Aufgabe 10 $2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$ *Punkte*

Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2$ und den Punkt $P = (8.25, 0) = (\frac{33}{4}, 0)$. (Skizze empfohlen)

(a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $A = (2, f(2)) = (2, 4)$ von P.

(b) Welcher Punkt Q auf dem Graphen von f hat den geringsten Abstand von P?

Verwenden Sie im Folgenden $Q = (1.5, 2.25) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ (falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten).

(c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch P und Q.

(d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente an (den Graphen von) f im Punkt Q.

(e) Zeigen Sie, dass die Verbindungsstrecke PQ senkrecht auf der Tangente an f im Punkt Q steht.

(f) Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel $f(x) = x^2$, der Verbindungslinie PQ und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung: Skizze bitte selbst erstellen, etwa per Geogebra.

(a)

$$\text{Abstand}(P, A) = \overline{PA} = \sqrt{(8.25 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{6.25^2 + 4^2} \approx 7.42$$

(b) Jeder Punkt Q auf dem Graphen von f hat die Gestalt $Q = (x, f(x)) = (x, x^2)$. All diese Punkte können wir durch ihre x-Koordinate wie folgt parametrisieren.

Jedem $x \in \mathbb{R}$ ordnen wir den Punkt $Q(x) := (x, f(x)) = (x, x^2)$ auf dem Graphen zu und diesem Punkt seinen Abstand zu P. Das Ergebnis nennen wir $d(x)$ («d» wie «Distanz»). Gesucht ist dasjenige x, für das $d(x)$ minimal ist. Nach Pythagoras gilt

$$d(x) = \text{Abstand}(P, Q(x)) = \sqrt{(8.25 - x)^2 + (0 - x^2)^2} = \sqrt{(8.25 - x)^2 + x^4}$$

Per Taschenrechner: $d'(x) = 0$ lösen, liefert als einzigen Extremstellenkandidaten $x_0 = 1.5$.

Um sicherzugehen, dass es sich wirklich um ein Extremum handelt, berechnet man $d''(x_0)$ und stellt fest, dass dies > 0 ist. Also ist x_0 eine Minimalstelle.

Der gesuchte Punkt ist also $Q(x_0) = (1.5, 1.5^2) = (1.5, 2.25)$.

Bemerkungen:

- Empfehlung: Die Funktion $d(x)$ mit Geogebra plotten, ebenso $d'(x)$.
- Geometrisch (und vielleicht auch algebraisch) ist klar, dass $d(x)$ für hinreichend grosses bzw. hinreichend kleines x beliebig gross wird. Da es nur einen Extremstellenkandidaten gibt, muss es sich dabei um eine Minimalstelle handeln. (Das vermeidet den Test mit d''.)
- Anstatt die Funktion $d(x)$ zu minimieren, kann man auch den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen minimieren. Das ist rechnerisch (beim Ableiten) einfacher, auch wenn die Ableitung dann immer noch ein Polynom dritten Grades ist, dessen Nullstellen man zwar exakt angeben kann (eine Art Mitternachtsformel für kubische Polynome), aber nicht mit behandeltem Schulstoff.

(c) Gleichung der Geraden g durch P und Q:

Ansatz $y = g(x) = mx + q$.

- Erster Lösungsweg: Da P und Q auf g liegen, müssen die folgenden beiden Gleichungen gelten (Einsetzen der Punkte in die Geradengleichung/den Ansatz):

  $$\begin{aligned} 0 &= m \cdot 8.25 + q \\ 2.25 &= m \cdot 1.5 + q \end{aligned}$$

  Dieses Gleichungssystem kann man lösen (per Hand oder per TR) und erhält $m = -\frac{1}{3}$ und $q = \frac{11}{4} = 2.75$.

  Die Geradengleichung ist also

  $$y = -\frac{1}{3}x + 2.75$$

  Probe: P und Q einsetzen.

- Zweiter Lösungsweg:

  Der Zeichnung entnimmt man, dass die gesuchte Gerade die Steigung

  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2.25}{8.25 - 1.5} = \frac{-2.25}{6.75} = -\frac{1}{3}$$

hat. Damit gilt $y = -\frac{1}{3}x + q$. Nun setzt man P (oder Q) ein, um q zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3} \cdot 8.25 + q \\ 0 &= -2.75 + q \\ 2.75 &= q \end{aligned}$$

Antwort: $y = -\frac{1}{3}x + 2.75$.

- Dritter Lösungsweg: In der Formelsammlung steht vermutlich eine Formel für die Gleichung der Geraden durch zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q, nämlich so etwas wie

$$y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \cdot (x - x_Q) + y_Q$$

(Begründung: Dies ist eine Geradengleichung. Wenn man hier x rechts durch x_Q ersetzt, kommt offensichtlich y_Q heraus; wenn man x durch x_P ersetzt, kommt offensichtlich y_P heraus.)
Einsetzen liefert die gesuchte Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{0 - 2.25}{8.25 - 1.5} \cdot (x - 1.5) + 2.25 \\ &= \frac{-2.25}{6.75} \cdot (x - 1.5) + 2.25 \\ &= -\frac{1}{3}(x - 1.5) + 2.25 \\ &= -\frac{1}{3}x + 0.5 + 2.25 \\ &= -\frac{1}{3}x + 2.75 \end{aligned}$$

(d) Gleichung der Tangente t an f bei $x_Q = 1.5$. Von Hand. Ansatz $y = t(x) = mx + q$.
Die Steigung ist

$$m = f'(x_Q) = f'(1.5) \overset{\text{da } f'(x) = 2x}{=} 3$$

Damit $y = 3x + q$. Nun setzt man den Punkt $Q = (1.5, 2.25)$ ein, um q zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 2.25 &= 3 \cdot 1.5 + q \\ 2.25 &= 4.5 + q \\ -2.25 &= q \end{aligned}$$

Lösung $y = t(x) = 3x - 2.25$.
Vielleicht steht auch hier die allgemeine Formel in der Formelsammlung: Die Gleichung der Tangente an f bei x_0 ist

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

(Begründung: Wenn man $x = x_0$ ersetzt, kommt $f(x_0)$ heraus, die Steigung ist offensichtlich $f'(x_0)$ und es handelt sich um eine Geradengleichung.)

(e) Die Verbindungsstrecke PQ steht senkrecht auf der Tangente an f im Punkt Q.
(Was geometrisch plausibel ist, da Q der nächste Punkt auf dem Graphen von f ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man Q ein wenig auf der Tangenten wandern lassen und so einen kleineren Abstand realisieren (Pythagoras). Dann liegt Q zwar nicht mehr auf dem Graphen, aber fast, denn die Tangente ist die beste Approximation an den Graphen von f im Berührpunkt).
1. Lösungsweg (wenn man die vorherigen Teilaufgaben gelöst hat und weiss, dass zwei Geraden genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ist, was man hinschreiben sollte in Worten): Das folgt aus

$$-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$$

2. Lösungsweg: Die Steigungen der beiden Geraden ausrechnen (Steigung der Verbundungsstrecke ist $-\frac{1}{3}$ aus der Skizze, Steigung der Tangente ist $f'(1.5)) = 3$. Dann kann man dieselbe Rechnung hinschreiben.
3. Lösungsweg: Mit Vektoren: Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6.75 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

ist ein Richtungsvektor der Verbindungsstrecke (aus Skizze ablesen!). Die Tangente hat die Steigung $f'(1.5) = 3$, also ist ein Richtungsvektor der Tangente

$$\vec{v} = \binom{1}{3}$$

(Steigung 3 heisst: eine Einheit nach rechts bedeutet 3 Einheiten nach oben).
Das Skalarprodukt dieser beiden Richtungsvektoren ist

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \binom{6.75}{-2.25} \cdot \binom{1}{3} = 6.75 - 2.25 \cdot 3 = 0$$

Also stehen die Richtungsvektoren und damit die beiden Geraden senkrecht aufeinander.

(f) Flächenberechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^{1.5} x^2 \,\mathrm{d}x + \text{naheliegende Dreiecksfläche} &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1.5} + \frac{1}{2} \cdot 6.75 \cdot 2.25 \\ &= \frac{1.5^3}{3} - 0 + \frac{1}{2} \cdot 6.75 \cdot 2.25 \\ &= 8.71875 \end{aligned}$$