



## 22 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeit stellt ein Mass für die Sicherheit oder Unsicherheit eines Ereignisses in einem Zufallsexperiment dar.

Jedem Ereignis eines Zufallsexperimentes wird eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet, die man als die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses bezeichnet.

Für die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses  $A$  schreibt man meistens  $P(A)$  (das  $P$  kommt vom englischen Wort probability).

Je grösser  $P(A)$  ist, desto wahrscheinlicher ist, dass bei diesem Zufallsexperiment das Ereignis  $A$  eintreten wird.

- Tritt  $A$  mit Sicherheit ein, so gilt  $P(A) = 1$ . (Achtung: die Umkehrung gilt nicht zwingend!)
- Tritt  $A$  mit Sicherheit nicht ein, so gilt  $P(A) = 0$ . (Achtung: die Umkehrung gilt nicht zwingend!)

Quelle: [de.serlo.org](https://de.serlo.org), Lizenz: [Creative Commons, BY-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

### 22.1 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Die Laplace-Formel ist eine mathematische Formel aus der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hat ein Zufallsexperiment nur endlich viele Ergebnisse und haben diese alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, so gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$ :

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

[...]

Benannt ist die Formel nach dem französischen Mathematiker und Astronomen Pierre Simon Laplace (1749–1827).

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Laplace-Formel>, 27. 11. 2019

### 22.2 Baumdiagramme

Mehrstufige Zufallsexperimente können oft mit «Bäumen» dargestellt und berechnet werden.

✂ **Aufgabe A1** In einer Urne liegen 5 rote, 4 grüne und 3 schwarze Kugeln. Man zieht nacheinander zwei Kugeln und notiert sich die Farben, z.B.  $r, g$ . Zeichnen Sie den vollständigen Baum für diesen Versuch und berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, einmal mit, einmal ohne Zurücklegen. *Tipp: Notieren Sie sich die Wahrscheinlichkeiten für beide Varianten sinnvoll gekennzeichnet in einem Baum.*

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| a) $P(\text{erst rot, dann grün})$ | b) $P(\text{mindestens eine rote})$         |
| c) $P(\text{zwei gleiche Farben})$ | d) $P(\text{zwei unterschiedliche Farben})$ |

#### Merke 22.2.1 Additionsregel für sich ausschliessende Ereignisse

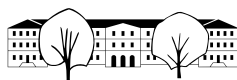
Schliessen sich die Ereignisse  $A$  und  $B$  aus, beträgt die Wahrscheinlichkeit, **dass  $A$  oder  $B$  eintritt**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Der entsprechende Baum wird wie folgt dargestellt:

**Beispiel:** Ein Würfel wird geworfen. Sei  $A$  das Ereignis «6er»,  $B$  das Ereignis «ungerade Augenzahl».

In diesem Fall schliessen sich  $A$  und  $B$  aus. Es gilt  $P(A) = \frac{1}{6}$ ,  $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  und  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

**Merke 22.2.2** Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse

Sind zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  unabhängig voneinander, beträgt die Wahrscheinlichkeit, **dass beide** eintreten:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Der entsprechende Baum wird wie folgt dargestellt:

**Beispiel:** Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Sei  $A$  das Ereignis «6er im ersten Wurf» und  $B$  das Ereignis «6er im zweiten Wurf».

In diesem Fall sind  $A$  und  $B$  unabhängig. Es gilt  $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$  und  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$ .

**Merke 22.2.3** Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung

Für zwei beliebige Ereignisse  $A$  und  $B$  beträgt die Wahrscheinlichkeit, **dass  $A$  oder  $B$  (oder beides)** eintritt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Veranschaulichen Sie das im Venn-Diagramm:

**Beispiel:** Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Sei  $A$  das Ereignis «6er im ersten Wurf» und  $B$  das Ereignis «6er im zweiten Wurf».

In diesem Fall schliessen sich  $A$  und  $B$  nicht aus, sind aber unabhängig. Es gilt  $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$  und  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36}$ .

Intuitiv kann man das so begreifen, dass die Kombination 6,6 nur einmal gezählt wird, im Gegensatz z.B. zur Kombination 1,6 (die als 6,1 nochmals gezählt wird).

**Merke 22.2.4** Gegenereignis

Sei  $A$  ein Ereignis und  $\bar{A}$  das Gegenereignis. Dann gilt:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Es ist manchmal einfacher, die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses zu berechnen, besonders wenn das Wort «*mindestens*» vorkommt.

**Beispiel:** Was ist die Wahrscheinlichkeit mit 5 Würfeln mindestens eine Eins zu werfen? Gegenereignis: «keine Eins». Also Antwort:  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ .

✂ **Aufgabe A2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von  $n$  Schülern mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Für  $n = 15$ ,  $n = 20$ ,  $n = 25$  und  $n = 30$ .

Annahme: 365 gleich wahrscheinliche verschiedene Geburtstage.

✂ **Aufgabe A3** Aus einem Skat-Blatt (32 Karten, die 4 Buben sind unterscheidbar) werden an drei Spieler je zehn Karten ausgegeben.

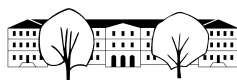
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A die folgenden Karten hat:

- drei bestimmte Buben (etwa Kreuz-, Pik- und Herzbube), aber nicht den vierten?
- genau drei Buben?
- höchstens drei Buben?

Können Sie diese Wahrscheinlichkeit auf zwei Weisen berechnen?

Quelle der Aufgabe: [de.serlo.org](https://de.serlo.org)

✂ **Aufgabe A4** Ein «Teekenner» behauptet, er könne die Teesorten First Flush (Begriff für Darjeeling- und Assam-Tees der ersten Pflückung nach dem Winter) und Second Flush (zweite Pflückung) am Geschmack



unterscheiden. Er bekommt dazu einige Tassen vorgesetzt, wobei jede entweder First Flush oder Second Flush enthält. Äusserlich sind die verschiedenen Sorten nicht zu unterscheiden.

- Der «Teekenner» bekommt zwei Tassen vorgesetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benennt er den Inhalt der beiden Tassen richtig, wenn er rät? Zeichnen Sie zunächst ein Baumdiagramm.
- Der Test wird nun so abgeändert, dass der «Teekenner» vier Tassen vorgesetzt bekommt. Er soll jeweils den Inhalt bestimmen. Erläutere, ob ihm deiner Meinung nach das Prädikat «Teekenner» zu Recht zusteht, wenn er den Inhalt bei allen vier Tassen richtig zuordnet. Aufgabe etwas unklar formuliert. Man nehme an, dass der Teekenner wieder rät und überlege sich, wie wahrscheinlich er alle vier Tassen richtig zuordnet.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt der «Teekenner» mindestens bei einer der vier Tassen daneben, falls er eine Treffsicherheit von 70% hat?
- Wie hoch muss die Treffsicherheit eines «wahren Kenners» mindestens sein, damit er in mindestens 95% der Fälle 5 Tassen nacheinander korrekt zuordnen kann?

Quelle der Aufgabe [de.serlo.org](https://de.serlo.org)

✂ **Aufgabe A5** Im Euromillions müssen erstens 5 Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 50 ausgewählt werden. Zweitens müssen 2 Sterne aus 12 durchnummerierten Zahlen ausgewählt werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die erste Wahl? Wie viele für die Zweite? Wie viele insgesamt? Was ist die Wahrscheinlichkeit, die 5 richtigen Zahlen und die 2 richtigen Sterne auszuwählen?

✂ **Aufgabe A6** Wir betrachten ein Poker-Spiel mit 52 Karten (4 Farben, Werte 2 bis 10, J, Q, K, A). Eine Poker-Hand besteht aus 5 Karten. Wie viele mögliche Poker-Hände

- gibt es insgesamt?
- gibt es mit vier Assen?
- gibt es mit *genau* vier gleichen Werten?
- gibt es mit *genau* drei gleichen Werten?
- gibt es mit einem Full-House (d.h. 2 gleiche und 3 gleiche Werte)?

Wie berechnet man daraus die Wahrscheinlichkeiten für diese Hände?

## 22.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

### ✂ Aufgabe A7

Ein Dopingtest ist nie total verlässlich: Bei einem bestimmten Test werden Sportler, die kein Doping nehmen, in 0.1% der Fälle fälschlicherweise als positiv ausgewiesen. Genauso fällt der Test bei gedopten Sportlern mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% negativ aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler mit positivem Dopingbefund tatsächlich unschuldig ist, wenn man annimmt, dass etwa 3% aller Sportler gedopt sind?

Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm mit folgenden Ereignissen: Gedopt/nicht gedopt und Test positiv/negativ.

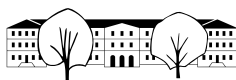
Vervollständigen Sie dann die folgende Tabelle mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

	ungedopt	gedopt	total
negativ	0.96903	0.0015	0.97053
positiv	0.00097	0.0285	0.02947
total	0.97	0.03	1

Wie gross ist der Anteil ungedopter Sportler bei positivem Test?

$$P(\text{ungedopt} \mid \text{positiv}) = \frac{P(\text{ungedopt} \cap \text{positiv})}{P(\text{positiv})} = \frac{0.00097}{0.02947} \approx 0.03291$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei positivem Test jemand unschuldig ist, ist mehr als 3%, obwohl der Test nur in 0.1% der Fälle fälschlicherweise positiv anzeigt.

**Definition 22.3.1**

Sind  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse und gilt  $P(B) > 0$ , so heisst

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \text{ und } B)}{P(B)}$$

die **(bedingte) Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Bedingung  $B$** .

✂ **Aufgabe A8** Zeigen Sie, dass  $P(A | B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = P(B | A)$ . Wenden Sie diese Erkenntnis auf Aufgabe A7 an.

Anders formuliert bedeutet  $P(A | B)$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt, wenn man weiss, dass  $B$  eingetreten ist. Im Venn-Diagramm kann die Formel gut veranschaulicht werden. Wir nehmen dazu an, dass die Fläche gerade der Wahrscheinlichkeit entspricht.

**Definition 22.3.2** Vierfeldtafel

In einer Vierfeldtafel werden die Wahrscheinlichkeiten (oder absoluten Häufigkeiten) für zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  und deren Gegenereignissen eingetragen. Meist werden auch noch die Summen eingetragen.

	$A$	$\bar{A}$	Total
$B$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Total	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

✂ **Aufgabe A9** An einem Berufskolleg werden alle 674 Schüler und Schülerinnen befragt, ob sie rauchen oder nicht. Das Ergebnis der Befragung ist wie folgt: 82 der insgesamt 293 (männlichen) Schüler gaben an, zu rauchen. 250 Schülerinnen gaben an, nicht zu rauchen.

- Stellen Sie das Ergebnis der Befragung in einer Vierfeldtafel dar.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Person weiblich und Nichtraucherin?
- Der Schulleiter sieht eine Schülerin im Aufenthaltsraum. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Schülerin Nichtraucherin?
- Untersuchen Sie, ob das Ereignis «männlich» und das Ereignis «Raucher» voneinander abhängige Ereignisse sind. (Zwei Ereignisse sind unabhängig (= nicht abhängig), wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .)

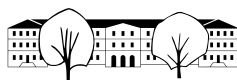
Quelle: <https://de.serlo.org/>, abgerufen am 14. Dezember 2018

**Definition 22.3.3**

Zwei Ereignisse sind unabhängig wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

✂ **Aufgabe A10** Beweisen Sie, dass für unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt:  $P(A | B) = P(A)$ .



## 22.4 Erwartungswert und Zufallsvariablen

### Definition 22.4.1 Zufallsvariable

Eine **Zufallsvariable** wird normalerweise in Grossbuchstaben notiert, meist  $X$ , und steht für ein Resultat eines Zufallsversuchs.

Jedem möglichen Resultat  $r$  kann die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = r)$$

zugeordnet werden. Mit Zufallsvariablen kann gerechnet werden und man erhält so neue Zufallsvariablen.

Beispiel: Sei  $X$  die Augenzahl eines fairen Würfelwurfs. Es gilt z.B.:

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}, \quad P(X < 3) = \frac{1}{3}, \quad P(X \text{ ist gerade}) = \frac{1}{2}.$$

✂ **Aufgabe A11** Seien  $X$  und  $Y$  die Augenzahlen je eines fairen Würfelwurfs.

- Sei  $Z = X + Y$ . Für welchen Zufallsversuch steht  $Z$ ? Berechnen Sie  $P(Z = i)$  für  $i = 1, 2, \dots, 12$ .
- Sei  $Z = 10X + Y$ . Berechnen Sie  $P(Z < 33)$ .
- Berechnen Sie  $P(X + X = 5)$ .

### Definition 22.4.2 Erwartungswert

Der Erwartungswert  $E(X)$  einer Zufallsvariablen  $X$  ist

$$E(X) = \sum_{w \in W} w \cdot P(X = w),$$

wobei  $W$  die Menge aller möglichen Werte von  $X$  ist. Hierbei ist angenommen, dass  $W$  eine endliche Menge reeller Zahlen ist.

Intuitiv ist der Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$  der durchschnittliche Wert, den man erhalten würde, wenn man das Experiment beliebig oft wiederholen würde.

Der Erwartungswert kann als gewichtetes Mittel der möglichen Werte aufgefasst werden, mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als Gewichte.

✂ **Aufgabe A12** Berechnen Sie die Erwartungswerte folgender Zufallsvariablen:

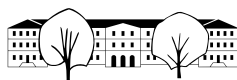
- $X$  ist das Resultat eines Würfelwurfs.
- $Y$  ist das Maximum zweier Würfelwürfe. *Summe formal bestimmen, mit TR ausrechnen: «menu 4 5».*
- $Z$  ist der Gewinn bzw. Verlust, wenn CHF 100.- im Roulette auf schwarz gesetzt werden.

✂ **Aufgabe A13** Wie viel mal muss gewürfelt werden, bis eine «Sechs» erscheint? Sei  $X$  die Zufallsvariable, die die Anzahl Versuche angibt, bis eine «Sechs» gewürfelt wurde.

- Berechnen Sie  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  und  $P(X = 3)$ .
- Finden Sie eine Formel für  $P(X = i)$  für  $i \in \mathbb{N}^+$ .
- Berechnen Sie  $E(X)$ . *Formel herleiten, mit TR ausrechnen.*

✂ **Aufgabe A14** Ein (frei erfundenes) «Mini-Lotto» wird wie folgt gespielt: Aus 20 Zahlen sind 4 auszuwählen. Später werden 4 Zahlen aus 20 zufällig gezogen. Die Gewinnquoten für ein Spiel à CHF 1.- sind wie folgt: 4 Richtige: CHF 1000.-, 3 Richtige: CHF 20.-, 2 Richtige: CHF 5.-.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 4 Richtige zu haben.



- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 3 Richtige zu haben.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp 2 Richtige zu haben.
- d) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, bzw. Verlust pro Spiel. Was empfehlen Sie der Lotto-Gesellschaft?

✂ **Aufgabe A15** Das Spiel «Zahlenraten» geht wie folgt: Der Startspieler wählt eine natürliche Zahl zwischen 1 und  $n$  aus, wobei  $n$  beiden Spielern bekannt ist. Der andere Spieler muss die Zahl erraten. Der Startspieler sagt dann jeweils: «die gesuchte Zahl ist grösser», «die gesuchte Zahl ist kleiner», oder «Zahl gefunden!», womit das Spiel beendet ist. Sonst rät der andere Spieler weiter.

Ziel ist es, mit so wenig Versuchen wie möglich die Zahl zu erraten.

Sei  $X_n$  die Zufallsvariable, die die Anzahl Versuche angibt, mit optimaler Strategie die richtige Zahl aus  $n$  verschiedenen Zahlen zu finden.

- a) Spielen Sie das Spiel zu zweit mit  $n = 100$  und notieren Sie sich die Anzahl Versuche.
- b) Was ist wohl die beste Rate-Strategie?
- c) Wie viele Rateversuche braucht man höchstens für  $n = 100$ ? Wie viele Versuche denken Sie, dass für  $n = 1'000'000$  nötig sind? Für allgemeines  $n$ ?
- d) Berechnen Sie  $E(X_1)$ ,  $E(X_2)$  und  $E(X_3)$ .
- e) Berechnen Sie  $E(X_4)$  mit Hilfe von  $E(X_1)$  und  $E(X_2)$ . Man betrachtet  $X_4$  so, als ob  $X_4$  nur die Werte 1,  $1 + E(X_1)$  und  $1 + E(X_2)$  liefern würde.
- f) Berechnen Sie  $E(X_n)$  für ungerade  $n$  mit Hilfe von  $E(X_m)$  mit  $m = (n - 1)/2$ .
- g) Berechnen Sie  $E(X_n)$  für gerade  $n$  mit Hilfe von  $E(X_m)$  und  $E(X_{m-1})$  mit  $m = n/2$ .
- h) Implementieren Sie die Berechnung von  $E(X_n)$  in Excel.

✂ **Aufgabe A16** 90% aller Clochards tragen einen Zapfenzieher bei sich. Bei der übrigen Bevölkerung gilt dies nur für 5%. Der Anteil der Clochards an der ganzen Bevölkerung beträgt 0.1%. Bei einem Einbruch in ein Wochenendhaus wurde ein Zapfenzieher gefunden, welchen der Dieb offensichtlich verloren hatte. Inspektor Grumm schloss deshalb haarscharf, beim Einbrecher müsste es sich um einen Clochard handeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Schlussfolgerung falsch war?

Quelle: Aufgabe 70 aus [https://www.swisseduc.ch/mathematik/munterbunt\\_aufgabensammlung/docs/wahrscheinlichkeit.pdf](https://www.swisseduc.ch/mathematik/munterbunt_aufgabensammlung/docs/wahrscheinlichkeit.pdf), abgerufen am 15. Januar 2019

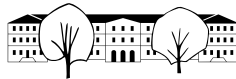
✂ **Aufgabe A17** Zeigen Sie in einem Venn-Diagramm, dass folgende Identitäten wahr sind, indem Sie die entsprechenden Ausdrücke im Diagramm schraffieren.

- a)  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- b)  $P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap B)$
- c)  $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B)$
- d)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

✂ **Aufgabe A18** Es gibt heute HIV Heimtests. Diese haben eine Sensitivität von mindestens 99%, d.h. positive Proben werden mit dieser Wahrscheinlichkeit als positiv erkannt. Die Spezifität dieser Tests wird mit 99.8% angegeben, d.h. negative Proben werden mit dieser Wahrscheinlichkeit als negativ erkannt.

In der Schweiz sind ca. 0.25% der Bevölkerung mit HIV infiziert. Warum ist dieser Test ohne Rezept in einigen Ländern nicht ohne ärztliche Aufsicht verfügbar? Berechnen Sie dazu die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person auch tatsächlich infiziert ist.

Grundlage der Zahlen: [aidshilfe.de](http://aidshilfe.de), HIV- und STI-Tests, Seite 36 und [aids.ch](http://aids.ch), Infektionsrate Schweiz, abgerufen am 16. Januar 2019.



## 22.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

⚙ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

### ✂ Lösung zu A1 ex-farbige-kugeln-in-urne-baumdiagramm

- a) Der Baum ist in diesem Fall ohne Verzweigungen.

$$\text{Mit Zurücklegen: } P(r, g) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{36}.$$

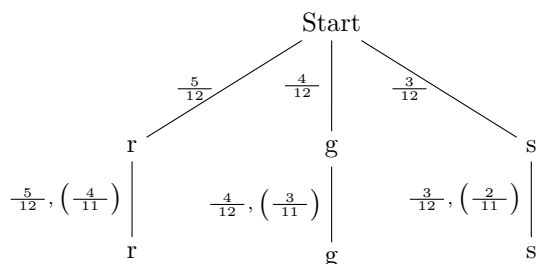
$$\text{Ohne Zurücklegen: } P(r, g) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}.$$

- b) Gegenereignis: Keine rote Kugel.

$$\text{Mit Zurücklegen: } P(\text{min. ein } r) = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{95}{144}.$$

$$\text{Ohne Zurücklegen: } P(\text{min. ein } r) = 1 - \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = 1 - \frac{7}{22} = \frac{15}{22}.$$

- c) Die Wahrscheinlichkeiten ohne Zurücklegen sind in Klammern angegeben.



Damit liest man ab:

$$\text{Mit Zurücklegen: } P(\text{zwei gleiche}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{25}{72}.$$

$$\text{Ohne Zurücklegen: } P(\text{zwei gleiche}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{38}{132} = \frac{19}{66}.$$

- d) Gegenereignis!,  $P(\text{zwei unterschiedliche}) = 1 - P(\text{zwei gleiche})$

$$\text{Mit Zurücklegen: } P(\text{zwei unterschiedliche}) = \frac{47}{72}.$$

$$\text{Ohne Zurücklegen: } P(\text{zwei unterschiedliche}) = \frac{47}{66}.$$

### ✂ Lösung zu A2 ex-repe-geburtstagsproblem

Wir berechnen die Gegenwahrscheinlichkeit. Dazu zeichnet man einen Baum (eigentlich nur ein Pfad), wo jede zusätzliche Person an einem Tag Geburtstag hat, wo noch keine andere ihren Geburtstag hat. Man erhält:

$$P(\text{alle verschieden}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}.$$

Für  $n = 15$  erhält man:  $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.7471 = 0.2529$ .

Für  $n = 20$  erhält man:  $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.5886 = 0.4114$ .

Für  $n = 25$  erhält man:  $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.4313 = 0.5687$ .

Für  $n = 30$  erhält man:  $1 - P(\text{alle verschieden}) \approx 1 - 0.2937 = 0.7063$ .

Hinweis: Ab  $n = 23$  ( $p = 0.5073$ ) können Sie darauf wetten.

### ✂ Lösung zu A3 ex-skat-haende

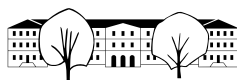
Es gibt  $\binom{32}{10}$  Möglichkeiten, 10 aus 32 Karten auszuwählen. Es gibt 4 Buben und 28 restliche Karten, die keine Buben sind.

- a) Die drei Buben sind bestimmt. Aus den restlichen 28 Karten werden 7 ausgewählt.

$$P(3 \text{ bestimmte Buben}) = \frac{\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \frac{1184040}{64512240} = \frac{33}{1798} \approx 1.84\%$$

- b) Drei Buben auswählen, dann aus den restlichen 28 Karten 7 auswählen:

$$P(\text{Genau 3 Buben}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \frac{66}{899} \approx 7.34\%$$



- c) Via Gegenereignis: 4 Buben.

$$P(\text{höchstens 3 Buben}) = 1 - P(4 \text{ Buben}) = 1 - \frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{3537}{3596} \approx 99.42\%$$

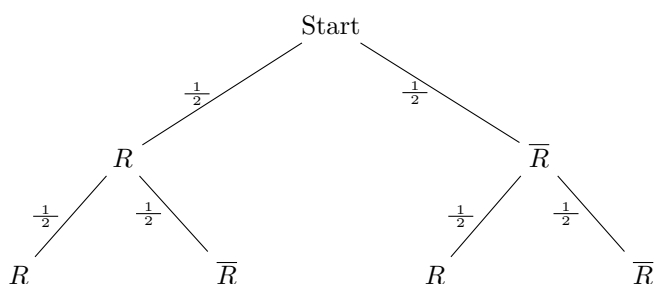
Direkt, also ohne Gegenereignis, geht es wie folgt (wenn man genau 3 Buben wählt, sind aus den Nichtbuben noch 7 auszuwählen; wenn man genau 2 Buben wählt, sind aus den Nichtbuben noch 8 auszuwählen; usw.)

$$\frac{\binom{28}{7} \cdot \binom{4}{3} + \binom{28}{8} \cdot \binom{4}{2} + \binom{28}{9} \cdot \binom{4}{1} + \binom{28}{10} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{32}{10}}$$

Das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

### ✂ Lösung zu A4 ex-teekenner

- a) Sei  $R$  das Ereignis "rät richtig".



Ein Ergebnis  $RR$  hat also die Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . D.h. in einem von vier Fällen liegt der «Teekenner» in beiden Fällen richtig.

- b) Die Wahrscheinlichkeit mit vier mal raten immer richtig zu liegen ist  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 6.25\%$ . D.h. nur in einem von 16 Fällen liegt der «Teekenner» vollständig richtig.
- c) Gegenwahrscheinlichkeit: Vier mal richtig.  $P(\text{vier mal richtig}) = (0.7)^4 \approx 24\%$ . D.h. in ca. 76% der Fälle liegt der «Kenner» mindestens einmal daneben.
- d) Sei  $p$  die unbekannte Treffsicherheit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der «wahre Kenner» eine Tasse richtig zuordnet. Es gilt:  $P(5 \text{ Tassen richtig}) = p^5 = 95\%$ . Daraus folgt  $p = \sqrt[5]{0.95} \approx 98.98\%$ . D.h. der «wahre Kenner» darf sich nur in einem von hundert Fällen irren, um sich durchschnittlich in nur einer von zwanzig «Fünferserien» zu irren.

### ✂ Lösung zu A5 ex-repe-lotto

$$5 \text{ aus } 50: \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2'118'760.$$

$$2 \text{ aus } 12: \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66.$$

$$\text{Total Möglichkeiten: } 66 \cdot 2'118'760 = 139'838'160.$$

Die Wahrscheinlichkeit, in EuroMillions alles richtig zu tippen, beträgt  $1 : 139'838'160 \approx 7.151 \cdot 10^{-9}$ .

### ✂ Lösung zu A6 ex-poker-haende

- a) Für die erste Karte gibt es 52 Möglichkeiten, für die zweite 51, etc., also  $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ . Die Reihenfolge der Karten spielt aber keine Rolle. Für eine gegebene Kombination von Karten, können die noch umsortiert werden, die erste Karte auf 5 Plätze, die zweite auf 4 etc. Total gibt es also  $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{52}{5} = 2'598'960$  mögliche Poker-Hände.
- b) Es kann nur die fünfte Karte aus  $52-4=48$  Karten ausgewählt werden. Es gibt also 48 Poker-Hände mit vier Assen.
- c) Der Wert der Karte kann aus 13 ausgewählt werden. Wie zuvor kann die fünfte Karte aus 48 ausgewählt werden. Also total  $13 \cdot 48 = 624$  Poker-Hände.
- d) Der Wert kann aus 13 ausgewählt werden. Dabei muss noch eine Farbe aus 4 ausgewählt werden, nämlich jene, die bei den drei Werten fehlt. Für die vierte Karte gibt es noch 48, für die fünfte 47 Möglichkeiten, wobei die Reihenfolge nicht wichtig ist und noch vertauscht werden kann. Damit sind es total  $13 \cdot 4 \cdot \frac{48 \cdot 47}{2 \cdot 1} = \binom{13}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{2} = 58'656$  Poker-Hände.





- e) Für den Wert der 3 gleichen Karten gibt es 13 Möglichkeiten, für den Wert der 2 gleichen Karten noch 12. Für die Farbwahl der 3 gleichen Karten gibt es 4 Möglichkeiten (man wählt jene aus, die nicht vorkommt). Für die Farbwahl der 2 gleichen Karten gibt es 4 Möglichkeiten für die erste und 3 Möglichkeiten für die zweite Farbe, wobei die Reihenfolge nicht wichtig ist, womit die Anzahl noch durch  $2 \cdot 1$  dividiert wird. Also total  $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \binom{13}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$  Möglichkeiten.

Für die Wahrscheinlichkeiten wird jeweils die entsprechende Anzahl möglicher Hände durch Anzahl insgesamt möglicher Hände geteilt.

✂ Lösung zu A7 ex-bedingte-wsch-doping

✂ Lösung zu A9 ex-rauchen-und-geschlecht

	♀	♂	Total
a) Nichtraucher	250	211	461
Raucher	131	82	213
Total	381	293	674

b)  $\frac{250}{674} \approx 0.3709$

c)  $P(\text{NR} \mid \varphi) = \frac{P(\text{NR} \cap \varphi)}{P(\varphi)} = \dots = \frac{250}{381} \approx 0.6562$

d)  $P(\sigma \cap R) = \frac{82}{674} \approx 0.1217$  und  $P(\sigma) \cdot P(R) = \frac{293}{674} \cdot \frac{213}{674} \approx 0.1374$ , also die beiden Ereignisse sind nicht unabhängig.

✂ Lösung zu A11 ex-zufallsvariablen-notation

- a)  $Z$  steht für die Summe zweier Würfelwürfe. Für  $X$  und  $Y$  gibt es je 6 Möglichkeiten, total also 36 Möglichkeiten. Davon ergeben je genau eine die Summe 2, bzw. 12. Also  $P(Z = 2) = P(Z = 12) = \frac{1}{36}$ . Für  $Z = 3$  gibt es 2, für  $Z = 4$  3 Möglichkeiten bis für  $Z = 7$  sich 6 Möglichkeiten ergeben. Danach nehmen die Möglichkeiten wieder entsprechend ab. Zusammengefasst:

$$P(Z = i) = \begin{cases} \frac{i-1}{36} & \text{für } i \leq 7 \\ \frac{13-i}{36} & \text{für } i > 7 \end{cases}$$

- b) Man kann diese Wahrscheinlichkeit wie folgt ausdrücken:

$$P(Z < 33) = P(10X + Y < 33) = P(X < 3) + P(X = 3 \text{ und } Y < 3) = \frac{2}{6} + P(X = 3) \cdot P(Y < 3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{18}$$

- c)  $P(X + X = 5) = 0$ , weil das doppelte eines Würfelwurfs immer gerade ist.

✂ Lösung zu A12 ex-erwartungswert-einfach

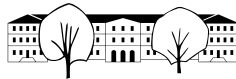
a)  $E(X) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

- b) Erst müssen die Wahrscheinlichkeiten  $P(Y = i)$  bestimmt werden. Seien  $X_1$  und  $X_2$  die beiden Würfelergebnisse. Damit ist  $Y = \max(X_1, X_2)$ . Es gilt:

$$P(Y = i) = P(X_1 = i \text{ und } X_2 \leq i) + P(X_1 < i \text{ und } X_2 = i) = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 \leq i) + P(X_1 < i) \cdot P(X_2 = i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{6} + \frac{i-1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2i-1}{36}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{2i-1}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472.$$

- c) Totalverlust mit  $P(Z = -100) = \frac{19}{37}$ , Gewinn mit  $P(Z = 100) = \frac{18}{37}$ . Also  $E(Z) = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2.703$

✂ Lösung zu A13 ex-erwartungswert-bis-sechser

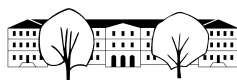
- a)  $P(X = 1) = P(\text{erster Wurf eine «Sechs»}) = \frac{1}{6}$ .  
 $P(X = 2) = P(\text{erster Wurf keine «Sechs»}) \cdot P(\text{zweiter Wurf eine «Sechs»}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ .  
 $P(X = 3) = P(\text{zwei Würfe keine «Sechs»}) \cdot P(\text{dritter Wurf eine «Sechs»}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ .
- b)  $P(X = i) = P((i-1) \text{ Würfe keine «Sechs»}) \cdot P(\text{letzter Wurf eine «Sechs»}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$ .
- c)  $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} = 6$  (mit TR).

✂ Lösung zu A14 ex-repe-mini-lotto

- a) Total mögliche Tipps:  $\binom{20}{4} = 4845$ . Genau einer davon gewinnt, und damit ist  $P(4 Richtige) = \frac{1}{4845} \approx 0.02064\%$ .
- b) Um drei Richtige aus 4 auszuwählen, hat man  $\binom{4}{3} = 4$  Möglichkeiten. Um eine «Falsche» auszuwählen hat man noch 16 Möglichkeiten. Total also  $4 \cdot 16 = 64$  Möglichkeiten. Damit ist  $P(3 Richtige) = \frac{64}{4845} \approx 1.321\%$ .
- c) Zwei Richtige aus vier, also  $\binom{4}{2} = 6$  Möglichkeiten. Zwei «Falsche» aus 16, ergibt  $\binom{16}{2} = 120$  Möglichkeiten. Total also  $6 \cdot 120 = 720$  Möglichkeiten. Damit ist  $P(2 Richtige) = \frac{720}{4845} = \frac{48}{323} \approx 14.86\%$ .
- d) Sei  $X$  die Zufallsvariable, die den Gewinn oder Verlust bei diesem Lottospiel beschreibt. Die möglichen Werte sind  $W = \{-1, 4, 19, 999\}$ .  $P(X = -1) = 1 - P(X > 0) = 1 - \frac{1}{4845} - \frac{64}{4845} - \frac{720}{4845} = \frac{4060}{4845} = \frac{812}{969} \approx 83.80\%$ .  
 Der Erwartungswert ist also  
 $E(X) = -1 \cdot \frac{4060}{4845} + 4 \cdot \frac{720}{4845} + 19 \cdot \frac{64}{4845} + 999 \cdot \frac{1}{4845} = \frac{1035}{4845} \approx 0.2136$ .  
 Der Erwartungswert ist positiv. Die Lottogesellschaft wird auf lange Sicht gut 21 Rappen Verlust pro Spiel einfahren. Die Gewinnquoten sollten nach unten angepasst werden. (Z.B. 1000.-, 10.- und 3.- würde zu einem Gewinn von ca. 5 Rappen für die Lotto-Gesellschaft pro Spiel führen).

✂ Lösung zu A15 ex-erwartungswert-zahlenraten

- a) Sie sollten in maximal 7 Versuchen zum Ziel kommen.
- b) Man ratet eine Zahl in der Mitte des verbleibenden Bereichs. So wird die Anzahl der verbleibenden Zahlen in jedem Schritt mindestens halbiert.
- c) Wenn man immer halbiert, dann bleiben im schlechtesten Fall übrig: 50,25,12,6,3,1,0. Man kommt also mit 7 Versuchen zum Ziel.  
 Für  $n = 1'000'000$  sieht die ungünstigste Reihe wie folgt aus:  
 500000, 250000, 125000, 62500, 31250, 15625, 7812, 3906, 1953, 976, 488, 244, 122, 61, 30, 15, 7, 3, 1, 0  
 also in 20 Versuchen. Für allgemeines  $n$  reichen ungefähr  $\log_2(n) + 1$  Versuche.
- d)  $E(X_1) = 1$ .  
 $E(X_2) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass man die Zahl beim ersten Versuch errät ist  $\frac{1}{2}$ . Damit ist  
 $E(X_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$   
 $E(X_3)$ :  $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ . Man wird natürlich die mittlere Zahl wählen. D.h. danach beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit, die richtige Zahl im zweiten Versuch zu finden 1. Also  
 $E(X_3) = 1 \cdot P(X_3 = 1) + 2 \cdot P(X_3 = 2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.667$
- e) Zeichnen Sie auch ein Baumdiagramm für dieses Experiment.  
 $P(X_4 = 1) = \frac{1}{4}$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sonst eine Zahl übrig bleibt beträgt  $\frac{1}{3}$ , wofür dann insgesamt  $E(X_1) + 1$  Versuche nötig sind. Zwei Zahlen bleiben übrig mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$ , wofür dann insgesamt  $E(X_2) + 1$  Versuche nötig sind. Also:  
 $E(X_4) = 1 \cdot P(X_4 = 1) + P(X_4 > 1) \cdot \left(\frac{1}{2} (E(X_1) + 1) + \frac{1}{2} (E(X_2) + 1)\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{31}{16} = 1.9375$



- f)  $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ . Mehr als ein Versuch ist mit  $P(X_n > 1) = \frac{n-1}{n}$  nötig. Nach dem ersten Versuch bleiben  $m = (n-1)/2$  Zahlen übrig, wofür insgesamt  $E(X_m) + 1$  Versuche nötig sind. Es gilt also für ungerade  $n$ :  

$$E(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot (1 + E(X_m)).$$
- g)  $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ . Mehr als ein Versuch ist mit  $P(X_n > 1) = \frac{n-1}{n}$  nötig. Nach dem ersten fehlgeschlagenen Versuch bleiben  $m$  Zahlen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{m}{n-1}$  übrig, wofür dann insgesamt  $E(X_m) + 1$  Versuche nötig sind. Oder es bleiben  $(m-1)$  Zahlen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{m-1}{n-1}$ , wofür dann insgesamt  $E(X_{m-1}) + 1$  Versuche nötig sind. Es gilt also für gerade  $n$ :  

$$E(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \left( \frac{m}{n-1} \cdot (E(X_m) + 1) + \frac{m-1}{n-1} \cdot (E(X_{m-1}) + 1) \right).$$
- h) Vorschlag: 5 Spalten mit  $n$ ,  $m$ ,  $E(X_m)$ ,  $E(X_{m-1})$  und  $E(X_n)$ . Die Werte von  $E(X_m)$  können mit der Excel-Funktion «OFFSET» (bzw. «BEREICH.VERSCHIEBEN» auf deutsch) ausgelesen werden. Hilfe zur genauen Verwendung finden Sie in Excel oder online.  
 Programmieren Sie die Zeilen für  $n = 2$  und  $n = 3$ , markieren Sie dann beide gleichzeitig und kopieren Sie die Zeilen so nach unten (damit wird abwechselnd die erste und zweite markierte Zeile kopiert).

### ✂ Lösung zu A16 ex-repe-clochards

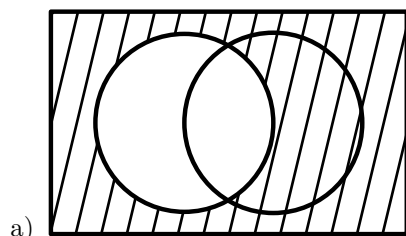
$$P(\text{Clochard und Zapfenzieher}) = 0.001 \cdot 0.9 = 0.0009$$

$$P(\text{Nichtclochard und Zapfenzieher}) = 0.999 \cdot 0.05 = 0.04995.$$

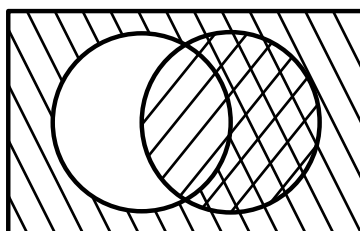
Von allen potentiell gefundenen Zapfenziehern ( $0.0009 + 0.04995$ ) stammen 1.77% von den Clochards. Der Inspektor irrt sich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 98.23%.

Quelle: Aufgabe 70 aus [https://www.swisseduc.ch/mathematik/munterbunt\\_aufgabensammlung/docs/wahrscheinlichkeit.pdf](https://www.swisseduc.ch/mathematik/munterbunt_aufgabensammlung/docs/wahrscheinlichkeit.pdf), abgerufen am 15. Januar 2019

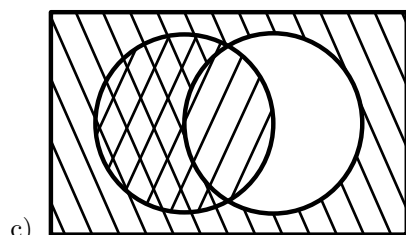
### ✂ Lösung zu A17 ex-repe-venndiagramme



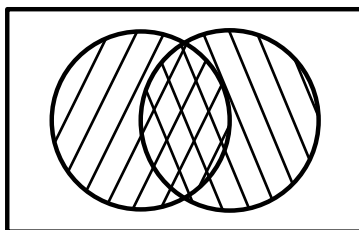
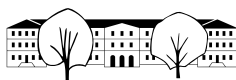
Das Komplement von  $A$  ist das Ganze (Wahrscheinlichkeit 1) minus das was in  $A$  ist, also  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .



- b) Links mit positiver Steigung schraffiert:  $A$ , mit negativer Steigung:  $\bar{B}$ , also alles ausser was ausschliesslich in  $B$  liegt.  
 Rechts mit positiver Steigung  $B$ , mit negativer Steigung  $\bar{A}$ . Die Schnittmenge (doppelt schraffiert) muss also vom Ganzen abgezogen werden.



Links ist die Schnittmenge doppelt schraffiert, rechts  $A$  ohne die Elemente von  $B$ .



d)

Links ist die Vereinigungsmenge. Rechts wird die Schnittmenge doppelt gezählt, muss also wieder abgezogen werden.

### ✂ Lösung zu A18 ex-repe-hivtest

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit  $P(\text{gesund} \mid \text{pos. Test})$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test positiv ist kann wie folgt berechnet werden. Zeichnen Sie zum besseren Verständnis den entsprechenden Baum.

$$P(\text{pos. Test}) = P(\text{gesund und pos. Test}) + P(\text{infiziert und pos. Test}) = P(\text{gesund}) \cdot P(\text{pos. Test} \mid \text{gesund}) + P(\text{infiziert}) \cdot P(\text{infiziert} \mid \text{pos. Test}) = 0.9975 \cdot 0.002 + 0.0025 \cdot 0.99 = 0.00447$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(\text{gesund} \mid \text{pos. Test}) = \frac{P(\text{gesund und pos. Test})}{P(\text{pos. Test})} = \frac{0.9975 \cdot 0.002}{0.00447} \approx 0.4463. \text{ Konkret heisst das, wenn eine zufällige Person einen positiven Test erhält, beträgt die Wahrscheinlichkeit knapp 45\%, dass die Person gar nicht infiziert ist. Darum ist der Test nicht ohne ärztliche Begleitung zugänglich.}$$

Der Test ist dann aber brauchbar, wenn die Person nicht zufällig ausgewählt wird, sondern bereits ein erhöhtes Risiko mitbringt, weil sie z.B. ungeschützte sexuelle Kontakte mit Personen aus Risikogruppen oder gar mit infizierten Personen hatte.