Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

1 Einführung in die Mengenlehre

1.1 Allgemeines zur Mathematik

1.1.1. Mathematik beschäftigt sich mit der Untersuchung geometrischer Figuren und dem Rechnen mit Zahlen.

Das Ziel der Mathematik ist,

- möglichst viele interessante Sachverhalte, sogenannte **Sätze** (= **Theoreme**), zu entdecken (etwa den Satz des Pythagoras) und
- diese mit Hilfe von **Beweisen** zu begründen.

Beide Tätigkeiten verlangen oft ein hohes Mass an Intuition und Kreativität. Täglich finden Mathematiker auf der ganzen Welt, vor allem an Universitäten und Forschungsinstituten, neue Sätze und beweisen diese.

Auf Schulniveau werden vorrangig mathematische Sachverhalte erklärt, die schon seit vielen Jahrzehnten, Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden bekannt sind. Darin zeigt sich eine entscheidende Stärke der Mathematik im Vergleich zu manch anderer Wissenschaft: Mathematische Sätze veralten nicht; einmal korrekt bewiesen, gelten sie für immer.

Mit einem *Beweis* ist die logische Herleitung eines Sachverhalts aus bereits bekannten Sachverhalten und «offensichtlichen» Grundannahmen gemeint. Diese Grundannahmen bezeichnet man als **Axiome**.

Die Erkenntnis, dass man mathematische Aussagen nicht nur finden und formulieren, sondern auch beweisen sollte, ist hauptsächlich den Mathematikern und Philosophen der griechischen Antike zuzuschreiben. Dieses Vorgehen sorgt dafür, dass die Mathematik die exakteste aller Wissenschaften ist.

Beweise werden stets in einer Sprache aufgeschrieben, etwa auf Deutsch oder Englisch, heutzutage aber auch zunehmend in formalen (von Computern leichter zu verarbeitenden) Sprachen. Hierbei ist auf präzise Formulierungen zu achten, um Missverständnisse oder Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Wer gute Mathematik betreiben will, sollte stets auf sprachliche Klarheit achten.

Ausserdem soll noch betont werden, welche wichtige Rolle **Definitionen** und gut gewählte mathematische Notation (= Schreibweisen) spielen.

In *Definitionen* wird genau festgelegt, über welche Dinge man spricht; zum Beispiel legt man fest, was mit dem Begriff «Kreis» gemeint ist – ohne diesen Begriff wäre es äusserst schwerfällig, Geometrie zu betreiben. Hierbei ist es auch wichtig, möglichst nur sinnvolle und häufig auftretende Dinge zu definieren; beispielsweise wäre es wenig sinnvoll, einen eigenen Begriff für ein Viereck zu kreieren, dessen Winkel $56°$, $67°$, $78°$ und $159°$ betragen.

Gute mathematische Notation (etwa die dezimale Schreibweise von Zahlen, ein Zeichen 0 für die Null, Rechenzeichen wie Plus $+$ und Mal $\cdot$, aber auch Gleichheitszeichen $=$ und vieles mehr) erlaubt ein effizientes Vermitteln von Sachverhalten, insbesondere in schriftlicher Form; bevor die Mathematiker sich auf solche Schreibweisen einigten, war es oft eine sehr zähe Angelegenheit, einfache Rechenverfahren oder Argumentationen zu erklären.

1.1.2. Zur Herkunft einiger Begriffe:

- Mathematik: von altgriechisch μαθηματικὴ τέχνη, mathēmatikē téchnē, «Kunst des Lernens»;
- Axiom: von altgriechisch ἀξίωμα axíoma «Forderung; Grundsatz; Satz, der keines Beweises bedarf»;
- Definition: von lateinisch definitio, «Abgrenzung» (aus lateinisch de-, «(von etwas) herab/weg» und lateinisch finis, «Grenze»).

1.2 Mengenlehre

1.2.1. Die **(naive) Mengenlehre**, mit deren Grundzügen wir uns nun ein befassen, wurde von Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 begründet.

Der Begriff der **Menge** ist für die heutige Mathematik äusserst wichtig. Im Rückblick mag es erstaunen, dass dieser Begriff gar nicht so alt ist – clevere Mathematiker mussten zuerst erkennen, wie wichtig dieser Begriff ist, und die mathematische Gemeinschaft davon überzeugen.

Man kann die gesamte moderne Mathematik auf der Mengenlehre aufbauen (ZFC-Mengenlehre), auch wenn dies eine recht formale Angelegenheit ist und nicht der historischen, eher intuitiven Entwicklung der Mathematik entspricht. Schon die Konstruktion der natürlichen Zahlen (samt Rechenoperationen) im Rahmen der Mengenlehre ist nicht einfach (Peano-Axiome).

Wie die meisten Mathematiker wählen wir einen eher intuitiven Zugang zur Mathematik.

1.3 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

1.3.1. Fast jeder Mensch lernt, Dinge zu zählen («fünf Äpfel»), und verwendet dazu die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... In diesem Sinne sind diese Zahlen etwas sehr «natürliches».

Die Zahl 0 ist anfänglich schwieriger zu erfassen: Warum sollte «Nichts» eine Zahl sein? Welches Kind spricht von «null Äpfeln»? Beim Zählen ist die Null aber mindestens genauso wichtig und «natürlich» wie die oben genannten Zahlen 1, 2, 3, ...

Definition 1.3.2 Natürliche Zahlen, die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

heissen **natürliche Zahlen**.
Wir fassen all diese Zahlen zu einem neuen Objekt zusammen, nennen diese Zusammenfassung die **Menge der natürlichen Zahlen** und bezeichnen sie mit dem Buchstaben $\mathbb{N}$. Man schreibt kurz

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Lies: «$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, usw.»
Die geschweiften Klammern, also { und }, auch **Mengenklammern** genannt, werden in der Mathematik zur Notation von Mengen verwendet.

1.4 Mengen und Elemente

1.4.1. In der Alltagssprache verwenden wir viele verschiedene Begriffe, um gewisse Objekte zu einem neuen Objekt zusammenzufassen: ein Haufen Bücher, ein Stapel Blätter, eine Gruppe Kindergärtler, eine Klasse Gymnasiasten, eine Menge Geld, ...

In der Mathematik wird für solche Zusammenfassungen meist der Begriff der *Menge* verwendet. Der bedeutende Mathematiker Georg Cantor (1845-1918, siehe [Wik25, Georg Cantor]) hat diesen Begriff wie folgt definiert.

> *Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Definition 1.4.2 Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten (meist von Zahlen oder geometrischen Objekten wie Punkten, Dreiecken etc.), den sogenannten **Elementen** der Menge.
Hierbei geht es *nur um die Zugehörigkeit oder Nicht-Zugehörigkeit* eines Objekts zur Menge.

- Es geht nicht um die Reihenfolge der Objekte.
- Ein Objekt gehört zu der Menge oder nicht; es kann nicht mehrfach zur Menge gehören.

Definition 1.4.3 endliche, unendliche Menge

Man nennt eine Menge **endlich** bzw. **unendlich**, wenn sie aus endlich vielen bzw. unendlich vielen Elementen besteht.

Beispiele 1.4.4.

(a) Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen.
(b) Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
(c) Die Menge aller Dreiecke.
(d) Die Menge aller gleichschenkligen Dreiecke.
(e) Die Menge aller Primzahlen kleiner-gleich 100. (Diese Menge ist endlich; die zuvor genannten Mengen sind unendlich.)

Definition 1.4.5 Element-Zeichen $\in$

Die Zugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge wird mit dem Zeichen «$\in$» notiert (das Zeichen kommt vom griechischen Buchstaben Epsilon ε, das unserem e entspricht, und steht für «**E**lement»)
Die Nicht-Zugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge wird mit dem Zeichen «$\notin$» notiert («durchgestrichenes Element-Zeichen»).

Beispiele 1.4.6.

symbolisch:	$7 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
Sprechweise:	«7 ist Element von $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 ist nicht Element von $\mathbb{N}$»
Kurzform:	«7 in $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 nicht in $\mathbb{N}$»

1.4.7. Zur konkreten Angabe einer Menge verwendet man ein Paar geschweifter Klammern «$\{$», «$\}$» und gibt dazwischen die Elemente der Menge an. Dabei gibt es

- die **aufzählende Form**: explizite Angabe aller Elemente;
- die **beschreibende Form**: Die Elemente werden durch eine Eigenschaft charakterisiert, die rechts von einem vertikalen Strich «$|$» steht.

Aufzählende Form	**Beschreibende Form**
$\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 2, 4, 6, usw.»	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$ «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$, für die gilt: x ist gerade.»
$\{10, 11, 12, \dots, 18, 19\}$ «Die Menge mit den Elementen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.»	$\{k \in \mathbb{N} \mid 10 \leq k \leq 19\}$ «Die Menge aller natürlichen Zahlen k, für die gilt: 10 ist kleiner-gleich k und k ist kleiner-gleich 19.»
$\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 1, 4, 9, 16, usw.»	$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ «Die Menge aller n^2, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Die beschreibende Form hat formal die Gestalt $\{\text{Variable} \in \text{Menge} \mid \text{Bedingung}\}$ (Aussonderungsaxiom). Das letzte Beispiel ist in diesem Sinne als Kurzform von $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = n^2\}$ aufzufassen.

Beispiel 1.4.8. Die Menge $\{\}$, die überhaupt kein Element enthält, heisst **leere Menge**. Meist wird sie als $\varnothing$ geschrieben, es gilt also

$$\varnothing = \{\}$$

Definition 1.4.9 Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind genau dann **gleich**, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
Schreibweise: $A = B$
Offizieller Name: Extensionalitätsaxiom
Sprechweise: «A (ist) gleich B»

1.4.10. Beachten Sie, dass es bei einer Menge nur auf die Zugehörigkeit ankommt!

- Die Reihenfolge spielt keine Rolle: $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}$
- Es spielt keine Rolle, ob ein Element mehrfach auftritt: $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 3, 3, 1, 2, 3\}$

Und noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3, 6\} = \{6, 3, 1, 2\} = \{3, 3, 1, 6, 2, 3, 6, 2, 2\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \text{ oder } x = 2 \text{ oder } x = 3 \text{ oder } x = 6\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 6\}\end{aligned}$$

1.4.11. Wir beschränken uns auf Mengen, deren Elemente mathematische Objekte sind, d. h. arithmetische Objekte wie Zahlen oder geometrische Objekte wie Punkte, Geraden, Dreiecke, ...

Der Grund dafür ist, dass «umgangssprachlich definierte Mengen» oft keine Mengen im mathematisch strengen Sinne sind, denn oft ist nicht klar, welche Objekte dazugehören:

Die Menge aller attraktiven jungen Männer.	Hier müsste man zuvor genau sagen, was «attraktiv», «jung» und «Mann» bedeuten.
Die Menge aller Schönwettertage dieses Sommers.	«Schönes Wetter» ist nicht wohldefiniert: Badi-Besucher verstehen darunter etwas anderes als Bauern oder Tornado-Hunter.

Aufgabe A1 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge aller Primzahlen.

b) Die Menge aller Vielfachen von 37.

c) Die Menge aller Kubikzahlen, die kleiner als 1111 sind.

d) Die Menge aller Zweierpotenzen.

e) Die Menge aller Primzahlen, die durch 13 teilbar sind.

f) Die Menge aller Primzahlen, die durch 91 teilbar sind.

Definition 1.4.12

Sei A eine Menge. Die Anzahl der Elemente von A heisst **Mächtigkeit** oder **Kardinalität von** A und wird wie folgt notiert:

$$|A|$$

Ist A eine unendliche Menge, so schreibt man $|A| = \infty$. (Das Symbol ∞ (eine Art liegende Acht) steht für «unendlich».)
Bisweilen wird statt $|A|$ auch die Schreibweise $\#A$ für die Kardinalität von A verwendet.

Ausblick 1.4.13. Wir werden sehen, dass es in der Mathematik verschiedene Arten der Unendlichkeit gibt.

Aufgabe A2 Bestimmen Sie die Mächtigkeit der folgenden Mengen! Verwenden Sie die Schreibweise mit den beiden senkrechten Strichen aus der obigen Definition.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{0, 1, 2\}$

c) $C = \varnothing$

d) $D = \mathbb{N}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine einstellige Primzahl}\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$

Definition 1.4.14

Seien A und B Mengen. Dann heisst A **Teilmenge von** B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. In diesem Fall schreibt man

$$A \subset B$$

Sprechweisen: «A ist in B enthalten» oder «A ist Teilmenge von B» oder «B ist **Obermenge** von A».
Die Negation (= Verneinung) dieser Aussage wird als $A \not\subset B$ notiert: Es gibt mindestens ein Element von A, das nicht Element von B ist.
Gleichbedeutend zu $A \subset B$ kann man auch $B \supset A$ schreiben.

Beispiele 1.4.15.

- Die Menge aller Primzahlen ist eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen.
- $\{0, 7, 1234\} \subset \mathbb{N}$.
- $\{3, 7, 19\} \subset \{19, 3, 7\}$ (hier gilt sogar Gleichheit $\{3, 7, 19\} = \{19, 3, 7\}$)
- $\varnothing \subset \{4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$
- $\{0, 1, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\} \not\subset \mathbb{N}$
- Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst: $A \subset A$.
- Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge: $\varnothing \subset A$.

Aufgabe A3 Gegeben ist die Menge $X = \{0, 2, 3, 4\}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie eine Teilmenge von X ist oder nicht und schreiben Sie dies mit Hilfe des Zeichens «$\subset$» bzw. «$\not\subset$» auf.

a) $\{0\}$	b) $\{1\}$	c) $\{2\}$	d) $\{0, 4\}$
e) $\{1, 3, 5\}$	f) $\{2, 3, 4\}$	g) $\{0, 1, 2, 3\}$	h) $\{0, 7-4, 4, \frac{6}{3}\}$
i) $\varnothing$	j) X	k) $\mathbb{N}$	l) $\{\}$

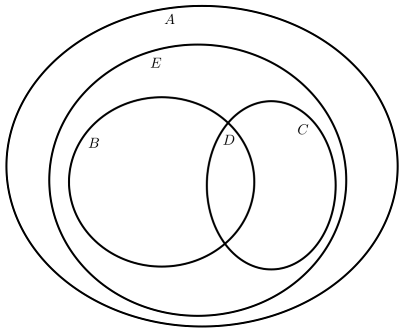
Aufgabe A4 Wenn X und Y Mengen sind: Was bedeutet es, wenn sowohl $X \subset Y$ als auch $Y \subset X$ gelten?

1.5 Mengendiagramme

1.5.1. Mit Mengendiagrammen kann man mengentheoretische Situationen graphisch veranschaulichen. Man stellt sich dabei Mengen als Regionen in der Ebene vor und Punkte dieser Regionen als Elemente der entsprechenden Mengen. (Bisweilen werden Mengendiagramme auch als Eulerdiagramme bezeichnet.)

✎Zugehöriges Mengendiagramm:

A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Rechtecke
C = Menge aller Rauten
D = Menge aller Quadrate
E = Menge aller Parallelogramme



Aufgabe A5 Erstelle ein Mengendiagramm für die folgenden Mengen:

G = Menge aller Dreiecke
A = Menge aller rechtwinkligen Dreiecke
B = Menge aller gleichseitigen Dreiecke
C = Menge aller gleichschenkligen Dreiecke

In 1cNP noch relativ komplizierte Beispiele erklärt (wegen Nachfragen), etwa

$$A = \{2, 3, \{5, 7\}, \{2\}\}$$
$$B = \{5, 7\}$$
$$C = \{5, 7, 4\}$$
$$D = \{2, \{5, 7\}\}$$
$$E = \{B\} = \{\{5, 7\}\}$$
$$F = \{2\}$$

und dann bei diverse korrekte Aussagen hingeschrieben, etwa $B \in A$ aber nicht $B \subset A$, etc.; im Prinzip bei je zwei dieser Mengen hingeschrieben, ob die eine Element oder Teilmenge der anderen und andersherum.

1.6 Mengenoperationen – Konstruktion neuer Mengen aus bekannten Mengen

Definition 1.6.1 Schnitt (= Durchschnitt) von Mengen, Symbol $\cap$

Seien A und B beliebige Mengen. Die Menge

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, wird der **Schnitt (oder Durchschnitt) von A und B** genannt.
Sprechweisen: «A geschnitten B»
Bemerkung: Das Zeichen «$:=$» ist ein Definitionszeichen. Definiert wird das Objekt, das auf der «Doppelpunkt»-Seite des Zeichens steht.

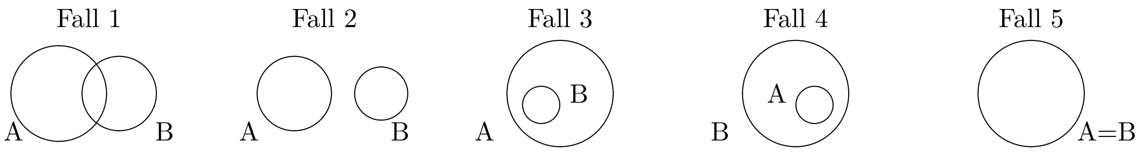


Abbildung 1: Markiere jeweils den Schnitt $A \cap B$.

Definition 1.6.2 Vereinigung von Mengen, Symbol $\cup$

Seien A und B beliebige Mengen. Die Menge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind, wird als **Vereinigung von A und B** bezeichnet.
Sprechweise: «A vereinigt B»

1.6.3. Beachte: Die Aussage «$x \in A$ oder $x \in B$» ist wahr, falls **mindestens eine** der beiden Teilaussagen «$x \in A$», «$x \in B$» wahr ist. Also auch dann, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

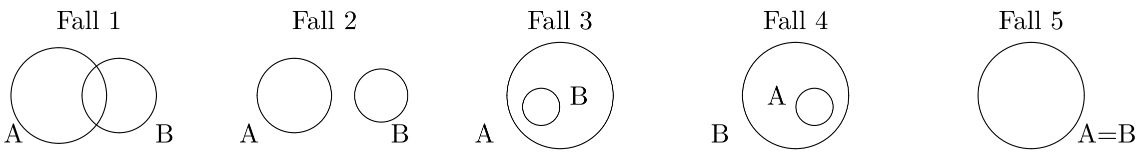


Abbildung 2: Markiere jeweils die Vereinigung $A \cup B$.

Definition 1.6.4 Differenzmenge

Seien A und B beliebige Mengen. Die Menge

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

aller Elemente von A, die nicht in B liegen, heisst **Differenzmenge A ohne B**.
Sprechweise: «A ohne B»

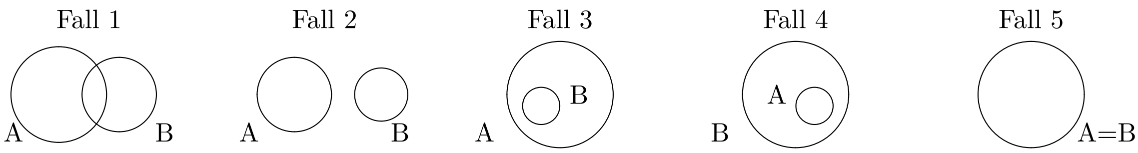


Abbildung 3: Markiere jeweils die Differenzmenge $A \setminus B$.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Definition 1.6.5 Komplement (Spezialfall einer Differenzmenge bezüglich einer Grundmenge)

Oft arbeitet man mit einer fixierten Menge G, der sogenannten *Grundmenge*.
Ist A eine beliebige Teilmenge einer Grundmenge G, in Formeln $A \subset G$, so heisst

$$\overline{A} := G \setminus A = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

das **Komplement von A in G.**

Komplement bedeutet Ergänzungsmenge: Was fehlt noch zur Grundmenge?
Verwechsle nicht die Begriffe «Komplement» und «Kompliment».

Sprechweise: «A Komplement» oder «A quer»

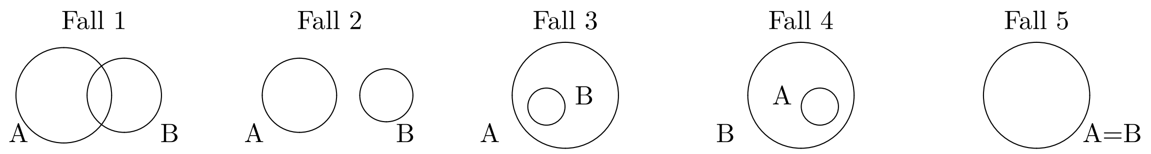


Abbildung 4: Markiere jeweils das Komplement $\overline{A}$, wobei G jeweils durch einen sehr grossen, nicht eingezeichneten Kreis gegeben ist. Warum ist die Unterscheidung in 5 Fälle eigentlich blödsinnig?

Aufgabe A6 Gegeben sind die Mengen $A = \{3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{6, 7, 9, 10, 11\}$ und $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\}$. Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an!

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \setminus B$
d) $\overline{A}$

Aufgabe A7 Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $T_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } n\}$ die Menge ihrer Teiler und $V_n := \{yn \mid y \in \mathbb{N}\}$ die Menge ihrer Vielfachen. Beispielsweise gelten $T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ und $V_6 = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$. Geben Sie die folgenden Mengen in möglichst kompakter Form an!

a) $T_{12} \cap T_{18}$
b) $(T_{12} \setminus T_{18}) \cup (T_{18} \setminus T_{12})$
c) $T_{12} \cap V_3$
d) $V_9 \cap V_6$

1.7 Venn-Diagramme und Rechengesetze für Mengen

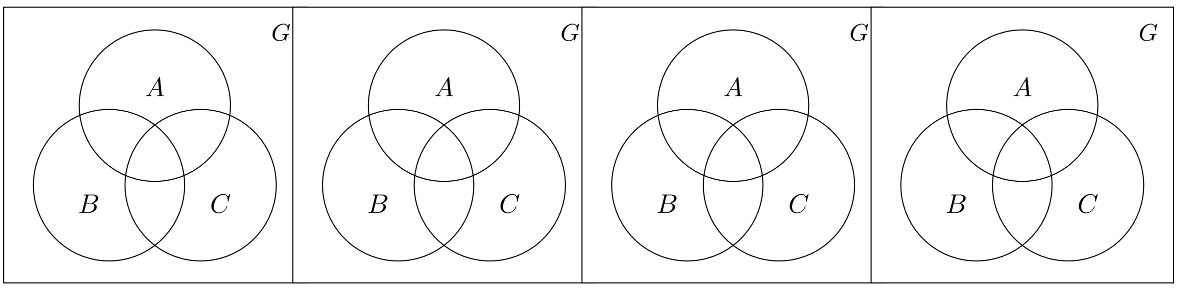
Definition 1.7.1

Ein **Venn-Diagramm** ist ein Mengendiagramm, bei dem **alle** Möglichkeiten der Zugehörigkeit zu den beteiligten Mengen als «zusammenhängende Gebiete» auftauchen.

Aufgabe A8 Ziel dieser Aufgabe ist, dass Sie die wichtigsten Rechengesetze für die Mengenoperationen $\cap$ (Schnitt), $\cup$ (Vereinigung) und $\overline{?}$ (Komplement) selbst entdecken.

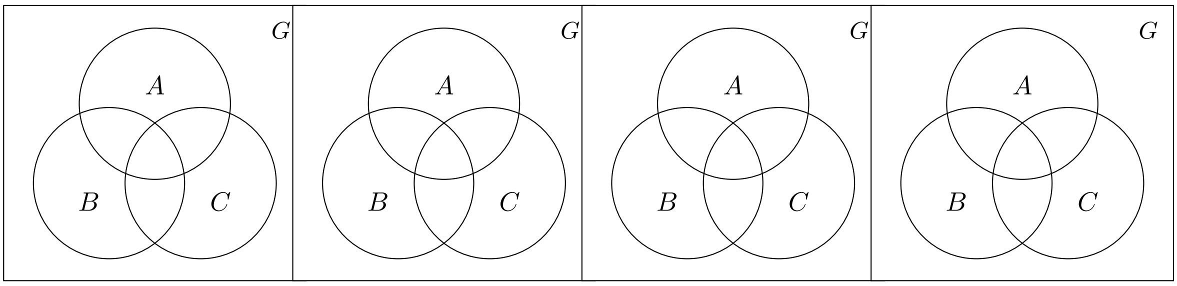
Schraffieren Sie in den folgenden Venn-Diagrammen jeweils den Bereich, der zu dem Ausdruck unter dem Diagramm gehört. Dabei sind die Mengen A, B und C jeweils Teilmengen der «quadratischen» Grundmenge G; Komplemente werden in G gebildet.

a)



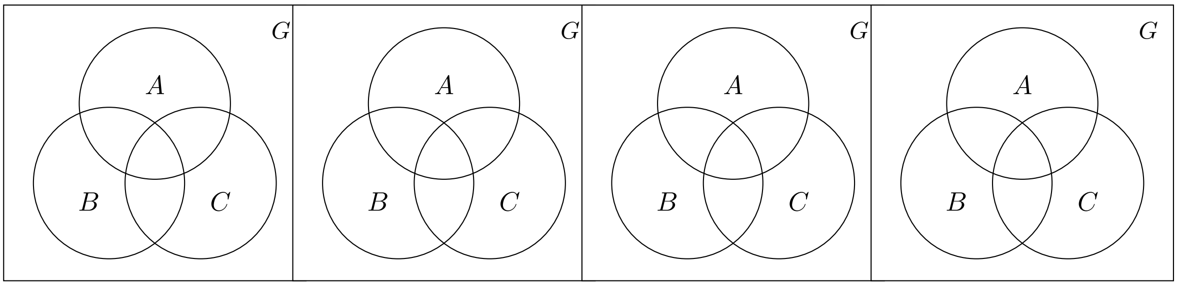
$(A \cup B) \cup C$ | $A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C$ | $A \cap (B \cap C)$

b)



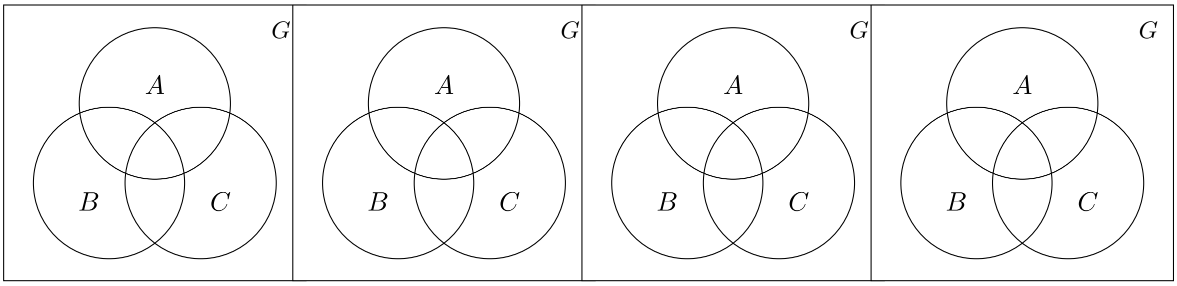
$(A \cup B) \cap C$ $\quad$ $A \cup (B \cap C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cup C$ $\quad$ $A \cap (B \cup C)$

c)



$\overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cap B}$

d)



$A \cap B \cap C$ $\quad$ $A \cap B \cap \overline{C}$ $\quad$ $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

e) In jeder der vorherigen Teilaufgaben (a), (b), (c), (d) können Sie etwas beobachten. Was?

f) Tragen Sie jede der folgenden Mengen in ein neues Venn-Diagramm ein.

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie Ihre Ergebnisse mit den zuvor schraffierten Mengen vergleichen?

Satz 1.7.2 Assoziativgesetze

Für alle Mengen A, B, C gelten die **Assoziativgesetze** ✎

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Man kann deshalb Klammern weglassen und schreibt $A \cup B \cup C$ bzw. $A \cap B \cap C$. Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe A8.(a)+(e).

Satz 1.7.3 Kommutativgesetze

Für alle Mengen A, B gelten die **Kommutativgesetze** ✎

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Beweis: Das ist offensichtlich; wer mag, kann ein Venn-Diagramm zeichnen.

Satz 1.7.4 Distributivgesetze

Für alle Mengen A, B, C gelten die **Distributivgesetze** ✎

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe A8.(f).

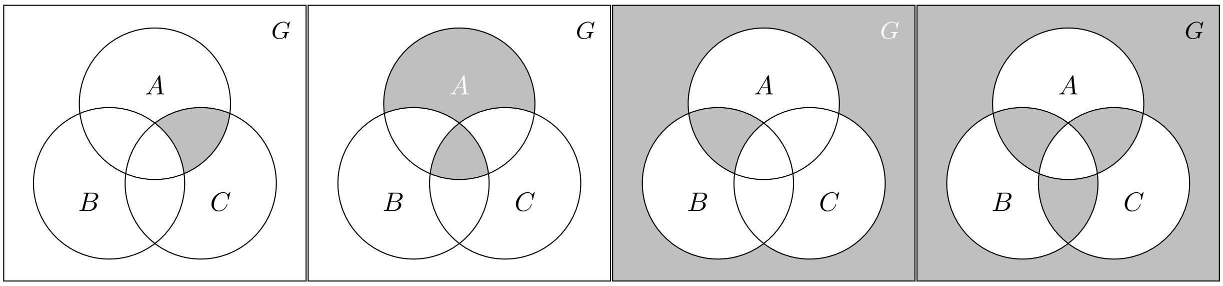
Satz 1.7.5 De morgansche Gesetze

Für alle Mengen A, B gelten die **de morganschen Gesetze** ✎

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe A8.(c)+(e).

Aufgabe A9 Finde jeweils einen Ausdruck, der die graue Menge beschreibt!



Ausblick 1.7.6. Wer mehr wissen will, mag [Wik25, Menge (Mathematik), Mengendiagramm, Mengenlehre] lesen.

1.8 Produkt von Mengen

Definition 1.8.1 Paar (= geordnetes Paar)

Ein **Paar** ist eine Zusammenfassung zweier mathematischer Objekte a und b zu einem neuen mathematischen Objekt, wobei die Reihenfolge wichtig ist. Das von a und b gebildete Paar wird als (a, b) notiert.

Beispiele $(2, 5) \neq (5, 2)$, $(4, 4)$. Vgl. $\{2, 5\} = \{5, 2\}$, $\{4, 4\} = \{4\}$
Dann Paar = 2-Tupel oben angefügt; auch 3-Tupel=Tripel $(3, 4, 3)$, 4-Tupel=Quadrupel erwähnt mit je einem Beispiel.
Auch erwähnt, dass die Einträge Komponenten heissen: erste Komponente, zweite Komponente.

Beispiel 1.8.2. Jeder Punkt in der Koordinatenebene (= der mit einem Koordinatensystem versehenen Zeichenebene) ist (nach Wahl eines Koordinatensystems) durch seine beiden Koordinaten eindeutig bestimmt. Wenn ein Punkt P die x-Koordinate 2 und die y-Koordinate 7 hat, so bestimmt das Paar $(2, 7)$ den Punkt P und man schreibt $P = (2, 7)$.

Beachte: Das Paar $(7, 2)$ mit vertauschten **Komponenten** ist ein anderer Punkt der Koordinatenebene, d. h. $(2, 7) \neq (7, 2)$. Bei Paaren kommt es im Gegensatz zu Mengen auf die Reihenfolge an.

Definition 1.8.3 Produkt von Mengen

Wenn A und B Mengen sind, so ist das **Produkt** $A \times B$ per Definition die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, d. h.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Sprechweise: «A Kreuz B»

Hierbei ist der Fall $A = B$ erlaubt. Statt $A \times A$ schreibt man meist A^2.

Beispiel 1.8.4. Wenn $A = \{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\}$ und $B = \{2, 7\}$ gelten, so gilt ✎

$$A \times B = \{(\text{rot}, 2), (\text{grün}, 2), (\text{blau}, 2), (\text{rot}, 7), (\text{grün}, 7), (\text{blau}, 7)\}$$

Bild malen, A waagerecht, B senkrecht, Produkt $A \times B$

Beispiel 1.8.5. Wenn $A = \{1, 2\}$ gilt, so gilt ✎

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

(Formel links, Bild rechts) Bild malen.

Aufgabe A10

(a) Im Fall $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$, geben Sie $A \times B$ an und bestimmen sie die Mächtigkeit/Kardinalität $|A \times B|$.
(b) Wenn $|A| = 10$ und $|B| = 7$ gilt, was ist $|A \times B|$?
(c) Wenn $|A| = n$ und $|B| = m$ gilt, was ist $|A \times B|$?
(d) Geben Sie $|A \times B|$ in Abhängigkeit von A und B an!
(e) Im Fall $A = \{1, 2, 3\}$, bestimmen sie die Mächtigkeit/Kardinalität $|A^2| = |A \times A|$.
(f) Geben Sie $|A^2|$ in Abhängigkeit von A an!

1.9 Menge der ganzen und reellen Zahlen

Definition 1.9.1 ganze Zahlen, Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Die Zahlen

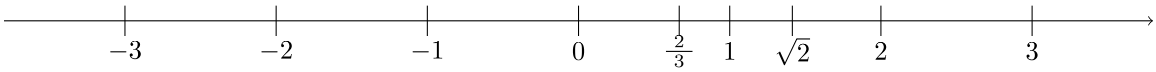
$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

heissen **ganze** Zahlen. Die Menge der ganzen Zahlen wird als $\mathbb{Z}$ notiert, d. h.

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Definition 1.9.2 reelle Zahlen, Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

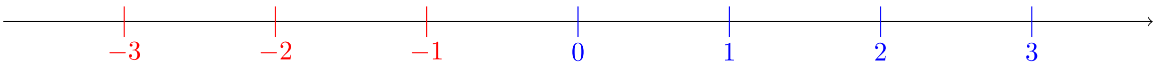
Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** ist die Menge aller Punkte auf dem Zahlenstrahl.



1.9.3. Offensichtlich gelten

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

Diese Inklusion (= Teilmengenbeziehung) zwischen Mengen kann man sich graphisch gut vorstellen. Im folgenden Zahlenstrahl sind die negativen Zahlen rot und die natürlichen Zahlen blau markiert. Die Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ bedeuten dann: «blau» ist enthalten in «rot oder blau» ist enthalten in «rot oder blau oder schwarz».



Beispiel 1.9.4. Das Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besteht aus allen Paaren (x, y) mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Wenn wir uns $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl vorstellen und den ersten Faktor $\mathbb{R}$ (des Produkts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) horizontal und den zweiten Faktor $\mathbb{R}$ vertikal zeichnen, erhalten wir ✎(Koordinatensystem zeichnen)

Mit anderen Worten: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist eine Koordinatenebene.

Man kann sich $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Teilmenge davon vorstellen. (Gitterpunkte in roter Farbe markieren)

Wie sieht $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ als Teilmenge aus?
Wie sieht $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ aus?

Zusatzaufgaben: Markiere die folgenden Teilmengen der Koordinatenebene:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ gerade}\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y \text{ durch 2 teilbar}\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y \text{ durch 3 teilbar}\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy \text{ gerade}\}$$
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy \text{ ungerade}\}$$
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x\}$$

1.10 Intervalle

Definition 1.10.1 Intervalle und deren Notation/Schreibweise

Intervalle sind «zusammenhängende» Teilmengen/Abschnitte der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$.

Wenn ein solcher Abschnitt beschränkt ist, so besteht er aus allen Zahlen zwischen einer reellen Zahl a, der **unteren Grenze** und einer reellen Zahl b, der **oberen Grenze** (wobei $a < b$). Untere und obere Grenze können dazugehören oder nicht. Dies liefert vier Möglichkeiten für **beschränkte** Intervalle. ✎Betone, dass links die abkürzende Schreibweise steht. Zahlenstrahl mit (farbiger) Intervallmarkierung (runde, eckige Klammer als Grenzmarkierung) darunter ergänzen.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **offenes Intervall mit Grenzen a und b**

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes Intervall**

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ **linksabgeschlossenes rechtsoffenes Intervall**

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ **linksoffenes rechtsabgeschlossenes Intervall**

Mit Hilfe der Symbole $\infty = +\infty$ für «(plus) unendlich» und $-\infty$ für «minus unendlich» definieren wir **unbeschränkte** Intervalle («sie gehen auf mindestens einer Seite ins Unendliche»): ✎Nur Formeln hinschreiben. Bezeichnungen weglassen, bringt nicht viel. Rechts Zeichnungen mit Zahlenstrahl ergänzen.

$$
\begin{aligned}
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Selten taucht hier ein Notationsproblem auf: Ist mit $(2, 3)$ ein Paar gemeint oder ein offenes Intervall?

Merke 1.10.2 Klammernotation bei Intervallen

Bei der Schreibweise von Intervallen bedeutet

- eine eckige Klammer (also «[» links bzw. «]» rechts), dass die entsprechende Zahl zum Intervall dazugehört;
- eine runde Klammer (also «(» links bzw. «)» rechts), dass die entsprechende Zahl **nicht** zum Intervall dazugehört; Manche verwenden dafür nach aussen gerichtete eckige Klammern, also «]» statt «(» und «[» statt «)».
- bei $-\infty$ oder $+\infty$ als Intervallgrenze wird stets die runde Klammer geschrieben (denn Plus- bzw. Minus-Unendlich ist nur ein Symbol und gehört nicht zum Intervall dazu).

Aufgabe A11 Jeweils zwei der folgenden zwölf Mengen sind gleich (gemeint ist, dass es 6 Paare gleicher Mengen gibt). Finden Sie heraus, welche.

Empfehlung: Markieren Sie alle vorkommenden Mengen (und ihre Schnitte, Vereinigungen, Komplemente) auf dem Zahlenstrahl.

a) $[-2, -1)$ b) $(4, 5)$ c) $[-1, \infty)$ d) $(-1, \infty)$

e) $(4, 5]$ f) $[-2, -1) \cup [1, 2]$ g) $(3, 5) \cap (4, 6)$ h) $\mathbb{R} \setminus (-\infty, -1]$

i) $[-2, 2] \setminus [-1, 1)$ j) $(3, 5] \cap (4, 6)$ k) $\mathbb{R} \setminus (-\infty, -1)$ l) $[-2, 1] \setminus [-1, \infty)$

Aufgabe A12 Zeichnen Sie $\mathbb{R}^2$ und markieren Sie darin die folgenden Mengen. (Benötigt werden x- und y-Koordinaten von -2 bis 10.)

Empfehlung: Wenn eine Seite einer Figur zur Menge dazugehört, zeichnen Sie diese Seite als durchgezogene Linie; wenn sie nicht dazugehört, zeichnen Sie sie als gestrichelte Linie.

a) $[2, 4] \times [1, 2]$ b) $[-1, 1] \times [2, 3]$

c) $(5, 7) \times [1, 2]$ d) $(5, 7] \times [3, 4)$

e) $\{8\} \times [1, 4]$ f) $\{9\} \times [1, 4)$

g) $([1, 4] \times [5, 9]) \setminus ([2, 3] \times [6, 8])$ h) $([6, 9] \times [5, 9]) \setminus ((7, 8) \times (6, 8))$

i) $\{-1.5\} \times \mathbb{R}$ j) $[0, \infty) \times \{-1\}$

Bemerkung: Bei den beiden Teilaufgaben mit dem Differenzsymbol $\setminus$ könnte man die «Schutzklammern» weglassen, denn per Konvention bindet $\times$ stärker als $\setminus$.

1.11 Mengen von Teilmengen und Potenzmenge

Aufgabe A13

(a) Die Menge $A = \{1, 2\}$ hat genau vier Teilmengen. Bestimmen Sie diese!
(b) Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
(c) Wie viele Teilmengen hat eine Menge mit 5 Elementen? Mit 4 Elementen? Mit 3 Elementen? Mit 2 Elementen, Mit 1 Element? Mit 0 Elementen? Mit 100 Elementen?
(d) Ergänzen Sie den folgenden Satz 1.11.1 (was ist beim Stiftsymbol einzutragen?)?
(e) Beweisen Sie diesen Satz! Dafür ist eine Textargumentation aufzuschreiben. Zeigen Sie diese Ihrem Nachbarn. Kann er sie ohne weitere Erläuterungen nachvollziehen?

Satz 1.11.1

Jede (endliche) Menge mit n Elementen hat genau ✎ 2^n Teilmengen.

Beweis. Siehe Lösung von Aufgabe A13.(e). □

Definition 1.11.2 Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge A wird als **Potenzmenge von** A bezeichnet. Die Potenzmenge wird als $\mathcal{P}(A)$ notiert, d. h. es gilt

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ ist Teilmenge von } A\}$$

Beispiel 1.11.3. Die Potenzmenge der drei-elementigen Menge $M = \{x, y, z\}$ ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, x\}\}.$$

Aufgabe A14

(a) Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

$$\{7, 3\} \in \mathcal{P}(\{1, 3, 5, 7\}) \qquad \{\{7, 3\}\} \in \mathcal{P}(\{3, 5, 7\}) \qquad \{\{7, 3\}\} \subset \mathcal{P}(\{3, 5, 7\}) \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(\{1, -1\})$$

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{3, 7\})$ und $|\mathcal{P}(\{3, 7\})|$.

(c) Ergänzen Sie die folgende beiden Lückenformeln:

Für jede n-elementige Menge M gilt $|\mathcal{P}(M)| = \boxed{2^n}$

Für jede endliche Menge X gilt $|\mathcal{P}(X)| = \boxed{2^{|X|}}$

(d) Und etwas abstrakter: Welche Behauptungen stimmen? (Hinweis: Schreibe $\mathcal{P}(\varnothing)$ und $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ auf.)

$\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$ $\quad \{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad \{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\varnothing)$

$\varnothing \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ $\quad \{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ $\quad \{\{\varnothing\}\} \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$ $\quad \{\{\varnothing\}\} \subset \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$

1.12 Russellsche Antinomie

1.12.1. Man betrachte die folgende «Menge». ✎

Zu Ehren von Russel wird sie R genannt.

$$R := \{x \mid x \notin x\}$$

Die interessante Frage ist nun, ob R selbst zu dieser Menge gehört. Entweder gehört R zu R oder nicht. Wir betrachten beide Fälle:

- Fall $R \in R$:
  Dies bedeutet laut Definition von R, dass $R \notin R$. Widerspruch.
- Fall $R \notin R$:
  Dies bedeutet laut Definition von R, dass $R \notin R$ falsch ist, dass also $R \in R$ gilt. Widerspruch.

1.12.2. Dieses Paradoxon zeigt, dass die «naive» Mengenlehre widersprüchlich ist. Es wird zu Ehren von Bertrand Russel als **Russelsche Antinomie** bezeichnet, der es 1903 veröffentlichte. Zermelo hatte es ebenfalls entdeckt.

Die Lösung besteht darin, dass R keine Menge ist. Beim Definieren neuer Mengen muss man also genauer aufpassen, als man dies naiv erwartet.

Dies führte zur Entwicklung diverser Axiomensysteme der Mengenlehre, deren bekanntestes wohl die ZFC-Mengenlehre ist, in der man fast die gesamte Mathematik entwickeln kann. Die Buchstaben ZFC stehen für die Mathematiker Zermelo und Frenkel und das englische Wort «choice» als Abkürzung für das «axiom of choice» (= Auswahlaxiom).

1.12.3. Begriffe:

- Paradoxon: Eine Befund oder eine Aussage, die dem Erwarteten zuwiderläuft oder zu einem Widerspruch führt.
- Antinomie: Spezielle Art des logischen Widerspruchs, bei der zueinander im Widerspruch stehende Aussagen gut begründet werden können.

Barbier-Paradoxon erwähnen? (nette Links auf Wikipedia und Erklärungen: Es gibt keinen Barbier bei dieser Definition.

1.13 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A15

(a) Gib die folgenden Mengen in aufzählender Form an.
  (i) Die Menge der punktsymmetrischen Grossbuchstaben des Alphabets.
  (ii) Die Menge der Grossbuchstaben des Alphabets mit einer vertikalen Symmetrieachse.

(b) Gib die folgenden Mengen in aufzählender Form an und gib zusätzlich an, wie man den mathematischen Ausdruck vorliest.
  (i) $\{x \in \mathbb{N} \mid 16 \leq x^2 < 49\}$
  (ii) $\{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ ist durch 3 teilbar, aber kein Vielfaches von 6}\}$

(iii) $\{5s+2 \mid s \in \mathbb{N}\}$
(iv) $\{3-2a \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{2,5\}\}$

(c) Gib die folgenden Mengen in beschreibender Form an.

(i) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ (ii) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ (iii) $C = \{0, 7, 14, 21, 28, \dots\}$
(iv) $D = \{7, 21, 35, 49, \dots\}$ (v) $E = \{1, 3, 7, 21\}$ (vi) $F = \{1, 3, 9, 27, 81, \dots\}$
(vii) $G = \{20, 21, 22, 23, 24, \dots\}$ (viii) $H = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ (ix) $I = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$

Aufgabe A16 Lückenformeln: Entscheide bei jedem Kasten, in welcher Beziehung die beiden Mengen links und rechts des Kastens stehen. (Dabei sind die Grundmenge G und ihre Teilmengen A, B, C beliebig.)

- Wenn die beiden Mengen stets[1] gleich sind, schreibe ein Gleichheitszeichen $=$ in den Kasten.
- Sonst: Wenn die linke Menge stets eine Teilmenge der rechten Menge ist, schreibe ein Teilmengenzeichen $\subset$ in den Kasten.
- Sonst schreibe ein Fragezeichen ? in den Kasten.

Beispiel: Die Lösung von $A \cap A \ \square\ A$ ist $A \cap A \ \boxed{=}\ A$.

Hinweis: Verwende Venn-Diagramme (mit zwei oder drei Mengen), jeweils eines für die linke Menge und eines für die rechte Menge! Farben dürfen verwendet werden.

(a) $\varnothing \ \square\ \overline{A} \cap A \ \square\ G$
(b) $\varnothing \ \square\ \overline{A} \cup A \ \square\ G$
(c) $\overline{\overline{A}} \ \square\ A$ (links steht das Komplement des Komplements von A)
(d) $A \cap B \ \square\ A \ \square\ A \cup B$
(e) $A \cup B \ \square\ B \cup A$
(f) $A \setminus B \ \square\ B \setminus A$
(g) $A \cap \overline{B} \ \square\ A \setminus B$
(h) $\overline{A} \cup \overline{B} \ \square\ \overline{A \cap B}$
(i) $\overline{A} \cap \overline{B} \ \square\ \overline{A \cap B}$
(j) $\overline{A} \cap \overline{B} \ \square\ \overline{A \cup B}$
(k) $A \cap (B \cup C) \ \square\ (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(l) $A \cup (B \cap C) \ \square\ (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe A17 Wenn A und B Mengen mit $|A| = 10$ und $|B| = 7$ sind, wie viele Elemente hat

a) $A \cap B$ höchstens?
b) $A \cap B$ mindestens?
c) $A \cup B$ höchstens?
d) $A \cup B$ mindestens?
e) $A \setminus B$ höchstens?
f) $A \setminus B$ mindestens?
g) $B \setminus A$ höchstens?
h) $B \setminus A$ mindestens?
i) $\overline{A}$ höchstens?
j) $\overline{A}$ mindestens?

[1] Damit ist gemeint: Für alle Wahlen der Mengen A, B, C und der Grundmenge G.

Barbier-Paradoxon

1.13.1. Wir vereinbaren, dass wir eine Person einen **Barbier** nennen, wenn sie all diejenigen Personen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

Bitte selbst nachdenken (warum ist das ein Paradoxon? wo liegt der Widerspruch?), danach die folgende Fussnote anschauen.[2]

Dieses Paradoxon hat eine gewisse Ähnlichkeit zur Russellschen Antinomie. Vielleicht könnte man sagen, dass eine Menge «Russellmenge» heisst, wenn ihre Elemente genau diejenigen Objekte x sind, die sich nicht selbst als Element enthalten. Dann kommt man wohl wie in der Fussnote zum Ergebnis, dass keine Russellmenge existiert. So wie wir die Russellsche Antinomie vorgestellt haben, ist der Schluss wohl, dass $\{x \mid x \notin x\}$ keine Menge ist (oder keine erlaubte Art, eine Menge anzugeben). (Dies ist der Versuch einer Erklärung.)

Für Interessierte: Kardinalität der Potenzmenge einer Menge

Definition 1.13.2 Funktion

Wenn A und B Mengen sind, so nennt man eine Zuordnung, die jedem Element von A ein Element von B zuordnet, eine **Funktion von A nach B**.
Die Schreibweise $f\colon A \to B$ bedeutet, dasss f eine Funktion von A nach B ist. Das einem Element $a \in A$ zugeordnete Element von B wird dann als $f(a)$ notiert.

Definition 1.13.3 bijektive Funktion = Bijektion

Wir nennen eine Funktion $f\colon A \to B$ genau dann **bijektiv** oder sagen, dass f eine **Bijektion** ist,

(a) wenn verschiedenen Elementen von A verschiedene Elemente von B zugeordnet werden (also aus $a \neq a'$ folgt $f(a) \neq f(a')$, für alle Elemente a, $a' \in A$) und
(b) wenn es für jedes Element $b \in B$ ein Element $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

1.13.4. Kürzer ausgedrückt ist eine Funktion $f\colon A \to B$ genau dann bijektiv, wenn es für jedes Element $b \in B$ **genau ein** Element $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

Definition 1.13.5 Gleichmächtigkeit

Wir sagen, dass zwei Mengen A und B **dieselbe Mächtigkeit/Kardinalität haben** oder dass sie **gleichmächtig sind**, wenn es eine Bijektion $f\colon A \to B$ gibt.

Satz 1.13.6 Kardinalität der Potenzmenge

Ist A eine beliebige Menge, so haben A und $\mathcal{P}(A)$ nicht dieselbe Kardinalität.

1.13.7. Aussage ist für endliche Mengen nicht besonders überraschend, für unendliche aber vielleicht schon.
Genauer hat A eine echt kleinere Kardinalität als $\mathcal{P}(A)$; die Zuordnung $a \mapsto \{a\}$ ist eine «injektive» Funktion von A nach $\mathcal{P}(A)$.

Beweis. Wir führen die Annahme, dass es eine Bijektion von A nach $\mathcal{A}$ gibt, zu einem Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt dann, dass es keine solche Bijektion gibt, dass also A und $\mathcal{A}$ nicht gleichmächtig sind.
Annahme: Sei $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ eine Bijektion.
Betrachte $E := \{a \in A \mid a \notin f(a))\}$. (Beachte, dass $f(a) \subset A$ eine Teilmenge ist und somit $a \notin f(a)$ eine sinnvolle Bedingung ist.)
Dann ist E eine Teilmenge von A, also $E \subset A$ oder gleichbedeutend $E \in \mathcal{P}(A)$. Weil f eine Bijektion ist, bedeutet dies, dass es genau ein Element $a \in A$ gibt mit $E = f(a)$.
Nun muss entweder $a \in E$ gelten oder $a \notin E$. Aber:

- Aus $a \in E$ folgt laut Definition von A, dass $a \notin f(a) = E$. Widerspruch.
- Aus $a \notin E$ folgt laut Definition von A, dass $a \in f(y) = E$. Widerspruch.

Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Bijektion f geben kann.
(Genauer zeigt dieser Beweis, dass es keine «Surjektion» $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.) □

[2] Man wird vermutlich so argumentieren:

- Wenn der Barbier sich selbst rasiert, so rasiert er sich nach der obigen Vereinbarung nicht selbst. Widerspruch.
- Wenn der Barbier sich nicht selbst rasiert, so rasiert er sich nach der obigen Vereinbarung selbst. Widerspruch.

Ein sinnvoller Ausweg aus diesem Problem ist Folgendes: Die obige «Vereinbarung» oder Definition, was ein Barbier ist, definiert die leere Menge: Es gibt keine Person, die die angegebene Bedingung erfüllt. (Insofern ist es eine schlechte Definition des Barbierberufs.)
Das Problem der obigen Argumentation ist, dass implizit vorausgesetzt ist, dass es einen Barbier gibt. Dies ist aber schlicht nicht der Fall.
Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Barbier-Paradoxon.

1.14 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-zahlmengen-schreibweisen

Es gibt oft mehrere korrekte Möglichkeiten für die beschreibende Form.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim}\}$

b) $\{0, 37, 74, 111, 148, 185, \ldots, \} = \{37x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Vielfaches von } 37\}$
$= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 37 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ 37 ist ein Teiler von } n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 37k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$

c) $\{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000\} = \{a^3 \mid a \in \mathbb{N} \text{ und } a^3 < 1111\}$
$= \{b \in \mathbb{N} \mid b < 1111 \text{ und } b = c^3 \text{ für ein } c \in \mathbb{N}\} = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ ist Kubikzahl und kleiner als } 1111\}$

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\} = \{2^z \mid z \in \mathbb{N}\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}\}$
$= \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ ist Zweierpotenz}\}$.

e) $\{13\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 13\}$

f) Beachte $91 = 7 \cdot 13$. Somit gibt es keine Primzahl, die durch 91 teilbar ist.
$\{\} = \varnothing = \{p \in \mathbb{N} \mid p < 0\} = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 = p\} = \{p \in \mathbb{N} \mid \text{falsch}\}$

Lösung zu A2 ex-maechtigkeit

a) $|A| = 4$ b) $|B| = 3$ c) $|C| = 0$ d) $|D| = \infty$ e) $|E| = 4$ f) $|F| = 11$

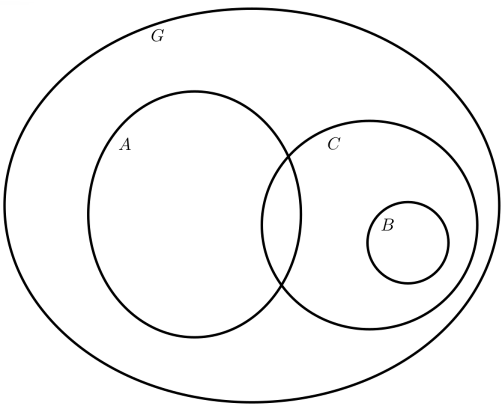
Lösung zu A3 ex-teilmenge-einfach

a) $\{0\} \subset X$
b) $\{1\} \not\subset X$
c) $\{2\} \subset X$
d) $\{0, 4\} \subset X$
e) $\{1, 3, 5\} \not\subset X$
f) $\{2, 3, 4\} \subset X$
g) $\{0, 1, 2, 3\} \not\subset X$
h) $\{0, 7-4, 4, \frac{6}{3}\} = \{0, 3, 4, 2\} = \{0, 2, 3, 4\} \subset X$
i) $\varnothing \subset X$
j) $X \subset X$
k) $\mathbb{N} \not\subset X$
l) $\{\} = \varnothing \subset X$

Lösung zu A4 ex-teilmenge-beide-richtungen

Dies bedeutet, dass X und Y gleich sind, in Formeln $X = Y$. Genauer ist die Aussage $X = Y$ gleichbedeutend zu den Aussagen $X \subset Y$ und $Y \subset X$, denn genau dann sind zwei Mengen gleich, wenn jedes Element der ersten Menge in der zweiten Menge enthalten ist und umgekehrt.

Lösung zu A5 ex-mengendiagramm-dreiecke



Bemerkung: Auf die genaue Form der Mengen und deren Lage kommt es hier nicht an.

Bemerkung: Das «Dreieck mit drei Seiten der Länge Null» wird hier nicht als Dreieck aufgefasst. (Welche Innenwinkel hat es? Ist es rechtwinklig?)

Lösung zu A6 ex-mengenoperationen-einfach

a) $A \cap B = \{6, 9\}$

b) $A \cup B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

c) $A \setminus B = \{3, 5, 8\}$

d) $\overline{A} = \{0, 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12\}$

Lösung zu A7 ex-mengenoperationen-teiler-vielfache

a) $T_{12} \cap T_{18} = T_6$

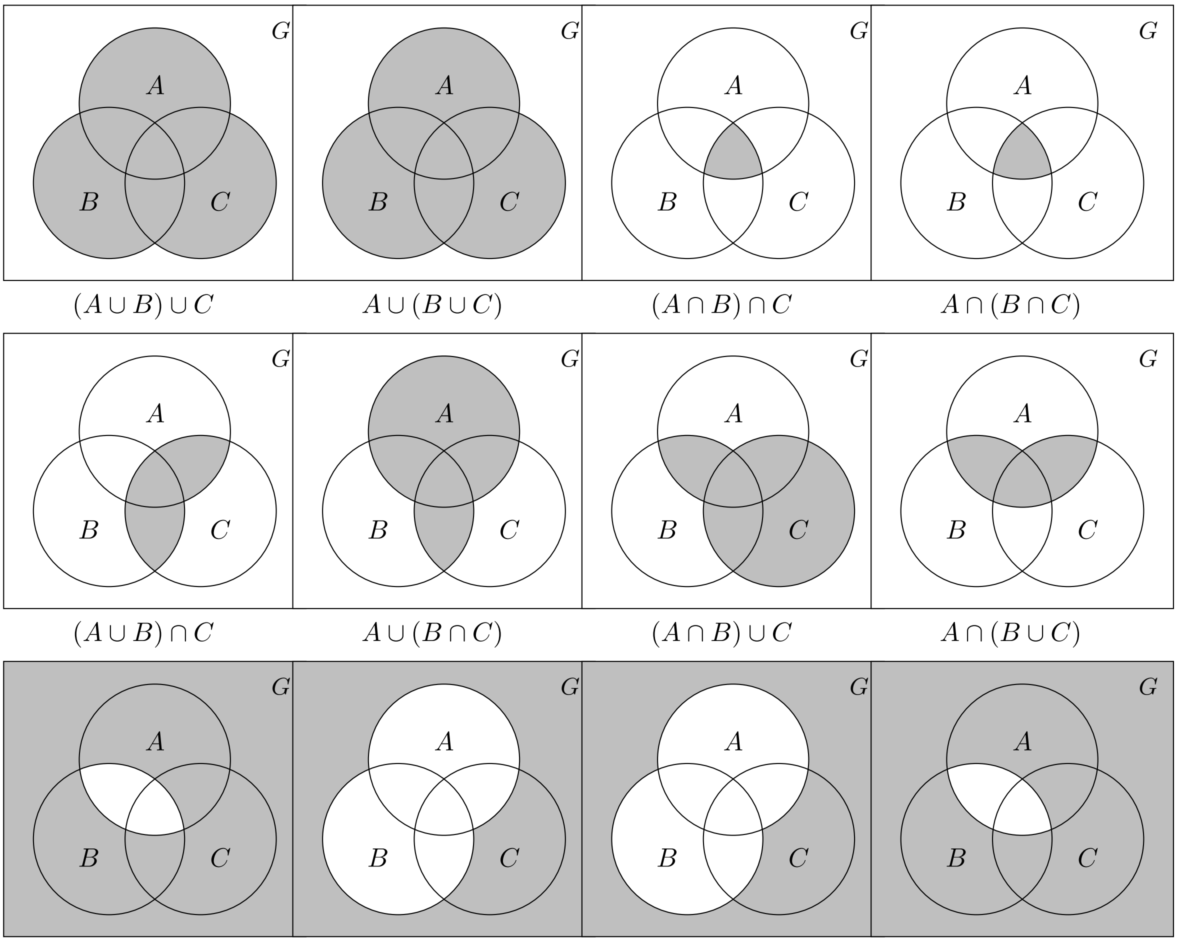
b) $(T_{12} \setminus T_{18}) \cup (T_{18} \setminus T_{12}) = \{4, 9, 12, 18\}$

c) $T_{12} \cap V_3 = \{3, 6, 12\}$

d) $V_9 \cap V_6 = V_{18}$

Lösung zu A8 ex-venn-menge-schraffieren

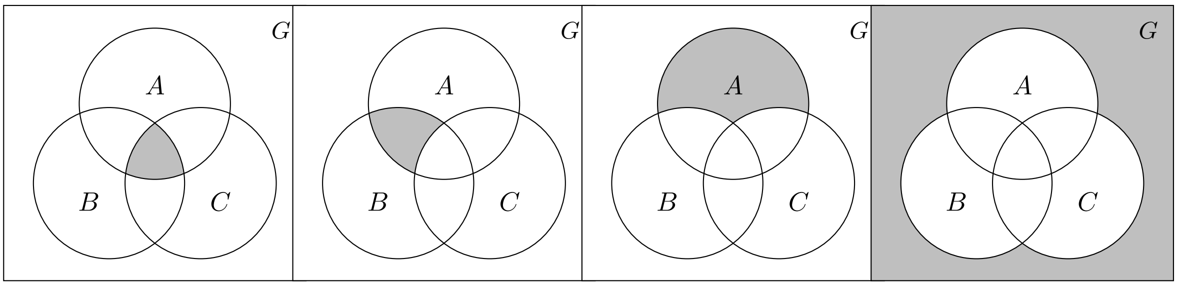
Schraffiere in den folgenden Venn-Diagrammen jeweils den Bereich, der zu dem Ausdruck unter dem Diagramm gehört. Die Mengen A, B und C sind jeweils Teilmengen der Grundmenge G; Komplemente werden in G gebildet.



a) $(A \cup B) \cup C$ | $A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C$ | $A \cap (B \cap C)$

b) $(A \cup B) \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$ | $(A \cap B) \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$

c) $\overline{A} \cup \overline{B}$ | $\overline{A \cup B}$ | $\overline{A} \cap \overline{B}$ | $\overline{A \cap B}$

d) 

$A \cap B \cap C$ $\quad$ $A \cap B \cap \overline{C}$ $\quad$ $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

e)

- In (a) gelernt: Für alle Mengen A, B, C gelten die sogenannten **Assoziativgesetze** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C$. Man kann deshalb Klammern weglassen.
- In (b) gelernt: Hier darf man keine Klammern weglassen!
- In (c) gelernt: Für alle Mengen A und B gelten die sogenannten **de-morganschen Gesetze** $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ und $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
- In (d) gelernt: Jeder Bereich lässt sich als Schnitt geeigneter Mengen und Komplemente schreiben.

f) Die Menge $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ stimmt mit der Menge $A \cup (B \cap C)$ überein (zweite Menge in (b)).
Die Menge $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ stimmt mit der Menge $A \cap (B \cup C)$ überein (vierte Menge in (b)).

Lösung zu A9 ex-venn-ausdruck-zu-gebiet

- $A \cap \overline{B} \cap C$ oder $(A \cap C) \setminus B$
- $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C)$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)
- $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)
- $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)

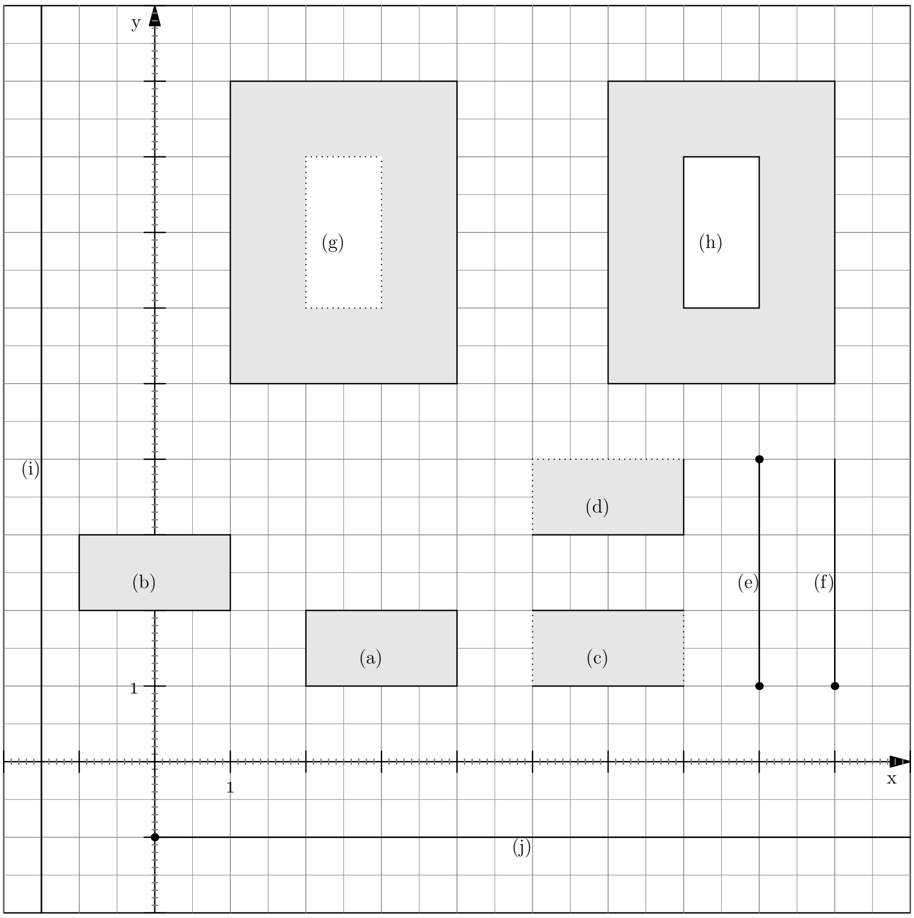
Lösung zu A10 ex-produkt-von-mengen

(a) $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ und $|A \times B| = 6$.
(b) $|A \times B| = 7 \cdot 10 = 70$ (= Anzahl der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$; für a hat man 10 Möglichkeiten, für b 7 Möglichkeiten; jede Möglichkeit für a kann mit jeder Möglichkeit für b kombiniert werden; deswegen $7 \cdot 10 = 70$).
(c) $|A \times B| = m \cdot n$ (selbe begründung wie zuvor)
(d) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
(e) $|A^2| = 3 \cdot 3 = 9$
(f) $|A^2| = |A|^2$

Lösung zu A11 ex-intervall-rechnerei

- $[-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, -1)$
- $(-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, -1]$
- $[-2, 2] \setminus [-1, 1) = [-2, -1) \cup [1, 2]$
- $[-2, 1] \setminus [-1, \infty] = [-2, -1)$
- $(3, 5) \cap (4, 6) = (4, 5)$
- $(3, 5] \cap (4, 6) = (4, 5]$

Lösung zu A12 ex-produkt-von-mengen-zeichenebene



Lösung zu A13 ex-teilmengen-von-1234

(a) Die Menge $A = \{1, 2\}$ hat die folgenden 4 Teilmengen: $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{\}$

(b) $B = \{0, 1, 2, 3\}$ hat
- eine nullelementige Teilmenge: $\varnothing = \{\}$
- vier einelementige Teilmengen: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
- sechs zweielementige Teilmengen: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$,
- vier dreielementige Teilmengen: $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$
- eine vierelementige Teilmenge: $B = \{0, 1, 2, 3\}$

(c) 32, 16, 8, 4, 2, $1 = 2^0$, $2^1 00$.

(d) 2^n

(e) Jede Teilmenge B einer n-elementigen Menge A ist eindeutig dadurch beschreibbar, dass man bei jedem der n Elemente von A angibt, ob es zu B gehört oder nicht (d.h. bei jedem Element gibt es eine Ja/Nein-Entscheidung). Alle diese Ja/Nein-Entscheidungen sind beliebig kombinierbar. Folglich hat A genau

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ Faktoren}} = 2^n$$

Teilmengen.
Alternativlösung («vollständige Induktion»): Man überzeugt sich direkt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt (und auch für $n = 0$, denn die leere Menge $\varnothing$ hat genau $2^0 = 1$ Teilmenge, nämlich die leere Menge). Dann überlegt man sich, dass beim Übergang von einer Menge mit n Elementen zu einer Menge mit $n+1$ Elementen (d.h. ein neues Element kommt dazu) jede Teilmenge der grösseren Menge entweder
- genau eine Teilmenge der kleineren Menge ist oder
- genau eine um das neue Element vergrösserte Teilmenge der kleineren Menge ist.

Es gibt also doppelt so viele Teilmengen wie zuvor. Wenn wir schon wissen, dass die n-elementige Menge 2^n Teilmengen hat, so hat die $(n + 1)$-elementige Menge also $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ Teilmengen.

Lösung zu A14 ex-kardinalitaet-potenzmenge

(a) Hier sind die korrigierten Behauptungen (nur die zweite Behauptung war falsch, denn $\{\{7,3\}\}$ ist keine Teilmenge von $\{3,5,7\}$).

$$\{7,3\} \in \mathcal{P}(\{1,3,5,7\}) \qquad \{\{7,3\}\} \notin \mathcal{P}(\{3,5,7\}) \qquad \{\{7,3\}\} \subset \mathcal{P}(\{3,5,7\}) \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$$

(b)

$$\mathcal{P}(\{3,7\}) = \{\varnothing, \{3\}, \{7\}, \{3,7\}\}$$
$$|\mathcal{P}(\{3,7\})| = 4$$

(c) Ergänzen Sie die folgende beiden Lückenformeln:

$$\text{Für jede } n\text{-elementige Menge } M \text{ gilt} \quad |\mathcal{P}(M)| = \boxed{2^n}$$
$$\text{Für jede endliche Menge } X \text{ gilt} \quad |\mathcal{P}(X)| = \boxed{2^{|X|}}$$

(d) Es gelten $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ und $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.)
Korrigierte Behauptungen:

$$\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing) \qquad \{\varnothing\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}) \qquad \{\varnothing\} \notin \mathcal{P}(\varnothing)$$
$$\varnothing \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) \qquad \{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) \qquad \{\{\varnothing\}\} \in \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) \qquad \{\{\varnothing\}\} \subset \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$$

Lösung zu A15 ex-mengenschreibweisen

(a) (i) $\{H, I, N, O, S, X, Z\}$
(ii) $\{A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y\}$

(b) (i) $\{4, 5, 6\}$
«Die Menge aller x in $\mathbb{N}$ mit 16 kleiner-gleich x^2 kleiner 49»
oder «Die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die gilt: 16 ist kleiner-gleich x Quadrat und x Quadrat ist kleiner als 49»
oder «Die Menge aller x Element $\mathbb{N}$, für die gilt: 16 kleiner-gleich x Quadrat kleiner 49»
oder (sehr ausführlich) «Die Menge aller Elemente x in der Menge der natürlichen Zahlen, für die gilt: 16 kleiner-gleich x Quadrat kleiner 49»

(ii) $\{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$
«Die Menge aller t in $\mathbb{N}$, die durch 3 teilbar sind, aber kein Vielfaches von 6 sind»
oder (leicht abgewandelt, aber gleichbedeutend) «Die Menge aller t in $\mathbb{N}$, die durch 3 teilbar sind, aber nicht durch 6»
oder (leicht abgewandelt, aber gleichbedeutend) «Die Menge aller durch 3, aber nicht durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen»

(iii) $\{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$
«Die Menge aller $5s + 2$, wobei s die/alle natürlichen Zahlen durchläuft»
oder (recht kurz) «Die Menge aller $5s + 2$ für s in $\mathbb{N}$»
oder (nicht so eng an der mathematischen Notation, beschreibt aber dieselbe Menge) «Die Menge aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 2 ergeben»

(iv) $\{3, 1, -3, -5, -9, -11, -13, \dots\}$
«Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von 2 und 5 durchläuft»
oder (etwas umständlich und schwer verständlich) «Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a in $\mathbb{N}$ ohne die Menge, die aus den Elementen 2 und 5 besteht»
oder (etwas verkürzt und üblich) «Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a in $\mathbb{N}$ ohne 2, 5»

(c) (i) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$
(ii) $B = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\}$
(iii) $C = \{7a \mid a \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 7\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 7 teilbar}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \text{ ist Teiler von } x\}$
(iv) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Vielfaches von 7 und } x \text{ ist ungerade}\} = \{(2n + 1) \cdot 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$
(v) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ein Teiler von } 21\}$

(vi) $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Potenz von } 3\} = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(vii) $G = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 20\}$
(viii) $H = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl und } p \leq 13\} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq 16 \text{ ist prim}\}$
(ix) $I = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Lösung zu A16 ex-mengen-wahr-oder-falsch

(a) $\varnothing \; \boxed{=} \; \overline{A} \cap A \; \boxed{\subset} \; G$

(b) $\varnothing \; \boxed{\subset} \; \overline{A} \cup A \; \boxed{=} \; G$

(c) $\overline{\overline{A}} \; \boxed{=} \; A$ (links steht das Komplement des Komplements von A)

(d) $A \cap B \; \boxed{\subset} \; A \; \boxed{\subset} \; A \cup B$

(e) $A \cup B \; \boxed{=} \; B \cup A$

(f) $A \setminus B \; \boxed{?} \; B \setminus A$

(g) $A \cap \overline{B} \; \boxed{=} \; A \setminus B$

(h) $\overline{A} \cup \overline{B} \; \boxed{=} \; \overline{A \cap B}$

(i) $\overline{A} \cap \overline{B} \; \boxed{\subset} \; \overline{A \cap B}$

(j) $\overline{A} \cap \overline{B} \; \boxed{=} \; \overline{A \cup B}$

(k) $A \cap (B \cup C) \; \boxed{=} \; (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(l) $A \cup (B \cap C) \; \boxed{=} \; (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Lösung zu A17 ex-mengen-groesse-abschaetzen

a) 7 (wenn $B \subset A$)
b) 0 (wenn A und B *disjunkt* sind, d.h. kein gemeinsames Element haben: Dann gilt $A \cap B = \varnothing$)
c) 17 (wenn A und B disjunkt sind)
d) 10 (wenn $B \subset A$)
e) 10 (wenn A und B disjunkt sind)
f) 3 (wenn $B \subset A$)
g) 7 (wenn A und B disjunkt sind)
h) 0 (wenn $B \subset A$)
i) es gibt keine Obergrenze: $\overline{A}$ kann beliebig viele Elemente haben und auch unendlich sein; letzteres tritt ein, wenn die Grundmenge G unendlich ist.
j) 0 (im Fall $A = G$).

Literatur

[Wik25] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2025. www.wikipedia.org.