nur dann gelten, wenn  $w$  die längste Seite ist.  
Beweis der Umkehrung: An Tafel am Beginn des Abschnitts [A14](#).



**Satz 9.3.4** Kathetensatz

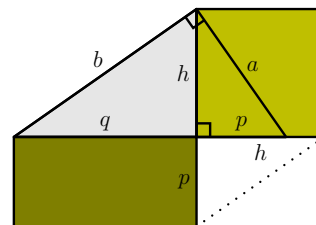
Das Quadrat über jeder Kathete ist so gross wie das Rechteck aus Hypotenuse und zugehörigem Hypotenusenabschnitt (hellrot = rot und hellgrün = grün). 🖊



**Satz 9.3.5** Höhensatz

Das Quadrat über der Höhe ist so gross wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten (helloliv = oliv). 🖊

Beweis an Tafel aus (1) nur Pythagoras (dreimal, für jedes der drei (ähnlichen) Dreiecke) und (2) einem der Kathetensätze + Pythagoras erklärt; beide Beweise verwenden  $c = p + q$ . Ein geometrisch anschaulicher Beweis wird in Aufgabe [A17](#) erklärt.



**Merke 9.3.6** Fläche auf zwei Arten berechnen

Der folgende einfache Zusammenhang ist nützlich, wird aber leider oft übersehen. 🖊

Beweis: Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks kann von jeder der drei Seiten aus mit der Formel « $\frac{1}{2}$  Grundseite mal Höhe» berechnet werden. Was ist die Höhe über einer Kathete? Der Rest des Beweises ist dem Leser als einfache Aufgabe überlassen.



### 9.4 Quadratwurzeln (Wiederholung)

**Definition 9.4.1**

Die **Quadratwurzel**  $\sqrt{r}$  einer nicht-negativen reellen Zahl  $r \geq 0$  ist wie folgt definiert:

$$\sqrt{r} := \text{die nicht-negative reelle Zahl, deren Quadrat } r \text{ ist}$$

✂ **Aufgabe A3** Berechnen Sie:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sqrt{144}$                           | b) $\sqrt{\frac{9}{4}}$                      |
| c) $\sqrt{1}$                             | d) $\sqrt{0}$                                |
| e) $\sqrt{-1}$                            | f) $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4}$               |
| g) $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}}$          | h) $\sqrt{2^{42} \cdot 3^{-2024} \cdot 7^4}$ |
| i) $\sqrt{(-2024)^2}$                     | j) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x$           |
| k) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x \geq 0$ | l) $\sqrt{x^2}$ für beliebiges $x < 0$       |

**Satz 9.4.2** Wurzelgesetze

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen  $a, b$  gelten

in der Formel rechts ist zusätzlich  $b \neq 0$  angenommen

*Beweis.* Die Zahl rechts des Gleichheitszeichens ist jeweils nicht-negativ und hat die Eigenschaft, dass ihr Quadrat die Zahl links unter dem Wurzelzeichen ist. □

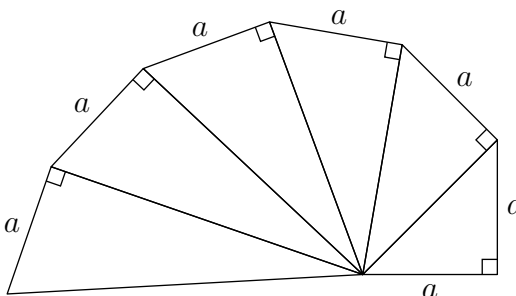
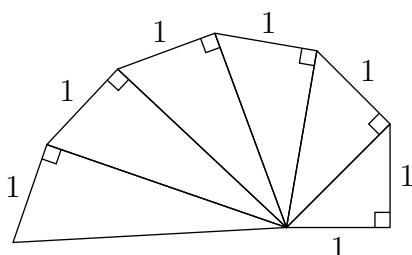
✂ **Aufgabe A4** In der Geometrie haben wir es meist mit positiven Grössen zu tun, etwa mit Längen von Strecken. Deswegen nehmen wir in dieser Aufgabe an, dass die Variable  $a$  eine beliebige positive reelle Zahl ist. Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

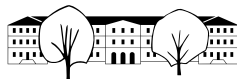
- |  |   |
|--|---|
| a) $\sqrt{3^{2025}}$                                       | b) $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5}$                              |
| c) $\sqrt{a^2}$  | d) $\sqrt{2a^2}$  |
| e) $\sqrt{3a^2}$   | f) $\sqrt{4a^2}$  |
| g) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!) | h) $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ (ohne Wurzel im Nenner angeben!) |

### 9.5 Aufgaben (vor allem zum Satz des Pythagoras)

✂ **Aufgabe A5** Wurzelkonstruktionen mit Pythagoras:

- Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge  $\sqrt{13}$  (Längenangaben in Zentimeter).
- Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge  $\sqrt{22}$ .
- Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge  $\sqrt{32}$ .
- Wurzelschnecke/Wurzelspirale/Spirale des Theodorus:** Bestimme alle nicht angegebenen Längen in den beiden folgenden Zeichnungen!





✂ **Aufgabe A6** Für ein beliebiges **gleichseitiges** Dreieck (bitte Skizze anfertigen):

- (a) Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und die Fläche des Dreiecks, wenn die Seitenlänge  $a$  gegeben ist. Wer mag, kann zuerst den konkreten Fall  $a = 1$  oder  $a = 17$  behandeln.
- (b) Bestimmen Sie das Verhältnis  $h : a = \frac{h}{a}$  von Höhe zu Seitenlänge.
- (c) Bestimmen Sie die Seitenlänge  $a$  in Abhängigkeit von der Höhe  $h$ .

✂ **Aufgabe A7** Betrachten Sie ein beliebiges **gleichschenkliges rechtwinkliges** Dreieck mit Hypotenuse  $c$  und Katheten  $a = b$  (bitte Skizze anfertigen).

- (a) Welche Winkel hat das Dreieck?
- (b) Berechnen Sie  $c$  und die Fläche  $F$  des Dreiecks in Abhängigkeit von  $a$ .
- (c) Berechnen Sie  $a$  und die Fläche  $F$  des Dreiecks, wenn  $c$  gegeben ist.
- (d) Was ist das Verhältnis Kathete zu Hypotenuse?

✂ **Aufgabe A8** Für ein beliebiges  $90^\circ$ - $60^\circ$ - $30^\circ$ -Dreieck bezeichne  $a$  die Hypotenuse,  $x$  die längere und  $y$  die kürzere Kathete (bitte Skizze anfertigen).

- (a) Berechnen Sie aus jeder der drei Längen  $a, x, y$  die beiden anderen.
- (b) Geben Sie die Verhältnisse  $\frac{x}{a}, \frac{y}{a}$  und  $\frac{y}{x}$  an.
- (c) Mit Hilfe von Kathetensatz und Höhensatz (letzterer wurde vermutlich noch nicht bewiesen; er lautet  $h^2 = pq$ ):  
Bestimmen Sie die beiden Hypotenusenabschnitte (der längere sei  $p$ , der kürzere  $q$ ) und die Höhe  $h$  in Abhängigkeit von der Hypotenuse  $a$ .

**Merke 9.5.1**

Für die folgenden Typen von Dreiecken kann man mit Pythagoras aus jeder der drei Seiten jede andere Seite (und Höhe und Flächeninhalt) berechnen:

- gleichschenklige rechtwinkliges Dreieck, d. h.  $90^\circ$ - $45^\circ$ - $45^\circ$ -Dreieck
- $90^\circ$ - $60^\circ$ - $30^\circ$ -Dreieck

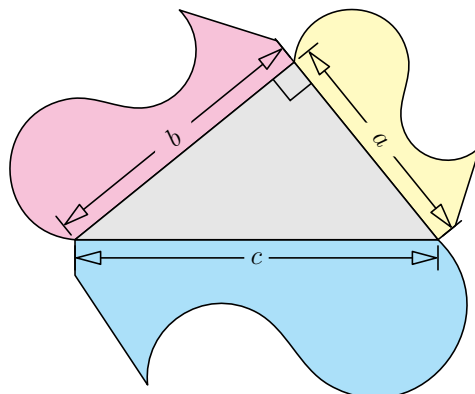
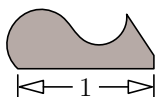
*Beweis.* Siehe Aufgaben A7 und A8. □

✂ **Aufgabe A9** **Pythagoras für beliebige zueinander ähnliche Figuren über den Dreiecksseiten**

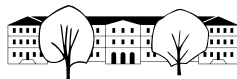
In der Zeichnung rechts sind die drei farbigen Figuren ähnlich zueinander.  
Zeigen Sie: Für die Flächeninhalte gilt

$$\text{Gelb} + \text{Rosa} = \text{Hellblau}$$

Hinweis: Bezeichne  $F$  die Fläche der (zu den drei farbigen Gebieten ähnlichen) dunkelgrauen Figur mit Grundseite der Länge 1. Wie kann man die Flächen der drei farbigen Figuren durch  $F$  ausdrücken?



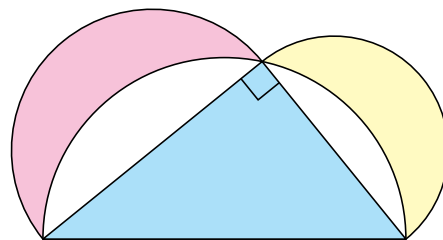
Bemerkung: Die analoge Aussage gilt für beliebige zueinander ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.



**\* Aufgabe A10 Mönchchen des Hippokrates**

Die beiden mondsichelförmigen Figuren in Rosa und Gelb in der Zeichnung rechts werden die «Mönchchen des Hippokrates» genannt.

Zeigen Sie, dass die Fläche der beiden Mönchchen mit der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks übereinstimmt.



Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe A9 für Halbkreise über den Dreiecksseiten.

Bemerkung: Die Mönchchen des Hippokrates sind die ersten *krummlinig* begrenzten Flächenstücke, deren Inhalt exakt berechnet werden konnte (laut [Wikipedia: Lune of Hippocrates](#)).

**Abstand zwischen zwei Punkten der kartesischen Zeichenebene**

**\* Aufgabe A11** Betrachten Sie die Punkte «Ursprung»  $U = (0, 0)$  und  $P = (2, 5)$  der Zeichenebene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- (a) Markieren Sie die beiden Punkte in einem Koordinatensystem und bestimmen Sie den Abstand  $\overline{UP}$  mit dem Satz von Pythagoras. Prüfen Sie Ihr Ergebnis durch Abmessen!
- (b) Zeichnen Sie zusätzlich den Punkt  $Q = (5, 1)$  ein und bestimmen Sie den Abstand  $\overline{PQ}$ .  
Hinweis: Finden Sie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Strecke  $[PQ]$  ist und dessen Katheten Sie aus den Koordinaten von  $P$  und  $Q$  ausrechnen können.
- (c) Was ist wohl in Merke 9.5.2 zu ergänzen?

**Merke 9.5.2**

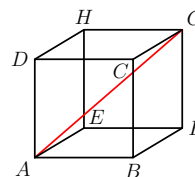
Sind  $P = (x_P, y_P)$  und  $Q = (x_Q, y_Q)$  zwei beliebige Punkte der Zeichenebene  $\mathbb{R}^2$ , so gilt

$$\text{Abstand}(P, Q) = \overline{PQ} = \dots$$

**Berechnungen im dreidimensionalen Raum**

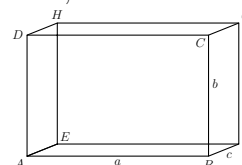
**\* Aufgabe A12** Stellen Sie sich vor, dass eine Fliege und ein (nicht fliegen könnender) Marienkäfer in der Ecke  $A$  eines würfelförmigen Raums der Seitenlänge 1 sitzen.

- (a) Welche Flugstrecke legt die Fliege zurück, wenn sie direkt zur gegenüberliegenden Ecke  $G$  fliegt? Mit anderen Worten: Wie lang ist die rot eingezeichnete Raumdiagonale  $[AG]$ ?
- (b) Wie lang ist der kürzeste Weg für den Marienkäfer zur gegenüberliegenden Ecke  $G$ ? Er kann leider nur auf den Wänden des Raums laufen.  
Hinweis: Denken Sie an Würfelnetze (= «Bastel-/Faltvorlagen für Würfel»), d. h. falten Sie den Würfel auf.

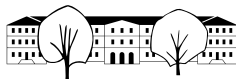


Nun stelle man sich vor, dass der Raum quaderförmig ist mit Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  (wie in der Zeichnung markiert). Wenn Sie wollen, können Sie auch zuerst mit konkreten Zahlen  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$  arbeiten.

- (c) Wie lang ist die Raumdiagonale  $[AG]$  im Quader?
- (d) Wie lang ist der kürzeste Weg von  $A$  nach  $G$  über einen geeigneten Punkt der Kante  $[BC]$ ?
- (e) \* Wie lang ist der kürzeste Weg entlang der Wände von  $A$  nach  $G$ , wenn  $a \geq b \geq c$  gilt? Über welche Kante führt der kürzeste Weg?



Hinweis: Es gibt drei naheliegende Kandidaten für den kürzesten Weg. Welcher davon ist der kürzeste?



✂ **Aufgabe A13** Das (oder der) **Tetraeder** ist einer der fünf **platonischen Körper** (altgriechisch τετρα- tetra- «vier» und ἕδρα hédra «Sitz», «Sessel», «Gesäß» bzw. übertragen «Seitenfläche»).

Er besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken derselben, beliebig gewählten Seitenlänge  $s$ . Bestimme die folgenden Werte (nur die letzten beiden hängen von  $s$  ab):

- (a) Wie viele Flächen, Kanten und Ecken hat er?
- (b) Was ist die Höhe (= Körperhöhe) des Tetraeders in Abhängigkeit von  $s$ ?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Höhe einer Seite des Tetraeders (dabei hilft eine vorherige Aufgabe). Liegt das Tetraeder auf einer Seitenfläche, so ist der Fusspunkt der Körperhöhe der Schwerpunkt der Grundfläche. Denken Sie daran, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem gewissen Verhältnis teilen.

**Abstand zwischen zwei Punkten des dreidimensionalen kartesischen Raums**

✂ **Aufgabe A14** Betrachten Sie die Punkte  $U = (0, 0, 0)$  und  $P = (3, 4, 12)$  des dreidimensionalen Raums  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- (a) Bestimmen Sie den Abstand  $\overline{UP}$ .
- (b) Betrachten Sie zusätzlich den Punkt  $Q = (1, 7, 8)$  und bestimmen Sie den Abstand  $\overline{PQ}$ .
- (c) Was ist wohl in Merke 9.5.3 zu ergänzen?

**Merke 9.5.3**

Sind  $P = (x_P, y_P, z_P)$  und  $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$  zwei beliebige Punkte des Raums  $\mathbb{R}^3$ , so gilt

$$\text{Abstand}(P, Q) = \overline{PQ} = \text{☞}$$

**Umkehrung des Satzes des Pythagoras**

Beweis der Umkehrung an Tafel erklären. Resultat in Satz 9.3.3 ergänzen.

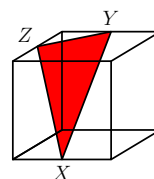
**9.5.4.** Beim Anlegen von rechteckigen Feldern ist es nützlich, relativ schnell rechte Winkel bestimmen zu können. In der Antike wurde dazu eine «kreisförmige» Schnur, die in zwölf gleich grosse Teile eingeteilt war, verwendet. Wie ging man vor?

✂ **Aufgabe A15** Welche der vier Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen sind rechtwinklig?

- a)  $a = 3, b = 4, c = 5$       b)  $a = 5, b = 12, c = 13$       c)  $a = 17, b = 15, c = 8$       d)  $a = 4, b = 5, c = 6$

✂ **Aufgabe A16**

Im rechts abgebildeten Würfel der Seitenlänge  $a$  liegen die Punkte  $X, Y$  und  $Z$  jeweils auf den Kantenmitten. Ist das Dreieck  $\triangle XYZ$  rechtwinklig?

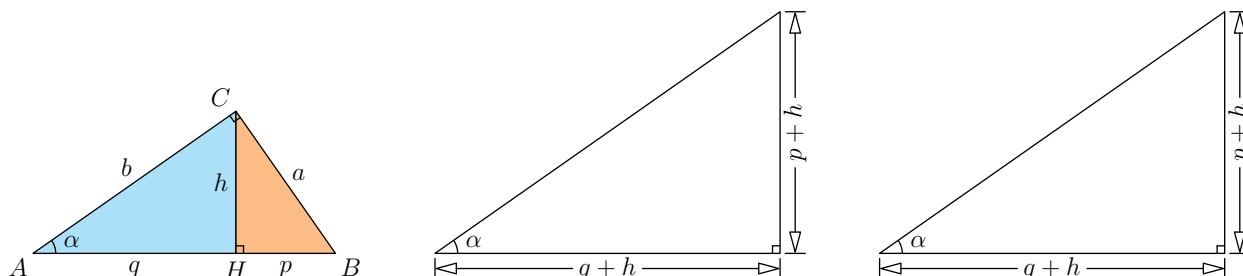




**Höhensatz**

✂ **Aufgabe A17** Beweis des Höhensatzes durch Ergänzung

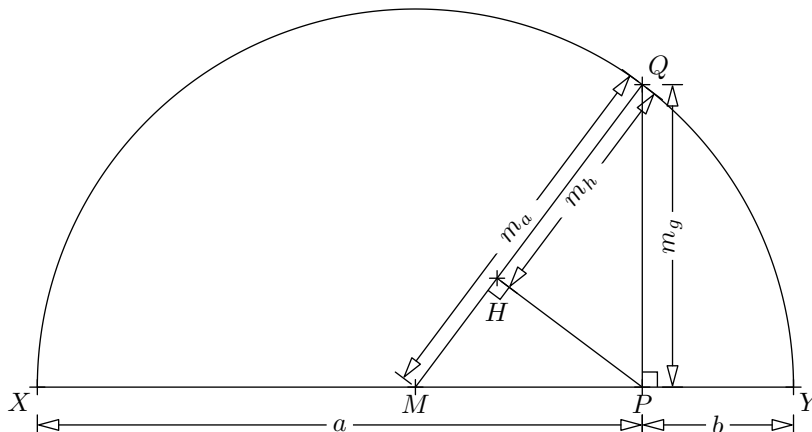
Links ist ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt, das von seiner Höhe in zwei Dreiecke (blau und braun) zerlegt wird. Legen Sie diese beiden Dreiecke auf zwei verschiedene Weisen «in die Ecken» des zweimal dargestellten Dreiecks (also einmal beide Teile in das mittlere Dreieck, einmal beide Teile in das rechte Dreieck). Folgern Sie daraus den Höhensatz  $h^2 = p \cdot q$ .



**Drei Mittelwerte anschaulich**

✂ **Aufgabe A18** Drei Mittelwerte: Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Ausgehend von zwei Längen  $a$  und  $b$  wurde die Figur rechts wie folgt konstruiert: Trage  $a$  und  $b$  nebeneinander von einem Punkt  $P$  aus in entgegengesetzte Richtungen ab und errichte über der Strecke  $a + b$  einen Thales(halb)kreis mit Mittelpunkt  $M$ . Zeichne senkrecht zur Grundseite des Thaleskreises in  $P$  eine Gerade ein. Sei  $Q$  ihr Schnittpunkt mit dem Thaleskreis. Zeichne den Radius  $[MQ]$  ein. Schliesslich ist  $H$  der Fusspunkt des Lots von  $P$  auf  $[MQ]$ .



Bestimme in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  die folgenden Längen:

- (a) das **arithmetische Mittel**  $m_a = \overline{MQ}$  von  $a$  und  $b$ ;
- (b) das **geometrische Mittel**  $m_g = \overline{PQ}$  von  $a$  und  $b$ ;
- (c) das **harmonische Mittel**  $m_h = \overline{HQ}$  von  $a$  und  $b$ .

Hinweis: Höhensatz

Hinweis: Kathetensatz

**Merke 9.5.5** Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel (= Mittelwert)

Wenn  $a, b \in \mathbb{R}^+$  positive reelle Zahlen sind, so nennt man

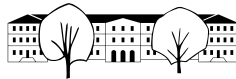
- $\frac{a+b}{2}$  das **arithmetische Mittel** von  $a$  und  $b$ ;
- $\sqrt{ab}$  das **geometrische Mittel** von  $a$  und  $b$ ;
- $\frac{2ab}{a+b}$  das **harmonische Mittel** von  $a$  und  $b$ .

Es gilt «harmonisches  $\leq$  geometrisches  $\leq$  arithmetisches Mittel», d. h.

Beweis: Klar aus der Zeichnung in Aufgabe A18.

$$m_h \leq m_g \leq m_a$$

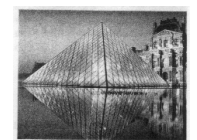
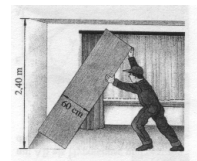
Merkhilfe: Das harmonische Mittel ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte von  $a$  und  $b$ , denn es gilt  $\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$  (warum?).



## 9.6 Auftrag für Montag, 23. März: Aufgabe A19

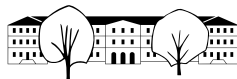
✂ **Aufgabe A19** Die folgenden Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupffin, Kantonsschule am Burggraben St. Gallen. Die Aufgaben (a) bis (k) sind mit dem Satz des Pythagoras lösbar. Kathetensatz (und der noch nicht bewiesene Höhensatz) werden nicht benötigt.

- (a) Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.
- (b) Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a = 3$  cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt des ursprünglichen Quadrats hat.
- (c) Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt  
a)  $5 \text{ cm}^2$  b)  $27 \text{ cm}^2$
- (d) Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, damit eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen  $22 \text{ cm} \times 17 \text{ cm}$  darauf Platz hat.
- (e) Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius  $6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ )
- (f) Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km. Die Entfernung Romanshorn-Friedrichshafen bitte selbst herausfinden (und als Länge der geraden Verbindungsstrecke interpretieren).
- (g) Wie hoch darf ein 60 cm tiefer (und sehr breiter) Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?  
Hinweis: Bitte nicht von der Wand im Bild irritieren lassen sondern den Schrank in der Raummitte aufrichten.
- (h) Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen  $a$  und  $b$ . a)  $a = 6$  und  $b = 10$  b) allgemein mit Parametern  $a$  und  $b$
- (i) Von einem allgemeinen Dreieck  $ABC$  kennt man die Seite  $c = 56 \text{ cm}$ , die Höhe  $h_c = 15 \text{ cm}$  und die Seitenhalbierende  $s_c = 17 \text{ cm}$ . Berechnen Sie die Länge der Seiten  $a$  und  $b$ .
- (j) Die abgebildete Pyramide über dem Eingang des Louvre in Paris ist 21.6 m hoch. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 34.2 m. Wie gross ist die Glasfläche?
- (k) Gegeben sei eine Strecke der Länge  $a$ .  
Konstruieren Sie a)  $\sqrt{61}a$  b)  $\sqrt{153}a$  c)  $\sqrt{7}a$



In den beiden folgenden Teilaufgaben ist die Umkehrung des Satzes von Pythagoras zu verwenden: Gilt für drei Seiten  $x, y, z$  eines Dreiecks  $x^2 = y^2 + z^2$ , so ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel gegenüber der (längsten) Seite  $z$ .

- (l) Gegeben sind die Punkte  $A = (-3, -2)$ ,  $B = (6, 1)$  und  $C = (-5, 4)$ . Prüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig ist. Wenn ja: Bei welchem Punkt liegt der rechte Winkel? (Keine genaue Zeichnung verlangt, aber eine Skizze ist sicherlich hilfreich!)
- (m) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck  $ABC$  mit  $A = (2, 1)$ ,  $B = (1, 10)$  und  $C = (6, 5)$  rechtwinklig ist (und wenn ja, wo der rechte Winkel liegt) und geben Sie den Flächeninhalt an! (Grobe Skizze empfohlen!)



- (n) Verwandeln Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen 6 cm, 7 cm, 8cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat.

Hinweis: Finden Sie zuerst ein Rechteck mit demselben Flächeninhalt. Mit dem Kathetensatz oder Höhensatz  $h^2 = pq$  («Höhe quadriert = Produkt der Hypotenusenabschnitte») können Sie dieses Rechteck dann in ein Quadrat verwandeln. Überlegen Sie sich am besten beiden Lösungen, sowohl mit Kathetensatz als auch mit Höhensatz.

- (o) Verwandeln Sie ein Quadrat mit Seitenlänge 7.5 cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 5.5 cm lang ist. Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen!
- (p) Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens
  - (i) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?
  - (ii) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an. Erdradius: 6370 km

### 9.7 Weitere Aufgaben

#### ✂ Aufgabe A20

Berechnen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Grössen, wobei  $a, b, c, p, q, h$  jeweils die üblichen Strecken eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnen;  $F$  bezeichnet seine Fläche. (Taschenrechner erlaubt)

$a$	$b$	$c$	$p$	$q$	$h$	$F$
3			$\frac{9}{5} = 1.8$			
13					12	
		25		16		
			1	7		

✂ Aufgabe A21 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe  $h$  auf die Seite  $c$  diese in zwei Hypotenusenabschnitte,  $p$  und  $q$ , wobei  $p$  näher bei  $a$  liegt. Von den sechs Strecken  $a, b, c, h, p$  und  $q$  sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

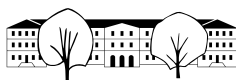
- a)  $a, b$
- b)  $a, p$
- c)  $p, q$
- d)  $p, c$
- e) ✂  $p, b$

✂ Aufgabe A22 Es folgt eine Liste von Wortverbindungen. Diese sind in den nachfolgenden Lückentext so einzutragen, dass korrekte Aussagen entstehen:

**Wortverbindungen:** der Höhe Hypotenusenabschnitt der beiden Hypotenusenabschnitte der Hypotenuse  
von Hypotenuse der Katheten der zugehörigen Kathete das Produkt das Produkt das Quadrat das Quadrat  
das Quadrat der Quadrate rechtwinkligen die Summe

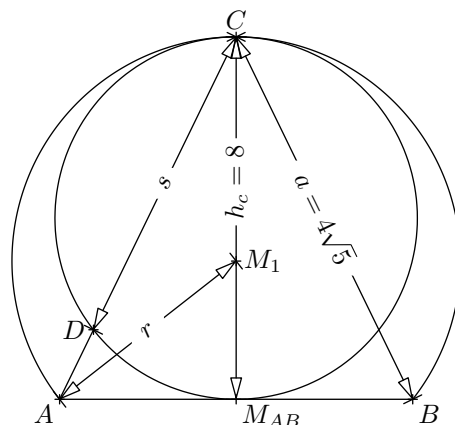
**Lückentext:** In jedem  Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras:     
 ist so gross wie
- laut dem Kathetensatz:   und   
 ist so gross wie
- laut dem Höhensatz:    
 ist so gross wie



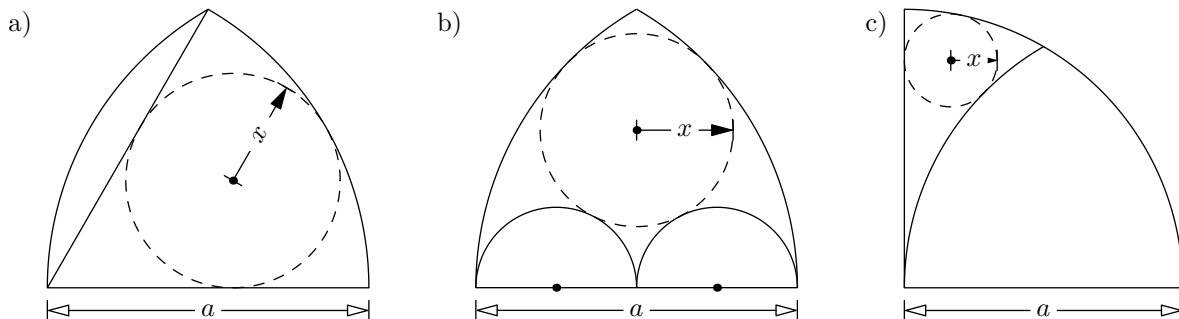
**Aufgabe A23**

Berechnen Sie  $s$  und  $r$  aus  $a = 4\sqrt{5}$  und  $h_c = 8$ .



**Aufgabe A24**

Berechnen Sie aus  $a$  den Radius  $x$  der skizzierten Füllkreise.



Hinweis zu a): Suchen Sie ein  $90^\circ$ - $60^\circ$ - $30^\circ$ -Dreieck.  
Hinweis zu b) und c): Berechnen Sie den Abstand vom Kreiszentrum zur Grundlinie auf zwei Arten.

**Aufgabe A25**

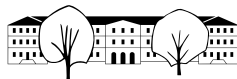
Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit dem Höhensatz!

- (a) Geometrisches Wurzelziehen: Gegeben sind zwei Strecken der Länge  $a$  und  $1$ . Konstruieren Sie eine Strecke der Länge  $\sqrt{a}$ .
- (b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen  $x$  und  $y$ . Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.
- (c) Quadrat in flächengleiches Rechteck mit gegebener Seitenlänge verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge  $s$  und eine Strecke  $x$ . Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite  $x$  ist.
- (d) Anwendung der vorigen beiden Teilaufgabe: Gegeben sind zwei Strecken der Längen  $x$  und  $y$  und eine Strecke der Länge  $1$  als «Masseinheit». Konstruieren Sie eine Strecke der Länge  $xy$ .  
Bemerkung: Einfacher geht das mit dem Strahlensatz, wie im Skript «Zahlen» erklärt.

**Aufgabe A26**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit dem Kathetensatz!

- (a) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen  $x$  und  $y$ . Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.
- (b) Quadrat in flächengleiches Rechteck mit gegebener Seitenlänge verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge  $s$  und eine Strecke  $x$ . Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite  $x$  ist.



## 9.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

✂ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

### ✂ Lösung zu A1 ex-pythagoras-drei-beweise

- (a) Die beiden grossen Quadrate haben denselben Flächeninhalt (nämlich  $(a + b)^2$ ). Wenn man davon jeweils die Fläche der vier roten Puzzlesteine abzieht, verbleibt die gleiche Fläche. Das bedeutet, dass das weisse Quadrat im linken Bild dieselbe Fläche hat wie die beiden weissen Quadrate im rechten Bild, dass also  $c^2 = a^2 + b^2$  gilt.
- (b) Einerseits ist die Fläche des grossen Quadrats  $(a + b)^2$ , andererseits ist sie die Summe der Flächen der vier Puzzlesteine (jeweils  $\frac{1}{2}ab$ ) plus die Fläche des weissen Quadrats ( $c^2$ ), d. h.

$$(a+b)^2 = (\text{Fläche des grossen Quadrats}) = (\text{Fläche des weissen Quadrats}) + 4 \cdot (\text{Fläche Puzzlestein}) = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$$

Daraus ergibt sich per ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

- (c) Einerseits ist die Fläche des grossen Quadrats  $c^2$ , andererseits ist sie die Summe der Flächen der vier Puzzlesteine (jeweils  $\frac{1}{2}ab$ ) plus die Fläche des weissen Quadrats ( $(b - a)^2$ ), d. h.

$$c^2 = (\text{Fläche des grossen Quadrats}) = (\text{Fläche des weissen Quadrats}) + 4 \cdot (\text{Fläche Puzzlestein}) = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$$

Daraus ergibt sich per ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - 2ab + a^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Damit das Bild «stimmt», ist hier  $b > a$  vorausgesetzt.

### ✂ Lösung zu A2 ex-pythagoras-legepuzzle-aus-scherungsbeweis

Ganz am Ende dieses Skript findet man das entsprechende Legepuzzle viermal zum Ausdrucken und Ausschneiden.

### ✂ Lösung zu A3 ex-wurzeln

a)  $\sqrt{144} = 12$

c)  $\sqrt{1} = 1$

e)  $\sqrt{-1}$  = nicht definiert

g)  $\sqrt{\frac{3^{2024}}{7^4}} = \frac{3^{1012}}{7^2}$

i)  $\sqrt{(-2024)^2} = 2024$

b)  $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

d)  $\sqrt{0} = 0$

f)  $\sqrt{3^{2024} \cdot 7^4} = 3^{1012} \cdot 7^2$

h)  $\sqrt{2^{42} \cdot 3^{-2024} \cdot 7^4} = 2^{21} \cdot 3^{-1012} \cdot 7^2$

j)  $\sqrt{x^2} = |x|$ ; Achtung, ohne Betragsstriche falsch (für negatives  $x$ )!

Man kann dies auch mit einer Fallunterscheidung

aufschreiben:  $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

k)  $\sqrt{x^2} = x$  für beliebiges  $x \geq 0$

l)  $\sqrt{x^2} = -x$  für beliebiges  $x < 0$



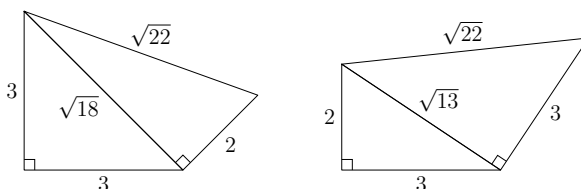
✂ Lösung zu A4 ex-wurzelgesetze

- a)  $\sqrt{3^{2025}} = \sqrt{3^{2024} \cdot 3} = \sqrt{3^{2024}} \cdot \sqrt{3} = 3^{1012} \cdot \sqrt{3}$
- b)  $\sqrt{3^{2025} \cdot 7^5} = \sqrt{3^{2025}} \cdot \sqrt{7^5} = 3^{1012} \cdot 7^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 7}$
- c)  $\sqrt{a^2} = a$
- d)  $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$
- e)  $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$
- f)  $\sqrt{4a^2} = 2a$
- g)  $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  (ohne Wurzel im Nenner angeben!)
- h)  $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  (ohne Wurzel im Nenner angeben!)

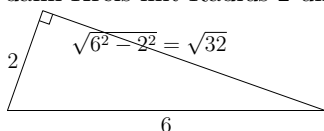
✂ Lösung zu A5 ex-pythagoras-wurzelschnecke

- a) Wegen  $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$  zeichne man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 3 und 2 (entlang der Linien des Kästchenpapiers). Seine Hypotenuse hat die gesuchte Länge  $\sqrt{13}$ .  
Es gibt auch andere Lösungen (etwa die «brutale» mit der Wurzelschnecke aus Teilaufgabe (d)); etwas besser sind die sich aus  $13 = 3^2 + 1^1 + 1^2 + 1^2 + 1^2$  oder  $13 = 4^2 - 2^2 + 1^1$  oder (umständlicher, vergleiche Teilaufgabe (c))  $13 = 4^2 - 1^2 - 1^1 - 1^2$  ergebenden Lösungen.

- b) Wegen  $22 = 9 + 9 + 4 = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 18 + 4 = 13 + 9$  tut es jede der rechts durch Zeichnungen angedeuteten Konstruktionen. Die Rechnungen zu den Beschriftungen in der linken Konstruktion sind  $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$  und  $\sqrt{\sqrt{18}^2 + 2^2} = \sqrt{18 + 4} = \sqrt{22}$ .



- c) Wegen  $32 = 36 - 4 = 6^2 - 2^2$  ist es wohl am einfachsten, ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge 6 und einer Kathete der Länge 2 zu konstruieren (zeichne Strecke der Länge 6, Thaleskreis darüber, dann Kreis mit Radius 2 um einen der Endpunkte). Die andere Kathete hat dann die gewünschte Länge.



- d) Die Längen links sind in offensichtlicher Reihenfolge:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ .  
Die Längen rechts sind  $\sqrt{2} \cdot a, \sqrt{3} \cdot a, \sqrt{4} \cdot a = 2a, \sqrt{5} \cdot a, \sqrt{6} \cdot a, \sqrt{7} \cdot a$ .

✂ Lösung zu A6 ex-gleichseitiges-dreieck

- (a) Die Höhe  $h$  teilt das Dreieck in zwei (kongruente) rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse  $a$  und Katheten  $h$  und  $\frac{a}{2}$ . Nach Pythagoras gilt also

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$

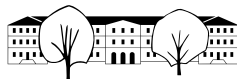
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Die Fläche ergibt sich somit nach der Formel «einhalb mal Grundseite mal Höhe» zu

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

- (b) Man kann entweder die obige Formel  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  durch  $a$  dividieren oder sie so verwenden:

$$\frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(c) Die obige Formel  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  ist nach  $a$  aufzulösen. Multiplikation mit  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  liefert

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$$

✂ Lösung zu A7 ex-rechtwinklig-gleichschenkliges-dreieck

Betrachten Sie ein beliebiges **gleichschenkliges rechtwinkliges** Dreieck mit Hypotenuse  $c$  und Katheten  $a = b$  (bitte Skizze anfertigen).

(a) Das Dreieck hat die Winkel  $90^\circ$  und zweimal  $45^\circ$ .

(b) Nach Pythagoras gilt  $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , also  $c = \sqrt{2}a$ .

Nimmt man eine Kathete als Grundseite, so ist die andere Kathete die zugehörige Höhe und die Fläche ist

$$F = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}a^2$$

d.h. die halbe Fläche eines Quadrats der Seitenlänge  $a$ , was auch geometrisch klar ist.

(c)  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}c = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ .

Fläche:  $F = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{4}c^2$ . Dies ist auch geometrisch plausibel, denn in ein Quadrat der Seitenlänge  $c$  passt das betrachtete Dreieck viermal.

(d)  $\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

✂ Lösung zu A8 ex-30-60-90-dreieck

(a) Spiegelt man das gegebene Dreieck an der längeren Kathete  $x$ , so bilden das Ausgangsdreieck und sein Spiegelbild zusammen ein gleichseitiges Dreieck. Folglich gelten

$$y = \frac{1}{2}a \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

wobei die zweite Gleichung nach Pythagoras gilt bzw. nach der vorherigen Aufgabe A6, denn  $x$  ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $a$ .

Alternative: Man kann das Dreieck auch durch Teilen des rechten Winkels in einen  $60^\circ$ -Winkel und einen  $30^\circ$ -Winkel in ein gleichseitiges und ein gleichschenkliges Dreieck zerlegen und so sehen, dass die Hypotenuse  $a$  doppelt so lang ist wie die kürzere Kathete  $y$ .

Die obigen beiden Gleichungen geben  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit von  $a$  an.

- Ist  $x$  gegeben, so gelten

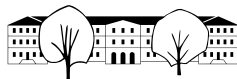
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}x \qquad y = \frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

- Ist  $y$  gegeben, so gelten

$$a = 2y \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}y$$

(b)

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(c) Hier einer von vielen Lösungswegen: Nach dem Kathetensatz gilt  $qa = y^2$  und somit

$$q = \frac{y^2}{a} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

(Alternative: Das Dreieck mit den Seiten  $y, h$  und  $q$  ist ein  $90^\circ$ - $60^\circ$ - $30^\circ$ -Dreieck mit  $q$  als kürzerer Kathete, die deswegen halb so lang ist wie die Hypotenuse  $y$ , d.h.  $q = \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}a$ .)

Wegen  $p + q = a$  ergibt sich  $p = a - q = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$ .

Aus dem Höhensatz  $h^2 = pq$  folgt nun

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{3}{4}a \cdot \frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

**\* Lösung zu A9** ex-pythagoras-aehnliche-figures

Die blaue Figur ist ähnlich zur grauen Figur mit Ähnlichkeitsfaktor/Streckfaktor  $c$ . Da die Fläche sich mit dem Quadrat des Streckfaktors ändert, folgt die erste Gleichung, die anderen beiden bekommt man analog.

$$\text{Hellblau} = c^2 \cdot \text{Grau} \qquad \text{Gelb} = a^2 \cdot \text{Grau} \qquad \text{Rosa} = b^2 \cdot \text{Grau}$$

Mit «Grau» ist genau genommen «Fläche der grauen Figur» gemeint etc.

Daraus erhalten wir mit dem «normalen Pythagoras»  $c^2 = a^2 + b^2$

$$\text{Hellblau} = c^2 \cdot \text{Grau} = (a^2 + b^2) \cdot \text{Grau} = a^2 \cdot \text{Grau} + b^2 \cdot \text{Grau} = \text{Gelb} + \text{Rosa}$$

**\* Lösung zu A10** ex-moendchen-des-hippokrates

Nach (der Bemerkung in) Aufgabe A9 gilt: Der Halbkreis über der Hypotenuse (nach oben oder unten eingezeichnet) ist genauso gross wie die beiden Halbkreise über den Katheten zusammen.

Damit erhalten wir:

(Genau genommen ist jeweils die Fläche der genannten Figur gemeint.)

$$\begin{aligned} \text{Hellblau} &= \text{Halbkreis über } c) - (\text{linker weisser Bereich}) - (\text{rechter weisser Bereich}) \\ &= (\text{Halbkreis über } a) + (\text{Halbkreis über } b) - (\text{linker weisser Bereich}) - (\text{rechter weisser Bereich}) \\ &= (\text{Halbkreis über } a) - (\text{rechter weisser Bereich}) + (\text{Halbkreis über } b) - (\text{linker weisser Bereich}) \\ &= \text{Rosa} + \text{Gelb} \end{aligned}$$

**\* Lösung zu A11** ex-abstand-R2

(a) Fülle von  $P$  das Lot auf die  $x$ -Achse (oder auf die  $y$ -Achse) und nenne den Fusspunkt  $F$ . Das Dreieck  $UFP$  ist rechtwinklig. Die Längen der beiden Katheten sind 2 und 5 und  $[UP]$  ist die Hypotenuse. Also gilt nach Pythagoras

$$\overline{UP} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

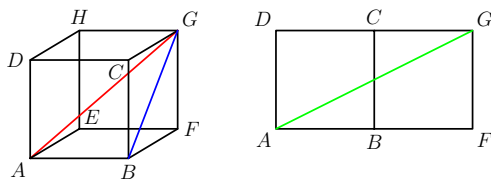
(b) Zeichne durch  $P$  und  $Q$  parallele Geraden zu  $x$  und  $y$ -Achse. Es ergeben sich zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Kathetenlängen sich leicht aus den Koordinaten von  $P$  und  $Q$  ergeben:  $a = |x_P - x_Q| = |2 - 5| = 3$  und  $b = |y_P - y_Q| = |5 - 1| = 4$ . Die Hypotenuse ist  $[PQ]$  und hat somit nach Pythagoras die Länge

$$\overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

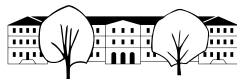
$$(c) \overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

**\* Lösung zu A12** ex-pythagoras-raumdiagonale

(a) Die blaue (Seitenflächen-)Diagonale  $[BG]$  hat wegen Pythagoras die Länge  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Da das Dreieck  $\triangle ABG$  rechtwinklig bei  $B$  ist, hat die rote Raumdiagonale die Länge  $\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$ .



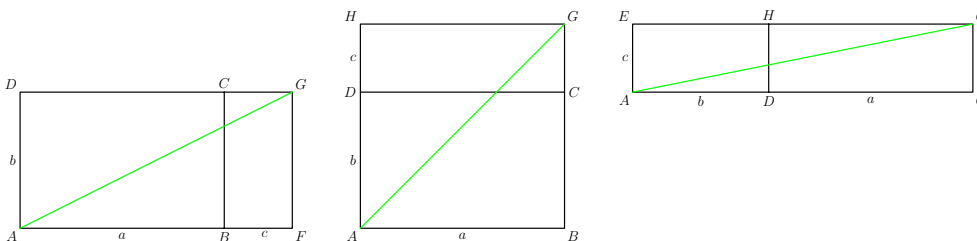
(b) Klappt man den Würfel auf, so ist die grüne Strecke  $[AG]$  ein kürzester Weg für den Marienkäfer (es gibt fünf andere genauso kurze Wege). Seine Länge ist  $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ .



- (c) Zunächst gilt  $\overline{BG} = \sqrt{b^2 + c^2}$ . Somit hat die Raumdiagonale die Länge  $\overline{AG} = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^2 + c^2}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
- (d) Der bei der Kante  $[BC]$  aufgeklappte Würfel ist unten links abgebildet und der kürzeste Weg von  $A$  nach  $G$  über diese Kante ist grün eingezeichnet. Seine Länge ist

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$$

- (e) Der kürzeste Weg muss über eine der sechs Kanten  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DH]$ ,  $[HE]$ ,  $[EF]$ ,  $[FB]$  führen. Wenn man jeweils die beiden an diesen Kanten anliegenden Würfelseiten aufklappt, erhält man sechs Figuren, von denen unten drei abgebildet sind; die anderen drei sehen bis auf Vertauschen gegenüberliegender Eckpunkte genauso aus. Man berechnet die Längen der drei grünen Strecken (von links nach rechts) zu  $\sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$  und  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$ . Wegen  $0 \leq c \leq b \leq a$  gilt  $bc \leq ac \leq ab$ . Also ist  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$  kleiner-gleich als die beiden anderen Weglängen. Der mittlere grüne Weg ist also kürzer als die beiden anderen, wie man auch leicht mit dem Lineal überprüft. In Worten ist es also für den Marienkäfer am kürzesten, einen der beiden Wege über die längste Kante zu nehmen (genauer den über  $[DC]$  oder den über  $[EF]$ ).



✂ Lösung zu A13 ex-pythagoras-tetraeder

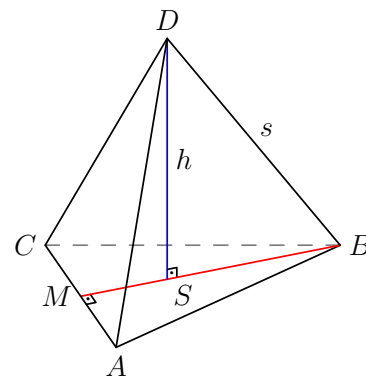
Der Tetraeder besteht – wie schon der Name besagt – aus 4 Flächen. Er hat 6 Kanten und 4 Ecken; das ist hoffentlich klar aus dem Bild rechts. Der Punkt  $M$  dort ist der Mittelpunkt zwischen  $A$  und  $C$ .

Zur Seitenhöhe: Die rot eingezeichnete Strecke  $[MB]$  ist eine solche Höhe (der „unten liegenden“ Seite). Wie in Aufgabe A8 berechnet, hat sie die Länge  $\overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \approx 0.8660s$ .

Zur Körperhöhe: Sei  $S$  derjenige Punkt im Dreieck  $ABC$ , für den  $[DS]$  senkrecht auf dem Dreieck steht. Dann ist  $h = [DS]$  die Höhe des Tetraeders. Aus Symmetriegründen muss  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  sein (erkläre ich gerne genauer, wenn gewünscht).

Wir wissen bereits, dass der Schwerpunkt jedes Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis  $2 : 1$  teilt. Also gilt  $\overline{SB} = \frac{2}{3}\overline{MB}$  siehe oben  $= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{3}s$ . Pythagoras, angewandt auf das *rechtwinklige* Dreieck  $BDS$  liefert somit

$$h = \sqrt{s^2 - \overline{SB}^2} = \sqrt{s^2 - \frac{3}{9}s^2} = \sqrt{\frac{6}{9}s^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}s \approx 0.8165s$$



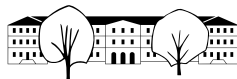
✂ Lösung zu A14 ex-abstand-R3

- (a) Man stelle sich einen Quader vor, dessen «linke untere hintere» Ecke der Punkt  $U$  ist und dessen «rechte obere vordere» Ecke der Punkt  $P$  ist und dessen Wände parallel zu den drei von den Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen sind (also  $x$ - $y$ -Ebene,  $x$ - $z$ -Ebene bzw.  $y$ - $z$ -Ebene); drei der Wände sind Teil der Koordinatenebenen. Alternativ könnte man verlangen, dass alle Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Dieser Quader hat die Abmessungen  $3 \times 4 \times 12$ .

Die gesuchte Länge  $\overline{UP}$  ist die Länge der Raumdiagonalen. Wie in Aufgabe A12 ergibt sich

$$\overline{UP} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$



- (b) Ähnlich wie in der vorigen Aufgabe betrachte man einen Quader, der die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  als «räumlich gegenüberliegende» Eckpunkte hat und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenebenen sind. Dieser Quader hat die Abmessungen  $2 \times 3 \times 4$ , denn  $|x_P - x_Q| = |3 - 1| = 2$  und  $|y_P - y_Q| = |4 - 7| = 3$  und  $|z_P - z_Q| = |12 - 8| = 4$ .

Die gesuchte Länge ist die Länge der Raumdiagonalen, deren Länge wir wie in der vorherigen Teilaufgabe berechnen können:  $\overline{PQ} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

(c)  $\overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2 + |z_P - z_Q|^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$

✂ Lösung zu A15 ex-pythagoras-umkehrung-leicht

- (a)  $a^2 = b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$ . Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei  $C$ .
- (b)  $a^2 + b^2 = 25 + 144 = 169 = c^2$ . Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei  $C$ .
- (c)  $a = 17, b = 15, c = 8$ . Hier gilt  $c^2 + b^2 = 64 + 225 = 289 = a^2$ . Also ist das Dreieck rechtwinklig mit Hypotenuse  $a$ , d.h. der rechte Winkel ist bei  $A$ .
- (d)  $a^2 = 16, b^2 = 25, c^2 = 36$  und keine Summe von zweien dieser Quadrate ist das dritte Quadrat. Also ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Einfacher: Es genügt zu testen, dass die Summe der beiden kleineren Quadrate nicht das grösste Quadrat ist:  $16 + 25 = 41 \neq 36$ .

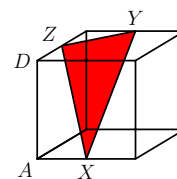
✂ Lösung zu A16 ex-pythagoras-umkehrung

Mit Pythagoras berechnet man:

$$\overline{XY}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\overline{YZ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overline{XZ}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AZ}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DZ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3\frac{a^2}{2}$$

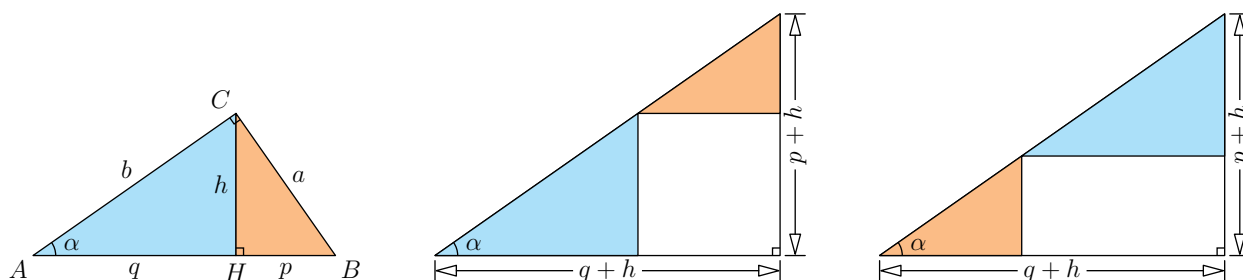


Wir vermuten auf Grund der Zeichnung, dass das Dreieck  $XYZ$  bei  $Z$  einen rechten Winkel hat. Wegen

$$\overline{XZ}^2 + \overline{YZ}^2 = 3\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 4\frac{a^2}{2} = 2a^2 = \overline{XY}^2$$

stimmt unsere Vermutung nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

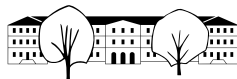
✂ Lösung zu A17 ex-beweis-hoehensatz-durch-zerlegung



In der ersten Zeile ist die Zerlegung des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks durch Zerschneiden entlang der Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke dargestellt. Nun dreht man das gelbe Dreieck und legt es wie in der zweiten Zeile gezeigt einmal oberhalb und einmal unterhalb an das rote Dreieck. Zusammen mit den grün dargestellten Flächen ergeben sich zwei grosse Dreiecke (es handelt sich wirklich um Dreiecke, denn am Übergang vom roten zum gelben Dreieck entsteht kein Knick, da sich die drei Winkel dort jeweils zu  $180^\circ$  ergänzen). Diese beiden grossen Dreiecke sind per Konstruktion deckungsgleich, haben also insbesondere dieselbe Fläche. Also gilt

$$\begin{aligned} h^2 &= (\text{Fläche grünes Quadrat}) = (\text{Fläche grosses Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) \\ &= (\text{Fläche grünes Rechteck}) = pq \end{aligned}$$

Dies ist der Höhensatz!



✂ Lösung zu A18 ex-drei-mittelwerte-geometrisch

- (a)  $m_a = \overline{MQ} = \frac{a+b}{2}$  (da Radius des Thaleskreises)
- (b) Berechnung von  $m_g = \overline{PQ}$  mit dem Höhensatz: Wegen des Thaleskreises ist das Dreieck  $XYQ$  rechtwinklig. Somit dürfen wir den Höhensatz anwenden und erhalten  $m_g^2 = \overline{PQ}^2 = ab$  bzw. per Wurzelziehen  $m_g = \overline{PQ} = \sqrt{ab}$ .
- Berechnung von  $m_g = \overline{PQ}$  mit dem Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck  $MPQ$  sind bekannt  $m_a = \overline{MQ} = \frac{a+b}{2}$  und  $\overline{MP} = \overline{MY} - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}$ . Pythagoras liefert

$$m_g = \overline{PQ} = \sqrt{m_a^2 - \overline{MP}^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4ab}{4}} = \sqrt{ab}$$

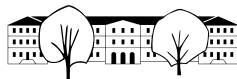
- (c) Der Kathetensatz für das Dreieck  $MPQ$  liefert (mit den bereits berechneten Grössen)

$$m_h \cdot m_a = m_g^2$$

$$m_h = \frac{m_g^2}{m_a} = \frac{\sqrt{ab}^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

✂ Lösung zu A19 ex-pythagoras-angelikas-sammlung

- (a) a) Katheten mit Länge 3 und 5, dann ist das Hypotenusenquadrat die Lösung  
 b) Kathete mit Länge 3, Hypotenuse mit Länge 5, dann ist das andere Kathetenquadrat die Lösung
- (b) Flächenverwandlung Rechteck  $\rightarrow$  Quadrat (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, wobei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitt 3 und a)  $\frac{3}{2}$ , b) 6 und c) 9 zu konstruieren ist. Die Höhe ist dann die gesuchte Quadratseite).
- (c) a) z.B.  $5 = 1^2 + 2^2$  oder  $5 = 3^2 - 2^2$  oder  $5 = 1 \cdot 5$ .      b)  $27 = 6^2 - 3^2$  oder  $5^2 + 1^2 + 1^2$  oder  $27 = 3 \cdot 9$ .
- (d) 13.9 cm (Halbe Diagonale im Rechteck, zu berechnen mit dem Satz von Pythagoras).
- (e) 35.7 km. Sei  $M$  der Erdmittelpunkt,  $L$  die Spitze des Leuchtturms,  $T$  der Berührungspunkt der Tangente durch  $L$  an  $k(M, r_e)$ . Im  $\triangle MLT$  gilt:  $\overline{LT}^2 = \overline{ML}^2 - \overline{MT}^2 = (r_e + l)^2 - r_e^2$ .
- (f) Alle Angaben in km. Erdradius  $r = 6370$ , Distanz  $d = 12.2$ . Die gesuchte Tiefe ist  $r - \sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2} \approx 0.0029207$ . Also knapp 3m.
- (g) maximal 2.32 m. Entscheidend ist die Rechtecksdigonale bei Schrank. Diese darf höchstens gleich lang wie der Raum hoch sein.
- (h)  $s_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{109} = 10.44$ ,  $s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{61} = 7.81$ . Die Schwerlinien sind Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken!  
 $s_c = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = 5.83$   $C$  liegt auf dem Thaleskreis und damit ist  $s_c$  ein Radius. Das gilt natürlich nur im rechtwinkligen Dreieck!
- (i)  $a = 39$   $b = 25$  oder umgekehrt. Seien  $H$  der Höhenfusspunkt und  $M_c$  die Seitenmitte von  $c$ .  
**Erster Fall,  $H$  liegt näher bei  $A$  als  $M_c$ :**  $HM_c$  ist Kathete im  $\triangle H M_c C$ .  $\overline{HM_c} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ . Damit ist  $\overline{HA} = \frac{c}{2} - \overline{HM_c} = 28 - 8 = 20$ .  $b$  ist Hypotenuse im  $\triangle AHC$ .  $b = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ .  $a$  ist Hypotenuse im  $\triangle HBC$ .  $a = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$ .  
**Zweiter Fall,  $M_c$  liegt näher bei  $A$  als  $H$ :** Ähnlich wie oben erhält man  $a = 25$  und  $b = 39$ .
- (j) Die Höhe jeder der vier Seiten der Pyramide beträgt  $h = \sqrt{21.6^2 + (\frac{34.2}{2})^2} \approx 27.54$  m. Die Fläche beträgt deswegen  $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34.2 \cdot h \approx 1884.38$  m<sup>2</sup>
- (k) a) z.B.  $61 = 6^2 + 5^2$       b) z.B.  $153 = 12^2 + 3^2$       c)  $7 = 4^2 - 3^2$



- (l) Die Distanz zweier Punkte kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden (um zum Beispiel  $\overline{AB}$  zu berechnen, verwende man ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $[AB]$  und Katheten parallel zu den Koordinatenachsen; die Längen dieser Katheten erhält man sofort aus den Koordinaten der Punkte, so dass man  $\overline{AB}$  mit Pythagoras berechnen kann). Berechnet man so die Längen der drei Dreiecksseiten, so stellt man fest, dass die Summe der Quadrate von zweien die dritte ergeben; damit ist das Dreieck rechtwinklig. Genauer liegt der rechte Winkel bei  $A$  (gegenüber der längsten Dreiecksseite).
- (m) rechtwinklig mit rechtem Winkel bei  $C$ , Fläche 20.
- (n) Dreieck in ein flächengleiches Rechteck umwandeln (etwa per Scherung, so dass ein rechter Winkel entsteht, dann zum Rechteck ergänzen, dann dieses halbieren). Dann Höhen- oder Kathetensatz anwenden.
- (o) Höhen- oder Kathetensatz anwenden
- (p) (i) 17.85 km (Lösung analog zu Aufgabe (e)). (ii) 37.39 km (Lösung ganz ähnlich zu Aufgabe (f)).

✂ Lösung zu A20 ex-tabelle-pythagoras-etc

Die Formeln für die erste Zeile findet man in der Lösung von Aufgabe A21.

Für die zweite Zeile verwende man Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle HBC$ : Es gilt  $a^2 = p^2 + h^2$ . Dann kennt man  $p$  und kann wie in der ersten Zeile alles ausrechnen.

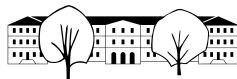
Dritte Zeile und vierte Zeile: Verwende  $c = p + q$  und berechne dann mit dem Kathetensatz  $a$  und  $b$  etc.

$a$	$b$	$c$	$p$	$q$	$h$	$F$
3	4	5	$\frac{9}{5} = 1.8$	$\frac{16}{5} = 3.2$	$\frac{12}{5} = 2.4$	6
13	31.2	33.8	5	28.8	12	202.8
15	20	25	9	16	12	150
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$	8	1	7	$\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$

Bemerkung: Die Zahlen in der vorletzten Zeile gehören zu dem kleinsten rechtwinkligen Dreieck, bei dem all diese Zahlen ganzzahlig sind. Es entsteht aus dem Dreieck in der ersten Zeile durch Streckung um den Faktor  $c = 5$  (wobei sich die Fläche um den Faktor  $5^2 = 25$  ändert).

✂ Lösung zu A21 ex-umkehrformeln

- a)  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Die doppelte Dreiecksfläche ist  $ab = ch$  und daraus  $h = \frac{ab}{c}$ , eingesetzt für  $c$ :  $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .  
Kathetensatz:  $cp = a^2$  also  $p = \frac{a^2}{c}$ , eingesetzt für  $c$ :  $p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Entsprechend  $q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .
- b)  $h = \sqrt{a^2 - p^2}$ , Kathetensatz  $cp = a^2$  also  $c = \frac{a^2}{p}$ . Aus  $p + q = c$  ergibt sich  $q = c - p$ , also  $q = \frac{a^2}{p} - p$ .  
Für  $b$  bieten sich jetzt viele Wege an, z.B.  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ , eingesetzt für  $c$ :  $b = \sqrt{\frac{a^4}{p^2} - a^2}$ . Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu  $b = a \frac{h}{p}$  vereinfachen.
- c)  $h = \sqrt{pq}$  (dies bedeutet, dass die Höhe  $h$  das *geometrische Mittel* der beiden Hypotenusenabschnitte  $p$  und  $q$  ist; im Englischen heisst der Höhensatz deswegen *geometric mean theorem*).  $c = p + q$ .  $a = \sqrt{h^2 + p^2}$ , eingesetzt für  $h$ :  $a = \sqrt{pq + p^2}$ , entsprechend  $b = \sqrt{pq + q^2}$ .
- d)  $q = c - p$ . Aus dem Höhensatz ergibt sich  $h = \sqrt{p(c - p)}$ , aus dem Kathetensatz  $a = \sqrt{cp}$  und  $b = \sqrt{c(c - p)}$



- e) Kurzfassung: Der Leser überlege sich, dass  $(c + q)^2 = 4b^2 + p^2$  gilt (linke Seite ausmultiplizieren;  $cq = b^2$ ; Pythagoras in den drei rechtwinkligen Dreiecken). Damit kann man  $x := c + q$  berechnen. Wegen  $x + p = c + q + p = 2c$  erhält man  $c$  und dann  $q = x - c$ . Der Rest ist einfach.  
Langfassung: Die folgende Rechnung zeigt  $(c + q)^2 = 4b^2 + p^2$ :

$$\begin{aligned} (c + q)^2 &= c^2 + 2cq + q^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} a^2 + b^2 + 2cq + q^2 \stackrel{\text{Pythagoras und Kathetensatz}}{=} p^2 + h^2 + b^2 + 2b^2 + q^2 \\ &= p^2 + 3b^2 + h^2 + q^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} p^2 + 3b^2 + b^2 = 4b^2 + p^2 \end{aligned}$$

Somit gilt  $c + q = \sqrt{4b^2 + p^2}$ . Addition von  $p$  auf beiden Seiten liefert wegen  $c = q + p$  die Gleichung

$$2c = c + q + p = \sqrt{4b^2 + p^2} + p$$

und dann per Division durch 2 den gesuchten Ausdruck für  $c$  in Abhängigkeit von  $p$  und  $b$ :

$$c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4b^2 + p^2} + p \right)$$

Subtraktion von  $p$  auf beiden Seiten liefert  $q = c - p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4b^2 + p^2} + p \right) - p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4b^2 + p^2} - p \right)$ .

Schliesslich liefern Höhen- und Kathetensatz die (relativ komplizierten) Formeln

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{p}{2} \left( \sqrt{4b^2 + p^2} - p \right)} \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{cp} = \sqrt{\frac{p}{2} \left( \sqrt{4b^2 + p^2} + p \right)}$$

Wie meist, gibt es auch andere Lösungswege – beispielsweise kann man  $a$  auch per  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$  ausrechnen (und kommt mit etwas Rechnen auf dasselbe Ergebnis).

✂ Lösung zu A22 ex-pythagoras-satzfamilie-lueckentext

In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras: die Summe der Quadrate der Katheten ist so gross wie das Quadrat der Hypotenuse
- laut dem Kathetensatz: das Produkt von Hypotenuse und Hypotenusenabschnitt ist so gross wie das Quadrat der zugehörigen Kathete
- laut dem Höhensatz: das Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte ist so gross wie das Quadrat der Höhe

✂ Lösung zu A23 ex-satzgruppe-pythagoras-figuren

Die Bestimmungen von  $r$  und  $s$  sind unabhängig voneinander:

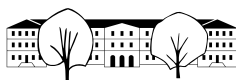
- Bestimmung von  $r$ :

Im rechtwinkligen Dreieck  $M_{AB}BC$  gilt  $\overline{M_{AB}B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{80 - 64} = \sqrt{16} = 4$ . Die andere Hälfte der Strecke  $[AB]$  ist genauso lang, d. h.  $\overline{M_{AB}A} = 4$ .

Im  $\triangle M_{AB}M_1A$  gilt:  $r^2 = \overline{M_{AB}A}^2 + (h_c - r)^2$ . Eingesetzt:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (8 - r)^2 \\ r^2 &= 16 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot r + r^2 && | - r^2 \\ 0 &= 80 - 16r && | + 16r \\ 16r &= 80 && | : 16 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

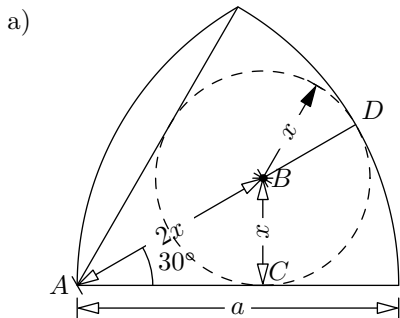
- Bestimmung von  $s$ :



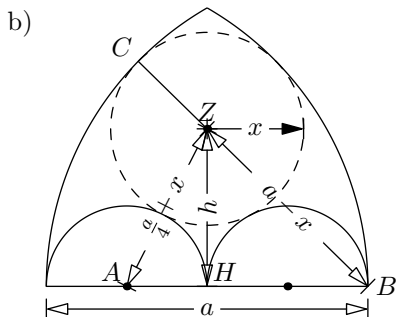
Der Punkt  $D$  liegt auf dem Thaleskreis über  $M_{ABC}$ . Also ist  $[M_{ABD}]$  die Höhe im rechtwinkligen  $\triangle AM_{AB}C$  und  $s$  ist der Hypotenusenabschnitt, der «zur Kathete  $h_c$  gehört». Der Kathetensatz besagt:  $a \cdot s = h_c^2$  und damit ist  $s = \frac{h_c^2}{a} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ .

Alternativ kann man  $s$  auch mit dem Sekanten-Tangenten-Satz (Aufgabe 52 im Skript zu Ähnlichkeit; Aufgabe reflex-sekangentangenten-sekanten-sehnsensatz) berechnen:  $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM_{AB}}^2$  d.h. konkret  $(a - s) \cdot a = 4^2$ , also  $a^2 - as = 16$ , also  $s = \frac{a^2 - 16}{a} = \frac{80 - 16}{4\sqrt{5}} = \frac{64}{4\sqrt{5}}$  siehe oben  $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ .

✳ Lösung zu A24 ex-pythagoras-fuellkreise



$\triangle ABC$  ist ein  $30^\circ$ - $60^\circ$  Dreieck und damit ist  $\overline{AB} = 2\overline{CB}$ . Weiter ist  $\overline{AD} = a = 3x$  und damit ist  $x = \frac{1}{3}a$ .



Die Höhe  $h$  bzw. ihr Quadrat lässt sich auf zwei Arten mit Pythagoras berechnen, einmal im  $\triangle AHZ$  und einmal im  $\triangle HBZ$  (beachte  $\overline{BC} = a$  und deswegen  $\overline{BZ} = a - x$ ).

$$h^2 = \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$h^2 = (a - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 &= (a - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ x^2 + 2x \frac{a}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16} &= a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2}{4} && | - x^2 \\ \frac{ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} - 2ax && | + \frac{4ax}{2} \\ \frac{5ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} && | \cdot \frac{2}{5a} \\ x &= \frac{3a}{10} \end{aligned}$$





Dreieck, dessen einer Hypotenusenabschnitt  $p$  ist. Dann gilt nach dem Kathetensatz  $a^2 = cp$ . Also ist  $a$  die Seitenlänge des gesuchten Quadrats.

(b) Im Wesentlichen geht das umgekehrt, jedoch muss man zwei Fälle unterscheiden:

**Fall 1,  $x > s$ :** Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit  $a := s$  und  $c := x$ : Trage die Strecke  $c = [AB]$  an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f.  $C$ . Der Kreis  $k(B, a)$  ist der 2.g.O.f.  $C$ . Jeder der beiden Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist ein möglicher Punkt  $C$ . Der Höhenfusspunkt auf  $c$  kann nun konstruiert werden, und so erhält man die beiden Hypotenusenabschnitte  $p$  und  $q$ . Dann gilt  $xp = cp = a^2 = s^2$ . Also ist  $p$  die gesuchte zweite Rechtecksseite.

**Fall 2,  $x < s$ :** Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit  $a := s$  und  $p := x$ :

Trage die Strecke  $a = [BC]$  an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f.  $H$ . Der 2.g.O.f.  $H$  ist der Kreis  $k(B, p)$ . Nenne einen der beiden Schnittpunkt dieser beiden Kreise  $H$ . Das Dreieck  $ABC$  mit rechtem Winkel bei  $C$  kann nun ergänzt werden (nutze den rechten Winkel bei  $C$ ). Dann gilt  $cx = cp = a^2 = s^2$ . Also ist  $c$  die gesuchte zweite Rechtecksseite.