Valerie: Geradensteigung anpassen.

a) $\longrightarrow$ von $f(x)$ & $g(x)$ Ableitungen machen (da man gl. Steigung an einem Punkt braucht)

$f'(x) = m$, $g'(x) = 2x$

$\longrightarrow$ $m = 2x$

$\Longrightarrow$ man hat 2 Gleichungen
1. $f(x) = g(x) \longrightarrow m \cdot x = x^2 + 1$
2. $f'(x) = g'(x) \longrightarrow m = 2x$

1. x herausfinden: 2. in 1. einsetzen

$mx = x^2 + 1$

$(2x) \cdot x = x^2 + 1 \quad |$

$2x^2 = x^2 + 1 \quad | - x^2$

$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$

$x = \pm 1$

2. m herausfinden mit x einsetzen

$m = 2x$

$m = 2 \cdot (\pm 1) = \pm 2 \Longrightarrow \underline{\underline{m = \pm 2}}$

Logarithmus- und Exponentialfunktionsaufgabe (Frida, ?)

3. a) Bestimme den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f(x) = log(x + 2) + log(x − 2).
b) Berechne f''(ln(2)) für die Funktion f(x) = (2x+1)· e $^{-2x}$. Vereinfache soweit als möglich.

a) Definitionsbereich = Was darf ich für x einsetzen?

Bei log: darf nicht 0 oder negativ sein

$x-2>0$ $x+2>0$

$\boxed{x>2}$ $x>-2$

stärker

also $\mathbb{D} = [2, \infty)$

Nullstellen: $\log(x+2) + \log(x-2) = 0$

$$\log((x+2)(x-2)) = 0$$

$\log(x) = 0$ wenn $x = 1$

$$(x+2)(x-2) = 1$$

$$x^2 - 4 = 1$$

$$x^2 = 5$$

$x = \pm\sqrt{5}$ → Definitionsbereich $x > 2$

$\boxed{\text{also } x = \sqrt{5}}$

b) $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x}$

erste Ableitung $f'(x)$
→ Produktregel

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x+1)' \cdot e^{-2x} + (2x+1) \cdot (e^{-2x})' \\
&= 2 \cdot e^{-2x} + (2x+1) \cdot (-2e^{-2x}) \\
&= 2e^{-2x} - 2(2x+1) \cdot e^{-2x} \\
&= (2-4x-2)\,e^{-2x} \\
&= (-4x)\,e^{-2x} \\
&= -4xe^{-2x}
\end{aligned}
$$

Kettenregel

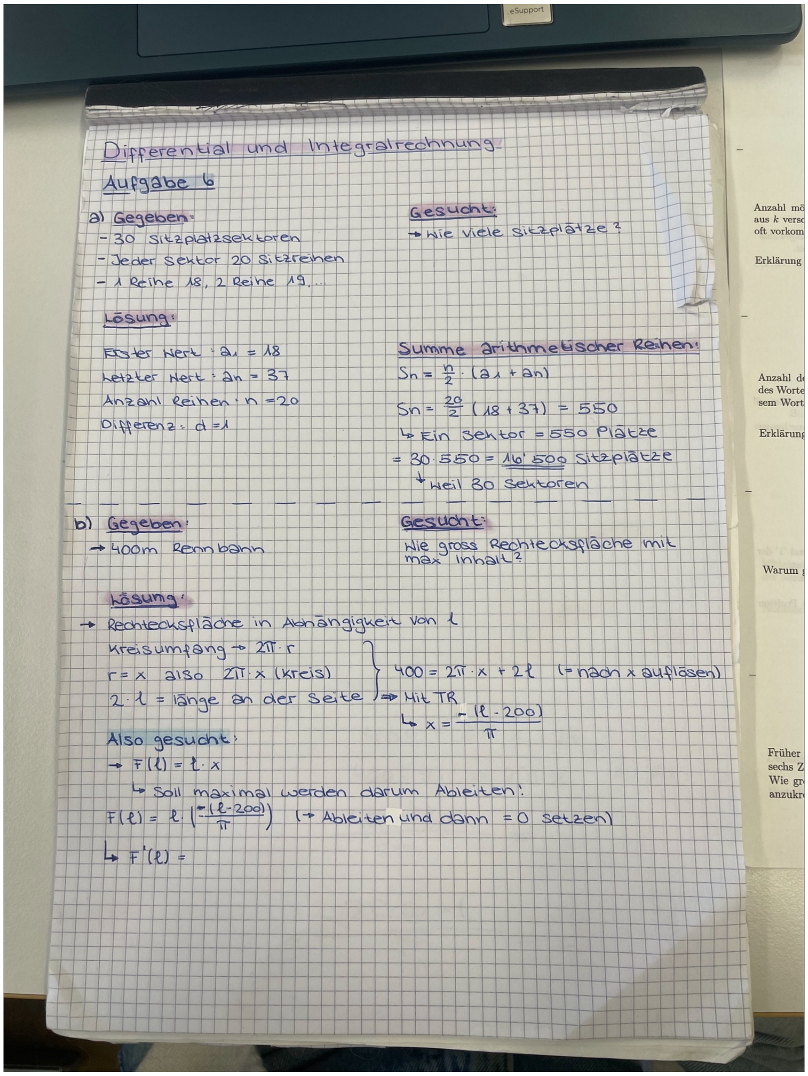
Zweite Ableitung und $f''(\ln(2))$ fehlen.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -4e^{-2x} - 4xe^{-2x} \cdot (-2) \\
&= -4e^{-2x} + 8xe^{-2x} \\
&= (8x-4)e^{-2x}
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
f''(\ln(2)) &= (8\ln(2) - 4)e^{-2\ln(2)} \\
&= (8\ln(2) - 4)e^{\ln(2^{-2})} \\
&= (8\ln(2) - 4)2^{-2} \\
&= (8\ln(2) - 4) \cdot \frac{1}{4} \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}
$$

Joyce: Stadion.



Differential und Integralrechnung

Aufgabe 6

a) Gegeben:

- 30 Sitzplatzsektoren
- Jeder Sektor 20 Sitzreihen
- 1 Reihe 18, 2 Reihe 19, ...

Gesucht:

→ Wie viele Sitzplätze?

Lösung:

Erster Wert: $a_1 = 18$

Letzter Wert: $a_n = 37$

Anzahl Reihen: $n = 20$

Differenz: $d = 1$

Summe arithmetischer Reihen:

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{20}{2} (18 + 37) = 550$

↳ Ein Sektor = 550 Plätze

$= 30 \cdot 550 = \underline{16'500}$ Sitzplätze

↓ weil 30 Sektoren

b) Gegeben:

→ 400m Rennbahn

Gesucht:

Wie gross Rechtecksfläche mit max Inhalt?

Lösung:

→ Rechtecksfläche in Abhängigkeit von l

$\left.\begin{array}{l}\text{Kreisumfang} \to 2\pi \cdot r \\ r = x \text{ also } 2\pi \cdot x \text{ (Kreis)} \\ 2 \cdot l = \text{länge an der Seite}\end{array}\right\} 400 = 2\pi \cdot x + 2l$ (→ nach x auflösen)

⇒ Mit TR

↳ $x = \frac{-(l - 200)}{\pi}$

Also gesucht:

→ $F(l) = l \cdot x$

↳ Soll maximal werden darum Ableiten!

$F(l) = l \cdot \left(\frac{-(l-200)}{\pi}\right)$ (→ Ableiten und dann = 0 setzen)

↳ $F'(l) =$

$$
\begin{aligned}
F(l) &= l \cdot x = l \cdot \frac{200 - l}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}(200l - l^2) \\
F'(l) &= \frac{1}{\pi}(200 - 2l) \\
F''(l) &= \frac{1}{\pi}(-2) = -\frac{2}{\pi} < 0
\end{aligned}
$$

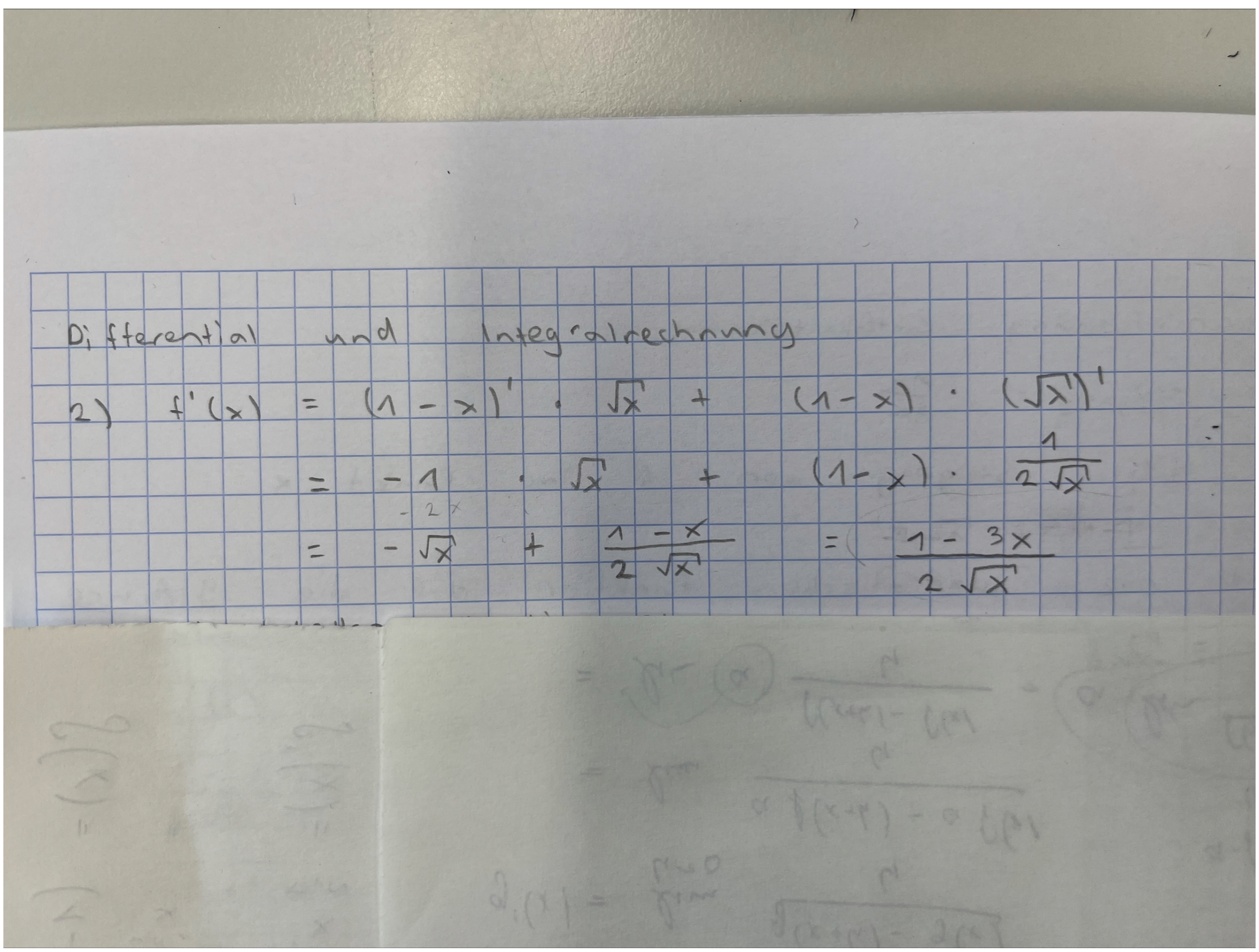
Nun $F'(l) = 0$ lösen, um einen Kandidaten zu bekommen.

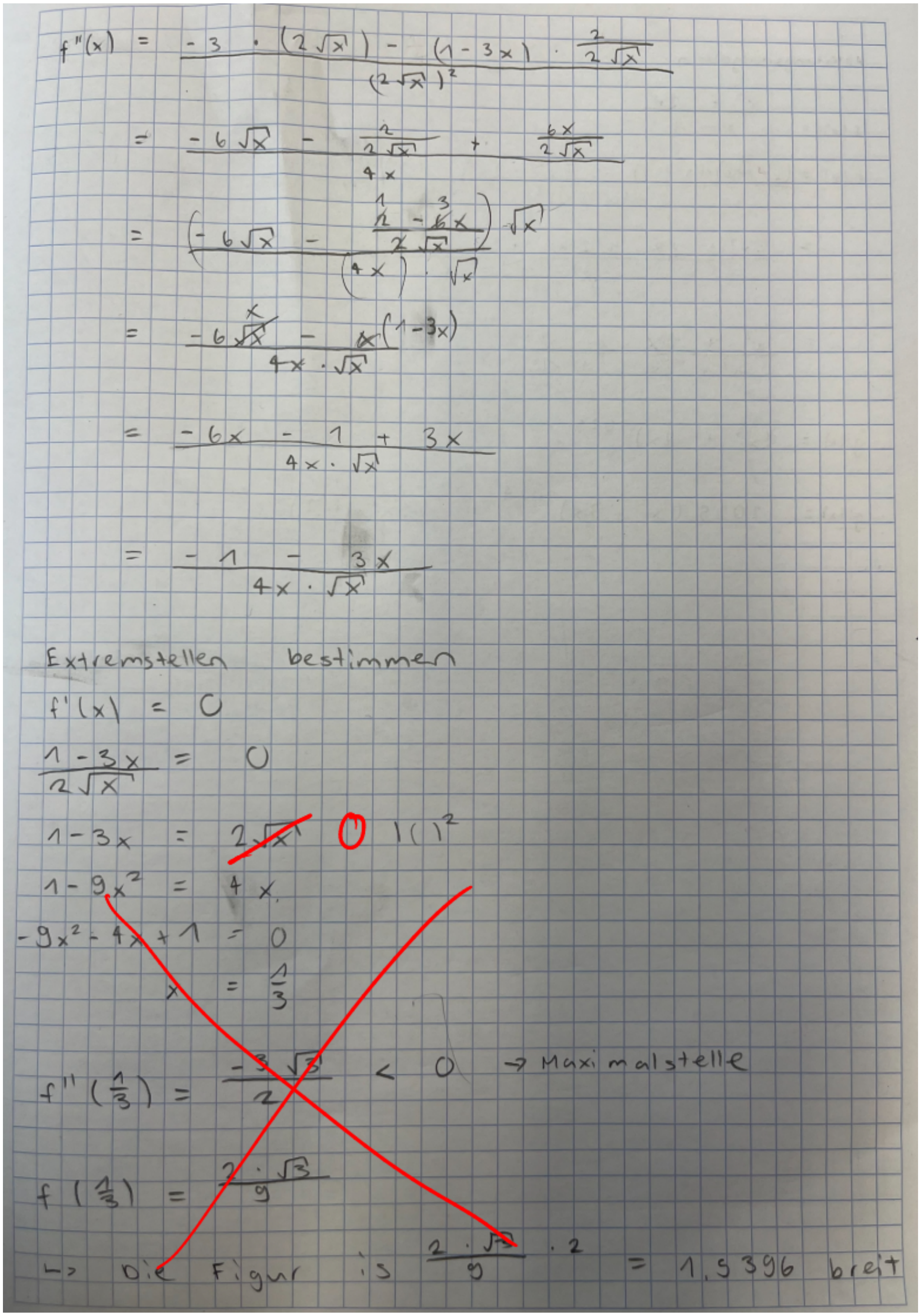
$$\begin{aligned} F'(l) &= 0 \\ \frac{1}{\pi}(200 - 2l) &= 0 \\ 200 - 2l &= 0 \\ 200 &= 2l \\ 100 &= l \end{aligned}$$

Da F'' stets negativ ist, ist $l = 100$ ein Maximum unserer Funktion. Für $l = 100$ wird das Fussballfeld also maximal gross.

Mit Hilfsmitteln

Ella, Sophie: Tropfen.





$$f''(x) = \frac{-3 \cdot (2\sqrt{x}) - (1-3x) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-6\sqrt{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} + \frac{6x}{2\sqrt{x}}}{4x}$$

$$= \frac{\left(-6\sqrt{x} - \frac{\cancel{2}^{1} - \cancel{6}^{3}x}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}{(4x)\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-6\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x}}^{x} - \cancel{x}(1-3x)}{4\cancel{x}\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-6x - 1 + 3x}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \frac{-1 - 3x}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

Extremstellen bestimmen

$f'(x) = 0$

$\frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0$

$1 - 3x = \cancel{2\sqrt{x}}\ 0 \quad |(\ )^2$

$1 - 9x^2 = 4x$

$-9x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} < 0 \to$ Maximalstelle

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}$

$\hookrightarrow$ Die Figur ist $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9} \cdot 2 = 1{,}5396$ breit

(Nach dem angestrichenen Fehler kommen noch diverse andere: Beim Quadrieren kommt links $(1-3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$ heraus. Auch ist $\frac{1}{3}$ keine Lösung der aufgeschriebenen Gleichung.)

Leichter geht das alles so:

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{3}{4\sqrt{x}} = -\frac{1+3x}{4x\sqrt{x}}$$

Kandidat(en) für Extremstelle(n) bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} &= 0 \\ 1-3x &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Da

$$f''(x_0) = -\frac{1+3\cdot\frac{1}{3}}{4\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

kleiner als Null ist, ist x_0 eine Maximalstelle.

Die zugehörige Breite ist das doppelte von $f(x_0)$, also

$$\text{maximale Breite} = 2\cdot f(x_0) = 2\cdot f(\tfrac{1}{3}) = 2(1-\tfrac{1}{3})\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{4}{9}\cdot\sqrt{3}$$

Dahlia, Kim: Silo.

Aufgabe 3

a) Volumen Halbkreiskugel: $V_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$

Volumen Zylinder: $V_Z = \pi r^2 \cdot h$

Gesamthöhe: $H = h + r \quad \rightarrow = 12\,m$

$h = H - r = 12m - 2{,}5m = 9{,}5m$

<u>alles einsetzen:</u>

$$\left.\begin{aligned} V_K &= \tfrac{2}{3}\pi \cdot 2{,}5^3 = 32{,}7\,m^3 \\ V_Z &= \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 9{,}5 = 186{,}5\,m^3 \end{aligned}\right\} = \text{Gesamtvolumen} = \underline{\underline{219{,}2\,m^3}}$$

b) $1\,m^3 \mathrel{\hat{=}} 700\,kg$

$219{,}3 = 153'510\,kg$

=> Ja es hat genug Platz

c) $V = \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

$$S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{Boden (Zylinder)}} + \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{Mantel (Zylinder)}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Halbkugel}}$$

d) $175 = \pi r^2 h + \frac{4}{6}\pi r^3 \quad \left| - \frac{4}{6}\pi r^3 \right.$

$175 - \frac{4}{6}\pi r^3 = \pi r^2 h \quad | : \pi r^2 \cdot h$

$\frac{175}{\pi r^2} - \frac{4}{6} r = h$

$$S = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{175}{\pi r^2} - \frac{4}{6} r\right) + 2\pi r^2$$

TR: $\frac{d}{dr}\left(\pi r^2 + \frac{2 \cdot 175}{r} - \frac{8}{6}\pi r^2 + 2\pi r^2\right)$

$$S' = 2\pi r - \frac{350}{r^2} \underbrace{- \frac{16}{6}\pi r}_{-\frac{8}{3}\pi r} \underbrace{+ \pi r}_{+\frac{12}{3}}$$

$= \frac{10}{3}\pi r - \frac{350}{r^2}$

Bis hierhin alles korrekt. Restliche Lösung: Siehe pdf der 4aLIM.