Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

2 Planimetrie Grundlagen

2.0.1. Die Planimetrie («ebene Geometrie», «Geometrie der Ebene») ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine *Menge von Punkten* aufgefasst.

2.1 Definitionen und Notationen

2.1.1. Wir vereinbaren die folgenden Schreibweisen für Objekte in der Ebene.

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade. Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$k(M, r)$	**Kreis** mit Mittelpunkt M und Radius r.
$A \in g$ $B \notin g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. d. h. A ist Element der Punktemenge g. Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. d. h. B ist kein Element von g.
$AB = (AB)$	Die **Gerade** durch die Punkte A und B. Zum Beispiel $g = AB$ (Hier ist vorausgesetzt, dass A und B voneinander verschieden sind.)
$[AB]$	**Strecke** (Punktemenge) zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$\overline{AB}$	**Länge** (relle Zahl) der Strecke $[AB]$ (meist gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge).
$[AB$	**Halbgerade** oder **Strahl**, die/der beim Punkt A beginnt und durch B verläuft.
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt von g.
$g \parallel h$	Die Geraden g und h sind parallel Zwei Geraden, die entweder keinen Punkt gemeinsam haben oder identisch sind, heissen **parallel**. Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine zu g parallele Gerade p durch den Punkt P.
$g \cap h$	**Schnittmenge** der Geraden g und h. Lies «g geschnitten h». Normalerweise besteht $g \cap h$ aus einem Punkt.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch** (und auch parallel).
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$ und $g \neq h$). Das Symbol $\varnothing$ ist die **leere Menge**.
$g \perp h$	g steht senkrecht auf h, «g senkrecht h», d. h. $\sphericalangle(g, h) = 90°$.
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω, ... bezeichnet
$\sphericalangle(g, h)$	der **Winkel** zwischen der Geraden g und der Geraden h im mathematisch positiven Drehsinn (= Gegenuhrzeigersinn).
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
w_α	**Winkelhalbierende** des Winkels α.
w_{gh} w^1_{gh}, w^2_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h. Da es zwei Winkelhalbierende gibt, muss erklärt werden, welche gemeint ist. Paar von **Winkelhalbierenden** zu den Geraden g, h.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

2.2 Kongruenz (hoffentlich Wiederholung)

Definition 2.2.1

Zwei Figuren in der Ebene heissen **kongruent** (= deckungsgleich), falls die eine Figur durch eine geeignete Kombination von Verschiebungen, Drehungen (= Rotationen) und Spiegelungen (= Reflexionen) in die andere überführt werden kann. Als Spiegelungen sind sowohl Spiegelungen an Punkten als auch an Geraden erlaubt.

2.2.2. In der Ebene bedeutet Kongruenz zweier Figuren anschaulich, dass man die eine Figur ausschneiden und dann deckungsgleich auf die andere legen kann (wobei das Umdrehen der Figur erlaubt ist).

Satz 2.2.3 Kongruenzsätze für Dreiecke

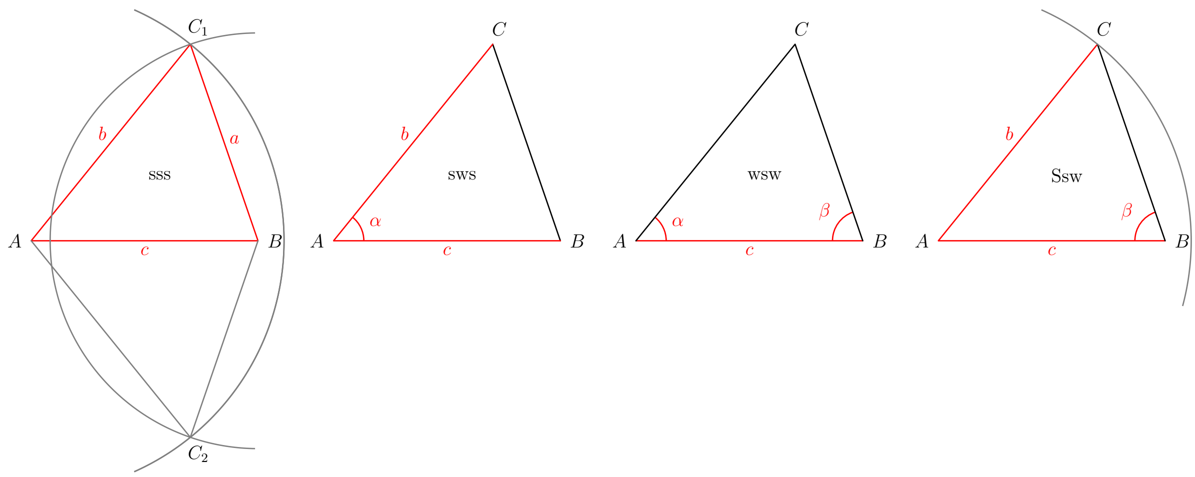
Die Abkürzung «w» steht für «Winkel», «s» und «S» stehen für «Seite», wobei die Seite «S» länger als die Seite «s» ist.

(a) sss: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen, sind kongruent.
(b) sws: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und dem dazwischenliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.
(c) wsw: Zwei Dreiecke, die in zwei Winkeln und der dazwischenliegenden Seite übereinstimmen, sind kongruent.
(d) Ssw: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und dem Winkel, der der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegt, übereinstimmen, sind kongruent.

Die Umkehrungen all dieser Aussagen stimmen natürlich auch: Sind zwei Dreiecke kongruent, so stimmen einander entsprechende Seiten und Winkel überein.

Wer mit dem folgenden Beweis nicht zufrieden ist, schaue einmal im Anhang den Abschnitt 2.13 für einen anderen Versuch an.

Beweis. Es genügt jeweils zu zeigen, dass die angegebenen Daten das Dreieck eindeutig (bis auf Verschiebung, Drehung und Spiegelung) bestimmen. (Denn sind zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ gegeben, die eine gleich lange Seite «s» haben (wie in allen der obigen Fälle), sagen wir ohne Einschränkung $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, so kann man durch Verschieben und Drehen stets annehmen, dass $A = A'$ und $B = B'$ gelten.)



Beweis von sss (vgl. die erste der obigen vier Zeichnungen; die gegebenen Seiten bzw. Winkel sind rot eingezeichnet): Gegeben sind a, b und c. Trage eine Strecke $[AB]$ der Länge c ab. Zeichne $k(A, b)$ und $k(B, a)$. Diese beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind spiegelsymmetrisch (also kongruent). Legen wir fest, dass die Eckpunkte des Dreiecks in der Reihenfolge ABC in mathematisch positivem Drehsinn (= Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen werden sollen (wenn also «gleichsinnige Kongruenz» betrachtet wird), so ist das gesuchte Dreieck sogar eindeutig (bis auf Verschiebung und Rotation).

Die anderen drei Zeichnungen illustrieren die anderen drei Aussagen. Die Beweise überlassen wir dem Leser als Aufgabe A1. □

Aufgabe A1

(a) Beweisen Sie die Kongruenzsätze sws, wsw und Ssw. (Die obigen Zeichnungen dürften helfen.)
(b) Zeigen Sie durch Beispiele, dass die Buchstabenkombinationen sSw und www keine Kongruenzsätze liefern.

2.3 Der Kreis

Definition 2.3.1 Kreis, Mittelpunkt, Radius

Seien M ein Punkt der Zeichenebene und $r > 0$ eine Streckenlänge.
Dann ist der **Kreis** $k(M, r)$ mit **Mittelpunkt** M und **Radius** r definiert als die Menge aller Punkte der Zeichenebene, die den Abstand r von M haben.

In der Notation der Mengenlehre gilt also ✎

Notation 2.3.2. Das «Gleichheitszeichen mit vorangestelltem Doppelpunkt» «:=» bedeutet: Der linke Ausdruck wird definiert durch den rechten Ausdruck. Oben wird also die Schreibweise $k(M, r)$ definiert.

2.3.3. Man sagt:

> Der Kreis $k(M, r)$ ist der **geometrische Ort** aller Punkte, die den Abstand r von M haben.

Mit dem etwas altertümlich anmutenden Begriff **geometrischer Ort** (oder lateinisch **locus**) ist allgemein eine Teilmenge der Ebene gemeint, die durch eine geometrische Bedingung beschreibbar ist.

Beispiel 2.3.4. Jeder Kreis $k(M, r)$ teilt die Ebene in zwei Gebiete: Das Äussere und das Innere des Kreises.

- Das Äussere des Kreises ist der geometrische Ort aller Punkte (= die Teilmenge all derjenigen Punkte der Zeichenebene), deren Abstand zu M echt grösser als r ist.
- Das Innere des Kreises ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand zu M echt kleiner als r ist.

2.4 Die Mittelsenkrechte

2.4.1. Wir erklären drei Beschreibungen der Mittelsenkrechten:

- wie der Name es sagt: «Senkrechte durch die Mitte»;
- als «geometrischer Ort»;
- wie man sie mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Definition 2.4.2 Mittelsenkrechte (als Senkrechte durch die Mitte)

Die **Mittelsenkrechte** m_{AB} zweier verschiedener Punkte A und B der Zeichenebene ist definiert als diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt M_{AB} der Verbindungsstrecke $[AB]$ verläuft und diese senkrecht schneidet.

Lemma 2.4.3 Charakterisierung der Mittelsenkrechten als geometrischer Ort

Seien A und B zwei verschiedene Punkte der Zeichenebene.
Dann besteht die Mittelsenkrechte m_{AB} genau aus denjenigen Punkten der Zeichenebene, die denselben Abstand von A und B haben.

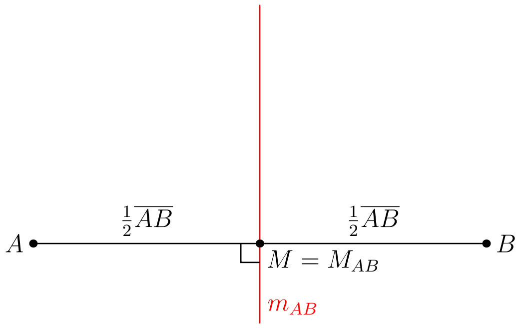
In der Notation der Mengenlehre gilt also ✎

In «Geometrischer-Ort-Sprache»: Die Mittelsenkrechte ist der geometrischer Ort aller Punkte, die denselben Abstand von A und B haben.

2.4.4. Zum Wort «Lemma»: Ein Lemma ist ein eher einfacher mathematischer Sachverhalt oder eine Hilfsaussage.

Beweis. Sei P ein beliebiger Punkt der Zeichenebene. Wir zeichnen diesen Punkt in der Zeichnung bewusst nicht auf der Mittelsenkrechten m_{AB} ein, denn dies illustriert den Beweis besser.

Dann gelten:✎



Beobachtung: ✎

Dies zeigt, dass ein beliebig gewählter Punkt P der Zeichenebene genau dann auf der Mittelsenkrechten m_{AB} liegt, wenn er denselben Abstand zu A und zu B hat. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wer ganz genau aufpasst, bemerkt, dass das angegebene Argument im Fall $P = M$ nicht funktioniert. Dieser Punkt M liegt aber offensichtlich auf m_{AB} und hat denselben Abstand zu A und B. Auch andere Punkte auf der Geraden (AB) sollte man wohl getrennt behandeln.

Notation 2.4.5. Zur Pfeil-Notation im obigen Beweis:

- Der rechtsgerichtete Pfeil $\Longrightarrow$ steht für eine Folgerung (= **Implikation**): «Wenn die linke Aussage gilt, so gilt auch die rechte.
- Der linksgerichtetete Pfeil $\Longleftarrow$ bedeutet analog: «Wenn die rechte Aussage gilt, so gilt auch die linke.»
- Der Doppelpfeil $\Longleftrightarrow$ steht für eine **Äquivalenz** von Aussagen: «Genau dann gilt die rechte Aussage, wenn die linke Aussage gilt.» Mit anderen Worten: Beide Aussagen sind äquivalent (= gleichbedeutend).

2.4.6. Traditionell wurde das Ende von Beweisen durch die Buchstabenkombination «qed» = «q.e.d.»= «quod erat demonstrandum» (oder auf Deutsch «was zu beweisen war» = «w.z.b.w») angedeutet.

Heutzutage wird meist ein kleines Quadrat □ zur Kennzeichnung des Beweisendes verwendet.

Aufgabe A2 Lemma 2.4.3 kann auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bewiesen werden.
Gegeben sind zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene.
Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene. Zeigen Sie mit dem Satz des Pythagoras:

(a) Gilt $P \in m_{AB}$, so folgt $\overline{PA} = \overline{PB}$.
(b) Gilt $\overline{PA} = \overline{PB}$, so folgt $P \in m_{AB}$. Hinweis: Lot (= Senkrechte) von P auf (AB) fällen.

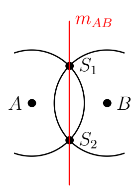
Gut für den Beweis der Reflexionseigenschaft der Parabel wäre, wenn man auch Folgendes (mit Pythagoras) zeigt: Sicherlich zerlegt m_{AB} die Ebene in zwei «Gebiete» («Halbebenen»): Zum einen die Halbebene H_A, in der A liegt, zum anderen die Halbebene H_B, in der B liegt. Dann gelten

$$H_A = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PA} < \overline{PB}\} \quad \text{und} \quad H_B = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PA} > \overline{PB}\}$$

Auch bei Ellipse, Parabel und Hyperbel (und anderen geometrischen Orten) sollte man ähnliches erklären. Beim Beweis, dass die Ellipse ein Kegelschnitt ist, brauche ich dies bei der Inklusion, dass die Ellipse in der Schnittkurve liegt. Auch in mancher Aufgabe wird dies wohl verwendet.

Algorithmus 2.4.7 Konstruktion der Mittelsenkrechten

Die Mittelsenkrechte m_{AB} zweier Punkte $A \neq B$ kann wie folgt konstruiert werden:
Wähle einen beliebigen Radius $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$. Zeichne die beiden Kreise $k(A, r)$ und $k(B, r)$. Sie schneiden sich in genau zwei Punkten S_1 und S_2.
Die gesuchte Mittelsenkrechte m_{AB} ist dann die Gerade durch S_1 und S_2.



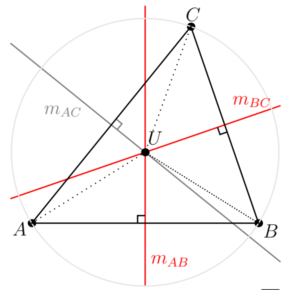
2.4.8. Das Wort «Algorithmus» bezeichnet eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems. Der Begriff geht auf den choresmischen Universalgelehrten al-Chwarizmi («aus Choresmien», etwa 780 – 850), der hauptsächlich am «Haus der Weisheit» in Bagdad tätig war, zurück.

Beweis. Da S_1 auf beiden Kreisen liegt, gilt $\overline{AS_1} = r = \overline{BS_1}$. Also liegt S_1 nach Lemma 2.4.3 auf m_{AB}.
Dasselbe Argument zeigt $S_2 \in m_{AB}$.
Da jede Gerade durch zwei beliebige verschiedene Punkte auf ihr eindeutig festgelegt ist, muss m_{AB} die Gerade durch S_1 und S_2 sein. □

Satz 2.4.9 Umkreis, Umkreismittelpunkt

Sei ABC ein beliebiges Dreieck.
Dann schneiden sich die drei Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC} und m_{BC} in einem Punkt, dem sogenannten **Umkreismittelpunkt** U.
Dieser Punkt U hat denselben Abstand zu A, B und C und ist der einzige Punkt der Zeichenebene mit dieser Eigenschaft; somit verläuft der Kreis um U mit diesem Abstand als Radius durch alle Eckpunkte des Dreiecks und heisst deswegen **Umkreis** des Dreiecks ABC.

Beweis. Sei U der Schnittpunkt von m_{AB} und m_{BC}. Nach der Charakterisierung von m_{AB} und m_{BC} als geometrischer Ort (Lemma 2.4.3) gelten ✎



Also liegt U auf allen drei Mittelsenkrechten, die sich somit in einem Punkt, nämlich U, schneiden. Die restlichen Behauptungen sind nun offensichtlich (wenn ein Punkt denselben Abstand zu A, B und C hat, so muss er auf allen Mittelsenkrechten liegen). □

2.5 Klassisches Konstruieren mit Zirkel und Lineal

2.5.1. Die griechischen Mathematiker waren besonders an Konstruktionen mit Zirkel und Lineal interessiert. Bei dem Lineal handelt es sich um ein Ideal ohne Markierungen: Man kann damit also nur Geraden zeichnen, aber keine Strecken abmessen.

Dabei geht es darum, aus gewissen vorgegebenen Punkten, Geraden und Kreisen mit endlich vielen Konstruktionsschritten eine gewünschte Figur zu konstruieren. Oft startet man schlicht mit zwei verschiedenen Punkten. Ist es beispielsweise möglich, aus zwei Punkten $A \neq B$ ein regelmässiges 7-Eck zu konstruieren mit Seitenlänge $\overline{AB}$?

Die erlaubten Konstruktionsschritte sind die folgenden; dabei dürfen nur bereits konstruierte Punkte, Geraden und Kreise verwendet werden:

- Das Zeichnen einer Geraden durch zwei verschiedene (bereits konstruierte) Punkte.
- Das Zeichnen eines Kreises mit einem Punkt als Mittelpunkt durch einen andere Punkt.
- Das Bilden des Schnittpunkts zweier nicht-paralleler Geraden.
- Das Bilden des Schnittpunkts oder der beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis (falls sie sich schneiden).
- Das Bilden des Schnittpunkts oder der beiden Schnittpunkte zweier Kreise (falls sie sich schneiden).

Die Beschränkung auf diese Schritte geht wohl vor allem auf das berühmte Geometrie-Lehrbuch «Die Elemente» von Euklid zurück.

2.5.2. Die klassischen Probleme der antiken Mathematik sind:

- **Quadratur des Kreises**: Kann man aus einem Kreis (samt Mittelpunkt und einem Punkt auf dem Rand) mit Zirkel und Lineal ein Quadrat (also dessen vier Eckpunkte) konstruieren, so dass das Quadrat denselben Flächeninhalt wie der Kreis hat?
  Dies ist nicht möglich. Gezeigt wurde dies erst 1882 von Ferdinand von Lindemann durch den Beweis der Transzendenz der Kreiszahl π.
- **Dreiteilung des Winkels**: Ist es möglich, jeden beliebigen Winkel $\alpha = \angle ASB$ (gegeben durch drei Punkte A, S, B) durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal in drei gleich grosse Winkel zu unterteilen?
  Für gewisse Winkel ist dies einfach, etwa für $\alpha = 180°$. Im allgemeinen ist das jedoch nicht möglich. Dies wurde im Jahre 1837 von Pierre Laurent Wantzel gezeigt.
- **Verdopplung des Würfels** = **Verdopplung des Kubus**, auch **Delisches Problem** genannt:
  Gegeben ist ein Würfel. Ist es möglich, einen doppelt so grossen Würfel zu konstruieren?
  Gemeint ist damit, dass die Seitenlänge des Ausgangswürfels durch zwei Punkte der Ebene gegeben ist. Die Frage ist dann, ob man nur mit Zirkel und Lineal eine Strecke konstruieren kann, so dass der Würfel mit dieser Streckenlänge als Seitenlänge das doppelte Volumen des Ausgangswürfels hat.
  Dieses Problem heisst auch **Delisches Problem**; angeblich bekamen die Bewohner der Insel Delos während einer Seuche die Aufgabe gestellt, ihren würfelförmigen Altar zu verdoppeln.
  Auch dieses Problem ist nicht lösbar, was ebenfalls 1837 von Pierre Laurent Wantzel gezeigt wurde. (Vermutlich kannte bereits Gauß einen Beweis dafür.)

Interessant ist, dass die Unlösbarkeit der drei klassischen Probleme mit algebraischen Methoden gezeigt wird.

Wichtige Vorarbeiten zu den Unmöglichkeitsbeweisen stammen von Carl Friedrich Gauß und Évariste Galois.

2.5.3. Für weitere Informationen und Bilder sei auf die englische oder deutsche Wikipedia verwiesen («Konstruktion mit Zirkel und Lineal» bzw. «Straightedge and compass construction»; «Klassische Probleme der antiken Mathematik»).

2.6 Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal (und auch mit dem Geodreieck)

2.6.1. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten wurde bereits in Algorithmus 2.4.7 erläutert und bewiesen. In der folgenden Tabelle finden sich diese und einige weitere Standardkonstruktionen; aus Zeitgründen begründen wir nicht, dass all diese Konstruktionen zum gewünschten Resultat führen. Diese Begründungen sind aber ähnlich einfach wie die oben gegebene Begründung für die Konstruktion der Mittelsenkrechten.

geometrisches Objekt	Grundkonstruktion
m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\to r$ 2. $k(A, r)$ $\to k_1$ 3. $k(B, r)$ $\to k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\to P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\to m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\to M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\to r$ 2. $k(P, r) \cap g$ $\to A, B$ 3. m_{AB} $\to p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck (parallele Linien) $\to p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\to p$
w_{gh}, bzw. w_{gh}^1 und w_{gh}^2	**Gegeben:** Sich in genau einem Punkt schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\to S$ 2. Wähle einen Radius $\to r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\to k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\to G$, H (jeweils einer der Schnittpunkte) 5. m_{GH} $\to w_{gh}$, bzw. w_{gh}^1 6. Optional: Senkrechte zu w_{gh}^1 durch S $\to w_{gh}^2$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\to P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 3. $k(P, d) \cap h$ $\to H_1$, H_2 4. Parallelen zu g durch H_1, H_2 $\to p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, zwei Punkte $A \neq B$, die eine Halbgerade $i = [AB$ liefern. 1. Wähle einen Radius $\to r$ 2. $k(S, r)$, $k(A, r)$ $\to k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\to G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\to I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\to J_1$, J_2 6. $\sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$ $\to$ übertragener Winkel (so gross wie α)

Aufgabe A3 Führen Sie alle oben aufgeführten Grundkonstruktionen durch.

Aufgabe A4 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g. Begründen Sie (mit Pythagoras), warum Ihre Konstruktion korrekt ist.

Aufgabe A5 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

Aufgabe A6 Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe A7 Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ gemäss der folgenden Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben: Punkt Z und Radius r (alias Mittelpunkt und Umkreisradius des zu konstruierenden Fünfecks)

1.	$k(Z, r)$	$\to k$
2.	Wähle $A \in k$	$\to A$
3.	Senkrechte zu ZA durch Z	$\to g$
4.	$k \cap g$	$\to G$ (Wähle einen der beiden Schnittpunkte.)
5.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\to F$ (Nimm denjenigen Schnittpunkt, der näher bei Z liegt.)
6.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\to B, C, D, E$

Dass das Ergebnis wirklich ein regelmässiges Fünfeck ist, wird hier nicht bewiesen.

Aufgabe A8 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*», die im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» zu finden ist, in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

2.7 Tangenten an Kreise (hoffentlich Wiederholung)

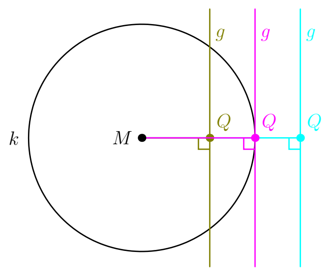
Definition 2.7.1 Tangente

Eine Gerade g heisst **Tangente** (= Berührgerade) an einen Kreis k genau dann, wenn $k \cap g$ aus einem einzigen Punkt besteht, dem sogenannten **Berührpunkt**.

2.7.2. Seien g eine Gerade und $k = k(M, r)$ ein Kreis. Anschaulich ist klar, dass g genau dann eine Tangente an k ist, wenn der Abstand $\overline{Mg}$ des Kreismittelpunkts zur Geraden mit dem Kreisradius r übereinstimmt. Etwas formaler kann man dies wie folgt erklären.

Sei Q der Fusspunkt des Lots von M auf g (also der Schnittpunkt von g mit dem Lot zu g durch M). Dann gilt $\overline{Mg} = \overline{MQ}$ und wir können drei Fälle unterscheiden:

- $\overline{Mg} < r$: (grüne Gerade) Dann liegt Q im Inneren von k und $g \cap k$ besteht aus genau zwei Schnittpunkten.
- $\overline{Mg} = r$: (lila Gerade) Dann liegt Q auf k und $g \cap k$ besteht aus genau einem Punkt. Also ist g eine Tangente an k mit Berührpunkt Q. Der **Berührradius** $[MQ]$ steht senkrecht auf g.
- $\overline{Mg} > r$: (türkise Gerade) Dann schneiden sich k und g nicht: $g \cap k = \varnothing$.



2.8 Koordinatensystem (hoffentlich Wiederholung)

2.8.1. In einigen Aufgaben werden Koordinatensysteme verwendet. Wir wiederholen deswegen den Begriff.

2.8.2. Um ein (rechtwinkliges) **Koordinatensystem** in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).
- Eine Einheitslänge.

Die letzten zwei Dinge können alternativ durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$ und die Achse ist die Gerade (OX) mit Richtung von O zu X.

Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **mathematisch positivem Drehsiss**, dem **Gegenuhrzeigersinn**.

Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

2.9 Geometrische Orte (auch «geometrische Örter»)

2.9.1. Wie allgemein üblich haben wir den Kreis als geometrischen Ort definiert. Ausserdem haben wir gesehen, wie man die Mittelsenkrechte als geometrischen Ort auffassen kann (Lemma 2.4.3).

Die folgende Tabelle wiederholt diese beiden Erkenntnisse und gibt an, wie man weitere einfache Objekte als geometrische Orte auffassen kann. Die Beweise sind ähnlich schwierig wie bei der Mittelsenkrechten, werden aber aus Zeitgründen nicht behandelt.

geometrisches Objekt	Beschreibung als geometrischer Ort
Mittelsenkrechte m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$ Beweis: Siehe Aufgabe A2.
✎	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎
✎	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎

2.9.2. Geometrische Orte werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel 2.9.3. Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b) \quad \to k_1$: 1. g. O .f. C, Abkürzung für «Erster geometrischer Ort für C»; bedeutet nur, dass C in dieser Menge liegen muss.
2. $k(B, a) \quad \to k_2$: 2. g. O .f. C
3. $k_1 \cap k_2 \quad \to C_1, C_2$

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man die Mengen aller Punkte konstruiert, die eine der beiden Bedingungen erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Orte. Der Schnitt dieser beiden Orte ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe A9 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP} \text{ und } \overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC} \text{ und } \overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe A10 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe A11 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe A12 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe A13 Gegeben sind

- der Kreis $k = k(M, r_1)$ mit $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$ und
- die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

(a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.

(b) Welche Anzahlen von Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Satz 2.9.4 Innkreis, Innkreismittelpunkt

Sei ABC ein beliebiges Dreieck.
Dann schneiden sich die drei Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ in einem Punkt, dem sogenannten **Innkreismittelpunkt** I.
Dieser Punkt I hat denselben Abstand zu den drei Dreiecksseiten a, b und c und ist der einzige Punkt der Zeichenebene mit dieser Eigenschaft; somit berührt der Kreis um I mit diesem Abstand als Radius alle Dreiecksseiten und heisst deswegen **Innkreis** des Dreiecks ABC.

Beweis. Siehe Aufgabe A14 □

Aufgabe A14 Beweisen Sie den Satz über den Innkreis 2.9.4.

Hinweis: Das Vorgehen ist fast dasselbe wie im Beweis vom Satz über den Umkreis 2.4.9.

Wichtige geometrische Orte selbst entdecken

Aufgabe A15 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit 7 Einheiten nach oben, 1 Einheit nach unten und 5 Einheiten nach rechts und links. Gegeben ist der Punkt $B = (0, 2)$. Wir bezeichnen die x-Achse mit ℓ.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

(a) Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = 6$ gilt.
(b) Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = 5.5$ gilt.
(c) Für jeden halbzahligen Wert d zwischen 1 und 5 (also $d = 1$, $d = 1.5$, …, $d = 4.5$, $d = 5$): Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ gilt.
(d) Beschreiben Sie die folgende Menge in Worten:

$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$$

(e) Skizzieren Sie diese Menge.

Aufgabe A16 Koordinatensystem mit 6 Einheiten in jeder Richtung zeichnen. Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$.

(a) Für jeden ganzzahligen Wert von d zwischen 1 und 9 (also für $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$, …, $d = 9$): Konstruieren Sie alle Punkte P, für die gilt:

$$\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10 \text{ und } \overline{PB_1} = d$$

(b) Skizzieren Sie die Punktemenge

$$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$$

(c) Beschreiben Sie diese Punktemenge in Worten.
(d) Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe A17 Sie stehen auf dem Punkt $Q = (-2, -1)$. Die Strecke $[B_1B_2]$ mit $B_1 = (-3, 0)$ und $B_2 = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden B_1B_2) haben die Eigenschaft, dass sie von Q gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei B_1 oder B_2 umgeht (mit gleicher Geschwindigkeit?

Irgendwo rein, vielleicht als Hinweis: Man stelle sich vor, dass Person 1 und Person gleichzeitig bei Q starten und mit derselben Geschwindigkeit geradlinig zu B_1 bzw. B_2 laufen. Wo ist Person 2, wenn Person 1 bei B_1 ankommt. Wenn Person 1 danach auf einer geraden Linie weiterläuft (in einer beliebigen Richtung), was weisst du über ihre Position, wenn Person 2 bei B_2 ankommt?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben, inks und rechts.

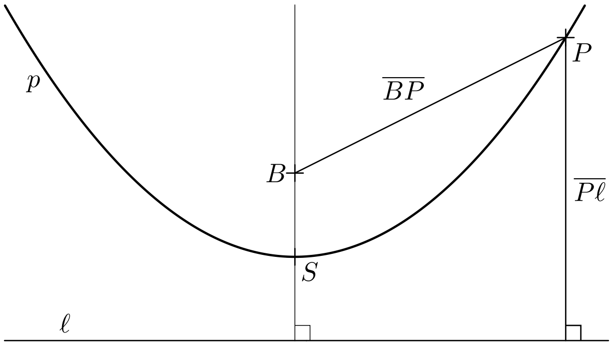
(a) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal (ohne Verwendung von Massangaben auf dem Lineal oder Geodreieck) denjenigen Punkt X auf $[B_1B_2]$, der die obige Eigenschaft hat.
(b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden B_1B_2 mit der obigen Eigenschaft.
(c) Skizzieren Sie, wie die Menge aller Punkte mit der obigen Eigenschaft aussieht.
(d) Geben Sie die Menge aller Punkte mit der obigen Eigenschaft in beschreibender Form an (mit möglichst wenig Text).

Aufgabe A18 Gegeben sind $A = (-6, 0)$ und $B = (0, 0)$.

(a) Skizzieren Sie den geometrischen Ort (= die Menge) aller Punkte P in der Zeichenebene, die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B.
(b) Geben Sie diese Menge in beschreibender Form an.
(c) Haben Sie eine Vermutung, wie man diesen geometrischen Ort alternativ beschreiben kann?

Definition 2.9.5 Parabel

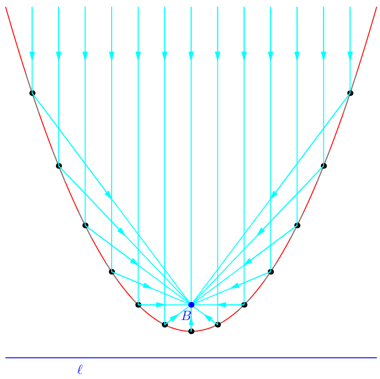
✎



Ausblick 2.9.6. Die Wurfbahn eines Balles ist eine Parabel (wenn man vom Luftwiderstand absieht und die Erdkrümmung vernachlässigt). Diese Parabel ist nach unten geöffnet, ihr Scheitel ist der höchste Punkt, den der Ball erreicht; die Leitgerade der Parabel verläuft horizontal.

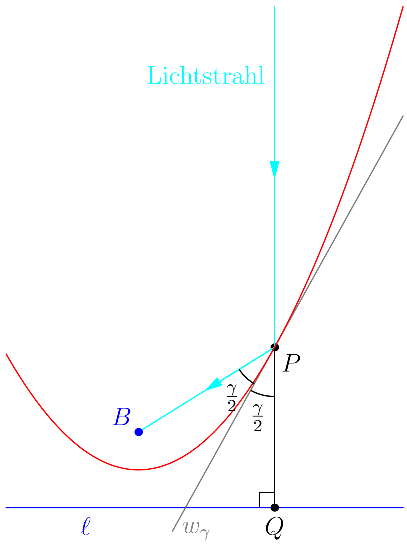
Satz 2.9.7 Reflexionseigenschaft der Parabel

Alle Lichtstrahlen, die «innerhalb einer Parabel» senkrecht zur Leitlinie einfallen, werden von der Parabel auf den Brennpunkt reflektiert.
(Alle anderen Strahlen werden nicht auf den Brennpunkt reflektiert.)



Beweis. Die Zeichnung zeigt eine Parabel (rot) mit Brennpunkt B und Leitgerade ℓ (beides in Blau).

Wir betrachten einen beliebigen Lichtstrahl, der senkrecht zur Leitlinie von oben kommt. Er trifft die Parabel in einem Punkt P; seine Verlängerung trifft die Leitlinie in einem Punkt, den wir Q nennen. In der Zeichnung ist ausserdem die Winkelhalbierende w_γ des Winkels $\gamma = \sphericalangle BPQ$ eingezeichnet. Diese Winkelhalbierende reflektiert den Lichtstrahl auf den Brennpunkt B (hoffentlich klar; sonst siehe Merke 2.12.1 im Appendix 2.12).
Zu zeigen ist, dass diese «Spiegelgerade» w_γ die Tangente an unsere Parabel ist (was in der Zeichnung korrekt aussieht). Sicherlich liegt P auf w_γ. Wir werden zeigen, dass alle anderen Punkte der Parabel auf «derselben Seite» von w_γ liegen wie der Brennpunkt B. Das bedeutet, dass w_γ die Parabel nur im Punkt P schneidet/berührt (und sonst gänzlich auf einer Seite von w_γ liegt) und macht es zumindest plausibel, dass w_γ die Tangente ist – eine präzise Definition des Tangentenbegriffs kennen wir eh noch nicht.
Nach Definition der Parabel gilt ✎



2.12.3 2.12

Sei nun $P' \neq P$ ein beliebiger Punkt der Parabel. Sei Q' der Fusspunkt des Lots von P' auf die Leitgerade ℓ.

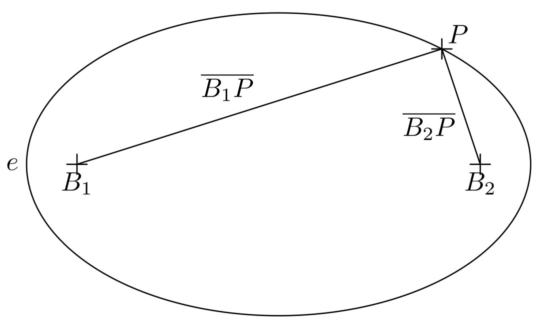
Dann gelten ✎

□

2.9.8. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, so entsteht ein **Paraboloid**.
Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind paraboloidförmig mit der Antenne im Brennpunkt. Sie können auf Grund der Reflexionseigenschaft der Parabel beispielsweise zur Kommunikation mit erdnahen Satelliten verwendet werden. Man kann im Brennpunkt Signale aus einer ganz bestimmten Richtung empfangen. Man kann vom Brennpunkt aus aber auch in eine ganz bestimmte Richtung senden (vgl. Parabolscheinwerfer).

Definition 2.9.9 Ellipse

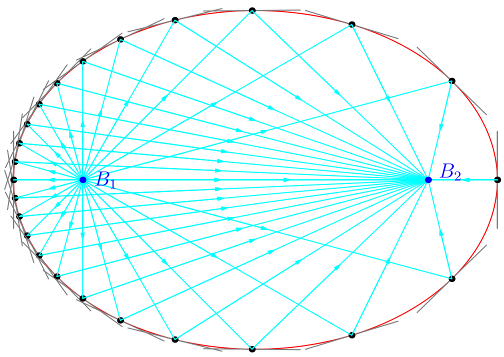
✎



2.9.10 (Gärtnerkonstruktion der Ellipse)**.** Der Gärtner konstruiert eine Ellipse, indem er ein Seil fester Länge d an zwei Pflöcken B_1 und B_2 befestigt. Er hält einen weiteren Pflock P so in das Seil, dass dieses stets fest gespannt ist, und bewegt diesen Pflock. Die Kurve von P ist dann eine Ellipse. Die obige Zeichnung illustriert dies, vgl. auch https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#GÃďrtnerkonstruktion.

Satz 2.9.11 Reflexionseigenschaft der Ellipse

Alle Lichtstrahlen, die von einem der Brennpunkte einer Ellipse ausgehen, werden von der Ellipse zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.



Beweis. Der Beweis ist recht ähnlich zum Beweis von Satz 2.9.7, weswegen er hier nicht aufgeschrieben ist, aber im Appendix 2.12, siehe Satz 2.12.7. □

2.9.12. Ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt ausgeht und «unendlich oft» im Inneren der Ellipse reflektiert wird, wird mit der Zeit immer «horizontaler». Warum?

Ausblick 2.9.13. Umlaufbahnen von Planeten sind in sehr guter Näherung Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht.

Dasselbe gilt für viele Kometen; beispielsweise ist die Bahn des Halleyschen Kometen, dessen Umlaufzeit ca. 75 Jahre beträgt, eine extrem langgestreckte Ellipse.

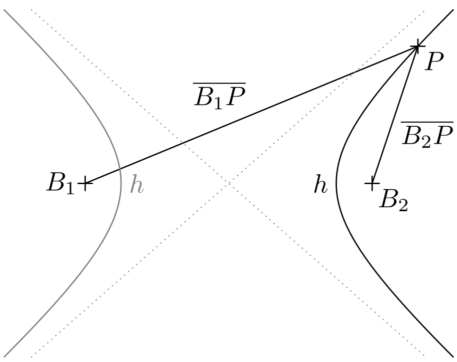
Definition 2.9.14 Hyperbel

Gegeben sind zwei Punkte B_1 und B_2, die man als **Brennpunkte** bezeichnet, und eine Entfernung d (mit $d < \overline{B_1B_2}$).
Dann ist die zugehörige **Hyperbel** h der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Differenz der beiden Abstände zu den Brennpunkten betragsmässig d beträgt («konstanter Abstandsunterschied»).

$$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\} = \{P \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d \text{ oder } \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d\}$$

Verlangt man nur die Bedingung $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ bzw. $\overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d$, so erhält man einen der beiden **Hyperbel-Äste**.

Gut zu erwähnen: Die Bedingung $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ ist gleichbedeutend zu $\overline{PB_1} = \overline{PB_2} + d$, was mir anschaulicher vorkommt: Der Punkt P ist um d weiter entfernt von B_1 als von B_2. Oder: Der Abstand von P zu B_1 ist um d grösser als der Abstand von P zu B_2.



2.9.15 (Gärtnerkonstruktion der Hyperbel)**.** Die Hyperbel kann man mit Hilfe zweier Pflöcke, eines (sehr langen) Seils, eines Schlüsselrings und eines weiteren Zeichnpflocks konstruieren (wie?).

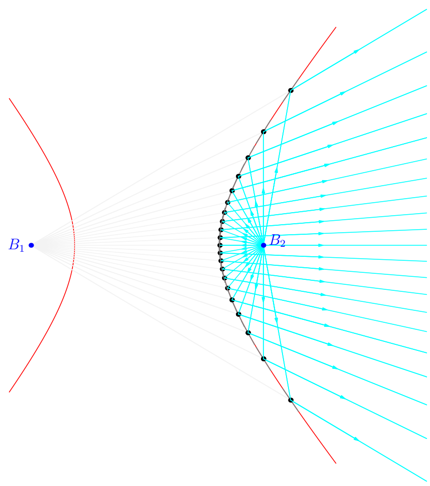
Was ich im Sinne habe, ist fast dasselbe wie die «pin and string construction», siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola#Pin_and_string_construction`.

Ähnlich kann man übrigens auch die Parabel konstruieren, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Pin_and_string_construction.

Ausblick 2.9.16. Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d. h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.

Satz 2.9.17 Reflexionseigenschaft der Hyperbel

Alle Lichtstrahlen, die von einem der Brennpunkte einer Hyperbel ausgehen, werden von der Hyperbel so reflektiert, als ob sie vom anderen Brennpunkt herkämen.



Beweis. Der Beweis ist recht ähnlich zum Beweis von Satz 2.9.7, weswegen er hier nicht aufgeschrieben ist, aber im Appendix 2.12, siehe Satz 2.12.9. □

Ausblick 2.9.18. Die Bahn eines Himmelskörpers, der zu schnell unterwegs ist, um in eine (ellipsenförmige) Umlaufbahn einzuschwenken, ist eine Hyperbel.

Aufgabe A19 Zwei Personen A und B stehen in einem Abstand von 1 km voneinander und klatschen gleichzeitig in die Hände (beide tragen eine Atomuhr). Das Klatschgeräusch von Person A ist eine Sekunde früher bei Ihnen als das von Person B. Welche Aussage können Sie über Ihren Standort treffen? Auf welcher Kurve befinden Sie sich?

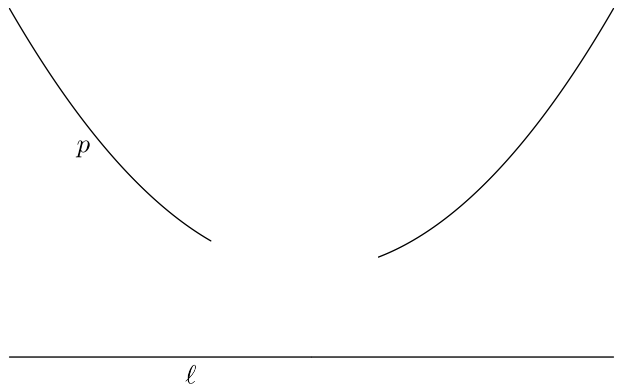
Bemerkung: Die Schallgeschwindigkeit beträgt etwa 343 m/s.

Aufgabe A20 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der geometrische Ort aller Punkte C, für die der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen?

Aufgabe A21 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z all derjenigen Kreise, die g berühren und durch P gehen,

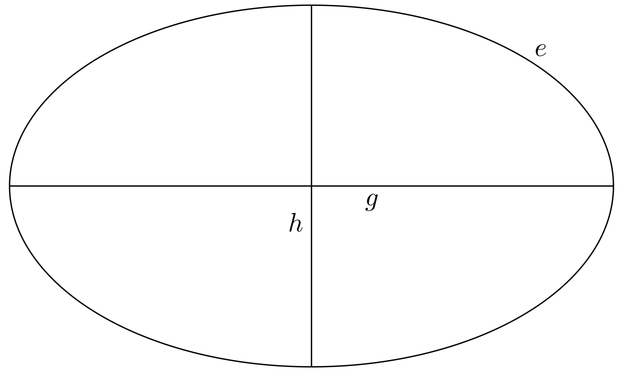
(a) wenn $P \notin g$ gilt?
(b) wenn $P \in g$ gilt?

Aufgabe A22 Beim Drucken einer Parabel p und ihrer Leitlinie ℓ ging durch einen Druckfehler ein Teil der Parabel verloren (siehe Skizze unten). Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe A23 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h (siehe Skizze unten). Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren..*



Parabel, Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte

Mittlerweile grob aufgeschrieben, siehe Abschnitt 2.10.

2.9.19. Der Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene ist entweder eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel (abgesehen von Spezialfällen). Dies ist der Grund, warum man Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln unter dem Oberbegriff **Kegelschnitte** zusammenfasst.

Ich erkläre dies gerne mit Hilfe geometrischer Modelle, die unsere Schule besitzt (vgl. Wikipedia: Dandelinsche Kugel).

Eventuell helfen die Bilder und (teilweise nicht ganz einfachen) Erklärungen auf den folgenden Wikipedia-Seiten:

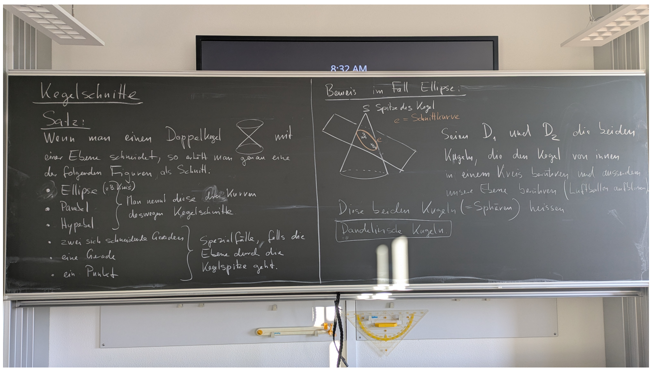
- für Ellipsen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres`
- für Hyperbeln: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola#As_plane_section_of_a_cone`
- für Parabeln: `https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Alternative_proof_with_Dandelin_spheres`

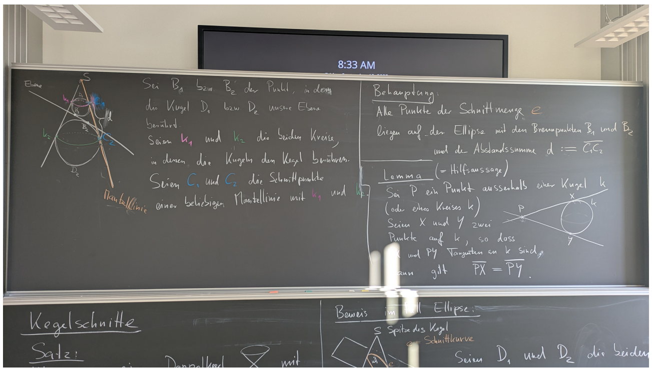
Zusammenfassung Kegelschnitte

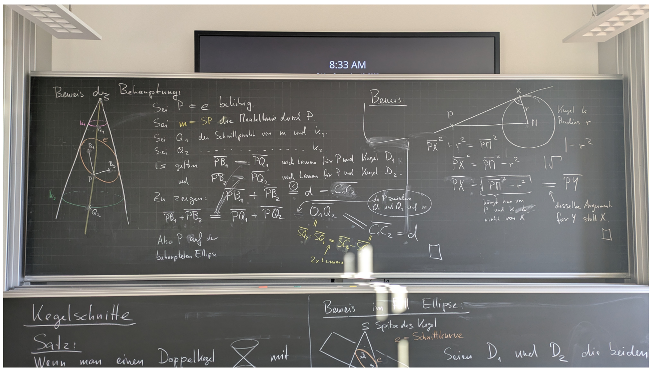
Kurve	vorgegebene Daten	Beschreibung als geometrischer Ort	Reflexionseigenschaft
Parabel	Brennpunkt B, Leitgerade ℓ	$\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$	Senkrecht zur Leitgeraden einfallende Strahlen (im Inneren) werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme d mit $d > \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied d mit $d < \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

2.10 Kegelschnitte

Diese und die nächste Seite nicht ausgeteilt, sondern an der Tafel erklärt, mit geometrischen Modellen (der folgende LaTeX-Aufschrieb war im Wesentlichen meine Vorbereitung, abgesehen von den Skizzen). Hier sind die Fotos meines Tafelauschriebs:







Satz 2.10.1

Wenn man ein einen Doppelkegel (Zeichnung) mit einer Ebene schneidet, so ist die Schnittmenge genau eine der folgenden Figuren.

- Ellipse
- Parabel
- Hyperbel ✎

- zwei sich schneidende Gerden
- eine Gerade
- ein Punkte ✎

«Beweis». Wir erklären dies nur im Fall der Ellipse.

Skizze: klein, Einfachkegel mit Ellipse und schneidender Ebene

Sei e die Schnittmenge und S die Spitze des Kegels.

Seien D_1 und D_2 die beiden Kugeln, die den Kegel von innen in einem Kreis berühren und ausserdem die schneidende Ebene berühren (Luftballon aufblasen). Dabei sei D_1 näher an der Kegelspitze als D_2. Diese beiden Kugeln heissen **Dandelinsche Kugeln**.

(Skizze, klein, Querschnitt durch S, B_1, B_2. Auf naheliegender Mantellinie C_1 und C_2 markieren.)

Sei B_1 bzw. B_2 der Punkt, in dem D_1 bzw. D_2 die Ebene berührt.

Sei k_1 bzw. k_2 der Kreis, in dem D_1 bzw. D_2 den Kegel berüht.

Wähle eine beliebige Mantellinie (= Gerade auf dem Kegel, die durch seine Spitze verläuft). Sie schneidet k_1 in C_1 und k_2 in C_2.

Behauptung: Alle Punkte der Schnittmenge e liegen auf der Ellipse mit den Brennpunkte B_1 und B_2 und der Abstandssumme $d = \overline{C_1C_2}$.

Wir benötigen ein Lemma. □

Lemma 2.10.2

Sei P ein Punkt ausserhalb von einer Kugel (oder einem Kreis) k. Sind dann $X, Y \in k$ Punkte, so dass PX und PY Tangenten an k sind, so gilt $\overline{PX} = \overline{PY}$.
Skizze: 2-dimensional, Kreis, zwei Tangenten.

Beweis. rechtwinkliges Dreieck PMX mit M Mittelpunkt, Radius r nennen. Pythagoras: $\overline{PX}^2 + r^2 = \overline{PM}^2$, also

$$\overline{PX} = \sqrt{\overline{PM}^2 - r^2}$$

Mit demselben Argument zeigt man $\overline{PY} = \sqrt{\overline{PM}^2 - r^2}$. □

Fortsetzung des Beweises. Schöne, grosse Zeichnung.

Sei $P \in e$ beliebig. Sei $m = (SP)$ die Mantellinie durch P.

Sei Q_1 bzw. Q_2 der Schnittpunkt von m mit k_1 bzw. k_2.

Dann gelten

$$\begin{aligned} \overline{PB_1} &= \overline{PQ_1} && \text{nach dem Lemma, da } PB_1 \text{ und } PQ_1 \text{ Tangenten an Dandelinsche Kugel } D_1. \\ \overline{PB_2} &= \overline{PQ_2} && \text{nach dem Lemma, da } PB_2 \text{ und } PQ_2 \text{ Tangenten an Dandelinsche Kugel } D_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \overline{PB_1} + \overline{PB_2} &= \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} \\ &= \overline{Q_1Q_2} \\ &= \overline{C_1C_2} && \text{Begründung siehe unten.} \\ &= d \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass P wie gewünscht auf der Ellipse(B_1, B_2, d) liegt.

Die letzte Gleichung folgt aus dem Lemma, angewandt auf die Tangenten von S an die beiden Dandelinschen Sphären, denn

$$\begin{aligned} \overline{Q_1Q_2} &= \overline{SQ_2} - \overline{SQ_1} \\ &= \overline{SD_2} - \overline{SD_1} \\ &= \overline{D_2D_1} \end{aligned}$$

Wer genau aufpasst, wird bemerken, dass wir nur gezeigt haben, dass Punkte der Schnittkurve auf der Ellipse liegen. Strenggenommen muss man noch zeigen, dass Punkte der Ellipse im Schnitt liegen. Beweis dieser Aussage: Nimm einen Punkt Q der Ellipse. Betrachte den Strahl von B_1 in Richtung Q. Er schneidet die Schnittkurve in einem Punkt P. Unser obiger Beweis zeigt, dass P auf der Ellipse liegt. Also liegen P und Q beide auf der Ellipse und auf demselben, von B_1 ausgehenden Strahl.
Dies geht aber nur, falls $P = Q$. Warum? Gelte sonst $P \neq Q$. OE betrachte nur den Fall, dass von B_1 der Punkt Q vor dem Punkt P auf dem Strahl kommt. Dann gilt

$$\begin{aligned} d &= \overline{B_1Q} + \overline{QB_2} \\ &\leq \overline{B_1Q} + \overline{QP} + \overline{PB_2} && \text{Dreiecksungleichung} \\ &= \overline{B_1P} + \overline{PB_2} \\ &= d \end{aligned}$$

Also gilt in der Dreiecksungleichung Gleichheit, d. h. P liegt auf der Strecke $[QB_2]$. Dies bedeutet, dass P sowohl auf dem Strahl $[B_1Q$ (hinter Q) als auch auf der Strecke $[QB_2]$ liegt. Wenn Strahl und Strecke nicht parallel sind, so muss also $P = Q$ gelten (im Widerspruch zur Annahme). Sonst zeigt eine kleine Skizze, dass die vier Punkte B_1, Q, P, B_2 in dieser Reihenfolge hintereinander auf der Geraden B_1B_2 liegen. Da P auf der Ellipse liegt, folgt $d = \overline{B_1Q} + \overline{B_2Q} = \overline{B_1B_2}$ (oder dasselbe Argument mit Q). Also ist unsere Ellipse zur Verbindungsstrecke $[B_1B_2]$ entartet. Die Schnittmenge liegt darin, was wohl unseren nicht klar genannten Voraussetzungen widerspricht. (Man sollte also oben genau sagen, unter welchen Voraussetzungen wir zeigen wollen, dass die Schnittmenge eine Ellipse ist. Dann könnte man nun hoffentlich einen klaren Widerspruch konstruieren.)
(Gibt es einen einfacheren/besseren Beweis?) □

2.11 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A24 Zeichnen Sie ein spitzwinkliges (= alle drei Winkel $< 90°$) Dreieck ABC und konstruieren Sie einen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der Seite c so, dass die Seiten a und b Tangenten des Halbkreises sind.

Aufgabe A25 Gegeben sind jeweils zwei Objekte:

(a) zwei sich schneidende Geraden g und h mit $\sphericalangle(g,h) = 60°$;
(b) zwei sich schneidende Kreise $k_1 = k(M_1, r_1 = 3)$ und $k_2 = k(M_2, r_2 = 2.5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 4$;
(c) eine Gerade g und ein Kreis $k = k(M, r = 3)$ mit $\overline{Mg} = 1$.

Konstruieren Sie jeweils alle Kreise mit Radius 1, die beide Objekte berühren. Wie gross ist jeweils die Anzahl der Lösungen?

Aufgabe A26 Physikalische Beobachtung: Ein Lichtstrahl g wird von einer Kurve k so reflektiert, als ob der Lichtstrahl von der Tangente im Schnittpunkt $g \cap k$ reflektiert würde.

Gegeben ist ein Kreis um $Z = (1, -2)$ mir Radius $r = 4$ und die Punkte $A = (-6, 4)$ und $B = (-4, 3)$. Konstruieren Sie die Reflexion am Kreis des von A durch B gehenden Lichtstrahls.

Aufgabe A27 Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).
b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte B_2.

Aufgabe A28 Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit Zentren Z_1 und Z_2 und unterschiedlichen Radien r_1 und r_2.

a) Beschreiben Sie, wie man die Kreiszentren Z_3 eines Kreises k_3 mit gegebenem Radius r_3 konstruiert, so dass k_3 beide Kreise k_1 und k_2 berührt. Wie viele Lösungen kann es maximal geben? Kann es gar keine Lösungen geben?

In den beiden restlichen Teilaufgaben nehmen wir an, dass $\overline{Z_1Z_2} > r_1 + r_2$ gilt (und somit $k_1 \cap k_2 = \varnothing$).
b) Beschreiben Sie, wie man den Kreis mit kleinstmöglichem Radius konstruiert, der beide Kreise k_1 und k_2 berührt.

c) Was ist der geometrische Ort aller Kreiszentren der Kreise, die beide gegebenen Kreise von aussen berühren?

Aufgabe A29 Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die zugehörigen Scheitelpunkte der Parabeln und skizzieren Sie die Parabeln.

Aufgabe A30 Zeigen Sie, dass sich eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten senkrecht schneiden. Verwenden Sie dazu die Reflexionseigenschaften der beiden Kurven. *Hinweis: Der Schnittwinkel zweier Kurven bei einem Schnittpunkt ist per Definition der (kleinere der beiden) Winkel zwischen den beiden Tangenten im Schnittpunkt.*

2.12 Appendix A: Reflexionseigenschaften von Parabel, Ellipse und Hyperbel

Zur Reflexion von Lichtstrahlen an «geraden» und «gebogenen» Spiegeln

Merke 2.12.1 Reflexion von Lichtstrahlen

In der Physik lernt man: Wird ein Lichtstrahl an einem Spiegel reflektiert, so gilt

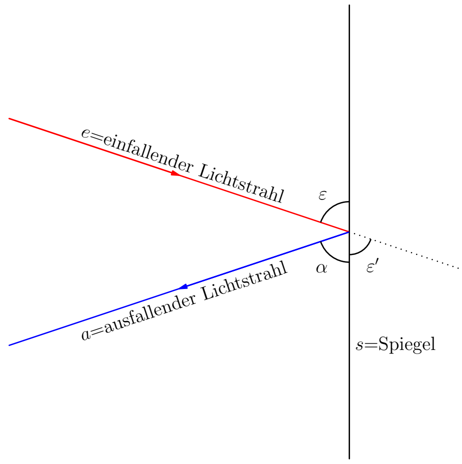
$$\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel}$$

Mit den Bezeichnungen der Zeichnung können wir diese Bedingung äquivalent umformulieren.

$\iff$ $\varepsilon = \alpha$

$\iff$ $\varepsilon' = \alpha$

$\iff$ Die Spiegelgerade s ist
die Winkelhalbierende zwischen
der «Verlängerung des einfallenden Strahls e» und
dem ausfallenden Strahl a.



Merke 2.12.2 Reflexion von Lichtstrahlen an «glatten» Kurven

Wird ein Lichtstrahl an einem Punkt P einer Kurve c reflektiert, so wird er genauso reflektiert wie an der Tangente (= Berührgeraden) an die Kurve im Punkt P. (Die Kurve soll keinen «Knick» bei P haben.)

Elementares zu Dreiecken (benötigt beim Beweis der Reflexionseigenschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel)

Lemma 2.12.3 Elementares zu gleichschenkligen Dreiecken

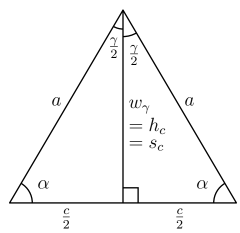
(a) Ein beliebiges Dreieck ABC ist genau dann gleichschenklig, wenn es «gleichwinklig» ist:

$$a = b \qquad \iff \qquad \alpha = \beta$$

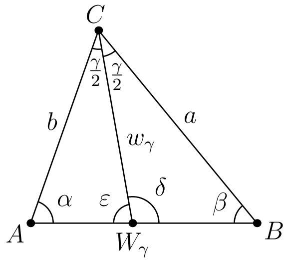
In Worten: Genau dann sind zwei Dreiecksseiten gleich lang, wenn die gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind.

(b) In jedem gleichschenkligen Dreieck mit Basis c stimmen die Winkelhalbierende des Scheitelwinkels γ, die Höhe über der Basis c und die Seitenhalbierende der Basis c überein:

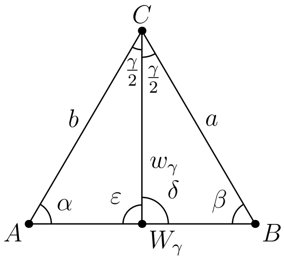
$$w_\gamma = h_c = s_c$$



Beweis. Zu (a): In einem beliebigen Dreieck ABC sei w_γ die Winkelhalbierende von γ und W_γ ihr Schnittpunkt mit der Dreiecksseite $[AB]$. Die Winkel seien wie in der Zeichnung benannt.



Beweis von $a = b \implies \alpha = \beta$: Gelte $a = b$. Dann sind die beiden Dreiecke $W_\gamma CA$ und $W_\gamma BC$ nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Also sind in beiden Dreiecken die der Seite w_γ gegenüberliegenden Winkel gleich gross, es gilt also $\alpha = \beta$.
Beweis von $\alpha = \beta \implies a = b$: Gelte $\alpha = \beta$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt $\varepsilon = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 180° - \beta - \frac{\gamma}{2} = \delta$. Also sind die beiden Dreiecke $W_\gamma CA$ und $W_\gamma BC$ nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Die beiden Seiten, die den gleich grossen Winkeln $\varepsilon = \delta$ gegenüberliegen, sind also gleich gross, d. h. $a = b$.



Zu (b): Wie in der Zeichnung dargestellt, zeichnen wir in einem gleichschenkligen Dreieck (mit $a = b$ und gleichbedeutend $\alpha = \beta$) die Winkelhalbierende w_γ ein und ihren Schnittpunkte W_γ mit der Seite $[AB]$. Da das Dreieck gleichschenklig ist, sind die beiden Dreiecke $W_\gamma CA$ und $W_\gamma BC$ kongruent (nach sws). Also gelten

- $\overline{AW_\gamma} = \overline{BW_\gamma}$. Somit ist w_γ die Seitenhalbierende s_c;
- $\varepsilon = \delta$. Wegen $\varepsilon + \delta = 180°$ folgt $\varepsilon = \delta = 90°$; somit ist w_γ die Höhe h_c.

□

2.12.4. Das folgende Lemma 2.12.5 ist elementar. Wir benötigen es beim Beweis der Brennpunkteigenschaft von Ellipse und Hyperbel (nicht bei der Parabel).

Lemma 2.12.5 Dreiecksungleichung

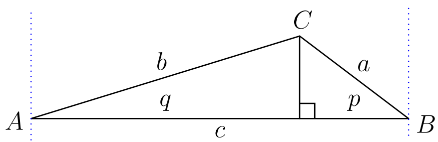
(a) In jedem Dreieck ist jede Seite echt kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten. Wenn man die Dreiecksseiten wie üblich a, b, c nennt, gelten also

$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

(b) Umgekehrt gilt: Erfüllen drei Längen a, b, c diese drei Ungleichungen, so gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c im mathematisch positiven Drehhsinn (= Gegenuhrzeigersinn). Bis auf Verschiebung und Drehung ist dieses Dreieck eindeutig.
Rechnerischer Beweis: Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality#Converse

Beweis. Zu (a): Die Ungleichung $c < a + b$ besagt, dass der direkte Weg von A nach B kürzer ist als der Weg über C. Diese Aussage ist intuitiv klar. Wir zeigen sie nun mit Pythagoras.

Dazu zeichnen wir in einem beliebigen Dreieck ABC die Lote zur Dreiecksseite c durch die Punkte A und B (in der Zeichnung blau gepunktet).



Wir nehmen zuerst an, dass C zwischen diesen beiden (blauen) Geraden liegt (wie in der Zeichnung). Wie in der Zeichnung fällen wir das Lot von C auf c. Der Fusspunkt dieses Lots teilt die Seite c in zwei Teilstücke p und q. Da jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks kürzer ist als die Hypotenuse (nach Pythagoras), gelten $p < a$ und $q < b$. Daraus folgt wie gewünscht

$$c = p + q < a + b$$

Nun betrachten wir den Fall, dass C nicht zwischen den beiden «blau gepunkteten» Geraden liegt. Sagen wir ohne Einschränkung, dass C «rechts» der davon liegt (im Sinne unserer Zeichnung). Dann ist bereits b länger als c (Pythagoras, Lot von C auf die Verlängerung von c fällen), d. h. $c < b$, also $c < b < a + b$.

Die anderen beiden Ungleichungen werden genauso bewiesen (oder folgen durch «Umbenennen»).

Zu (a): Seien nun drei Längen a, b, c gegeben, die die drei angegebenen Ungleichungen erfüllen. Wir zeigen die Existenz des Dreiecks konstruktiv. Zeichne eine Strecke $[AB]$ der Länge c horizontal. Zeichne dann den Kreis $k(A, b)$. Wir müssen nun sicherstellen, dass der Kreis $k(B, a)$ den Kreis $k(A, b)$ in genau zwei Punkten schneidet. (Ein Schnittpunkt führt zu entarteten Dreiecken (= alle Ecken auf einer Geraden), die wir hier nicht zulassen.)

Der «obere» Schnittpunkt (wenn er existiert) ist dann der gesuchte Punkt C.

Genau in den folgenden beiden (sich gegenseitig ausschliessenden) Fällen gibt es genau zwei Schnittpunkte (bitte durch Skizze bestätigen; insbesondere, dass es in allen anderen Fällen keinen oder genau einen Schnittpunkt gibt).

- Es gilt $b \leq c$ und $c - b < a < b + c$. Gleichbedeutend: $b \leq c$ und $c < a + b$ und $a < b + c$.
- Es gilt $b > c$ und $b - c < a < b + c$. Gleichbedeutend: $b > c$ und $b < a + c$ und $a < b + c$.

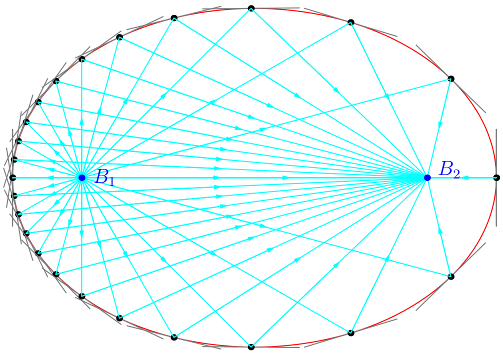
Da entweder $b \geq c$ oder $b > c$ gilt, sind wir in genau einem der beiden Fälle (die beiden anderen Ungleichungen gelten eh laut Annahme). Also existiert das gesuchte Dreieck. □

Reflexionseigenschaft der Ellipse

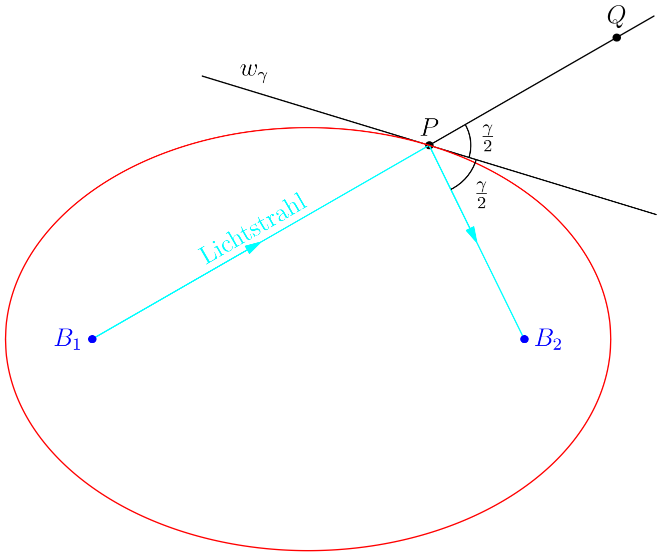
2.12.6. Der folgende Satz erklärt, warum die Brennpunkte einer Ellipse so heissen. Sein Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis des entsprechenden Resultats für die Parabel (Satz 2.9.7).

Satz 2.12.7 Reflexionseigenschaft der Ellipse

Alle Lichtstrahlen, die von einem der Brennpunkte einer Ellipse ausgehen, werden von der Ellipse zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.



Beweis. Die Zeichnung zeigt eine Ellipse (rot) mit Brennpunkten B_1 und B_2 (beide in Blau).



Wir betrachten einen beliebigen Lichtstrahl, der vom Brennpunkt B_1 ausgeht. Er trifft die Ellipse in einem Punkt P. Wir verlängern den Lichtstrahl über die Ellipse hinaus und markieren auf dieser Verlängerung denjenigen Punkt Q mit $\overline{PQ} = \overline{PB_2}$. In der Zeichnung ist ausserdem die Winkelhalbierende w_γ des Winkels $\gamma = \sphericalangle B_2PQ$ eingezeichnet. Nach Merke 2.12.1 reflektiert diese Winkelhalbierende den Lichtstrahl auf den Brennpunkt B_2.

Zu zeigen ist, dass diese «Spiegelgerade» w_γ die Tangente an unsere Ellipse ist (was in der Zeichnung korrekt aussieht). Sicherlich liegt P auf w_γ. Wir werden zeigen, dass alle anderen Punkte der Ellipse auf «derselben Seite» von w_γ liegen wie der Brennpunkt B_2 (und der Brennpunkt B_1). Das bedeutet, dass w_γ die Ellipse nur im Punkt P schneidet/berührt (und sonst gänzlich auf einer Seite von w_γ liegt) und macht es zumindest plausibel, dass w_γ die Tangente ist – eine präzise Definition des Tangentenbegriffs kennen wir eh noch nicht.

Nach Wahl des Punktes Q ist das Dreieck PBQ gleichschenklig mit Basis $[BQ]$. Also gilt $w_\gamma = m_{B_2Q}$ nach Lemma 2.12.3.

Sei nun $P' \neq P$ ein beliebiger Punkt der Ellipse. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\overline{P'B_1} + \overline{P'B_2} &= \overline{PB_1} + \overline{PB_2} && \text{laut Definition der Ellipse}\\
&= \overline{PB_1} + \overline{PQ} && \text{nach Wahl von } Q\\
&= \overline{B_1Q} && \text{da } P \text{ zwischen } B_1 \text{ und } Q \text{ liegt}\\
&< \overline{B_1P'} + \overline{P'Q} && \text{nach der Dreiecksungleichung (Lemma 2.12.5)}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\overline{P'B_1} + \overline{P'B_2} &< \overline{B_1P'} + \overline{P'Q} && \text{subtrahiere } \overline{P'B_1} = \overline{B_1P'}\\
\overline{P'B_2} &< \overline{P'Q}
\end{aligned}$$

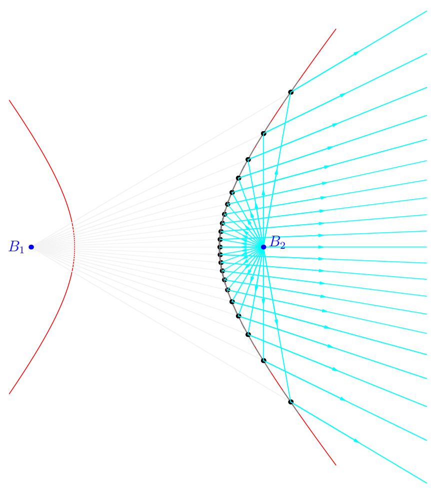
Diese Ungleichung zeigt, dass P' näher bei B_2 als bei Q liegt. Also liegt P' auf derselben Seite von m_{B_2Q} wie B_2. Wegen $m_{B_2Q} = w_\gamma$ zeigt dies wie gewünscht, dass P' auf derselben Seite von w_γ liegt wie B_2. □

Reflexionseigenschaft der Hyperbel

2.12.8. Der folgende Satz erklärt, warum die Brennpunkte einer Hyperbel so heissen. Sein Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis des entsprechenden Resultats für die Parabel (Satz 2.9.7).

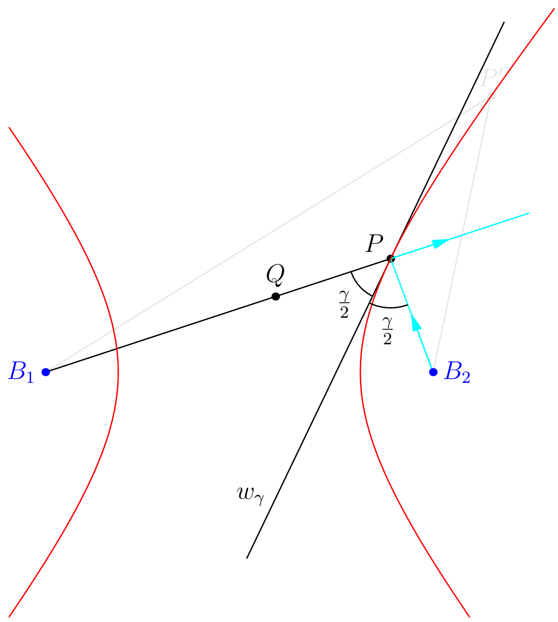
Satz 2.12.9 Reflexionseigenschaft der Hyperbel

Alle Lichtstrahlen, die von einem der Brennpunkte einer Hyperbel ausgehen, werden von der Hyperbel so reflektiert, als ob sie vom anderen Brennpunkt herkämen.



Beweis. Die Zeichnung zeigt eine Hyperbel (rot) mit Brennpunkten B_1 und B_2 (beide in Blau).

Wir betrachten einen beliebigen Lichtstrahl, der vom Brennpunkt B_2 ausgeht. Er trifft die Hyperbel in einem Punkt P. Wir wollen zeigen, dass unser Lichtstrahl von der Hyperbel so reflektiert wird, wie in der Zeichnung angedeutet, dass also der reflektierte Lichtstrahl von B_1 herzukommen scheint. In der Zeichnung ist ausserdem die Winkelhalbierende w_γ des Winkels $\gamma = \sphericalangle B_1PB_2$ eingezeichnet. Nach Merke 2.12.1 (mit anderer Lichtstrahlrichtung) reflektiert diese Winkelhalbierende den Lichtstrahl wie gewünscht.



Zu zeigen ist, dass diese «Spiegelgerade» w_γ die Tangente an unsere Hyperbel ist (was in der Zeichnung korrekt aussieht). Sicherlich liegt P auf w_γ. Wir werden zeigen, dass alle anderen Punkte des Hyperbelastes, auf dem P liegt, auf «derselben Seite» von w_γ liegen wie der Brennpunkt B_2. Das bedeutet, dass w_γ die Hyperbel nur im Punkt P schneidet/berührt (und sonst gänzlich auf einer Seite von w_γ liegt) und macht es zumindest plausibel, dass w_γ die Tangente ist – eine präzise Definition des Tangentenbegriffs kennen wir eh noch nicht.

Sei Q derjenige Punkt auf $[PB_1]$ mit $\overline{PQ} = \overline{PB_2}$.
Dann ist Dreieck PBQ gleichschenklig mit Basis $[BQ]$. Also gilt $w_\gamma = m_{B_2Q}$ nach Lemma 2.12.3.
Sei nun $P' \neq P$ ein beliebiger Punkt, der auf demselben Hyperbelast wie P liegt. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\overline{P'B_1} - \overline{P'B_2} &= \overline{PB_1} - \overline{PB_2} && \text{laut Definition der Hyperbel} \\
&= \overline{PB_1} - \overline{PQ} && \text{nach Wahl von } Q \\
&= \overline{QB_1} && \text{da } Q \text{ zwischen } B_1 \text{ und } P \text{ liegt}
\end{aligned}$$

Also (von rechts her gelesen)

$$\begin{aligned}
\overline{QB_1} &= \overline{P'B_1} - \overline{P'B_2} \\
&< \overline{P'Q} + \overline{QB_1} - \overline{P'B_2} && \text{nach der Dreiecksungleichung (Lemma 2.12.5)}
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren $\overline{QB_1}$ auf beiden Seiten und addieren $\overline{P'B_2}$. Dies liefert

$$\overline{P'B_2} < \overline{P'Q}$$

Diese Ungleichung zeigt, dass P' näher bei B_2 als bei Q liegt. Also liegt P' auf derselben Seite von m_{B_2Q} wie B_2. Wegen $m_{B_2Q} = w_\gamma$ zeigt dies wie gewünscht, dass P' auf derselben Seite von w_γ liegt wie B_2. □

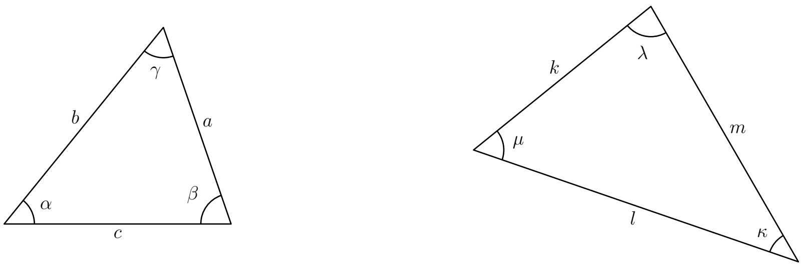
2.13 Appendix B: Verbesserung des Aufschriebs zu Kongruenzsätzen?

2.13.1. Nachtrag, denn ich finde den «Beweis» der Kongruenzsätze nicht überzeugend. Angeblich hat der Kongruenzsatz sws bei Hilbert den Rang eines Axioms, vgl. `https://de.wikipedia.org/wiki/Kongruenzsatz#Bemerkungen`.

Ich versuche eine neue Formulierung. Sie ist dadurch motiviert, wie man die Kongruenzsätze in Beweisen verwendet: «Wenn bei zwei Dreiecken geeignete Seitenlängen und Winkel übereinstimmen, so stimmen alle Grössen der beiden Dreiecke überein.»

Satz 2.13.2

Gegeben sind zwei beliebige Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c bzw. k, l, m und Winkeln α, β, γ bzw. κ, λ, μ. (In jedem Paar «Winkel, gegenüberliegende Seite» wird «derselbe» Buchstabe verwendet, einmal auf griechisch, einmal auf lateinisch.) Wir nehmen an, dass die Seitenlängen bei jedem Dreieck im Gegenuhrzeigersinn in alphabetischer Reihenfolge benannt sind (anfangend bei einer beliebigen Seite).
(Ein Beispiel zweier solcher Dreiecke zeigt die folgende Zeichnung. Die dargestellten Dreiecke sind bewusst nicht kongruent gezeichnet.)



(Ist es wirklich nötig, hier sechs Möglichkeiten aufzuschreiben?)

- sss:
  - Aus $a = k$ und $b = l$ und $c = m$ folgt, dass jeweils die beiden Winkel, die den gleich-langen Seiten gegenüberliegen, übereinstimmen, d. h. $\alpha = \kappa$, $\beta = \lambda$ und $\gamma = \mu$.
    (Verschieben und Drehen genügt, um die beiden Dreiecke zur Deckung zu bringen.)
  - (und «gespiegelt»:) Aus $a = k$ und $b = m$ und $c = l$ folgt, dass jeweils die beiden Winkel, die den gleich-langen Seiten gegenüberliegen, übereinstimmen, d. h. $\alpha = \kappa$, $\beta = \mu$ und $\gamma = \lambda$.
    (Verschieben und Drehen genügt hier im Allgemeinen nicht, man muss auch spiegeln.)
- sws:
  - Aus $b = l$ und $\alpha = \kappa$ und $c = m$ folgt, dass jeweils den gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und die den gleich-grossen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, d. h. $\beta = \lambda$ und $a = k$ und $\gamma = \mu$.
    (Verschieben und Drehen genügt, um die beiden Dreiecke zur Deckung zu bringen.)
  - (und «gespiegelt»:) Aus $b = m$ und $\alpha = \kappa$ und $c = l$ folgt, dass jeweils den gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und die den gleich-grossen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, d. h. $\beta = \mu$ und $a = k$ und $\gamma = \lambda$.
    (Verschieben und Drehen genügt hier im Allgemeinen nicht, man muss auch spiegeln.)
- wsw:
  - Aus $\beta = \lambda$ und $a = k$ und $\gamma = \mu$ folgt, dass jeweils den gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und die den gleich-grossen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, d. h. $b = l$ und $\alpha = \kappa$ und $c = m$.
    (Verschieben und Drehen genügt, um die beiden Dreiecke zur Deckung zu bringen.)
  - (und «gespiegelt»:) Aus $\beta = \mu$ und $a = k$ und $\gamma = \lambda$ folgt, dass jeweils den gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und die den gleich-grossen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, d. h. $b = m$ und $\alpha = \kappa$ und $c = l$.
    (Verschieben und Drehen genügt hier im Allgemeinen nicht, man muss auch spiegeln.)
- Ssw:
  - Aus $c = m$ und $a = k$ und $\gamma = \mu$ und $c > a$ folgt, dass die den kürzeren gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und dass das restliche Paar «Seite, gegenüberliegender Winkel» in beiden Dreiecken gleich gross ist, d. h. $\alpha = \kappa$ und $b = l$ und $\beta = \lambda$.
    (Verschieben und Drehen genügt, um die beiden Dreiecke zur Deckung zu bringen.)
  - (und «gespiegelt»:) Aus $c = l$ und $a = k$ und $\gamma = \lambda$ und $c > a$ folgt, dass die den kürzeren gleich-langen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich gross sind und dass das restliche Paar «Seite, gegenüberliegender Winkel» in beiden Dreiecken gleich gross ist, d. h. $\alpha = \kappa$ und $b = m$ und $\beta = \mu$.
    (Verschieben und Drehen genügt hier im Allgemeinen nicht, man muss auch spiegeln.)

Beweis. In jedem Fall sieht man, dass sich jeweils nur ein Dreieck konstruieren lässt aus den gegebenen Daten und unter der Beachtung des Drehsinns. □

2.13.3. Diese Beweis ist für mich akzeptabel, auch wenn es sich natürlich um keinen strengen Beweis handelt. Streng beweisen kann man den Satz mit zweidimensionaler analytischer Geometrie (inklusive Vektorrechnung), also insbesondere unter Verwendung eines Koordinatensystems.
Einfacher geht es wohl mit etwas Trigonometrie, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Solution_of_triangles.

2.14 Griechisches Alphabet

2.14.1. In der Mathematik und den Naturwissenschaften werden häufig griechische Buchstaben verwendet (zum Beispiel bei Winkeln). Die folgende Tabelle zeigt die 24 Kleinbuchstaben. Die grau hinterlegten Buchstaben kommen sehr häufig vor und sollten flüssig erkannt und geschrieben werden können (auswendiglernen!).

Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	My
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ

Ny	Xi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega
ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω

Die griechischen Grossbuchstaben A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, L, M, N, Ξ, O, Π, P, Σ, T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω werden etwas seltener verwendet.

Aufgabe A31

(a) Lerne zumindest die grau hinterlegten griechischen Kleinbuchstaben auswendig, am besten in alphabetischer Reihenfolge.
(b) Entschlüssle die folgenden Wörter: $\sigma\alpha\nu\kappa\tau$ $\gamma\alpha\lambda\lambda\varepsilon\nu$, $\beta o\delta\varepsilon\nu\sigma\varepsilon\varepsilon$, $\kappa\alpha\sigma\tau\varepsilon\nu$, $\kappa\rho o\nu\beta\varepsilon\rho\gamma$, $\pi o\sigma\tau\varepsilon\rho$, $\alpha\lambda\varphi\alpha\beta\varepsilon\tau$, $\varphi\varepsilon\lambda\delta$, $\beta\alpha\sigma\varepsilon\lambda$, $\alpha\lambda\pi\sigma\tau\varepsilon\iota\nu$, $\nu\alpha\tau\iota o\nu\alpha\lambda\rho\alpha\tau$, $\sigma\omega\kappa\rho\alpha\tau\eta\sigma$, $\pi\lambda\alpha\tau\omega\nu$, $\alpha\pi o\lambda\lambda\omega\nu\iota o\sigma$, $\alpha\theta\eta\nu\alpha$, $\kappa\rho\eta\tau\eta$.
(c) Schreibe selbst einige Wörter oder Sätze in griechischen Kleinbuchstaben und lass sie von jemandem entziffern.

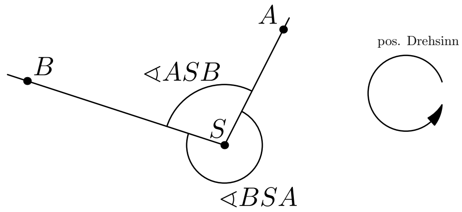
2.15 Winkel

Definition 2.15.1 Winkel, Scheitel, Schenkel, positiver Drehsinn

Seien drei verschiedene Punkte S, A, B gegeben.
Dann meint die Schreibweise

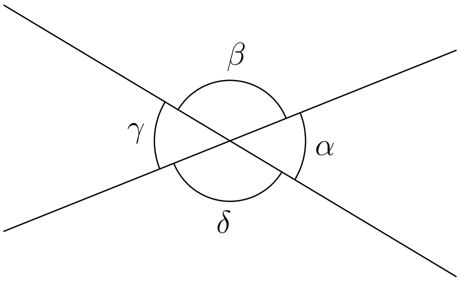
$$\sphericalangle ASB$$

den **Winkel** mit **Scheitel** S und den beiden Halbgeraden $[SA$ und $[SB$ als **Schenkeln**, den man erhält, wenn man den Strahl $[SA$ im **mathematisch positiven Drehsinn** (= dem **Gegenuhrzeigersinn**) dreht, bis man beim Strahl $[SB$ ankommt.
In der Zeichnung ist zusätzlich der andere Winkel $\sphericalangle BSA$ eingezeichnet.



Wir messen Winkel in Grad; der Vollwinkel beträgt 360°, der «Halbwinkel» (auf beiden Seiten einer Geraden) 180° Grad.

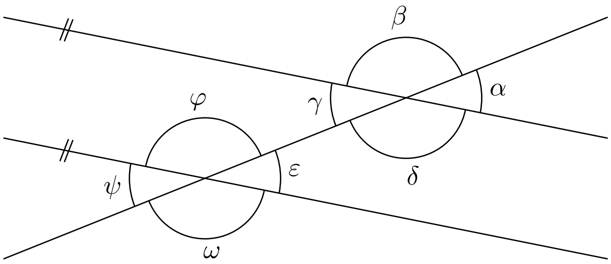
2.15.2 (Scheitel- und Nebenwinkel).



Axiom:
Scheitelwinkel sind ✎

Folgerung:
Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎

2.15.3 (Winkel an Parallelen).

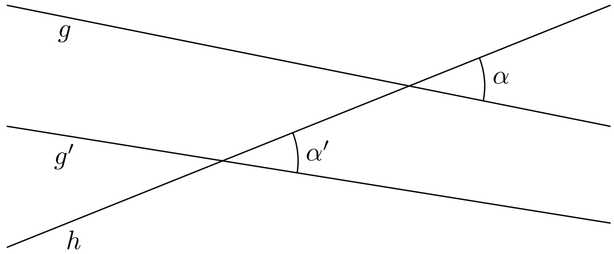


Axiom:
Stufenwinkel sind ✎

Folgerung:
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎

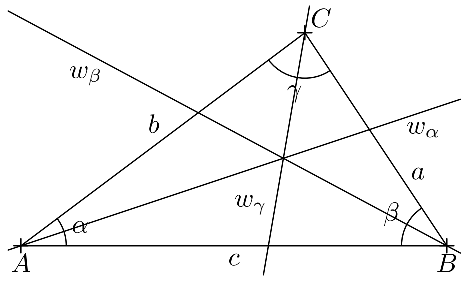
Wechselwinkel (= Scheitelwinkel von Stufenwinkeln) sind gleich gross, z. B. ✎

2.15.4. Folgerung:
Kriterium für Parallelität von Geraden
Sei eine Gerade h gegeben, die zwei Geraden g und g' schneidet, und seien α und α' zwei «sich entsprechende» Winkel wie in der Skizze rechts.
Dann folgt aus $\alpha = \alpha'$, dass die beiden Geraden g und g' parallel zueinander sind.



Notation 2.15.5 (Standard-Bezeichnungen in Dreiecken)**.** Wenn nicht explizit anders vereinbart, verwenden wir bei Dreiecken die folgenden Bezeichnungen:

A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn (= mathematisch positivem Drehsinn) benannt
a, b, c	**Seiten**, gegenüber von A liegt a etc.
α, β, γ	**Winkel** oder präziser **Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet)
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte** (nicht eingezeichnet)
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet), z. B. $m_a = m_{BC}$
s_a, s_b, s_c	**Seitenhalbierende** oder **Schwerlinien** der entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet), z.B. $s_a = AM_a$



Aufgabe A32 Beweisen Sie mit Hilfe der oben genannten Eigenschaften von Neben-, Scheitel-, Stufen- und Ergänzungswinkeln, dass die (Innen-)Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt.

Hinweis: Zeichne eine geeignete parallele Gerade zu einer Seite ein.

Aufgabe A33 Neben Dreiecken und Vierecken und Fünfecken betrachtet man auch n**-Ecke** für beliebiges $n \geq 3$; statt n-Eck sagt man auch **Polygon** mit n Ecken.

Wie gross ist die Innenwinkelsumme in einem Viereck? In einem Fünfeck? In einem Sechseck? In einem n-Eck?

Beweise deine Behauptungen.

Bemerkung: Wir betrachten hier, ohne es explizit gesagt zu haben, *einfache* n-Ecke (also «nicht-überschlagene» n-Ecke). Wenn zum Beispiel $ABCD$ ein Quadrat ist, so wäre $ABDC$ ein überschlagenes 4-Eck.

Satz 2.15.6 Winkelsumme in Dreieck und n-Eck

Die (Innen-)Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt ✎

Allgemeiner beträgt die (Innen-)Winkelsumme in jedem (einfachen) n-Eck ✎

Beweis: Siehe Lösungen der Aufgaben A32 und A33.

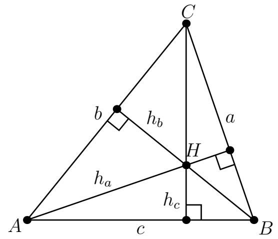
Aufgabe A34 Satz über den Höhenschnittpunkt 2.15.7. Beweise, dass sich in jedem Dreieck die drei Höhen in einem Punkt schneiden, dem sogenannten **Höhenschnittpunkte** H.

Hinweis: Zeichne durch jeden der drei Eckpunkte des Dreiecks eine Parallele zur gegenüberliegenden Dreiecksseite. Die Schnittpunkte dieser drei Geraden bilden eine neues «grosses» Dreieck. Was fällt dir auf?

Antwort: Die Höhen des Ausgangsdreiecks sind die … des grossen Dreiecks. Begründe dies! Warum ist man dann sofort fertig? Welchen «alten» Satz kann man verwenden.

Satz 2.15.7 Höhenschnittpunkt

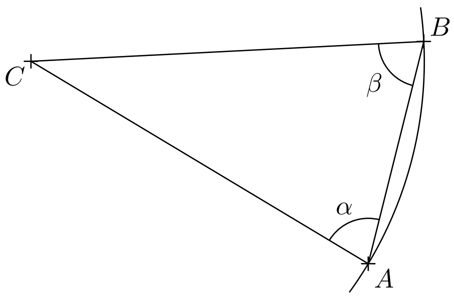
In jedem Dreieck ABC schneiden sich die drei Höhen h_a, h_b und h_c in einem Punkt, dem sogenannten **Höhenschnittpunkt** H.



Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe A34.

Gleichschenklige Dreiecke

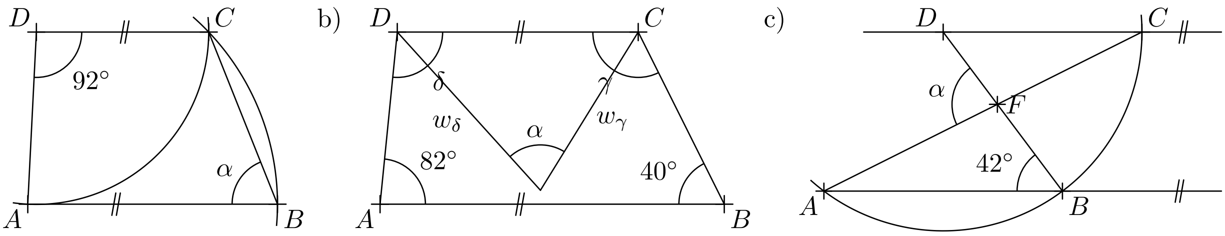
Ein Dreieck heisst genau dann **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die beiden Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind dann gleich gross (also $\alpha = \beta$ in der Zeichnung rechts).
Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich gross sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.
Ein Beweis dieser elementaren Aussagen findet sich in Lemma 2.12.3.



Gleichseitige Dreiecke

Ein Dreieck heisst genau dann **gleichseitig**, wenn seine drei Seiten gleich lang sind. Dann sind auch alle Winkel gleich $60°$. Umgekehrt gilt auch: Sind alle Winkel in einem Dreieck gleich gross (nämlich $60°$ wegen der Winkelsumme im Dreieck), so ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe A35 Wie gross ist jeweils der Winkel α?
Hinweis: Die Kreisbögen sollen andeuten, dass gewisse Abstände gleich sind (etwa $\overline{DA} = \overline{DC}$ in Teilaufgabe (a) und $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$ in Teilaufgabe (c)).
Bemerkung: Die angegebenen Winkel stimmen teilweise nicht, damit Sie nachdenken, anstatt Winkel mit dem Geodreieck zu messen.



Aufgabe A36 Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Zeigen Sie, dass die beiden zugehörigen Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe A37 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$ (unter Verwendung der Standard-Bezeichnungen). Finde in jedem der folgenden vier Fälle heraus, wie gross α ist.
a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$

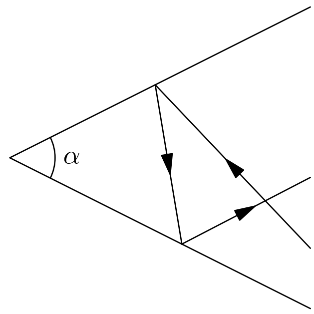
Aufgabe A38 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° + \frac{\gamma}{2}$.
Die zwei möglichen Wahlen dieses Winkels ergänzen sich zu $180°$.

Aufgabe A39

Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*



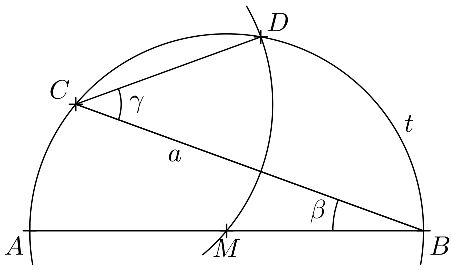
Aufgabe A40

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\to D$

(a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β.
Hinweis: Verwenden Sie das Dreieck $\triangle MCD$.

(b) Für welchen Winkel β gilt $CD \parallel AB$? Hinweis: Dies benötigt das Kriterium für Parallelität von Geraden.

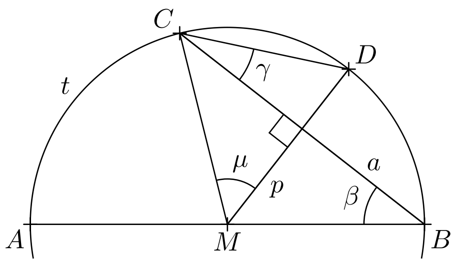


Aufgabe A41

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $\perp$ zu a durch M $\to p$
5. $p \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle DMC$ in Abhängigkeit von β.



2.16 Kreiswinkelsätze

Aufgabe A42 Entdecke die Aussagen der unten erklärten Kreiswinkelsätze selbst!

(a) Wähle zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt.
  (i) Markiere mindestens 10 Punkte P, für die $\sphericalangle APB = 90°$ gilt.
  Empfohlenes Vorgehen: Stelle dir vor, dass sich zwei Stecknadeln an den Punkten A und B befinden. Nimm dein Geodreieck als «Schablone für einen 90°-Winkel» und bewege es so, dass sich seine beiden Katheten entlang der Stecknadeln bewegen.
  (ii) Stelle eine Vermutung auf, wie die Menge $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 90°\}$ aussieht.

(b) Wähle nun zwei Punkte A und B mit Abstand 7 cm.
  (i) Markiere mindestens 10 Punkte P, für die $\sphericalangle APB = 45°$ gilt.
  Empfohlenes Vorgehen: Verwende wieder das Geodreieck als «Schablone für einen 45°-Winkel».
  (ii) Stelle eine Vermutung auf, wie die Menge $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 45°\}$ aussieht.
  (iii) Falls du bei der vorigen Teilaufgabe einen Kreis oder Kreisbogen vermutet hast: Konstruiere seinen Mittelpunkt M und miss den Winkel $\sphericalangle AMB$. Fällt dir etwas auf?
  Hinweis: Aus drei verschiedenen Punkten eines Kreises kann man leicht den Mittelpunkt konstruieren.

(c) Wähle einen beliebigen Winkel α zwischen 10° und 80° (mit $\alpha \neq 45°$). Ersetze in der vorigen Teilaufgabe den Winkel 45° durch den Winkel α und löse die Aufgabe.
Hinweis: Du kannst dir entweder eine Kartonschablone für deinen Winkel α basteln oder die entsprechenden Punkte P auch wie folgt ermitteln: Lass von A einen Strahl ausgehen. Finde auf diesem Strahl einen Punkte P mit $\sphericalangle APB = \alpha$; Hinweis zu Letzterem: Winkelsumme im Dreieck ABP. Alternative: Trage in einem beliebigen Punkt des Strahls den Winkel α ab und konstruiere die Parallele zu seinem anderen Schenkel, die durch B geht.

Thales-Kreis (bzw. Thales-Halbkreis)

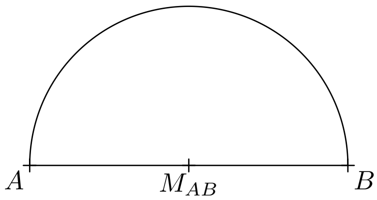
Definition 2.16.1 Thales-Kreis bzw. Thales-Halbkreis

Sind zwei verschiedene Punkte A und B gegeben, so heisst der Kreis

$$k\left(M_{AB}; \tfrac{1}{2}\overline{AB}\right)$$

Thales-Kreis. Seinen Kreisbogen von B nach A (im mathematisch positiven Drehsinn) nennen wir **Thales-Halbkreis** über der Strecke $[AB]$, vgl. die Zeichnung rechts.

Letztere Bezeichnung habe ich bisher nirgends gelesen, obwohl sie mir sehr nützlich erscheint.



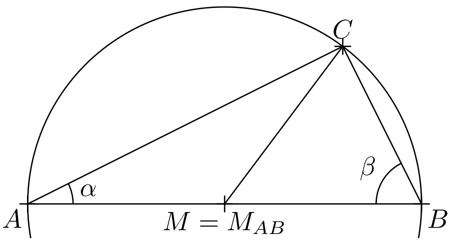
Satz 2.16.2 von Thales samt Umkehrung

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Dann gelten:

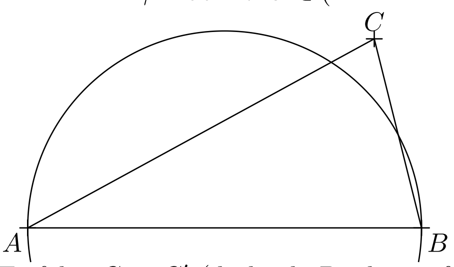
(a) Satz von Thales: Wenn der Punkt C auf dem Thales-Halbkreis über der Strecke $[AB]$ liegt, so hat das Dreieck einen rechten Winkel bei C.

(b) Umkehrung des Satzes von Thales: Hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf dem Thales-Halbkreis über der Strecke $[AB]$, d. h. mit anderen Worten ist M_{AB} der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Beweis. (a) Beweis von $C \in$ (Thales-Halbkreis) $\Rightarrow \gamma = 90°$.



(b) Beweis von $\gamma = 90° \Rightarrow C \in$ (Thales-Halbkreis).



Gelte $\sphericalangle ACB = 90°$ (Zeichnung bewusst falsch).
Sei C' der Schnittpunkt des Thales-Halbkreises mit der Geraden AC. Zeichne $[BC']$ ein.
Satz von Thales: $\sphericalangle AC'B = 90°$.
Die Gerade AC schneidet BC und BC' im selben Winkel $90°$, also sind BC und BC' parallel (Kriterium für Parallelität von Geraden 2.15.4); genauer gilt $BC = BC'$, da beide Geraden durch den Punkt B gehen.

Es folgt $C = C'$ (da beide Punkte auf AC und auf $BC = BC'$ liegen). Nach Konstruktion liegt C' auf dem Thales-Halbkreis. Also hat auch $C = C'$ diese Eigenschaft.

□

Satz 2.16.3 Umformulierung des Satzes von Thales samt Umkehrung als Gleichheit von Mengen

Sind zwei beliebige, aber verschiedene Punkte A und B gegeben, so ist der zugehörige Thales-Halbkreis der geometrische Ort aller Punkte P, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter einem Winkel von $90°$ erscheint, in Formeln

$$\text{Thales-Halbkreis} = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 90°\}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist Teil (a) von Satz 2.16.2, die Inklusion $\supset$ ist Teil (b). □

Merke 2.16.4 wohl Erinnerung

Gegeben seien ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt B auf diesem Kreis. Die **Tangente** an k im Punkt B ist die Senkrechte zu ZB durch B; diese Gerade hat die Eigenschaft, dass sie k in genau einem Punkt, nämlich B, schneidet; in anderen Worten ist die Tangente diejenige Gerade, die k im Punkt B berührt (lateinisch *tangere* = berühren).

Aufgabe A43 Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie alle Tangenten an k durch P.

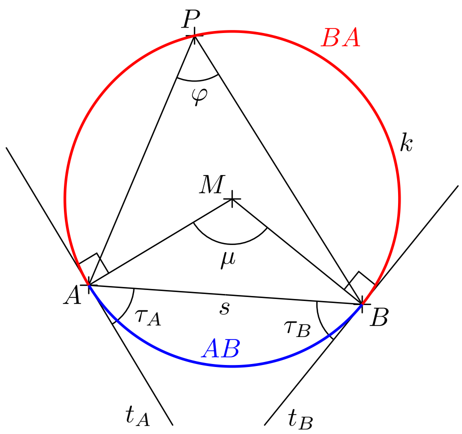
Aufgabe A44 Anschaulich: Eine Leiter lehnt fast senkrecht an einer Wand (= der y-Achse) und rutscht dann langsam ab, bis sie am Boden (= der x-Achse) liegt. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?
Abstrakt: Wählen Sie einen beliebigen Punkt A auf der x-Achse (A ist der Fusspunkt der Leiter) und (falls möglich) einen Punkt B auf der y-Achse mit $\overline{AB} = 6$ (= Länge der Leiter) und markieren Sie M_{AB}. Wenn A variiert, was ist der geometrische Ort aller Punkte M_{AB}, die man auf diese Weise erhält? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe A45 Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.
Hinweis: Vergrössert oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, so verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.

Aufgabe A46 In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ sei H_a bzw. H_b der Höhenfusspunkt der Höhe h_a bzw. h_b auf der (Verlängerung der) Seite a bzw. b. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB} H_a H_b$ gleichschenklig ist.

Sätze über Zentri-, Peripherie- und Sehne-Tangente-Winkel

Definition 2.16.5



Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis k mit Mittelpunkt M. Dann bezeichnen wir

- den Kreisbogen von A nach B (im mathematisch positiven Drehsinn) als $\overset{\frown}{AB}$; blau gefärbt; gebogener Pfeil über AB dort zu ergänzen
- den Kreisbogen von B nach A als $\overset{\frown}{BA}$. rot gefärbt

Wir nennen

- die Strecke $s = [AB]$ eine **Sehne** im Kreis k. Allgemein heisst jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten eines Kreises Sehne.
- den Winkel $\mu = \sphericalangle AMB$ **Zentriwinkel** (oder **Mittelpunktswinkel**) über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (oder über der Sehne $[AB]$).
- für jeden Punkt $P \in \overset{\frown}{BA}$ den Winkel $\varphi = \sphericalangle APB$ **Peripheriewinkel** (oder Umfangswinkel) bei P über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (oder über der Sehne $[AB]$).

In der Zeichnung sind ausserdem die Tangente t_A an den Kreis k im Punkt A und die Tangente t_B an den Kreis k im Punkt B eingezeichnet. Interessant sind die beiden Winkel zwischen Sehne $s = [AB]$ und diesen Tangenten. Wir nennen den Winkel

- τ_A **Sehne-Tangente-Winkel** bei A zum Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$;
- τ_B **Sehne-Tangente-Winkel** bei B zu $\overset{\frown}{AB}$ Gemeint ist beide Male der Winkel, der den blauen Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ «enthält».

Satz 2.16.6 Kreiswinkelsätze

Gegeben seien zwei beliebige Punkte $A \neq B$ auf einem beliebigen Kreis k mit Mittelpunkt M.
Sei $P \in \overset{\frown}{BA}$ ein beliebiger Punkt und seien $\mu = \sphericalangle AMB$, $\varphi = \sphericalangle APB$ und τ_A und τ_B wie in Definition 2.16.5. Dann gelten

$$\varphi = \frac{1}{2}\mu = \tau_A = \tau_B \qquad \text{oder gleichbedeutend} \qquad \mu = 2\varphi = 2\tau_A = 2\tau_B$$

In Worten:

(1) **Peripheriewinkel-Satz:** Alle Peripheriewinkel über einem fixierten Kreisbogen sind gleich gross, nämlich halb so gross wie der entsprechende Zentriwinkel. (Denn unabhängig von der Wahl des Punktes $P \in \overset{\frown}{BA}$ gilt $\sphericalangle APB = \varphi = \frac{1}{2}\mu$ und der Zentriwinkel μ hängt offensichtlich nicht von P ab.)

(2) **Sehne-Tangente-Winkel-Satz:** Die beiden Sehne-Tangente-Winkel sind gleich gross und genauso gross wie jeder Peripheriewinkel über dem zugehörigen Kreisbogen.

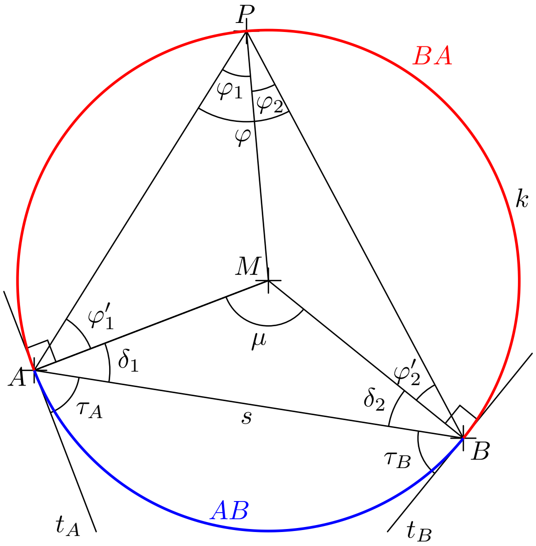
(3) **Zentriwinkel-Satz:** Der Zentriwinkel über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ ist doppelt so gross wie jeder Peripheriewinkel/wie jeder der beiden Sehne-Tangente-Winkel.

2.16.7. Beachte: Der Peripheriewinkel-Satz liefert den Satz von Thales 2.16.2.(a) als Spezialfall: Wenn die Sehne $[AB]$ ein Durchmesser ist (also durch den Mittelpunkt M des Kreises geht), so beträgt der Zentriwinkel $180°$ und somit jeder Peripheriewinkel $\frac{180°}{2} = 90°$.

Beweis. Zu zeigen ist

$$\mu = 2\varphi = 2\tau_A = 2\tau_B$$

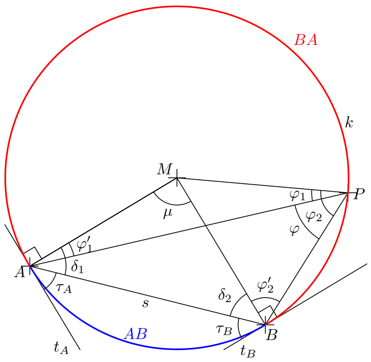
Wir verbinden P mit M und verwenden die Winkel φ_1, φ_2, φ_1', φ_2', δ_1 und δ_2 (siehe Zeichnung). ✎



□

2.16.8. Genaugenommen muss man die Kreiswinkelsätze noch in den beiden folgenden Fällen beweisen. Die Argumentation geht fast genauso wie in dem obigen Beweis.

Das Dreieck ABM ist nicht im Dreieck ABP enthalten.



Der betrachtete Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ ist länger als der halbe Kreisumfang; mit anderen Worten ist der Zentriwinkel $\mu > 180°$.

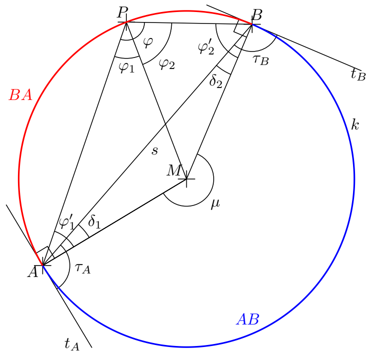
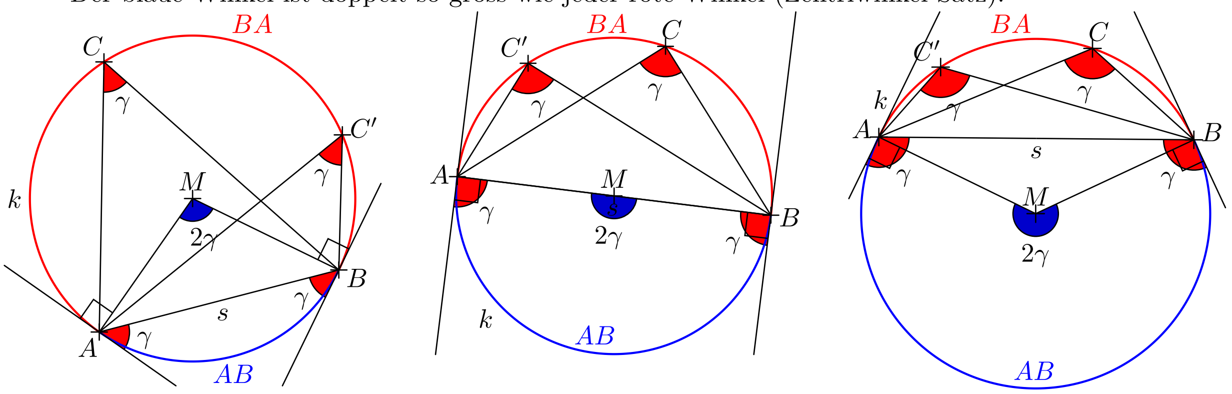


Illustration 2.16.9 der Kreiswinkelsätze

Die folgenden drei Bilder illustrieren die Kreiswinkelsätze in den Fällen, dass der Zentriwinkel über dem betrachteten blauen Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ kleiner als 180° bzw. gleich 180° (Thales-Fall, Kreisbogen ist Halbkreis, Sehne ist Durchmesser) bzw. grösser als 180° ist. Jeweils gelten:

- Alle roten Winkel sind gleich gross (Peripheriwinkelsatz und Sehne-Tangente-Winkel-Satz).
- Der blaue Winkel ist doppelt so gross wie jeder rote Winkel (Zentriwinkel-Satz).



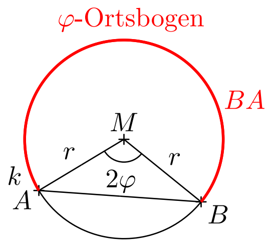
Ortsbogen

Satz 2.16.10 Umkehrung des Peripheriewinkel-Satzes

Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$.
Ist P ein beliebiger Punkt der Zeichenebene mit $\sphericalangle APB = \varphi$, so liegt P auf dem (in der nachfolgenden Definition 2.16.11 definierten) φ-Ortsbogen über $[AB]$.

Beweis. Der Beweis geht vollkommen analog zum Beweis der Umkehrung des Satzes von Thales (Teil (b) von Satz 2.16.2): Man ersetze den dortigen Winkel 90° durch φ, das Wort «Thales-Halbkreis» durch das Wort «φ-Ortsbogen» und verwende statt des Satzes von Thales den Peripheriewinkel-Satz. □

Definition 2.16.11 Ortsbogen zu einem Winkel φ



Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$. Beachte: Es gibt genau einen Punkt M der Zeichenebene mit (vgl. Aufgabe A47)

$$\overline{MA} = \overline{MB} \quad \text{und} \quad \sphericalangle AMB = 2\varphi$$

Dann ist der **φ-Ortsbogen über der Strecke** $[AB]$ definiert als der Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$ des Kreises $k = k(M, r)$ mit Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Statt des rot geschriebenen BA sollte in der Zeichnung $\overset{\frown}{BA}$ stehen.

Satz 2.16.12 Umformulierung des Peripheriewinkelsatzes samt Umkehrung als Gleichheit von Mengen

Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$. Dann ist der φ-Ortsbogen über $[AB]$ der geometrische Ort aller Punkte P, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter dem Winkel φ erscheint, in Formeln

$$(\varphi\text{-Ortsbogen}) = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = \varphi\}$$

Daher der Name φ-Ortsbogen: Es handelt sich um einen geometrischen Ort und dieser ist ein Kreisbogen.

Beweis. Die Inklusion $\subset$ (d. h. die linke Menge ist in der rechten enthalten) ist der Peripheriewinkel-Satz 2.16.6, die Inklusion $\supset$ (d. h. die rechte Menge ist in der linken enthalten) ist seine Umkehrung, Satz 2.16.10. □

Aufgabe A47 Wählen Sie zwei beliebige Punkte A und B, die mindestens 8 cm voneinander entfernt liegen.

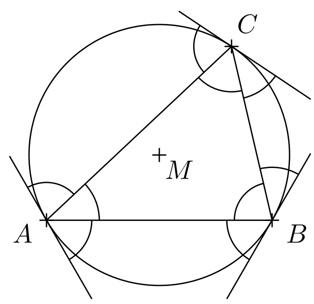
(a) Gegeben ist der Winkel $\varphi = 65°$. Konstruieren Sie den Punkt M, der die beiden Bedingungen $\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\sphericalangle AMB = 2\varphi$ aus Definition 2.16.11 erfüllt.
Zeichnen Sie damit den 65°-Ortsbogen über der Strecke $[AB]$.

(b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe mit $\varphi = 115°$.
Achtung: Der Punkt M liegt nicht «oberhalb» der Strecke $[AB]$, der 115°-Ortsbogen aber schon!

2.17 Aufgaben zu den Kreiswinkelsätzen (inklusive Ortsbögen)

Aufgabe A48

Gegeben ist ein Dreieck ABC samt Umkreis mit Umkreismittelpunkt im Inneren und Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten wie in der Skizze angedeutet. Welche der neun markierten Winkel sind gleich gross? Markieren Sie gleich grosse Winkel mit derselben Farbe.



Aufgabe A49 Sie befinden sich auf einem Boot auf dem Bodensee und sehen die Strecke Arbon-Rorschach unter einem Winkel von $\alpha = 70°$ (d.h. $\sphericalangle$(Arbon)(Boot)(Rorschach) $= 70°$) und die Strecke Rorschach-Staad unter einem Winkel von $\beta = 45°$. (Solche Winkel-Messungen führt man wohl mit einem Sextanten durch.) Konstruieren Sie in die folgende «Seekarte» des Bodensees den Punkt, an dem sich Ihr Boot befindet. Gerne dürfen Sie die Seekarte durch die ungefähre Uferlinie ergänzen.

Aufgabe A50 Wenn von einem Dreieck ABC die folgenden Daten bekannt sind, konstruieren sie jeweils das Dreieck oder die Dreiecke mit diesen Daten (Einheit jeweils 2 Häuschen oder 1cm).

(a) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $h_c = 4$
(b) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40°$
(c) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70°$

Aufgabe A51 Definition: Ein Viereck $ABCD$ heisst **Sehnenviereck**, wenn es einen geeigneten Kreis k gibt, so dass die vier Eckpunkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen. Der Name *Sehnenviereck* kommt daher, dass die vier Seiten des Vierecks *Sehnen* des Kreises k sind.

(a) Zeigen Sie: Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck, so ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180° (d.h. $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$).
Hinweis: Peripheriewinkel-Satz oder Sehne-Tangente-Satz; betrachte die Sehne AC und die *beiden* Kreisbögen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CA}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $ABCD$ ein nicht-überschlagenes Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen, so ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.
Hinweis: Betrachte den Umkreis des Dreiecks ABC und verwende die Umkehrung des Peripheriewinkel-Satzes.
Ein «überschlagenes» Viereck ist ein Viereck mit zwei gegenüberliegenden Seiten, die sich schneiden. Beispiel: Ist $WXYZ$ ein Quadrat oder Rechteck, so sind $WXZY$ und $WYXZ$ überschlagene Vierecke.

Bemerkung: Dies liefert die folgenden Charakterisierung von Sehnevierecken: Ein nicht-überschlagenes Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen (dies muss man nur bei einem Paar sich gegenüberliegender Winkel checken).

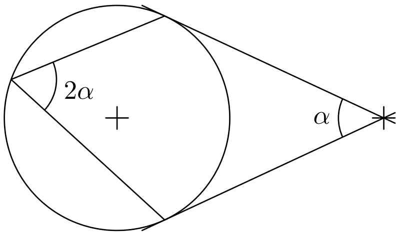
Aufgabe A52 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in einem Punkt B von aussen berühren. Durch den Punkt B wird eine Gerade g gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade g schneidet den Kreis k_1 bzw. k_2 in einem weiteren Punkt T_1 bzw. T_2. Sei t_1 bzw. t_2 die Tangente an k_1 bzw. k_2 im Punkt T_1 bzw. T_2.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

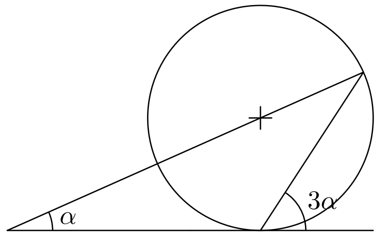
b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

Aufgabe A53 Berechnen Sie den Winkel α:

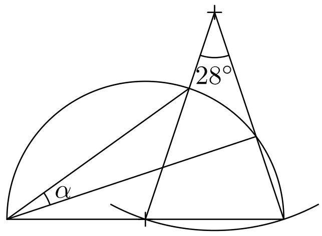
a)



b)



c)



Aufgabe A54 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten A und B schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade g durch A gegeben, die jeden der beiden Kreise in einem weiteren Punkt schneidet. Sei C der „neue" Schnittpunkt von g und k_1 und sei D der „neue" Schnittpunkt von g und k_2.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie g durch A gelegt wird.

Aufgabe A55 Diese Aufgabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben sind ein Kreis k und vier beliebige Punkte $A, B, C, D \in k$, so dass sich die Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ nicht schneiden.

Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll mit gleichbleibender Länge auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt C auf k und gegebenem Radius. Der Punkt D ist dann ein Schnittpunkt der beiden Kreise.

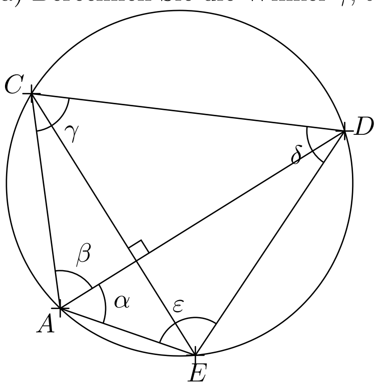
Sei X der Diagonalenschnittpunk des Vierecks $ABCD$.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf k wandert, wo liegen dann alle Punkte X? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

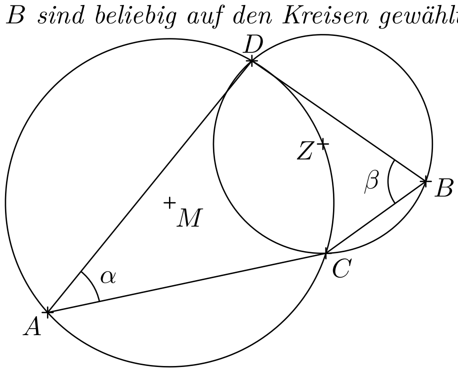
Aufgabe A56 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt A wird die Tangente t an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn α, β und γ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Anzugeben ist δ in Abhängigkeit von zwei beliebigen der drei Winkel α, β und γ.*

Aufgabe A57

a) Berechnen Sie die Winkel γ, δ und ε aus α und β:



b) Wie hängen α und β zusammen? *Hinweis: A und B sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*



Aufgabe A58 Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich nicht schneiden und nicht ineinander liegen. Es gibt also zwei äussere gemeinsame Tangenten t_1 und t_2 und zwei innere gemeinsame Tangenten t_3 und t_4. Jede innere Tangente schneidet jede äussere Tangente; dies ergibt vier Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass diese vier Schnittpunkte auf einem Thaleskreis über der Strecke $[Z_1Z_2]$ liegen.

Machen Sie dazu eine gute Skizze mit Zirkel und Lineal, die gemeinsamen Tangenten brauchen aber nicht konstruiert zu werden.

Aufgabe A59 Beweisen Sie: In jedem Dreieck ABC gilt $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$, wobei u der Umkreis des Dreiecks ist.

Aufgabe A60 Gelernt aus Rademacher-Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Seite 20f.

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so hat das aus den Höhenfusspunkten gebildete Dreieck EFG die Reflexionseigenschaft = Billard-Eigenschaft: Der Strahl von jedem Höhenfusspunkt zu jedem der beiden anderen Höhenfusspunkte wird von der entsprechenden Dreiecksseite zum dritten Höhenfusspunkt reflektiert.

2.18 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-beweis-kongruenzsaetze

(a) siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Kongruenzsatz

(b)
- sSw liefert keinen Kongruenzsatz: An der längeren Seite S kann man an einem Endpunkt den Winkel w abtragen (und bekommt so einen von diesem Endpunkt ausgehenden Strahl) und um den anderen Endpunkt einen Kreis mit Radius s zeichnen. Dieser Kreis schneidet den Strahl in keinem, genau einem (führt zu rechtwinkligem Dreieck) oder genau zwei Punkten. Im Allgemeinen ist das Dreieck also nicht eindeutig bestimmt.
- www liefert keinen Kongruenzsatz: Dies ist klar, denn man kann eine beliebig lange Grundseite wählen und an deren Endpunkten die gegebenen zwei Winkel abtragen. So erhält man verschieden grosse Dreiecke mit denselben Winkeln.
  Solche Dreiecke werden wir später «ähnlich Dreiecke» nennen.

Lösung zu A2 ex-beweise-zur-geom-orte-tabelle

Sei $M = M_{AB}$ der Mittelpunkt von A und B. Per Definition ist m_{AB} die Senkrechte zu AB durch M.

(a) Wir nehmen an, dass $\overline{AM} = \overline{BM}$ gilt. Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke AMP und BMP angewendet ergibt

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2} \overset{\text{verwende } \overline{AM}=\overline{BM}}{=} \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{MP}^2} = \overline{PB}$$

(b) Wir nehmen an, dass $\overline{PA} = \overline{PB}$ gilt. Fälle das Lot von P auf die Gerade AB und nenne den Fusspunkt des Lots S (das ist der Schnittpunkt des Lots mit der Geraden AB). Die beiden Dreiecke ASP und BSP sind rechtwinklig und Pythagoras liefert

$$\overline{AS}^2 + \overline{SP}^2 = \overline{PA}^2 \overset{\text{wegen } \overline{PA}=\overline{PB}}{=} \overline{PB}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SP}^2$$

Zieht man auf beiden Seiten $\overline{SP}^2$ ab, so folgt $\overline{AS}^2 = \overline{BS}^2$ und daraus $\overline{AS} = \overline{BS}$. Also gilt $S = M$ und somit $P \in m_{AB}$.

Lösung zu A3 ex-grundkonstruktionen

Das sollten Sie selbst schaffen.

Lösung zu A4 ex-kb-abstand-p-g

Gegeben: Gerade g, Punkt P (mit $P \notin g$).

1.	Wähle $r > \overline{Pg}$	$\to r$
2.	$k(P, r)$	$\to k$
3.	$k \cap g$	$\to A, B$
4.	M_{AB}	$\to Q$
5.	$\overline{PQ}$	$\to \overline{Pg}$

Wir erläutern noch, warum $\overline{Pg} = \overline{PQ}$ gilt, d. h. warum der kleinste Abstand von P zu g durch den Punkt $Q \in g$ realisiert wird.

Beachte dazu: Weil P denselben Abstand zu A und B hat, gilt $P \in m_{AB}$. Wegen $Q = M_{AB} \in m_{AB}$ steht also $(PQ) = m_{AB}$ senkrecht auf g.

Ist nun $R \in g$ ein beliebiger Punkt mit $Q \neq R$, so ist das Dreieck PQR rechtwinklig mit Hypotenuse $\overline{PR}$. Die Hypotenuse in jedem rechtwinkligen Dreieck ist aber länger als jede der Katheten (nach Pythagoras gilt $c^2 = a^2 + b^2 > a^2$, also $c > a$). Also gilt $\overline{PR} > \overline{PQ}$.

Also ist Q der Punkt auf g, der den geringsten Abstand zu P hat.

Lösung zu A5 ex-kb-strecke-abtragen

Gegeben: Strecke $[AB]$, Gerade g mit Punkt $P \in g$.

1.	$\overline{AB}$	$\to r$
2.	$k(P, r)$	$\to k$
3.	$k \cap g$	$\to C,\ D$

Lösung zu A6 ex-kb-gleichseitiges-dreieck

Gegeben: Länge $s = 5$ cm.

1.	Punkt A wählen	$\to A$
2.	Gerade c durch A wählen	$\to c$
3.	s von A auf g abtragen	$\to B_1,\ B_2$
4.	$k(A, s)$	$\to k_1$
5.	$k(B_1, s)$	$\to k_2$
6.	$k_1 \cap k_2$	$\to C_1,\ C_2$

Lösung: ΔAB_1C_1.

Lösung zu A7 ex-konstruktion-fuenfeck

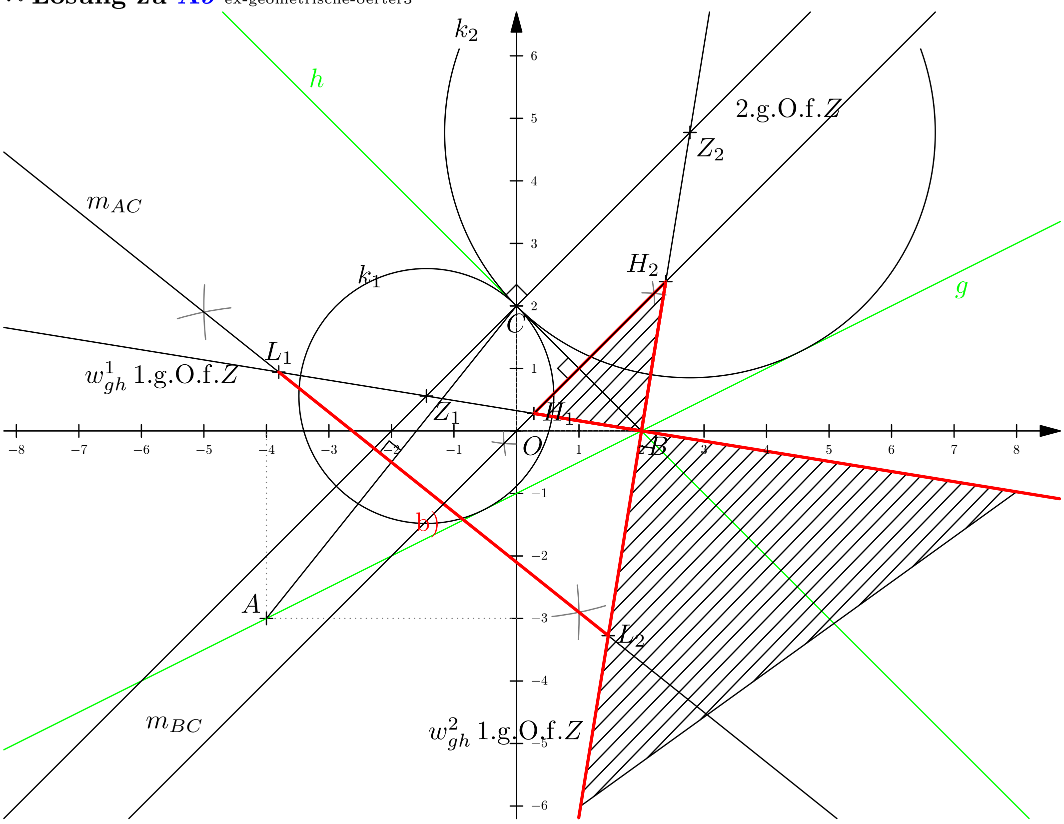
Das sollten Sie selbst schaffen.

Lösung zu A8 ex-kb-penta-aus-seite

Gegeben: Punkte A, B.

1.	Senkrechte zu AB durch A	$\to h$
2.	$k(A, \overline{AB})$	$\to k_1$
3.	$k_1 \cap h$	$\to H$
4.	$k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$	$\to J$
5.	$k(B, \overline{BJ})$	$\to k_2$
6.	$k_1 \cap k_2$	$\to E$
7.	$m_{AB} \cap k_2$	$\to D$
8.	$k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$	$\to C$

Lösung zu A9 ex-geometrische-oerter3



(a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

1. w_{gh}^1, w_{gh}^2 → 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu h durch C → 2.g.O.f.Z
3. Schnitt der beiden geom. Orte für Z → Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$ → zwei Kreise, Lösungen zu a)

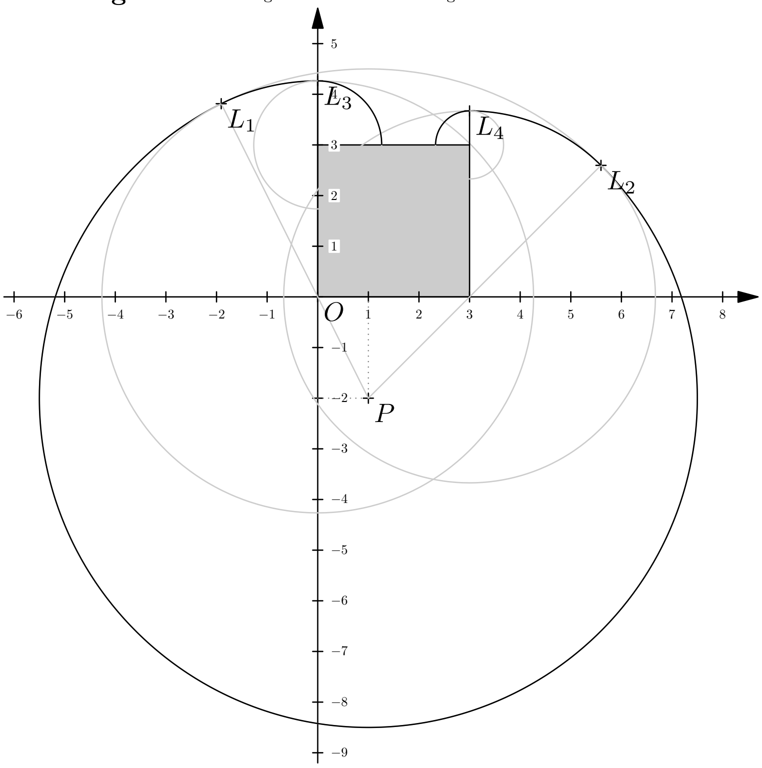
(b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

1. $m_{AC} \cap w_{gh}^1$, $m_{AC} \cap w_{gh}^2$ → L_1, L_2]
2. $[L_1, L_2]$ → Verbindungsstrecke, Lösung zu b)

(c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1. $m_{BC} \cap w_{gh}^1$, $m_{BC} \cap w_{gh}^2$ → H_1, H_2
2. Schraffierte Fläche → Lösung zu c)

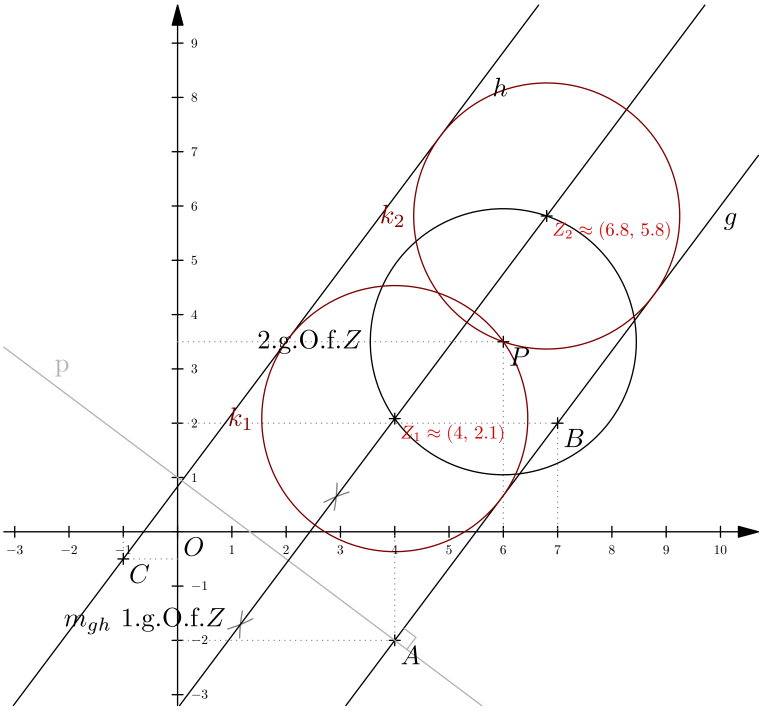
Lösung zu A10 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ → k_1
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ → L_1 und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ → k_2 und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ → L_3 und L_4

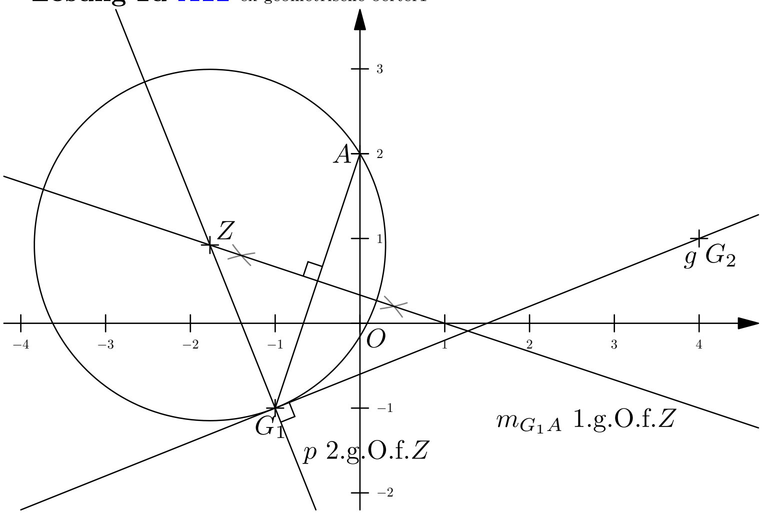
Lösung zu A11 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\quad\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\quad\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\quad\rightarrow Z_1, Z_2$
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\quad\rightarrow$ 2 Lösungen

Lösung zu A12 ex-geometrische-oerter1

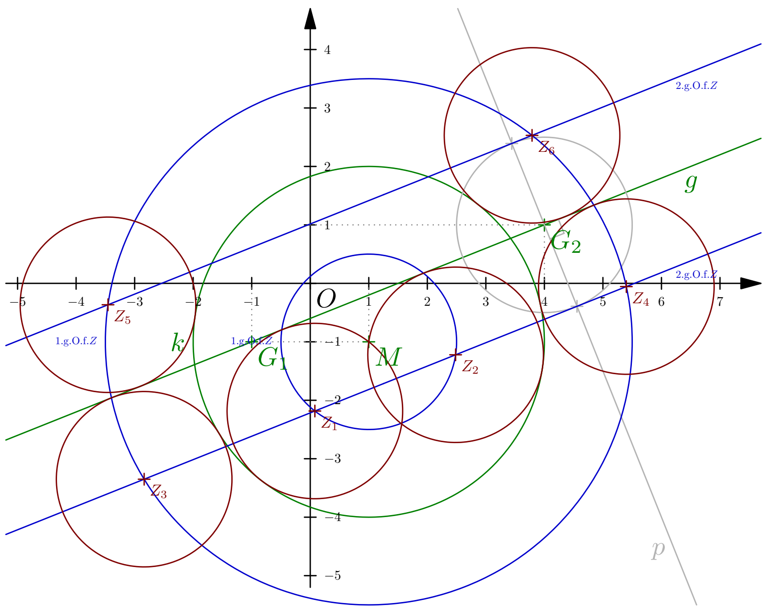


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\quad\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\quad\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\quad\rightarrow$ 1 Lösung

Lösung zu A13 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\to$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\to$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\to$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu A14 ex-beweis-innkreis

Sei I der Schnittpunkt von w_α und w_β. Nach der Charakterisierung von w_α und w_β als geometrischer Ort (siehe Tabelle) gelten (wobei wir a für die Gerade (BC) schreiben etc.)

$$\overline{Ib} = \overline{Ic} = \overline{Ia} \qquad \text{also } \overline{Ib} = \overline{Ia}$$

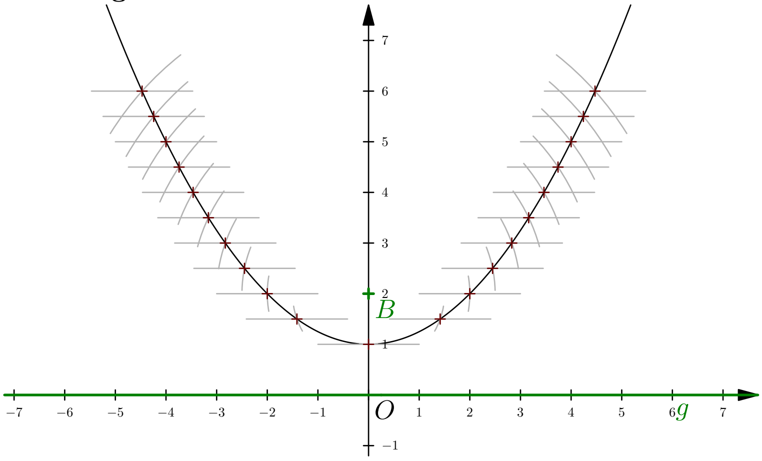
Dies bedeutet $I \in w_\gamma$.

Also liegt I auf allen drei Winkelhalbierenden, die sich somit in einem Punkt, nämlich I, schneiden.

Dass der Kreis um I mit Radius $\overline{Ib} = \overline{Ic} = \overline{Ia}$ die «Dreiecksseitengeraden» a, b, c berührt, ist nun klar (das verwendet 2.7.2).

Dass er in Wirklichkeit die Dreiecksseiten (und nicht nur die verlängerten Geraden) berührt, benötigt wohl ein separates Argument: Am einfachsten scheint mir das Argument, dass die Dreiecksseitengerade die Zeichenebene in 7 Gebiete zerlegen (eines davon das Dreieck). Jede Winkelhalbierende liegt in genau zwei dieser Gebiete und auf einer Dreiecksecke. Der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden muss dann im Inneren des Dreiecks liegen. (Geht das einfacher?)

Lösung zu A15 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken



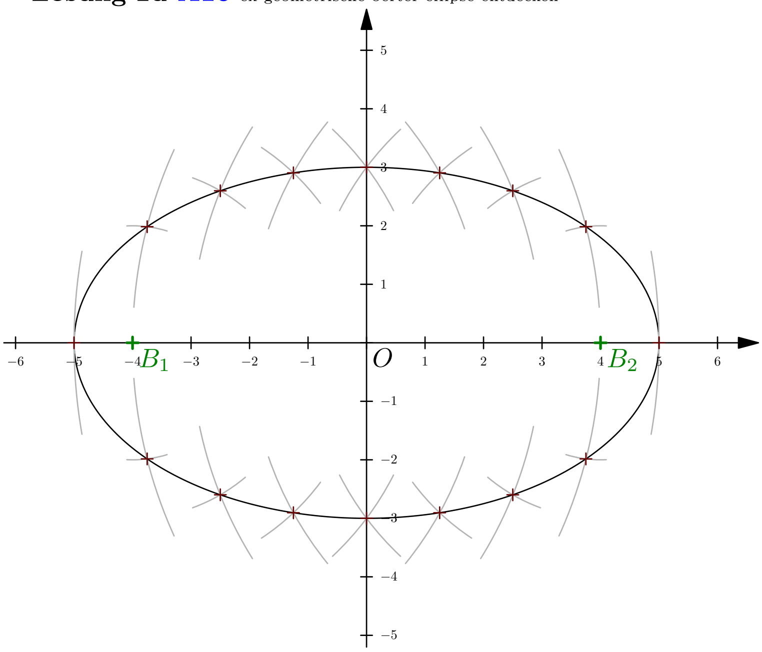
(a)-(c) Für alle halbzahligen d zwischen 1 und 6 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\quad\rightarrow p$
2. $k(B, d) \cap p$ $\quad\rightarrow P_1$, P_2 (nur ein Schnittpunkt für $d = 1$)

(d) «Die Menge alle Punkte der Zeichenebene, die von B und ℓ denselben Abstand haben.» oder: «Der geometrische Ort aller Punkte der Zeichenebene, die von B und ℓ denselben Abstand haben.»

(e) Siehe Zeichnung. Die gesuchte Punktmenge ist eine «gekrümmte Kurve», die nirgends einen Knick hat. Diese Kurve ist ein Beispiel einer **Parabel**.

Lösung zu A16 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



(a) Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

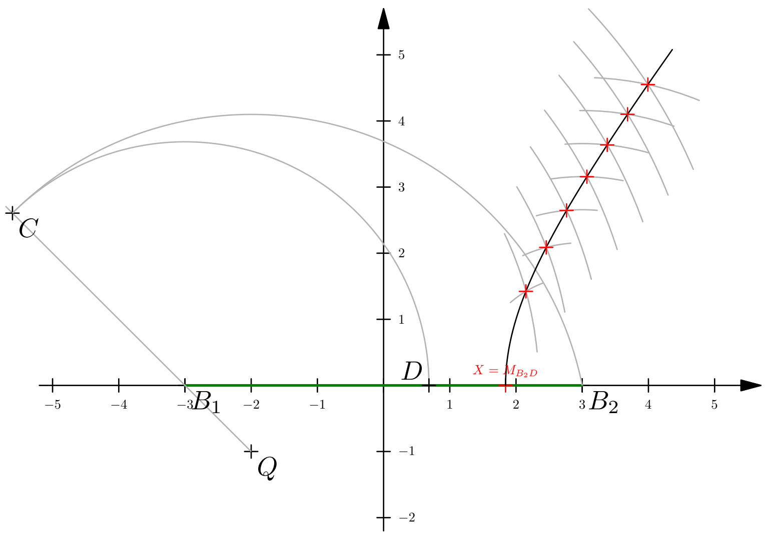
1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\quad\rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

(b) Siehe Zeichnung. Die gesuchte Punktmenge ist eine «gekrümmte Kurve» und heisst **Ellipse**. Sie hat nirgends einen Knick!

(c) «Die Menge aller Punkte der Zeichenebene, für die die Summe der Abstände zu den Punkte B_1 und B_2 genau 10 beträgt.» oder «Der geometrische Ortaller Punkte der Zeichenebene, für die die Summe der Abstände zu den Punkte B_1 und B_2 genau 10 beträgt.»

(d) Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10+\overline{B_1B_2} = 10+8 = 18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.
Diese Konstruktion heisst auch *Gärtnerkonstruktion der Ellipse* (Gärtner verwenden zwei Pflöcke und ein Seil).

Lösung zu A17 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



(a) Zuerst wird der Punkt D auf $[B_1B_2]$ konstruiert, der via B_1 so weit von Q entfernt, wie der Punkt B_2 von Q entfernt ist. Der Mittelpunkt von D und B_2 ist dann X:
   1. $k(Q, \overline{QB_2}) \cap [QB_1 \quad \rightarrow C$
   2. $k(B_1, \overline{B_1C}) \cap [B_1B_2] \quad \rightarrow D$
   3. $M_{B_2D} \quad \rightarrow X$

(b) Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt (es gibt auch andere Konstruktionsmöglichkeiten):
   1. $k(B_1, d + \overline{B_1X}) \cap k(B_2, d + \overline{B_2X}) \quad \rightarrow$ 1 Punkt oberhalb von B_1B_2

(c) Siehe Zeichnung. Die entstehende Kurve (ein halber **Hyperbelast**) hat keinen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X steht senkrecht zur Mauer.

(d)
$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB_1} + \overline{B_1Q} = \overline{PB_2} + \overline{B_2Q}\}$$

Alternative (ziehe auf beiden Seiten der geforderten Gleichung $\overline{B_1Q}$ und $\overline{PB_2}$ ab):

$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \underbrace{\overline{B_2Q} - \overline{B_1Q}}_{\text{diese Zahl ist konstant}}\}$$

Beachte, dass der unterklammerte Ausdruck nur von B_1, B_2 und Q abhängt. Er stimmt auch mit $\overline{XB_1} - \overline{XB_2}$ überein.

Lösung zu A18 ex-geometrische-orte-apollonius

(a) (Zeichnung zu ergänzen)
(b) $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PA} = 2\overline{PB}\}$.
(c) Es handelt sich um einen Kreis mit Mittelpunkt $(2, 0)$ und Radius 4, den sogenannten **Apolloniuskreis**. (Der Beweis, dass es sich wirklich um einen Kreis handelt, folgt später.)

Lösung zu A19 ex-hyperbelnavigation

Sie befinden sich auf einem Hyperbelast.

Genauer: An jedem Punkt P, an dem Sie sich befinden könnten, ist der Abstand zu A um 343 m kürzer als der Abstand zu B, als Formel (in der Einheit Meter)

$$\overline{PA} + 343 = \overline{PB}$$

oder umgeschrieben

$$343 = \overline{PB} - \overline{PA}$$

Die Menge aller Punkte P mit der Eigenschaft

$$343 = |\overline{PB} - \overline{PA}|$$

ist die Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der Abstandsdifferenz 343.
Der näher bei A liegende Ast dieser Hyperbel ist die Menge aller Punkte P mit

$$343 = \overline{PB} - \overline{PA}$$

Auf diesem Hyperbelast befinden sie sich.

Lösung zu A20 ex-geometrische-oerter-ellipse1

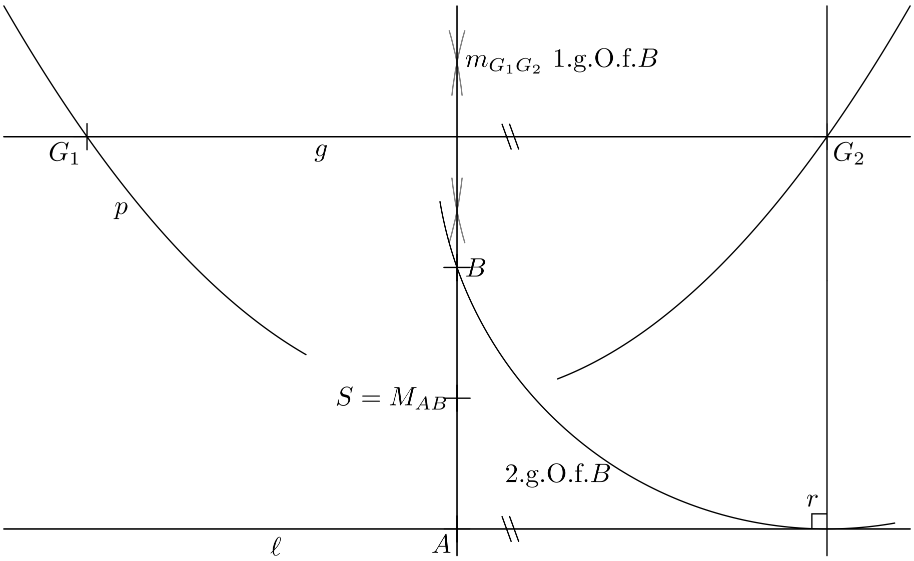
Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.
Es gilt also $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ell$, bzw. $\overline{AC} + \overline{BC} = \ell - \overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell - \overline{AB}$.

Lösung zu A21 ex-geometrische-oerter-parabel1

(a) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP} = \overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.
(b) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Senkrechte zu g durch P.

Lösung zu A22 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parabel konstruiert. Es gilt: $B \in a$. Danach wird ein Punkt $Q \in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell} = \overline{QB}$ genutzt.



1.	Wähle G_1 auf p	$\rightarrow G_1$
2.	Parallele zu ℓ durch G_1	$\rightarrow g$
3.	$g \cap p$	$\rightarrow G_2$
4.	$m_{G_1G_2}$	$\rightarrow$ 1.g.O.f.B
5.	$k(G_2, \overline{G_2\ell})$	$\rightarrow$ 2.g.O.f.B
6.	$m_{G_1G_2} \cap \ell$	$\rightarrow A$
7.	M_{AB}	$\rightarrow$ Scheitel S

Lösung zu A23 ex-geometrische-oerter-ellipse2

Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

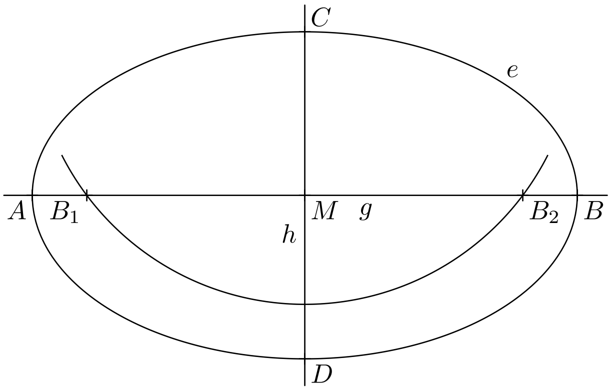
Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g \quad \to B_1, B_2$



Lösung zu A24 ex-geom-ort-winkelhalbierende

Ein Kreis, der zwei Geraden berührt, muss sein Zentrum Z auf der Winkelhalbierenden haben. Die Konstruktion des Kreiszentrums und des Kreises ist wie folgt:

1. c → 1.g.O.f.Z
2. w_γ → 2.g.O.f.Z
3. $c \cap w_\gamma$ → Z
4. Lot/Senkrechte zu b durch Z → g
5. $g \cap b$ → Berührungspunkt P
6. $k(Z, \overline{ZP})$ → 1. Lösung

Lösung zu A25 ex-geometrische-oerter5

a)
1. w_{gh}^1, w_{gh}^2 → 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 → 2.g.O.f.Z

Es gibt 4 Lösungen.

b)
1. Kreise $k(M_1, 3 \pm 1)$ → 1.g.O.f.Z
2. Kreise $k(M_1, 2.5 \pm 1)$ → 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 6 Lösungen.

c)
1. Kreise $k(M, 3 \pm 1)$ → 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 → 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 7 Lösungen.

Lösung zu A26 ex-reflexion-an-kreis

1. $g \cap k$ → T
2. Senkrechte zu ZT durch T → Tangente t
3. $\vartheta = \sphericalangle(g, t)$ → Einfallswinkel θ (theta)
4. ϑ an t bei T abtragen → Lösung r

Lösung zu A27 ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1. $k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$ → k_1, 1.g.O.f.B_2
2. $k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$ → k_2, 2.g.O.f.B_2
3. $k_1 \cap k_2$ → 2 Lösungen

b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von B_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2. Alle Punkte B_2 liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten P_1 und P_2 und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

Lösung zu A28 ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

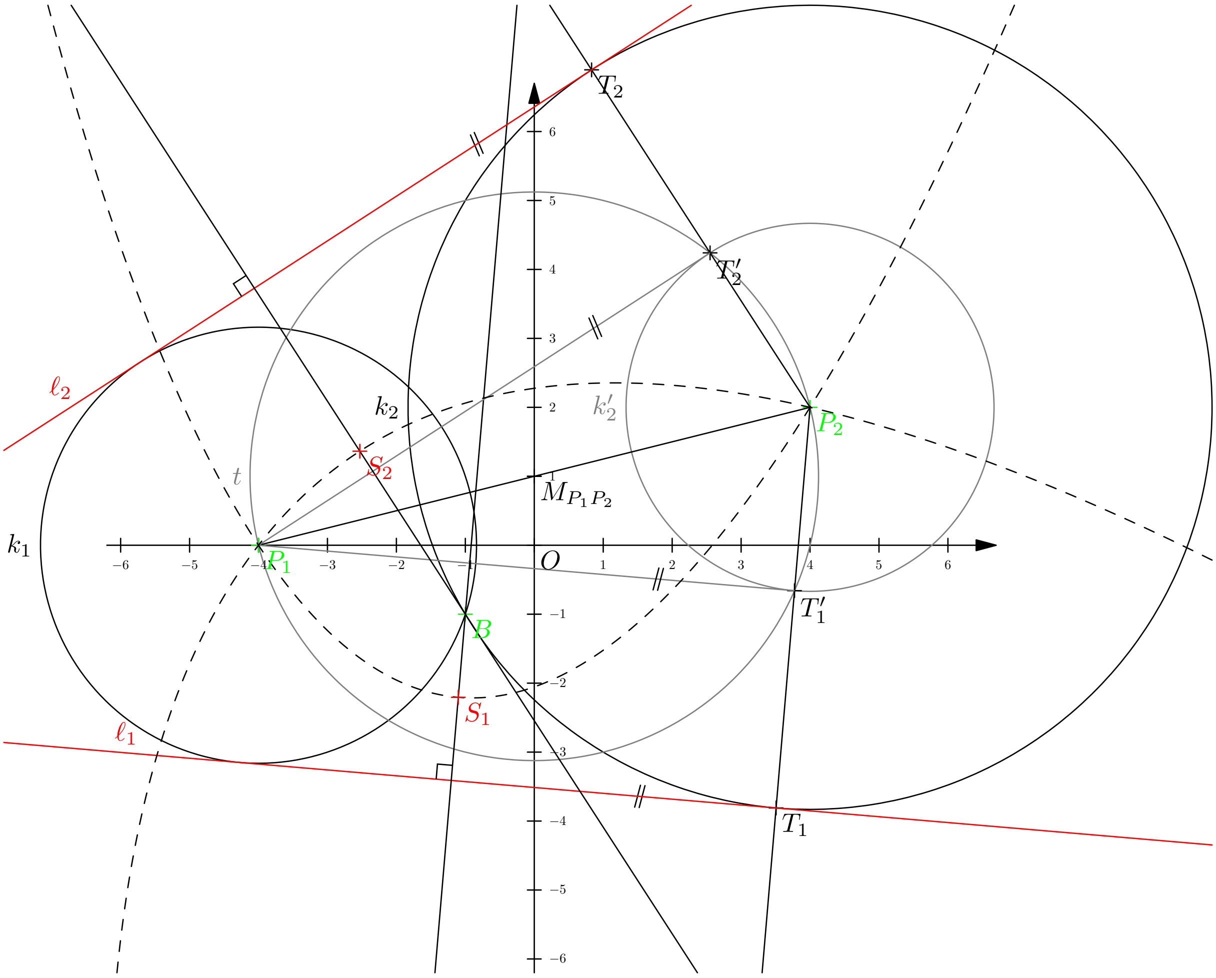
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf Z_1Z_2 und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar r_3 nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte Z_3 liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten Z_1, Z_2 und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

Lösung zu A29 ex-geom-ort-kegelschnitte3

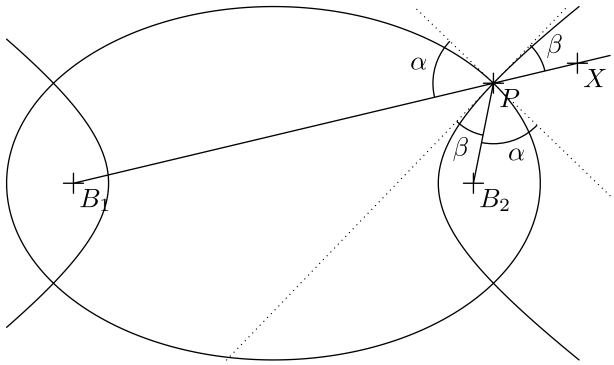
Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss ℓ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für P_2. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in B), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



1. $k(P_1, \overline{P_1B}$ $\to k_1$
2. $k(P_2, \overline{P_2B}$ $\to k_2$
3. $k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$ $\to k_2'$
4. Thaleskreis über $[P_1P_2]$ $\to t$
5. $t \cap k_2'$ $\to T_1'$, T_2'
6. $[P_2T_1' \cap k_2$ $\to T_1$
7. $[P_2T_2' \cap k_2$ $\to T_2$
8. $\parallel$ zu P_1T_1' durch T_1 $\to \ell_1$
9. $\parallel$ zu P_1T_2' durch T_2 $\to \ell_2$
10. $M_{B\ell_1}$ $\to S_1$
11. $M_{B\ell_2}$ $\to S_2$

Lösung zu A30 ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien B_1 und B_2 die gemeinsamen Brennpunkte und P ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel α) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel β) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden B_1P und PX identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden B_1P und B_2P und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.



Lösung zu A31 ex-griechische-buchstaben

(a) selbst
(b) Wir haben die Wörter mit den Symbolen geschrieben, die man üblicherweise in der Mathematik in Gleichungen für die griechischen Buchstaben verwendet. In normaler «Textschreibweise» würden unsere Wörter wohl etwa so aussehen: σανκτ γαλλεν, βοδενσεε, καστ εν, κρονβεργ, ποστ ερ, αλφαβετ, φελδ, βασελ, αλπστ ειν, νατ ιοναλρατ.
Sankt Gallen, Bodensee, Kasten, Kronberg, Poster, Alphabet, Feld, Basel, Alpstein, Nationalrat, Sokrates, Platon, Apollonios, Athena (= Athen), Krete (= Kreta) (alles eigentlich kleingeschrieben).
(c) selbst

Lösung zu A32 ex-winkelsumme-dreieck

(zu ergänzen)

Lösung zu A33 ex-winkelsumme-polygon

Die Winkelsumme in einem

- Viereck beträgt $360° = 2 \cdot 180°$;
- Fünfeck beträgt $540° = 3 \cdot 180°$;
- Sechseck beträgt $720° = 4 \cdot 180°$;
- n-Eck beträgt $)n - 2) \cdot 180°$.

Wir geben zwei Beweise.

Beweis 1: Zerlege das n-Eck in $n - 2$ Dreiecke (Triangulierung des n-Ecks). Jedes dieser Dreiecke hat Winkelsumme 180°. Das n-Eck hat als Winkelsumme die Summe aller Dreieckswinkel, also $(n - 2) \cdot 180°$.

(Genaugenommen muss man sich überlegen, dass eine Triangulierung existiert.)

(Anschaulicher) Beweis 2: Wenn man das n-Eck genau einmal im mathematisch positiven Drehsinn abläuft[1] und am Endpunkt wieder genau in dieselbe Richtung schaut wie am Startpunkt, so hat man sich genau einmal um 360° gedreht. Das bedeutet, dass die Summe aller Drehwinkel 360° beträgt.

(Zum Begriff Drehwinkel: Man misst jeweils den Winkel, um den man sich in mathematisch positivem Drehsinn dreht. Das bedeutet, dass Drehungen nach links positive Winkel und Drehungen nach rechts negative Winkel

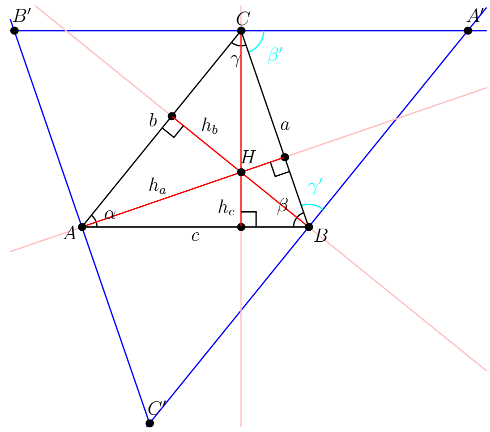
[1](An jedem Punkt darf man sich maximal um einen Winkel echt kleiner als 180° nach links oder rechts drehen; dies verbietet beispielsweise das Drehen um 270° nach links statt einer Drehung um 90° nach rechts.)

liefern.)

An jedem Punkt ist die Summe des Innenwinkels und des zugehörigen Drehwinkels 180°. Die Summe aller Innenwinkel und aller Drehwinkel ist also $n \cdot 180°$, als Gleichung

$$
\begin{aligned}
&& \text{Summe aller Innenwinkel} + \underbrace{\text{Summe aller Drehwinkel}}_{=360°} &= n \cdot 180° \\
\Longrightarrow && \text{Summe aller Innenwinkel} &= n \cdot 180° - 360° \\
&& &= n \cdot 180° - 2 \cdot 180° \\
&& &= (n-2) \cdot 180°
\end{aligned}
$$

Lösung zu A34 ex-hoehenschnittpunkt



Die Zeichnung ist gemäss dem Hinweis entstanden.
Es sieht so aus, also ob die Höhe h_c im kleinen Dreieck ABC die Mittelsenkrechte $m_{A'B'}$ im grossen Dreieck ist, und analog für die anderen Höhen.
Sobald wir dies gezeigt haben, ist die Aussage offensichtlich: Nach dem Satz über den Umkreis 2.4.9 wissen wir, dass sich die Mittelsenkrechten des grossen Dreiecks in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt, schneiden. Dieser Schnittpunkt ist dann auch der Schnittpunkt der Höhen des kleinen Dreiecks.
Wir zeigen nun, dass $h_c = m_{A'B'}$ gilt.
Da γ' ein Wechselwinkel von γ ist, folgt $\gamma' = \gamma$. Analog sehen wir $\beta' = \beta$. Wegen des Kongruenzsatzes wsw ist das Dreieck CBA' kongruent zum Dreieck ABC. Insbesondere gilt $\overline{CA'} = c$.
Genauso sieht man $\overline{B'C} = c$. Also ist C der Mittelpunkt von $[A'B']$.
Da h_c durch C verläuft und senkrecht auf AB und damit auf $A'B'$ steht, ist h_c die Mittelsenkrechte von A' und B', d. h. $h_c = m_{A'B'}$.
Analog zeigt man $h_a = m_{B'C'}$ und $h_b = m_{A'C'}$.

Lösung zu A35 ex-winkelsaetze-geraden1

a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2} 42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu A36 ex-winkelsaetze-geraden2

Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g, h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w^2_{gh}, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, w^2_{gh}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu A37 ex-winkelsaetze-geraden3

a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.

b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.

c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.

d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu A38 ex-winkelsaetze-geraden4

Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

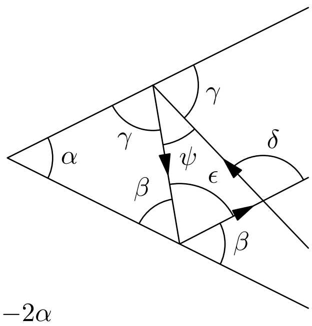
Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.

In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu A39 ex-winkelsaetze-geraden5



Für den Aussenwinkel δ gilt:

$$\delta = \varepsilon + \psi$$

Mit $\varepsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \varepsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu A40 ex-winkelsaetze-geraden6

(a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also gilt $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich 60°.
Somit gilt

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60° - \beta.$$

(b) Genau dann gilt $CD \parallel AB$, wenn $\beta = \gamma$ (Kriterium für Parallelität von Geraden 2.15.4; dann sind β und γ Wechselwinkel (= Scheitelwinkel zu Stufenwinkel)). Mit obiger Beziegung $\gamma = 60° - \beta$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} CD \parallel AB \quad &\iff \quad \beta = \gamma \\ &\iff \quad \beta = 60° - \beta \\ &\iff \quad 2\beta = 60° \\ &\iff \quad \beta = 30° \end{aligned}$$

Lösung zu A41 ex-winkelsaetze-geraden7

Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

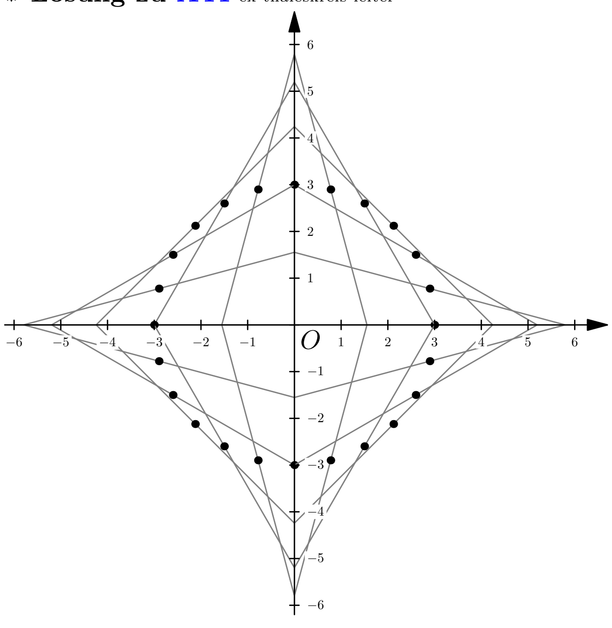
$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

Lösung zu A42 ex-kreiswinkelsaetze-selbst-entdecken

Lösung zu A43 ex-tangenten-an-kreis-durch-punkt

(zu ergänzen)

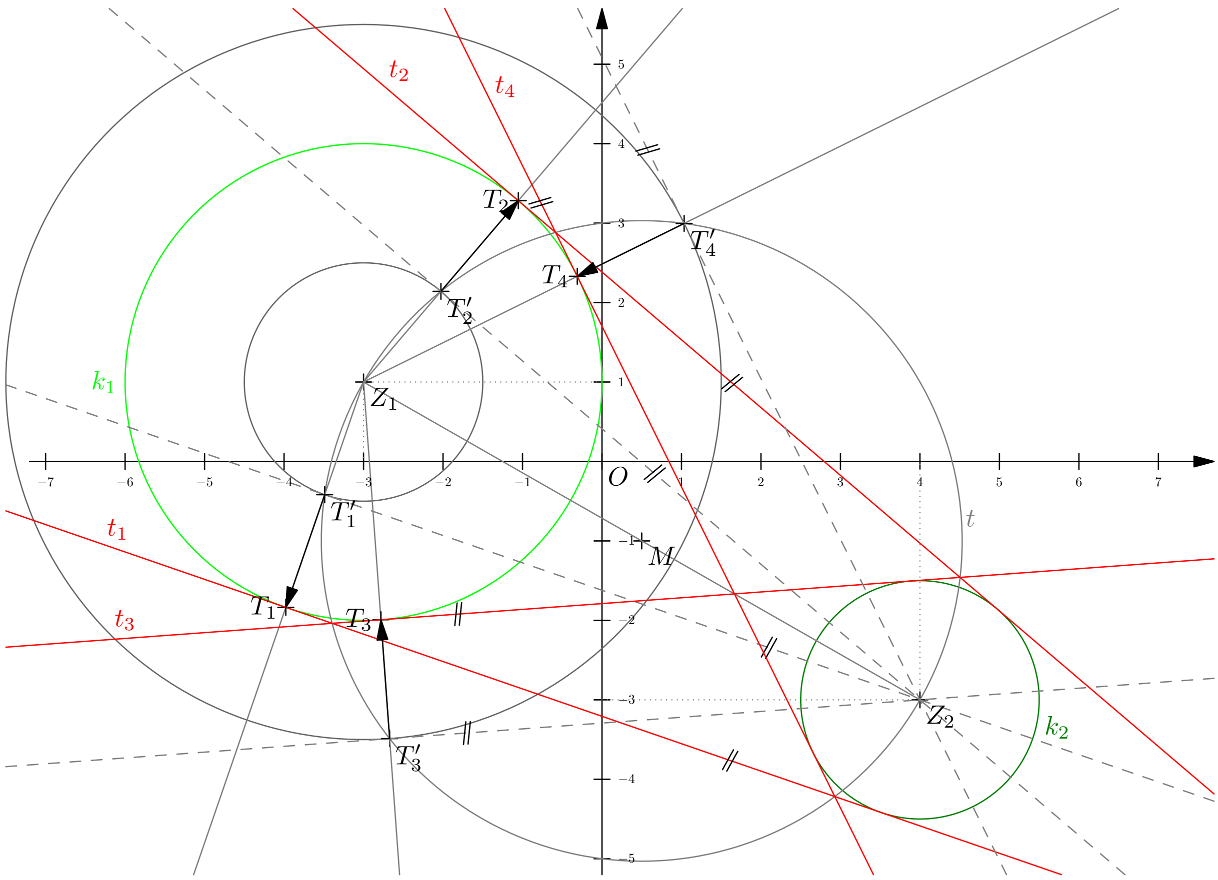
Lösung zu A44 ex-thaleskreis-leiter



M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem einen rechten Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thales-Kreis über $[AB]$, d.h. $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}} = 3$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf dem Kreis $k(O,3)$ liegen.

Lösung zu A45 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1.	Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$	$\to t$
2.	$k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$	$\to T_1', T_2'$
3.	$[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$	$\to T_{1,2}$
4.	$k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$	$\to T_3', T_4'$
5.	$[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$	$\to T_{3,4}$
6.	Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$	$\to t_{1,2,3,4}$

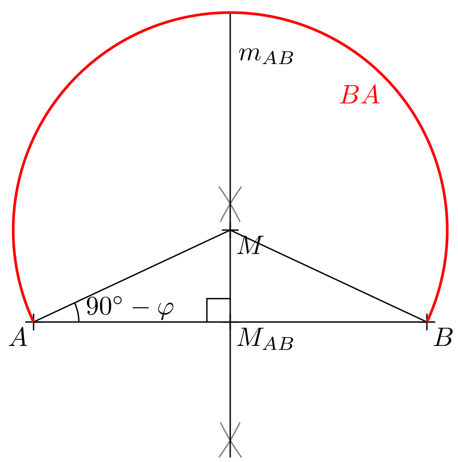


Lösung zu A46 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über $[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

Lösung zu A47 ex-geom-ort-ortsbogen0

(a) Konstruiere die Mittelsenkrechte m_{AB}.
Trage den Winkel $90° - \varphi = 25°$ vom Strahl $[AB$ in mathematisch positiver Richtung ab (der Scheitel des abgetragenene Winkels soll der Startpunkt A des Strahls sein). Der «neue» Strahl schneidet m_{AB} in einem Punkt, den wir M nennen.
Wir behaupten, dass dies der gesuchte Punkt ist: Wegen $M \in m_{AB}$ gilt sicherlich $\overline{MA} = \overline{MB}$. Insbesondere ist das Dreieck ABM gleichschenklig. Also gilt $\sphericalangle MBA = \sphericalangle BAM = 90° - \varphi$.

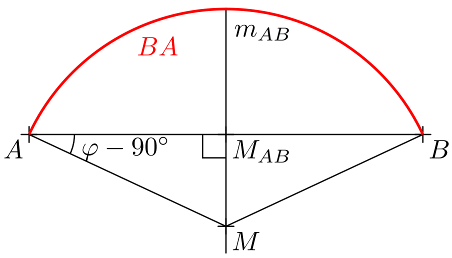


Per Winkelsumme im Dreieck ABM erhalten wir

$$\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle MBA - \sphericalangle BAM = 180° - (90° - \varphi) - (90° - \varphi) = 2\varphi$$

wie gewünscht. (Wer mag, kann auch mit dem rechtwinkligen Dreieck $AM_{AB}M$ argumentieren.)
Der gesuchte 65°-Ortsbogen ist nun der rote Kreisbogen in der Zeichnung (statt des rot geschriebenen BA sollte dort $\overset{\frown}{BA}$ stehen).

(b) Die Konstruktion geht analog, jedoch beachte man, dass das Abtragen des Winkels $90° - \varphi = 90° - 115° = -25°$ in mathematisch positivem Drehsinn nun dem Abtragen des Winkels $\varphi - 90° = 25°$ in mathematisch negativem Drehsinn bedeutet.



Per Winkelsumme im Dreieck ABM erhalten wir

$$\sphericalangle BMA = 180° - \underbrace{\sphericalangle MAB}_{\varphi - 90°} - \underbrace{\sphericalangle ABM}_{\varphi - 90°} = 180° - (\varphi - 90°) - (\varphi - 90°) = 360° - 2\varphi.$$

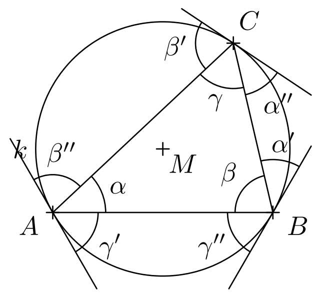
Wie gewünscht gilt somit

$$\sphericalangle AMB = 360° - \sphericalangle BMA = 360° - (360° - 2\varphi) = 2\varphi.$$

Der gesuchte 155°-Ortsbogen ist nun der rote Kreisbogen in der Zeichnung (statt des rot geschriebenen BA sollte dort $\overset{\frown}{BA}$ stehen).

Lösung zu A48 ex-sehne-winkelsaetze-faerbe-gleiche-winkel

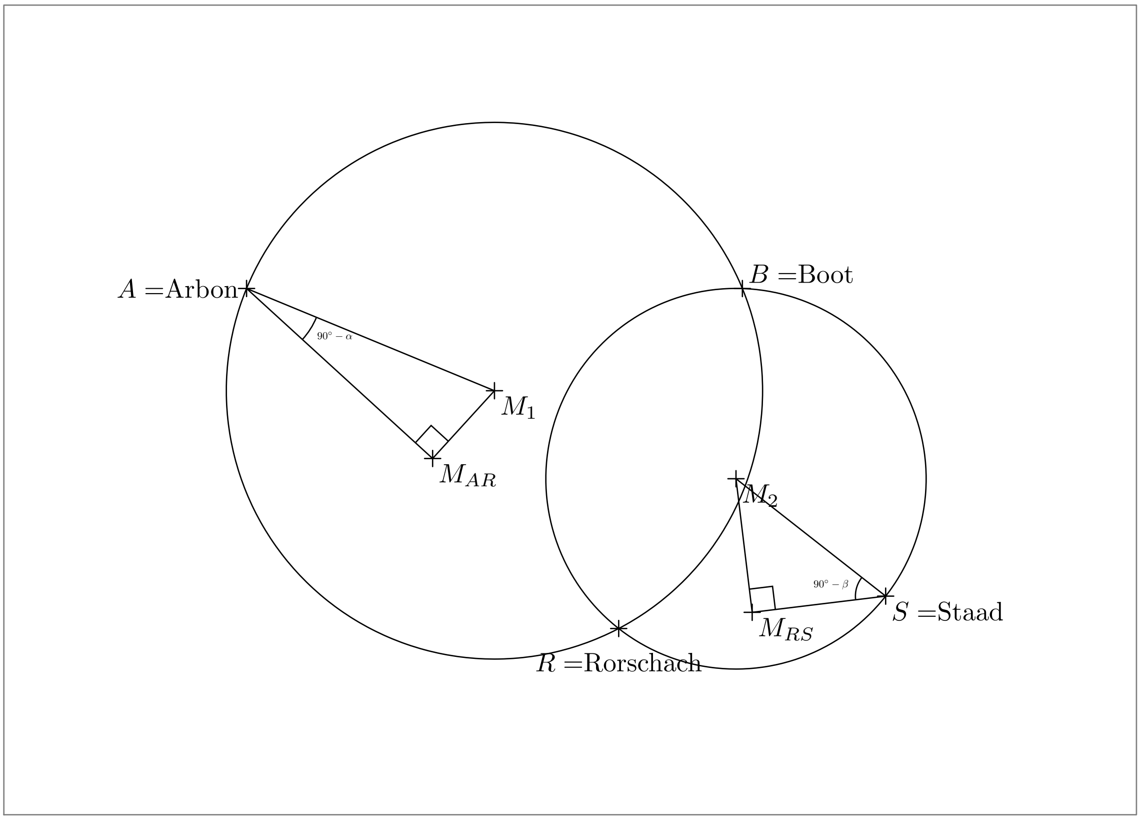
Für die Sehne $[BC]$ sagen Sehne-Tangente-Winkel-Satz und Peripheriewinkelsatz, dass $\alpha'' = \alpha' = \alpha$. Analog gelten $\beta = \beta' = \beta''$ und $\gamma = \gamma' = \gamma''$.



Lösung zu A49 ex-navigation

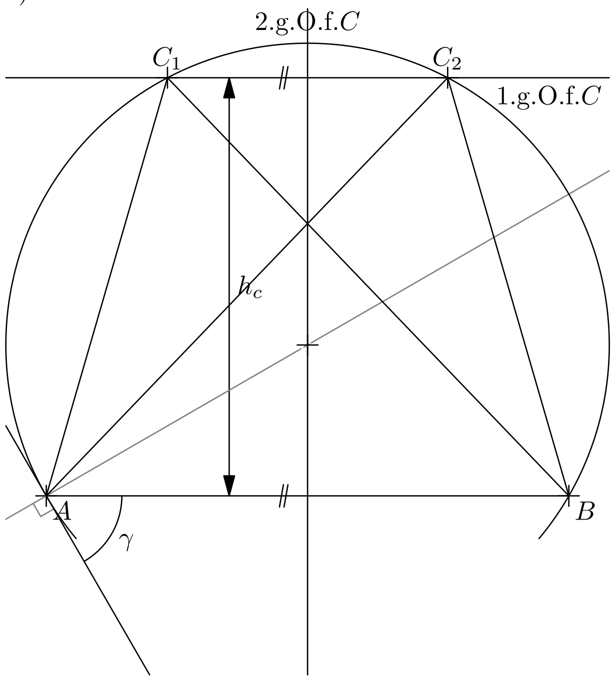
Da sich der Bodensee grob gesagt «oberhalb» des Streckenzugs Arbon-Rorschach-Staad befindet, muss sich auch das Boot in diesem Bereich befinden. Da sowohl α als auch β kleiner als 90° sind, befinden sich auch die Mittelpunkte der Kreise, auf denen die gesuchten Ortsbögen liegen, oberhalb der Verbindungsstrecken Arbon-Rorschach bzw. Rorschach-Staad. Nun gilt es, diese Ortsbögen zu konstruieren. Das Boot muss sich auf einem ihrer Schnittpunkte befinden, wobei der Schnittpunkt Rorschach wohl nicht der gesuchte ist.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer



Lösung zu A50 ex-geom-ort-ortsbogen1

a)

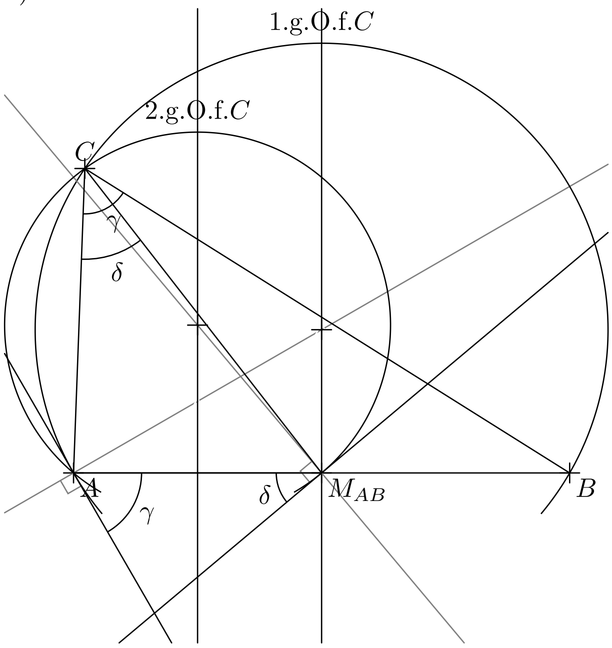


1. $\parallel$ zu AB im Abstand h_c $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an AB gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

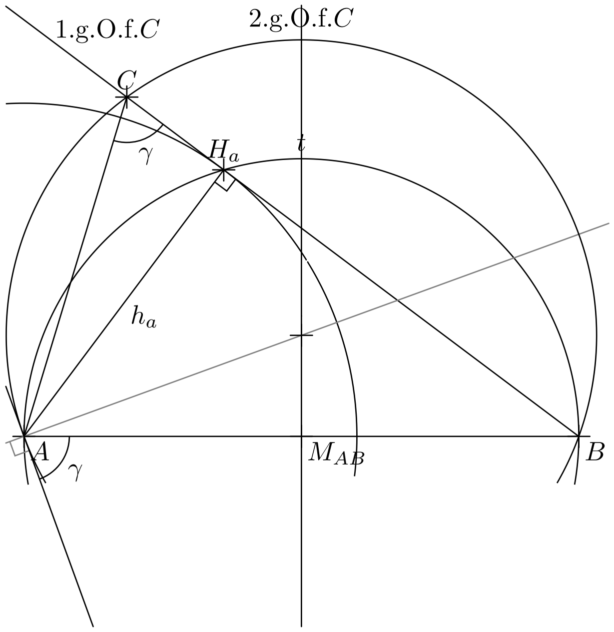
c)

b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu δ über $[AM_{AB}]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).



Zuerst wird der Höhenfusspunkt H_a konstruiert, womit man die Lage der Seite a erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\to t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\to H_a$
3. BH_a $\to$ 1.g.O.f.C
4. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

Lösung zu A51 ex-sehnenviereck

(a) Der Zentriwinkel zu α ist 2α, der Zentriwinkel zu γ ist 2γ. Diese beiden Zentriwinkel ergänzen sich zu $360°$. Also gilt $360° = 2\alpha + 2\gamma$. Division durch 2 liefert $180° = \alpha + \gamma$. Analog für $\beta + \delta$.
Man kann auch mit den Sehne-Tangenten-Winkeln argumentieren (vgl. Teilaufgabe (b) von Aufgabe A57).
Auch geht es mit dem Peripheriewinkelsatz wie in der Lösung von Teilaufgabe (a) von Aufgabe A57.

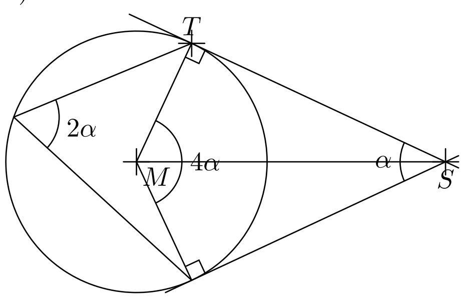
(b) Sei k der Umkreis des Dreiecks ABC. Der Winkel β ist ein Peripheriewinkel über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ mit Zentriwinkel 2β. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{AC}$ hat den Zentriwinkel $360° - 2\beta$ und somit ist der Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ der $(180° - \beta)$-Ortsbogen über $[AC]$. Wegen $\delta = 180° - \beta$ muss D auf diesem Ortsbogen, also auf dem $\overset{\frown}{CA}$, liegen. Also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Lösung zu A52 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei t die gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 im Punkt B. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie α. Damit haben wir in den Punkte T_1 und T_2 Wechselwinkel an der Geraden g und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

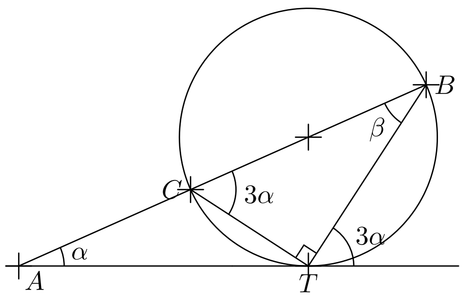
Lösung zu A53 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



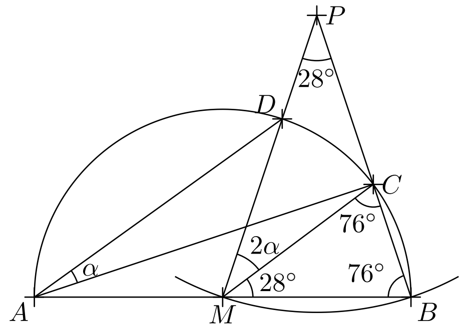
Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. MS halbiert die Winkel 4α und α.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)



$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in T.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) + (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach α aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)



$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

Lösung zu A54 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt. (Die anderen Fälle gehen hoffentlich analog.)

Sei g' eine weitere Gerade wie g mit Schnittpunkten C' und D'.

Die Winkel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle D'C'B$ sind als Peripheriewinkel über $[AB]$ gleich gross. Ebenso sind die $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BD'A = \sphericalangle BD'C'$ als Peripheriewinkel über $[BA]$ gleich gross. Daraus folgt (Winkelsumme im Dreieck), dass auch die beiden Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'BD'$ gleich gross sind.

Lösung zu A55 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[BD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind C und D zu vertauschen).

Der Winkel $\sphericalangle CAD$ bzw. $\sphericalangle ADB$ ist ein Peripheriewinkel über der Sehne $[DC]$ bzw. $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf k wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$. Somit ist der Winkel $\sphericalangle DXA$ auch immer gleich gross, und dasselbe gilt für seinen Ergänzungswinkel $\sphericalangle AXB$. Damit liegen alle möglichen Punkte X auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

Lösung zu A56 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Fall $\beta > \gamma$: Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle TAB = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel γ).

β ist Aussenwinkel im $\triangle ATB$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ kann man den gesuchten Winkel alternativ auch in Abhängigkeit von α und β oder in Abhängigkeit von α und γ angeben.

Fall $\gamma = \beta$: Es gibt keinen Schnittpunkt und der Winkel zwischen den dann parallelen Geraden ist nicht definiert (man könnte definieren, dass der Winkel zwischen parallelen Geraden $0°$ ist).

Fall $\gamma > \beta$: Dann gilt $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

Lösung zu A57 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle DEC = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AEX$). Und damit:

$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$

Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.

Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie β und der Winkel bei C gleich gross wie α (Periepheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist

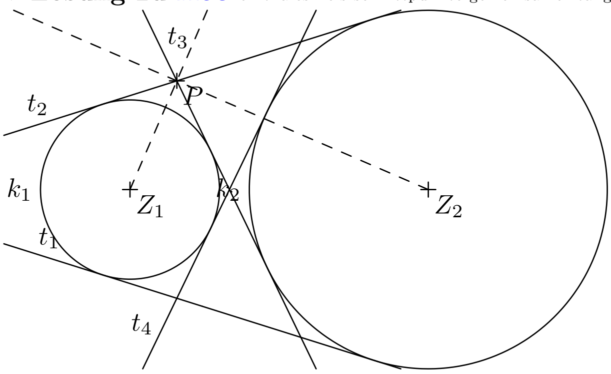
$\delta = 180° - \alpha - \beta$. (Dies folgt auch aus der Aufgabe über Sehnenvierecke.)

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β über der Sehne $[DC]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewinkel über $[DC]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel; das folgt auch aus der Aufgabe über Sehnenvierecke). Also gilt folgende Beziehung zwischen α und β:

$$2\beta = 180° - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach α oder β aufgelöst werden.

Lösung zu A58 ex-thaleskreis-schnittpunkte-gemeinsamer-tangenten



Der Beweis wird hier exemplarisch für den Punkt $P = t_2 \cap t_3$ geführt. Da t_2 und t_3 Tangenten an k_1 sind, halbiert Z_1P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. Analog teilt auch Z_2P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. D.h. Z_1P und Z_2P sind ein Winkelhalbierendenpaar und somit rechtwinklig aufeinander, was beweist, dass P auf dem Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ liegt.

Lösung zu A59 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4

Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.

Wegen $X \in w_\gamma$ gilt $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein (das braucht ja wohl noch ein Argument, siehe unten), d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.

Zu beweisen ist noch folgendes (Formulierung zu verbessern): Gegeben ist ein Kreis k und ein beliebiger Winkel γ. Ist ABC ein beliebiges Dreieck mit A, B, $C \in k$ (d.h. k ist der Umkreis des Dreiecks) und Winkel γ bei C, so ist die Länge c für all solche Dreiecke konstant. Man kann den Punkt C so verschieben, dass die Seite a ein Durchmesser ist. Dann ist klar, wie man c aus γ konstruiert (Thaleskreis). Also ist c durch γ und den Kreisdurchmesser festgelegt.

Lösung zu A60 ex-hoehenfusspunkte-billard-rademacher-toeplitz

(zu ergänzen)