



## Lernziele: natürliche Zahlen

Kurzfassung: Alle behandelten Themen im Skript.

In der Prüfung sind ausser den üblichen Utensilien (Stifte, Farbstifte, Lineal, bei Geometrieprüfung: Geodreieck, Zirkel) keine weiteren Hilfsmittel erlaubt. Blätter werden zur Verfügung gestellt, inklusive Konzeptpapier.

### Wissen

- Begriffe:
  - Teiler
  - Vielfaches
  - Quersumme, alternierende Quersumme
  - Primzahl, Primfaktor, Primfaktorzerlegung,  $h$
  - ggT
  - kgV
- Teilbarkeitsregeln für Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11.
- Algorithmus: Sieb des Eratosthenes
- Satz von Euklid (Unendlichkeit der Menge der Primzahlen) inklusive Beweis  
Hierbei genügt es zu sagen, dass  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  durch keine der Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  teilbar ist und deswegen selbst eine Primzahl ist oder eine «neue» Primzahl als Teiler hat.
- Definition von Potenzen inklusive zugehörige Begriffe (e-te Potenz, Basis, Exponent)
- Potenzgesetze inklusive Beweis
- Satz über die Primfaktorzerlegung (PFZ) inklusive zugehörige Begriffe (Primfaktor)
- Anwendung der PFZ: Anzahl der Teiler einer Zahl (aus PFZ), Angabe aller Teiler.
- Teilerdiagramm = Teilerbild
- Anwendung der PFZ: Algorithmus zur Berechnung von (der PFZ von)  $\text{ggT}(a, b)$  und  $\text{kgV}(a, b)$ , sofern die PFZ von  $a$  und  $b$  bekannt sind.
- Anwendung der PFZ:  $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b)$
- Euklidischer Algorithmus (dabei wird Division mit Rest verwendet)

### Fähigkeiten/Können

- Kopfrechenfähigkeiten (wie auf den ersten beiden Seiten des Skripts beschrieben)
- schriftliches Addieren und Subtrahieren
- schriftliches Multiplizieren und Dividieren
- Teilbarkeitsregeln anwenden können
- ggT und kgV ausrechnen können in einfachen Fällen «von Hand» bestimmen können.
- Liste von Primzahlen mit Hilfe des Siebes des Eratosthenes erstellen können
- Neue Primzahlen aus bekannten Primzahlen erzeugen können mit dem Verfahren im Beweis des Satzes von Euklid.
- Potenzgesetze anwenden können, z. B. mit Hilfe der Potenzgesetze Ausdrücke vereinfachen (wie in A10)
- «falsche Rechengesetze» durch Gegenbeispiele widerlegen können  
Meist gibt es Gegenbeispiele, bei denen die beteiligten Zahlen sehr klein sind (etwa -1, 0, 1, 2, 3).
- Primfaktorzerlegungen geeigneter Zahlen angeben können; dabei die Potenzgesetze geschickt verwenden (A12, A13)
- mit Hilfe der Primfaktorzerlegung entscheiden können, ob eine natürliche Zahl eine Quadratzahl, Kubikzahl,  $\dots$ , 20-te Potenz einer natürlichen Zahl ist,  $\dots$  (vgl. A15).
- Aus PFZ einer Zahl: Anzahl der Teiler angeben können, alle Teiler auflisten können,
- Teilerdiagramm zeichnen können (bei maximal drei verschiedenen Primfaktoren)
- ggT und kgV mit PFZ (Satz 3.1.31 und Folgerung 3.1.32):
  - PFZ von  $\text{ggT}(a, b)$  und  $\text{kgV}(a, b)$  angeben können, wenn die PFZ von  $a$  und  $b$  gegeben oder leicht zu bestimmen sind.
  - Die Formel/Identität  $a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b)$  anwenden können.
  - Aufgaben wie A18 lösen können

- $\text{ggT}(a, b)$  mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen können (und aus  $\text{ggT}(a, b)$  und  $a$  und  $b$  auch das  $\text{kgV}(a, b)$  ausrechnen können).
- Beweise der folgenden Sätze wiedergeben können:
  - Satz von Euklid (muss nicht so ausführlich wie im Skript sein, jedoch muss die Hauptidee klar sein: Warum das Produkt der bekannten Primzahlen plus Eins eine neue Primzahl liefert, vergleiche oben im Teil «Wissen»)
  - Satz über Potenzgesetze