23 Statistik

Ziel dieses Kapitels ist, Intuition für grundlegende statistische Begriffe und deren Eigenschaften zu entwickeln. Sie sollen begreifen, dass jede Messung und damit jede Statistik grundsätzlich ungenau ist. Die Ungenauigkeit einer Messung kann ebenfalls abgeschätzt werden und *muss* angegeben werden.

> Statistik «ist die Lehre von Methoden zum Umgang mit quantitativen Informationen» (Daten). Sie ist eine Möglichkeit, «eine systematische Verbindung zwischen Erfahrung (Empirie) und Theorie herzustellen».[1] Unter Statistik versteht man die Zusammenfassung bestimmter Methoden zur Analyse empirischer Daten. [...] Die Statistik wird als Hilfswissenschaft von allen empirischen Disziplinen und Naturwissenschaften verwendet, wie zum Beispiel der Medizin (Medizinische Statistik), der Psychologie (Psychometrie), der Politologie, der Soziologie, der Wirtschaftswissenschaft (Ökonometrie), der Biologie (Biometrie), der Chemie (Chemometrie) und der Physik. Die Statistik stellt somit die theoretische Grundlage aller empirischen Forschung dar. Da die Menge an Daten in allen Disziplinen rasant zunimmt, gewinnt auch die Statistik und die aus ihr abgeleitete Analyse dieser Daten an Bedeutung. Andererseits ist die Statistik ein Teilgebiet der reinen Mathematik.
>
> Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Statistik, 18. Oktober 2018

Aufgabe A1 Man findet manchmal Werbungen für Anlagefonds, die sich damit brüsten, in den letzten fünf Jahren immer besser als der Börsendurchschnitt gewirtschaftet zu haben, im Gegensatz zu anderen Fonds.

Wir wollen Anlagefonds mit Münzwürfen nachstellen. Zahl bedeutet «der Fonds erwirtschaftet mehr Gewinn als der Börsendurchschnitt», Kopf bedeutet «weniger Gewinn als Durchschnitt».

Nehmen Sie zwei Münzen und werfen Sie jede fünf mal. Notieren Sie sich, wie oft Sie «Zahl» geworfen haben. Wer hat die «beste» Münze?

Diskutieren Sie das Resultat und den Zusammenhang mit obiger Werbung für Anlagefonds.

Aufgabe A2 Eine Münze wird 50-mal geworfen und die Anzahl Würfe mit Ergebnis «Zahl» gezählt.

a) Wie viele Ergebnisse «Zahl» erwarten Sie durchschnittlich?
b) Führen Sie den Versuch mindestens einmal durch und notieren Sie an der Wandtafel, wie oft Sie «Zahl» geworfen haben. Notieren Sie auch die prozentuale Abweichung vom erwarteten Wert.
c) Kopieren Sie alle Resultate von der Wandtafel in Ihr Heft und berechnen Sie folgende Grössen: Total der Anzahl Würfe, total der Würfe mit «Zahl», die erwartete Anzahl Würfe «Zahl» und die prozentuale Abweichung davon.
d) Erstellen Sie eine Grafik, aus der ersichtlich ist, welche Anzahl «Zahlwürfe» wie oft vorgekommen ist.

Definition 23.0.1 Histogramm

Ein Histogramm ist eine grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung von gegebenen reellen Werten (z. B. Noten). Es erfordert die Einteilung der Daten in Klassen *(englisch bins)*, die eine konstante oder variable Breite haben können. Es werden direkt nebeneinanderliegende Rechtecke von der Breite der jeweiligen Klasse gezeichnet, deren Flächeninhalte die (relativen oder absoluten) Klassenhäufigkeiten darstellen. Die Höhe jedes Rechtecks stellt dann die (relative oder absolute) Häufigkeitsdichte dar, also die (relative oder absolute) Häufigkeit dividiert durch die Breite der entsprechenden Klasse.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Histogramm, 31. Januar 2020

Aufgabe A3 Mit einer Münze kann ein zufälliges Ergebnis Kopf/Zahl erzeugt werden. Das kann dann als Ja/Nein, 0/1 oder z. B. als eine von zwei Mannschaften interpretiert werden, die das Anspiel erhält.

a) Geben Sie eine Methode an, wie eine natürliche Zahl zwischen 0 und 3 (jeweils inklusive) mit wiederholten Münzwürfen erzeugt werden kann, so dass jede Zahl im Schnitt gleich häufig vorkommt.
b) Suchen Sie in der Klasse Personen, die in a) die gleiche Methode wie Sie vorgeschlagen haben. Überprüfen Sie dann durch mehrmaliges Wiederholen der Methode, ob alle Zahlen in etwa gleich häufig erzeugt werden. Tragen Sie dazu Ihre Resultate zusammen und zeichnen Sie die Häufigkeiten grafisch auf.

[1] Horst Rinne (2008): *Taschenbuch der Statistik.* (4. Auflage), Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, S. 1

c) Erklären Sie die gemessenen Häufigkeiten.

d) Schlagen Sie eine Methode mit wiederholten Münzwürfen vor für die Erzeugung zufälliger natürlicher Zahlen von 0 bis und mit 15. Alle Zahlen sollen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt werden.

e) Schlagen Sie eine Methode vor für die gleich wahrscheinliche Erzeugung zufälliger natürlichen Zahlen von 0 bis und mit 2.

Aufgabe A4 Wir betrachten ein Leiterspiel, bei dem mit einem normalen Würfel mit Zahlen von 1 bis 6 gewürfelt wird. Es wird bisweilen behauptet, dass das Feld 28 speziell ist, weil die Wahrscheinlichkeit, dieses zu erreichen, grösser sei als die entsprechende Wahrscheinlichkeit für andere Felder. Der Grund sei, dass man im Durchschnitt 3.5 würfelt, dass also Felder, deren Nummer ein Vielfaches von 7 ist, mit grösserer Wahrscheinlichkeit besucht werden.

a) Simulieren Sie die Situation mit einer Tabellenkalkulation und vergleichen Sie die Besuchshäufigkeiten der Felder 27, 28 und 29. Können Sie zuverlässig Unterschiede feststellen? Was ist mit den Feldern 5, 6 und 7? Können Sie sich die Resultate plausibel erklären?

b) Berechnen Sie die exakten Wahrscheinlichkeiten P_i für den Besuch der Felder 0 bis 30.

23.1 Lage- und Streuungsmasse

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass wir einen reellen Wert messen möchten und dass die Messung mehrmals wiederholt wird. Als Resultat hätten wir nicht nur gerne eine Schätzung für den wahren Wert, sondern auch ein Vertrauensintervall, in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (typischerweise 95%) liegen soll.

Die Anzahl der Messwerte wird im Folgenden mit n und die einzelnen Messwerte mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet.

Beispiele solcher Messungen sind z. B. die Zeugnisnote in Mathematik, Blutdruckwerte, CO_2-Werte in der Atmosphäre, die gemessene Grösse von Naturkonstanten, etc.

Lagemasse

Ein Lagemass soll anschaulich den «typischen» Wert einer Messreihe angeben.

Das verbreitetste Lagemass ist der **Durchschnitt**, auch **Mittelwert** oder **arithmetisches Mittel** genannt.

Merke 23.1.1 Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ein weiteres Lagemass, das ebenfalls oft angetroffen wird, ist der sogenannte **Median**, auch **Zentralwert** genannt. Er wird meist wie folgt berechnet:

Merke 23.1.2 Median

Erst werden die Messwerte aufsteigend sortiert. Der Median ist dann der Wert in der Mitte der Liste (bei ungeradem n), bzw. der Mittelwert der beiden Werte in der Mitte der Liste (bei geradem n).

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\cdot\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe A5 In einer Bar sind 20 «normale» Leute. Wie gross schätzen Sie den Median und den Mittelwert der Einkommen der anwesenden Gäste?

Der CEO eines Schweizer Grosskonzerns betritt die Bar. Wie sieht es jetzt mit dem Median und dem Mittelwert der Einkommen der anwesenden Gäste aus?

Welches der beiden Lagemasse ist in diesem Fall angemessener?

Aufgabe A6 In einer Klasse mit 20 Schülern war der Notendurchschnitt bei einer Prüfung 4.42, wobei eine Schülerin die Prüfung nicht geschrieben hatte. Nach der Nachprüfung war der Notendurchschnitt eine 4.48.

Die genaue Aufgabenstellung fehlt hier absichtlich. Finden Sie sie. Diskutieren und berechnen Sie!

Streuungsmasse

Ein Streuungsmass gibt an, wie sehr die Werte einer Messreihe «fluktuieren», d. h. wie verschieden die Werte sind oder wie weit «verstreut»/«gestreut» die Werte sind.

Warum ein Streuungsmass interessant ist, kann wie folgt motiviert werden:

Man nimmt an, man hat zwei unterschiedliche Messungen durchgeführt, die aber das Gleiche messen sollen. Beide Messungen produzieren zwei Wertereihen mit gleich vielen Werten. Die Streuung der ersten Wertereihe ist deutlich grösser als die der zweiten. Welcher Mittelwert ist «vertrauenswürdiger»? Bzw. bei welcher Messung kann ein kleineres «Vertrauensintervall» angegeben werden?

Es gibt verschiedene Varianten, die Streuung zu messen.

Das gebräuchlichste Streuungsmass ist die (empirische) Standardabweichung.

Merke 23.1.3 Standardabweichung

Die empirische (d.h. aus Messwerten ermittelte) **Standardabweichung** s einer Wertereihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2},$$

wobei $\overline{x}$ der Mittelwert der Wertereihe ist.

Warum hier durch $n-1$ dividiert wird und nicht durch n, liegt an gewissen Erwartungswerten; wer es genau wissen mag, sei etwa auf die folgenden Wikipedia-Einträge verwiesen: englische Wikipedia: Variance, Biased sample variance, deutsche Wikipedia: Empirische Varianz, Berechnung.

Der Begriff *Wertereihe* meint schlicht eine Folge reeller Zahlen. Insofern wäre der Begriff Wertefolge eigentlich passender; wir passen uns aber dem allgemeinen Sprachgebrauch an.

Wie der Mittelwert ist die Standardabweichung **nicht robust**, d. h. sie wird stark durch **Ausreisser** beeinflusst.

Aufgabe A7 Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung folgender Wertereihen:

a) 105, 100, 100, 95, 105, 98.

b) Eine Folge von einhundert Einsen.

c) Eine Folge mit 785 Einsen und 215 Nullen. Zusatzfrage: Welches Experiment könnte diese Daten geliefert haben?

d) 1, 2, 3, ..., 101. Verwenden Sie dazu die Summenzeichen-Funktion des TR, zu erreichen mit «menu, 4, 5». Auf dem Ti-89 mit `Σ(Ausdruck, Laufvariable, untere Grenze, obere Grenze)`. Das Σ-Zeichen kann mit [2nd] [4] eingegeben werden.

Interquartilsabstand Ein weiteres Streuungsmass ist der sogenannte «**Interquartilsabstand**». Dabei sind die «**Quartile**» ein Spezialfall der Quantile, die informell wie folgt definiert sind:

> Sei $0 \leq p \leq 1$ eine Zahl zwischen Null und Eins.
>
> Zu einer Wertereihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist das p**-Quantil** diejenige reelle Zahl q, für die etwa $100 \cdot p$ % der Werte kleiner oder gleich q sind.

Ein Spezialfall ist der Median: Der Median ist das 0.5-Quantil, auch als 50%-Quantil bezeichnet.

Wie auch beim Median, gibt es verschiedene Definitionen für die Berechnung der Quantile. Wir verwenden hier die Definition gängiger Tabellenkalkulationsprogramme.

Definition 23.1.4 *p*-Quantil

Sei $0 \leq p \leq 1$ eine reelle Zahl zwischen Null und Eins. Das ***p*-Quantil** einer Reihe von Messwerten wird wie folgt bestimmt.

- Sortiere die Messwerte aufsteigend: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.
- Sei $f(t)$ diejenige lineare Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(1) = n$.
  Ist $f(p)$ eine natürliche Zahl, so ist das p-Quantil definiert als der Messwert $x_{f(p)}$.
- Sonst rundet man $f(p)$ auf die nächstkleinere natürliche Zahl i ab.
  Sei $g(t)$ diejenige lineare Funktion mit $g(0) = x_i$ und $g(1) = x_{i+1}$.
  Das p-Quantil ist dann $g(f(p) - i)$.

Definition 23.1.5

Das **1. Quartil** (auch **unteres Quartil**) ist definiert als das 0.25-Quantil und das 3. Quartil (auch **oberes Quartil**) als das 0.75-Quantil.
Das Streuungsmass **Interquartilsabstand** ist definiert als die Differenz zwischen oberem und unterem Quartil, d. h.

$$\text{Interquartilsabstand} = \text{IQA} = (3.\ \text{Quartil}) - (1.\ \text{Quartil}) = (0.75\text{-Quantil}) - (0.25\text{-Quantil})$$

Er gibt anschaulich an, wie breit das Intervall ist, in dem 50 % der Messwerte liegen.

Aufgabe A8 Gegeben sind 2 reelle Zahlen a und b. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f derjenigen linearen Funktion $f(t)$, für die $f(0) = a$ und $f(1) = b$ gilt.

Aufgabe A9 Betrachten Sie die Wertereihe 4, 6, 5, 4, 2.

(a) Berechnen Sie das p-Quantil für $p = 0.1$, $p = 0.25$ und $p = 0.5$.
(b) Sortieren Sie die Werte aufsteigend. Zeichnen Sie die Punkte (i, x_i) in ein Koordinatensystem ein. Verbinden Sie benachbarte Punkte mit einer Strecke. Zeichnen Sie horizontal von $i = 1$ bis $i = 5$ eine zweite Skala von 0 bis 1 ein. Wie können damit die Quantile grafisch bestimmt werden?
(c) Bestimmen Sie das Streuungsmass Interquartilsabstand dieser Wertereihe.

Betrachten Sie nun die Wertereihe 1, 2, 3, ..., 10.

(d) Berechnen Sie das 0.25-Quantil (= das erste Quartil = untere Quartil).

Aufgabe A10 Gegeben sind die folgenden Wertereihen:

(a) 13, 7, 6, 10, 8, 12, 7, 9
(b) Eine Folge aus hundert Nullen und zweihundert Einsen.

Berechnen Sie jeweils den Mittelwert $\overline{x}$, den Median $\tilde{x}$, die Standardabweichung s und das erste und dritte Quartil $q_{0.25}$ und $q_{0.75}$.

Merke 23.1.6

Oft spricht man auch von Perzentilen, wenn p ein ganzzahliges Vielfache von $\frac{1}{100}$ ist. Beispielsweise ist mit dem 60. Perzentil das 0.60-Quantil gemeint.

23.2 Streuung des Mittelwerts

Wenn man ein Experiment wiederholt durchführt und bei jeder Durchführung eine Messreihe erhält, kann den Mittelwerten der Messreihen ebenfalls eine Streuung (= Wert eines Streuungsmasses) zugeordnet werden.

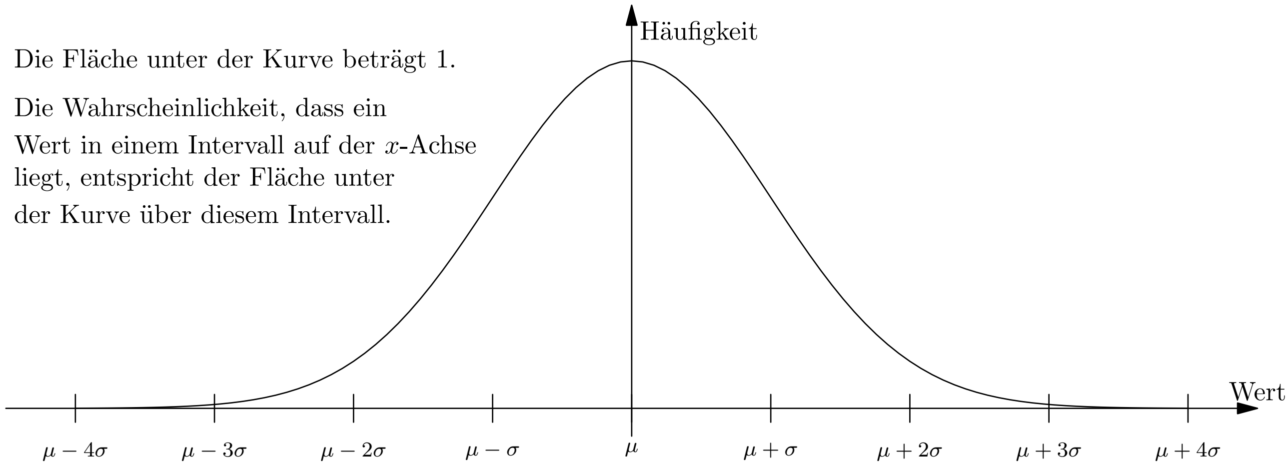
Man kann mathematisch Folgendes für die Standardabweichung $s_{\overline{x}}$ dieser Mittelwerte $\overline{x}$ (vom wahren Wert) nachweisen:

$$s_{\overline{x}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} s \qquad \text{in guter Näherung für } n \geq 50.$$

Rechts steht hierbei die Standardabweichung s der Werte einer einzelnen Messreihe mit n Messungen. Man nennt $s_{\overline{x}}$ auch den Standardfehler. Hat man weniger als 50 Messwerte, wird mit obiger Formel die Streuung unterschätzt, d. h. ein davon abgeleitetes Vertrauensintervall ist zu klein (dann t-Verteilung benutzen).

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Weiter kann mathematisch gezeigt werden, dass **Mittelwerte** gemäss einer **Glockenkurve** verteilt sind (was man durch mehrmaliges Wiederholen des Experiments anschaulich machen könnte). Das genaue Aussehen der Glockenkurve hängt von zwei Parametern μ und σ ab.



Für die Glockenkurve (Normalverteilung) mit dem Maximum bei μ (= dem wahren Wert) und der «Breite» $\sigma = s_{\overline{x}}$ (aus Skizze ersichtlich) gelten folgende Faustregeln:

Merke 23.2.1 Faustregeln für die Glockenkurve

Im Intervall $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ liegen ungefähr $\frac{2}{3}$ (68.3%) der Werte. (Wert meint hier den Mittelwert eines Experiments.)
Im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ liegen ungefähr 95% (95.45%) der Werte.

Weitere Werte sind für $\pm 3s$ 99.73%, für $\pm 4s$ 99.993% und für $\pm 6s$ 99.9999998% (damit arbeiten die Physiker am CERN).

Daraus lassen sich jetzt für den Mittelwert **Vertrauensintervalle** (= **Konfidenzintervalle**) bilden, d. h. Intervalle, in denen der wahre Wert mit grosser Wahrscheinlichkeit liegt (typischerweise 95%).

Merke 23.2.2 Vertrauensintervall für den Mittelwert

Die Aussage wird zwar of so wie hier formuliert, leider ist dies aber nicht vollkommen korrekt, siehe 23.5

Bei einem Experiment mit mindestens 50 Messungen bezeichne $\overline{x}$ den Mittelwert der Messwerte und s die Standardabweichung. Setze $s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s$ (eigentlich gilt das nur ungefähr). Dann liegt der wahre Wert mit Wahrscheinlichkeit 95% im Intervall

$$[\overline{x} - 2s_{\overline{x}}, \overline{x} + 2s_{\overline{x}}]$$

Aufgabe A11 Mit einem Würfel wird 600 mal gewürfelt. Dabei werden 120 Sechsen gezählt.

Daraus erhält man eine Wertereihe aus Nullen (keine Sechs gewürfelt) und Einsen (Sechs gewürfelt). Berechnen Sie Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung s sowie die Standardabweichung des Mittelwert/der Mittelwerte $s_{\overline{x}}$. Geben Sie ein 95%-Vertrauensintervall für den «wahren» Wert an. Würden Sie sagen, dass der Würfel gezinkt ist?

Aufgabe A12 In einer online-Umfrage wurde gefragt: «Haben Sie eine Sehhilfe?»

Es antworten 80 Teilnehmer wie folgt: 20 Teilnehmer antworten «Ja», der Rest «Nein». Eine Zeitung titelt «25% der Schweizer benötigen eine Sehhilfe».

Wie beurteilen Sie die Zuverlässigkeit der Umfrage und der Schlussfolgerung?

23.3 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A13 Im Euromillions müssen erstens 5 Zahlen aus 50 ausgewählt werden. Zusätzlich dazu müssen zweitens 2 Sterne aus 12 ausgewählt werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die erste Wahl? Wie viele für die zweite? Wie viele total? Was ist die Wahrscheinlichkeit die 5 richtigen Zahlen und die 2 richtigen Sterne auszuwählen?

Ein Spiel kostet 3 Euro. Wie ist der Erwartungswert für den Gewinn bei einem Spiel, wenn man nur entweder den gesamten Jackpot (alles richtig) von 41 Millionen Euro (Stand 25. Februar 2020) gewinnnen kann oder alternativ seinen Einsatz verliert.

Aufgabe A14 Beschreiben Sie,

a) was die Quartile Q_1, Q_2 und Q_3 sind (also erstes, zweites und drittes Quartil);
b) was der Interquartilsabstand intuitiv misst;
c) wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein erneut gemessener Wert in $[Q_1, Q_3]$ liegt?

Aufgabe A15 Begründen Sie jeweils oder geben Sie ein Beispiel einer solchen Wertereihe mit mindestens 5 Messwerten an.

a) Ist es möglich, dass der Durchschnitt $\overline{x}$ grösser als der dritte Quartil Q_3 ist?
b) Ist es möglich, dass der Median $\tilde{x}$ grösser als der dritte Quartil Q_3 ist?
c) Ist es möglich, dass die Quartile Q_1 und Q_3 gleich sind?
d) Ist es möglich, dass der Durchschnitt $\overline{x}$ 10 beträgt aber der Median $\tilde{x}$ nur 5?
e) Alle Messwerte liegen zwischen 50 und 60. Ist es möglich, dass die Standardabweichung 0 ist?
f) Alle Messwerte liegen zwischen 50 und 60. Ist es möglich, dass die Standardabweichung 25 beträgt?

Aufgabe A16 In einer Stichwahl treten zwei Kandidatinnen A und B an. Eine Umfrage bei 100 Personen liefert folgendes Ergebnis: 45 für A, 55 für B. Schätzen Sie die Zuverlässigkeit dieser Resultate als Prognose wie folgt ab:

a) Berechnen Sie ein 95%-Vertrauensintervall für das Ergebnis von A.
b) Wenn man davon ausgeht, dass der wahre Wert 50% für die Kandidatin A beträgt, was ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer solchen Umfrage genau 45% herauskommt? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass 45% oder weniger heraus kommen?
c) Für wie verlässlich halten Sie jetzt die obige Prognose?

Aufgabe A17 In einer Umfrage werden ehemalige Schüler eines Jahrgangs einer mittleren Kantonsschule befragt. Die eine Schule erhält eine Gesamtnote von 5.2, was ein bisschen schlechter als ihre «Rivalin» ist, die mit einer 5.3 bewertet wurde.

Treffen Sie realistische Annahmen, um ein 95% Vertrauensintervall zu berechnen und kommentieren Sie, ob es sich lohnt, sich über die schlechtere Bewertung zu echauffieren.

Aufgabe A18 Ideen für eine Simulation in Excel

- Simulieren Sie die Umfrage von Aufgabe A17.
- Simulieren Sie das folgende Würfelspiel: Man darf so lange würfeln und Punkte sammeln, bis man aufhört und sich die gesammelten Punkte gutschreibt, oder bis man eine Sechs würfelt und sich keine Punkte gutschreiben darf. Testen Sie verschiedene Strategien und weisen Sie nach, dass Weiter-Würfeln-bis-15-Punkte die beste Strategie ist.

Aufgabe A19 Die Noten der Prüfung «Extremalaufgaben und Kombinatorik» sind wie folgt:

2.7, 3.1, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9, 4, 4, 4.3, 4.3, 4.4, 4.6, 4.6, 4.7, 4.7, 4.8, 4.9, 4.9, 5.2, 5.5, 5.5, 5.6, 5.7, 6, 6

Zeichnen Sie dazu ein Histogramm. Wählen Sie die Klassenbreite 0.5 (Breite der einzelnen Balken), jeweils um die halben Noten zentriert.

23.4 Nachtrag zum p-Quantil

Zwei Beispiele:

(a) $n = 11$ Messwerte, bestimme das 0.12-Quantil.
Umrechnung von der p-Skala in die i-Skala per

$$f(p) = 1 + p(n-1)$$

hier also

$$f(0.12) = 1 + 0.12 \cdot 10 = 2.2$$

Das gesuchte Quantil ist also der «Messwert mit der Nummer 2.2, also der (nicht existierende) Messwert $x_{2.2}$».
Stattdessen nimmt man den Wert, den man erreicht, wenn man vom Messwert x_2 ausgehend die 0.2-fache Distanz vom Messwert x_2 zum Messwert x_3 zurückliegt, d. h.

$$0.12\text{-Quantil} = x_2 + 0.2 \cdot (x_3 - x_2)$$

(b) $n = 100$ Messwerte, bestimme das 0.1-Quantil.
Umrechnung von der p-Skala in die i-Skala per

$$f(p) = 1 + p(n-1)$$

hier also

$$f(0.1) = 1 + 0.1 \cdot 99 = 1 + 9.9 = 10.9$$

Das gesuchte Quantil ist also der «Messwert mit der Nummer 10.9, also der (nicht existierende) Messwert $x_{10.9}$».
Stattdessen nimmt man den Wert, den man erreicht, wenn man vom Messwert x_{10} ausgehend die 0.9-fache Distanz vom Messwert x_{10} zum Messwert x_{11} zurückliegt, d. h.

$$0.1\text{-Quantil} = x_{10} + 0.9 \cdot (x_{11} - x_{10})$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

23.5 Zum Vertrauensintervall

Annahme: Die Verteilung ist „durch eine Normalverteilung approximierbar“.

Schätzverfahren 23.5.1

Betrachte das folgende Schätzverfahren (um einen wahren Wert zu bestimmen):

- Führe ein Experiment mit mindestens 50 Messungen durch, also $n \geq 50$.
- Aus den Messwerten ermittle
  - den Mittelwert $\overline{x}$ der Messwerte und
  - die Standardabweichung s.
- Setze

$$s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s$$

(das ist eine Schätzung für die Standardabweichung der Mittelwerte bei mehrmaligem Durchführen des Experiments)

Die Schätzung ist nun:

Der wahre Wert liegt im folgenden Intervall, dem sogenannten **Vertrauensintervall** (oder Konfidenzintervall)

$$\boxed{[\overline{x} - 2s_{\overline{x}},\ \overline{x} + 2s_{\overline{x}}]}$$

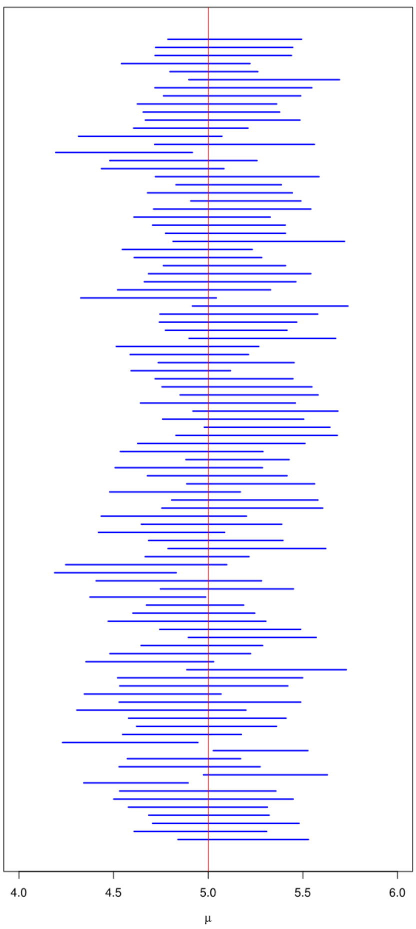
Man nennt dieses Intervall auch 95%-**Vertrauensintervall** wegen des folgenden Ergebnisses.

Merke 23.5.2 Vertrauensintervall für den Mittelwert

Bei der Berechnung eines Vertrauensintervalls mit dem obigen Schätzverfahren enthält das ermittelte Intervall den wahren Wert mit 95 % Wahrscheinlichkeit.

Alternative Formulierung: Wenn man das obige Schätzverfahren sehr oft durchführt, liegt der wahre Wert in 95 % der Fälle im berechneten Vertrauensintervall.

Diese zweite Formulierung ist rechts illustriert: Der wahre Wert ist der rote Wert, die blauen Balken sind die Vertrauensintervalle verschiedener Experimente. In etwa 19 von 20 Fällen hat man den wahren Wert erwischt.



Diese Aussage wird oft wie in Merke 23.2.2 formuliert, was aber nicht korrekt ist: **Nach** einer Messung liegt der wahre Wert entweder im geschätzten Intervall oder nicht, die Wahrscheinlichkeit ist also 0 oder 1. Dies wird auch ganz am Anfang des folgenden Wikipedia-Artikels erklärt: https://de.wikipedia.org/wiki/Konfidenzintervall

23.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

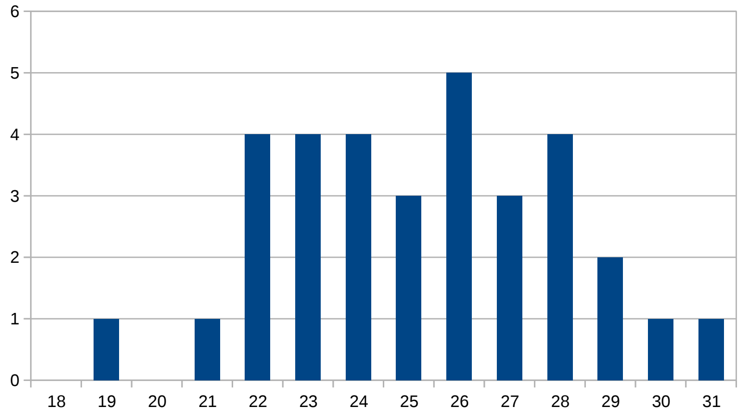
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-bester-muenzwurf-fonds

Lösung zu A2 ex-muenze-durchschnitt

d) Ein mögliches Histogramm sieht wie folgt aus:



Lösung zu A3 ex-wuerfeln-mit-muenze

a) Idee/Möglichkeit 1 (siehe aber Teilaufgabe (b)): 3 Würfe, Anzahl der «Zahl»-Würfe ist die gesuchte Zahl.
Idee/Möglichkeit 2: Münze 1 entscheidet gerade/ungerade, Münze 2 entscheidet 0/1 oder 2/3. Man könnte auch eine Binärzahl mit zwei Stellen erzeugen.

b) Bei Idee 1 kommen die 1 und die 2 drei mal so häufig vor wie die 0 und die 3.
Bei Idee 2 sind die Häufigkeiten ausgeglichen.

c) Bei Möglichkeit 2 gibt es 8 gleich wahrscheinliche Varianten, wobei 0 für Kopf und 1 für Zahl steht:
000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
In $\frac{1}{8}$ der Fälle erhält man eine 0, in $\frac{3}{8}$ der Fälle eine 1, ebenso für die 2 und die 3 erhält man wieder nur in $\frac{1}{8}$ der Fälle.
Bei Möglichkeit 1 gibt es 4 gleich wahrscheinliche Varianten, die den Zahlen 0 bis 3 zugeordnet werden.

d) Binärzahl mit 4 Stellen, oder Intervallhalbierung. Erste Münze entscheidet < 8 oder ≥ 8. Die nächste Münze halbiert die verbleibenden Zahlen etc.

e) Wie Möglichkeit 2, aber man wiederholt den Prozess, wenn eine 3 herauskommt.

Lösung zu A4 ex-leiterspiel-feld-28

a) Ein Unterschied zwischen den Feldern 27, 28 und 29 ist empirisch nicht festzustellen. Der Unterschied zwischen den Feldern 5, 6 und 7 aber sehr wohl. Besonders das Feld 7 wird klar weniger besucht als das Feld 6.
Das Feld 6 kann direkt erreicht werden. Feld 7 nur indirekt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Feld 6 indirekt erreicht wird, ist aber nur wenig kleiner als jene für das Feld 7.

b) Die Wahrscheinlichkeiten entsprechen den relativen Besuchshäufigkeiten. Die Grundidee ist folgende: Die Häufigkeit eines Feldes i ergibt sich aus den Häufigkeiten der Felder, von denen das Feld i erreicht werden kann, d.h. aus den Feldern $i-6$, $i-5$, $\ldots$, $i-1$. Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit das Feld i vom Feld $i-6$ zu erreichen genau $\frac{1}{6}$.
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt damit rekursiv wie folgt:

$$\begin{cases} P_0 &= 1 & \text{Startfeld} \\ P_i &= 0 & \text{für } i < 0 \\ P_i &= \displaystyle\sum_{k=i-6}^{i-1} \frac{1}{6} P_k & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

Diese Rekursion kann z.B. in Excel programmiert werden. Man erhält folgende Werte:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00000	0.16667	0.19444	0.22685	0.26466	0.30877	0.36023	0.25360	0.26809	0.28037
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.28929	0.29339	0.29083	0.27926	0.28354	0.28611	0.28707	0.28670	0.28559	0.28471
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.28562	0.28597	0.28594	0.28576	0.28560	0.28560	0.28575	0.28577	0.28574	0.28570

Zum Vergleich $\frac{1}{3.5} \approx 0.285714$, was der durchschnittlichen Besuchswahrscheinlichkeit entspricht. Damit ist die Besuchswahrscheinlichkeit des Feldes 28 1.0000746 mal grösser als der Durchschnitt, aber kleiner als die Besuchswahrscheinlichkeit vom Feld 27.

Lösung zu A5 ex-unterschied-mittelwert-median

Lösung zu A6 ex-note-nachpruefung

Seien $x_1, \ldots, x_{20}$ alle Prüfungsnoten. Es gilt

$$\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} x_i \approx 4.42 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_1 \approx 4.48$$

Wir müssen davon ausgehen, dass die Notenschnitte gerundet und nicht exakt sind (besonders bei 19 Noten).

Multipliziert man die erste Gleichung mit 19 und die zweite mit 20, kann die erste von der zweiten subtrahiert werden und es bleibt

$$x_{20} \approx 20 \cdot 4.48 - 19 \cdot 4.42 = 5.62$$

Die Nachprüfung war wohl eine 5.6. Weil dies aus den Angaben berechnet werden kann, sollte die Lehrperson den neuen Schnitt nicht kommunizieren.

Lösung zu A7 ex-stdev-von-hand

a) $\mu = 100.5$, $\sigma = 3.937$.

b) $\mu = 1$, $\sigma = 0$.

c) Das könnte (ein schon fast gemogelt gutes) Resultat des Experiments sein, bei dem π durch zufälliges Wählen eines Punktes ermittelt wurde.
$\mu = 0.785$. $\sigma^2 = \frac{1}{999} \cdot \left(215 \cdot (0.785)^2 + 785 \cdot (0.215)^2\right) \approx 0.1689$. Und damit $\sigma \approx 0.411$.

d) Entweder durch Überlegen oder mit der Summenformel für arithmetische Reihen: $\mu = \frac{1}{n} \cdot 101 \cdot \frac{1+101}{2} = 51$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{101}(i-51)^2} \approx 29.3$$

Lösung zu A8 ex-lineare-01-funktion

Der Achsenabschnitt ist a, die Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-a}{1} = b-a$. Also

$$f(t) = a + t \cdot (b-a).$$

Lösung zu A9 ex-quantile-von-hand

(a) Median (0.5-Quantil) ist 4, das erste Quartil (0.25-Quantil) ist 4.
Das 10%-Quantil entspricht der Position $i = 1 + 0.1 \cdot (5 - 1) = 1.4$. Wir suchen also den richtigen Wert zwischen x_1 und x_2. Dazu berechnen wir den Wert an der Stelle 0.4 der linearen Funktion $g(t)$, die für $t = 0$ den Wert x_1 und für $t = 1$ den Wert x_2 liefert: $g(t) = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) = 2 + 0.4 \cdot (4 - 2) = 2.8$.
Damit ist das 0.1-Quantil gleich 2.8.

(b) Wenn man den Streckenzug als Graph einer (stückweise linearen) Funktion auffasst, die auf $[0, 1]$ definiert ist (also «auf der zweiten Skale»), so ist der Wert dieser Funktion bei p gerade das p-Quantil.

(c) Das 1. Quartil ist 4, das 3. Quartil 5, damit ist der Interquartilsabstand

$$IQA = (3.\ \text{Quartil}) - (1\ .\text{Quartil}) = 5 - 4 = 1$$

(d) Position $i = 1 + 0.25 \cdot (10 - 1) = 3.25$. Das 0.25-Quantil ist also $x_3 + \frac{1}{4}(x_4 - x_3) = 3 + \frac{1}{4} \cdot (4 - 3) = 3.25$.

Lösung zu A10 ex-repe-diverse-masse

(a) $\overline{x} = 9$, $\tilde{x} = 8.5$, $s = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 44} =\approx 2.507$.
Quartile: Erst die Werte aufsteigend sortieren.
$q_{0.25}$ entspricht der Position $1 + 0.25 \cdot 7 = 2.75$. Da beide Werte 7 sind, ist $q_{0.25} = 7$.
$q_{0.75}$ entspricht der Position $1 + 0.75 \cdot 7 = 6.25$. Der 3. Quartil ist also $0.75 \cdot x_6 + 0.25 \cdot x_7 = 10.5$

(b) $\overline{x} = \frac{2}{3}$, $\tilde{x} = 1$, $s = \sqrt{\frac{1}{299}\left(100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 200\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{299} \cdot \frac{600}{9}} = \sqrt{\frac{1}{299} \cdot \frac{200}{3}} \approx 0.472$.
Das erste Quartil ist 0, das dritte Quartil ist 1.

Lösung zu A11 ex-repe-gezinkter-wuerfel

$\overline{x} = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}$.

$s = \sqrt{\frac{1}{599} \cdot \left(120 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 480 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{96}{599}} \approx 0.4003$. Daraus folgt

$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.01634$.

Damit ergibt sich das 95%-Vertrauensintervall von $[\overline{x} - 2s_{\overline{x}}, \overline{x} + 2s_{\overline{x}}] \approx [0.1673, 0.2327]$.

Der erwartete Wert von $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ für einen ungezinkten Würfel ist gerade nicht mehr im Vertrauensintervall. Es lässt sich sagen, dass so ein Resultat mit einem ungezinkten Würfel unwahrscheinlich ist (weniger wahrscheinlich als 2.5%, die anderen 2.5% wären für ein Resultat von ca. 80 Sechser oder weniger).

Lösung zu A12 ex-repe-umfrage-verlaesslichkeit

Es wird «Nein» mit 0 und «Ja» mit 1 dargestellt.

$\overline{x} = 0.25$, $s = \sqrt{\frac{1}{79}\left(20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 60 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{15}{79}} \approx 0.4357$

$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.04872$

Daraus ergibt sich ein 95%-Vertrauensintervall $[0.15256, 0.34744]$, d. h. von ca. 15% bis 35%.

In Worten: Der wahre Wert liegt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit zwischen 15% und 35% (also ein Faktor von mehr als zwei zwischen unterer und oberer Grenze).

Schon rein statistisch ist die Genauigkeit der Umfrage schlecht.

Weiter ist zweifelhaft, ob die Online-Umfrage-Teilnehmer repräsentativ für die Schweizer Bevölkerung sind.

Lösung zu A13 ex-repe-lotto

5 aus 50: $\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2'118'760$.

2 aus 12: $\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$.

Total Möglichkeiten: $66 \cdot 2'118'760 = 139'838'160$.

Die Wahrscheinlichkeit, in EuroMillions alles richtig zu tippen, beträgt $1 : 139'838'160 \approx 7.151 \cdot 10^{-9}$.

Erwartungswert: $-3 \cdot \left(1 - \frac{1}{139'838'160}\right) + (41'000'000 - 3) \cdot \frac{1}{139'838'160} = -\frac{4731431}{1747977} \approx -2.71$.

Lösung zu A14 ex-interquartilsabstand-vertrauensintervall

a) Q_1 ist ein Wert, so dass $\frac{1}{4}$ der Messwerte kleiner oder gleich sind und $\frac{3}{4}$ grösser. Q_2 ist der Median $\tilde{x}$ (50%/50%) und Q_3 ist ein Wert, so dass $\frac{3}{4}$ der Messwerte kleiner oder gleich Q_3 sind.

b) Ein Streuungsmass, das die Grösse des Intervalls angibt, in welches jene Hälfte der Messwerte fällt, die am nächsten beim Median liegen.

c) Die Wahrscheinlichkeit sollte ungefähr 50% betragen, weil 50% der gemessen Werte darin liegen. Das stimmt umso genauer, je mehr Messwerte zur Verfügung stehen.

Lösung zu A15 ex-durchschnitt-groesser-median

a) Ja. Z.B. 0, 0, 0, 0, 5. $Q_3 = 0$ und $\overline{x} = 1$.

b) Nein. Die Werte werden aufsteigend sortiert und der Median ist immer links vom dritten Quartil. Gleichheit ist aber möglich.

c) Ja. Z.B. 1, 2, 2, 2, 3. $Q_1 = Q_3 = 2$.

d) Ja. Z.B. 0, 0, 5, 20, 25. $\tilde{x} = 5$, $\overline{x} = 10$.

e) Ja, wenn alle Messwerte gleich sind. Wenn man annimmt dass die Messwerte 50 und 60 darin vorkommen müssen, dann ist die Streuung sicher nicht null und die Antwort wäre «Nein».

f) Nein, die grösstmögliche Abweichung zum Durchschnitt beträgt 10, welche quadriert, aufaddiert (mal n) und dann durch $n-1$ dividiert wird, d.h. der grösste Faktor $\frac{n}{n-1}$ (womit die quadrierte Abweichung multipliziert wird) entsteht bei $n = 2$. D.h. s ist auf jeden Fall kleiner als $\sqrt{\frac{2}{2-1} \cdot 100} = \sqrt{200} < \sqrt{625} = 25$.

Lösung zu A16 ex-wahlbarometer

a) Mittelwert $\overline{x} = \frac{45 \cdot 1 + 55 \cdot 0}{100} = 0.45$.
$s = \sqrt{\frac{1}{99} \cdot (45 \cdot (1-0.45)^2 + 55 \cdot (0-0.45)^2)} \approx 0.500$. Daraus folgt $s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.05$. Das 95%-Vertrauensintervall ist also $[0.35, 0.55]$. Ein Sieg von A ist danach durchaus möglich und mit dem Umfrageresultat vereinbar.

b) X: Anzahl Stimmen bei 100 Befragungen. $P(X = 45) = \binom{100}{45} \cdot \frac{1}{2}^{100} \approx 0.0485$.
$P(X \leq 45) = \sum_{i=0}^{45} \binom{100}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 0.184$. Wenn die Kandidatinnen gleichauf wären, würde eine solche Umfrage in knapp 20% der Fälle ein solches Resultat (45 zu 55) oder ungünstiger liefern.

c) Trotz dieses Umfrageergebnisses ist der Ausgang noch offen.

Lösung zu A17 ex-schulnote

Annahmen

- Jahrgang einer mittleren Schule: 150 Schüler.
- Rücklaufquote: 50%.
- Pro Umfrage 10 Noten, die in den Durchschnitt einfliessen.
- Standardabweichung der Noten $s = 1$ (wie bei einer Prüfung). Alternative: Standardabweichung von den Noten 4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6 ausrechnen (ergibt $s = 0.84$.

Daraus ergibt sich ein $n = 750$ und $s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.036$.

Das Vertrauensintervall, basierend auf diesen Annahmen ($s = 1$), ist $[5.12, 5.28]$. Damit könnte man argumentieren, dass die Schule tatsächlich etwas schlechter abschneidet als die «Rivalin».

Eine weitere Untersuchung, die man anstellen könnte, wäre eine solche Umfrage zu simulieren, wobei man für beide Schulen einen wahren Wert von 5.25 annimmt und untersucht, wie wahrscheinlich es ist, dass die eigene Schule um mindestens 0.1 schlechter abschneidet.

Zur Simulation einer Umfragenote könnte man z.B. folgendes verwenden:

```
=WENN(ZUFALLSZAHL()<0.375; 4+1.25*ZUFALLSZAHL(); 5.25+0.75*ZUFALLSZAHL())
```

Die Formel bestimmt je nachdem eine Zufallszahl zwischen 4 und 5.25 (mit Wahrscheinlichkeit 0.375) oder zwischen 5.25 und 6. Damit ergibt sich ein Durchschnitt von 5.25.

Lösung zu A19 ex-histogramm-zeichnen