21 Kombinatorik: Die Kunst des Zählens

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der «abzählenden Kombinatorik».

> Diese beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen
> - unterscheidbarer oder nicht unterscheidbarer Objekte (d.h. „ohne“ bzw. „mit“ Wiederholung derselben Objekte) sowie
> - mit oder ohne Beachtung ihrer Reihenfolge (d.h. „geordnet“ bzw. „ungeordnet“).
>
> Quelle: Wikipedia: Abzählende Kombinatorik, 27.09.2019.

Zur Berechnung dieser Anzahlen gibt es eine Sammlung von Formeln. Der Fokus dieses Skripts liegt darin, dass Sie diese Formeln selbst entdecken und intuitiv so gut verstehen, dass sich ein Auswendiglernen mehr oder weniger erübrigt, denn Sie können die Formeln selbst rasch herleiten. Nur so werden Sie auch komplexere Probleme erfolgreich lösen können – blosses Auswendiglernen ohne Verständnis führt wie so oft selten zum Ziel.

21.1 Permutationen ohne Wiederholung

Definition 21.1.1 Permutation ohne Wiederholung

Unter einer **Permutation ohne Wiederholung** versteht man eine Anordnung gegebener, unterscheidbarer Objekten in einer bestimmten Reihenfolge (lateinisch *permutare* vertauschen). Dabei muss jedes Objekt genau einmal vorkommen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit Permutationen ohne Wiederholung.

Aufgabe A1

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3-stellige Zahlen zu schreiben, in denen die Ziffern 1, 2, 3 je genau einmal vorkommen? Schreiben Sie alle Möglichkeiten systematisch auf.
Gesucht ist also die Anzahl der Permutationen der drei Ziffern 1, 2, 3.

b) Gleiche Aufgabenstellung mit 4-stelligen Zahlen und den vier Ziffern 1, 2, 3, 4.
Was ändert sich, wenn man stattdessen die Ziffern 9, 5, 2, 8 verwendet.

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 nummerierte Parkplätze 10 Mietern zuzuordnen?

d) In einer Klasse sind n Schülerinnen und Schüler. Auf wie viele Arten können diese in einer Reihe nebeneinander aufgestellt werden (gleichbedeutend: durchnummeriert werden)?

Definition 21.1.2 n Fakultät: $n!$

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $n!$ (Sprechweise: «n **Fakultät**») als Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Im Spezialfall $n = 0$ gilt $0! = 1$.

Bemerkung: Auf Englisch bzw. Französisch spricht man von «n factorial» bzw. «n factorielle». Diese Begriffe heben im Vergleich zum deutschen «Fakultät» hervor, dass die $n!$ ein Produkt von Faktoren ist (nämlich der natürlichen Zahlen von 1 bis n). Laut Wikipedia wird in Österreich auch der Begriff «die Faktorielle» verwendet.

Aufgabe A2

(a) Berechnen Sie von Hand 0! und 1! und 2! und 3! und 4! und 5! und 6!, und 7! und stellen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar (Beschriftung der ersten Zeile: n; Beschriftung der zweiten Zeile $n!$).

(b) Es gilt $9! = 362'880$. Berechnen sie von Hand 10!.

(c) Es gilt $19! = 121645100408832000$. Berechnen Sie von Hand 20!.

(d) Berechnen Sie von Hand $\frac{1000!}{999!}$.
(e) Berechnen Sie von Hand $\frac{100!}{98!}$.
(f) Was erhält man, wenn man $n!$ mit $(n+1)$ multipliziert?
(g) Was erhält man, wenn man $(n-1)!$ mit n multipliziert?
(h) Es gilt $19! = 121645100408832000$. Können Sie erklären, warum die letzten drei Ziffern dieser Zahl Nullen sind?
(i) Welche Zahl ist grösser? $100!$ oder 100^{100}?

Merke 21.1.3 Fakultäten auf dem TR

Mit dem Ausrufezeichen «!» können mit dem TR Fakultäten berechnet werden.
TI-92 Plus: Via «MATH»: 2nd 5 7 1
TI-*n*spire: menu 5 1

Satz 21.1.4 Bedeutung der Fakultät / Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung

Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander unterscheidbare Objekte in eine Reihenfolge zu bringen. Gleichbedeutend, mit anderen Worten: Es gibt genau $n!$ Permutationen ohne Wiederholung von n unterscheidbaren Objekten.

Beispiel 21.1.5. Die drei Buchstaben a, b, c kann man auf $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Möglichkeiten anordnen: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Beweis. ✎

- Für die erste Position hat man n Möglichkeiten,
- für die zweite Position hat man $n-1$ Möglichkeiten,
- usw.
- für die $(n-1)$-te (= vorletzte) Position hat man 2 Möglichkeiten,
- für die n-te Position hat man 1 Möglichkeit.

Insgesamt ergibt dies $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten. □

Merke 21.1.6 Zählstrategie («fundamental counting principle»)

Kann man das Zählen der Möglichkeiten in einzelne Schritte zerlegen und ist die jeweilige Anzahl der Möglichkeiten in jedem Schritt unabhängig von den in den vorhergehenden Schritten getroffenen Wahlen, so ist die Anzahl aller Möglichkeiten das Produkt der entsprechenden Anzahlen in den einzelnen Schritten.

Aufgabe A3 Erfinden Sie selbst eine Aufgabe, für deren Lösung eine Anzahl von Permutationen berechnet werden muss.

Aufgabe A4 Vereinfachen Sie:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{(n!)^{2024}}{((n-1)!)^{2024}}$

c) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$

d) $\dfrac{(n+1)!}{n!} \cdot \dfrac{1}{n+1}$

e) $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{n!}$

f) $\dfrac{2n}{n+1} \cdot \dfrac{n^2-1}{n!}$

Was auf den ersten beiden Seiten «Permutation» genannt wurde, sollte genauer als «Permutation ohne Wiederholung» bezeichnet werden.

21.2 Permutationen mit Wiederholung

Aufgabe A5

a) Wie viele unterschiedliche «Wörter» (d.h. auch völlig sinnfreie) können mit den Buchstaben des Wort «SEEFAHREN» geschrieben werden?

b) Wie viele unterschiedliche «Wörter» (d.h. auch völlig sinnfreie) können mit den Buchstaben vom Wort «ANANAS» geschrieben werden?

c) An einer Tombola nehmen 50 Personen teil, von denen 5 einen Preis gewinnen. Die 5 Preise unterscheiden sich. Auf wie viele Arten können die 5 unterschiedlichen Preise verteilt werden?

Definition 21.2.1 Permutation mit Wiederholung

Unter einer **Permutation mit Wiederholung** versteht man eine Anordnung gegebener, nicht notwendig unterscheidbarer Objekten in einer bestimmten Reihenfolge (lateinisch *permutare* vertauschen). Dabei muss jedes Objekt genau einmal vorkommen.

Satz 21.2.2 n teilweise identische Objekte anorden / Anzahl der Permutationen von n teilweise ununterscheidbaren Objekten

Seien n Objekte gegeben. Sei k die Anzahl unterschiedlicher Objekte. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Zahlen, die angeben, wie oft jedes der k unterschiedlichen Objekte vorkommt (= Häufigkeiten der gleichen Objekte). (Es gilt dann notwendigerweise $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.) Dann ist die Anzahl unterschiedlicher Anordnungen der n Objekte (= die Anzahl der Permutationen dieser Objekte) genau

$$\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_{k-1}! \cdot m_k!}.$$

Im Fall $k = n$ (d. h. alle Objekte verschieden, $m_1 = m_2 = m_k = 1$) liefert dieser Satz als Spezialfall den Satz 21.1.4.

Beispiel 21.2.3. In der obigen Aufgabe haben wir die Anzahl der Permutationen (mit Wiederholung) des Worts «SEEFAHREN» berechnet. In diesem Fall gilt $n = 9$ (= Anzahl der Buchstaben) und $k = 7$ (Anzahl der verschiedenen Buchstaben). Der Buchstabe E kommt genau dreimal vor, also $m_1 = 3$. Alle anderen Buchstaben kommen genau einmal vor, also $m_2 = m_3 = \cdots = m_7 = 1$. Beachte $m_1 + m_2 + \cdots + m_7 = 3 + 6 = 9$.

Nach dem Satz ist die Anzahl der Permutationen

$$\frac{9!}{3! \cdot 1! \cdot \cdots \cdot 1!} = \frac{9!}{3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60'480$$

Die Reihenfolge der Zahlen $m_1, \ldots m_k$ ist egal. Soeben haben wir das E als «ersten» Buchstaben verwedet, er könnte aber auch der «fünfte» sein; dann wäre $m_5 = 3$ und alle anderen m_i wären 1.

Im «ANANAS»-Beispiel gelten $n = 6$, $k = 3$ und $m_1 = 3$ (Häufigkeit des Buchstaben A), $m_2 = 2$ (Buchstabe N) und $m_3 = 1$ (Buchstabe S). Nach unserem Satz ist die Anzahl der Permutationen

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

Beweis. Wenn alle Objekte unterscheidbar sind, gibt es $n!$ Möglichkeiten.

Wir können diesen Zustand aber stets erreichen, indem wir alle Objekte einer jeden Objektklasse durchnummerieren (beim Beispiel «SEEFAHREN» gibt es dann statt der 3 nicht unterscheidbaren Buchstaben E, E, E die drei verschiedenen Buchstaben E_1, E_1, E_3). Dann gibt es $n!$ Möglichkeiten. Wenn man dann die Nummerierungen der Buchstaben vergisst, liefern jeweils $m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_k!$ verschiedene Anordnungen dieselbe Anordnung. Wir müssen also $n!$ durhc dieses Produkt dividieren, um die gesuchte Anzahl zu erhalten. □

Merke 21.2.4 Zählstrategie

Es ist manchmal geschickt, gewisse Dinge zuerst mehrfach zu zählen und dann am Schluss durch die Anzahl der Mehrfachzählungen zu dividieren.

Im Beispiel «SEEFAHREN» wurde das Wort «FERHANEES» zunächst $3! = 6$ Mal gezählt: als «$FE_1RHANE_2E_3S$», «$FE_1RHANE_3E_2S$», «$FE_2RHANE_1E_3S$», «$FE_2RHANE_3E_1S$», «$FE_3RHANE_1E_2S$», «$FE_3RHANE_2E_1S$».

Aufgabe A6 Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Bälle auf 5 verschiedene Boxen zu verteilen? Die 3 Bälle sind nicht voneinander zu unterscheiden und die 5 Boxen sind nebeneinander angeordnet.

Hinweis: Man kann das Wort «$\circ||\circ\circ||$» in den «Buchstaben» $|$ und $\circ$ als Ballverteilung interpretieren: Ein Ball in der ersten Box, kein Ball in der zweiten Box, 2 Bälle in der dritten Box, vierte und fünfte Box leer; die Striche sind die «Trennwände» zwischen den Boxen.

Aufgabe A7

(a) Auf Häuschen/-Gitterpapier markiere ein Rechteck der Grösse 10×6 (also 10 Häuschen breit, 6 Häuschen hoch). Wie viele Wege gibt es von der linken unteren Ecke diese Rechtecks in die rechte obere Ecke, wenn man nur nach rechts oder nach oben entlang von Gitterlinien laufen darf?
Hinweis: Das Wort «RRORRRORRRROROOO» kodiert einen solchen Weg.

(b) Löse dieselbe Aufgabe für ein 3×2-Rechteck und male in diesem Fall alle möglichen Wege auf.

21.3 Variationen

21.3.1. Bei Variationen geht es darum, aus n unterscheidbaren Objekten k Objekte auszuwählen und in eine Reihenfolge zu bringen. Wir unterscheiden wieder den Fall, dass jedes Objekt nur einmal gewählt werden darf (Variation ohne Wiederholung, nur sinnvoll für $k \leq n$, wobei eine solche Variation im Fall $k = n$ dasselbe ist wie eine Permutation ohne Wiederholung), vom Fall, dass jedes Objekt mehrfach gewählt werden darf (Variation mit Wiederholung).

Variationen ohne Wiederholung

Aufgabe A8 Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 10 verschiedenfarbigen Bällen 4 auszuwählen und in eine Reihenfolge zu bringen?

Merke 21.3.2 aus n verschiedenen Objekten k verschiedene auswählen und anordnen / Variationen ohne Wiederholung

Aus n unterschiedlichen Objekten sind k in einer Reihe zu platzieren (jedes Objekt darf maximal einmal vorkommen), wobei $k \leq n$ gilt. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür beträgt:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Variationen mit Wiederholung

Aufgabe A9

a) Wie viele «Wörter» der Länge 5 kann man mit beliebig vielen der drei Buchstaben A, B, C schreiben?

b) Man würfelt 10 mal hintereinander. Wie viele mögliche Folgen von Wurfergebnissen gibt es?

Merke 21.3.3 Variationen mit Wiederholung

Sind k Plätze (geordnet) mit jeweils einem von n Objekten zu besetzen (wobei jedes Objekte beliebig oft vorkommen darf), so gibt es dafür

$$n^k \qquad \text{Möglichkeiten.}$$

21.4 Kombinationen ohne Wiederholung

Aufgabe A10

a) Aus einer Klasse von 25 Schülerinnen und Schülern soll eine Delegation von 3 Personen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine solche Delegation zu bilden?

b) Eine Münze wird nacheinander 50 Mal geworfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau 3 mal Kopf und 47 mal Zahl zu werfen? Zum Vergleich: Man beantworte die gleiche Frage mit 25 mal Kopf und 25 mal Zahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

c) Wie viele möglichen «Hände» gibt es im Jass? (D.h. auf wie viele Arten kann man 9 Karten aus 36 auswählen?)

Merke 21.4.1 *n tief k*

Die Anzahl der Kombinationen (ohne Wiederholung), d.h. der Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Objekten k auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen, ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

wobei $\binom{n}{k}$ als «n tief k» gelesen wird und als **Binomialkoeffizient** bezeichnet wird.
Auf Englisch wird sinnigerweise $\binom{n}{k}$ als «n choose k» gelesen.

In Deutschland sagt man «n über k». Dies führt zu keinen Konflikten mit der Sprechweise für Brüche, denn man sagt dort «durch» für den Bruchstrich.

21.4.2. Wenn man einen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ «von Hand» ausrechnet, sollte man sinnvollerweise so vorgehen: Den Bruchstrich ziehen und darunter $k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ schreiben (d. h. k Faktoren absteigend von k bis 1). Oberhalb des Bruchstrichs schreibt man ebenfalls k Faktoren, nun absteigend bei n beginnend (diese bleiben übrig, wenn man $n!$ durch $(n-k)!$ teilt). Zum Beispiel:

$$\binom{23}{5} = \frac{\overbrace{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}^{\text{5 Faktoren}}}{5 \cdot \ \ 4 \cdot \ \ 3 \cdot \ \ 2 \cdot \ \ 1}$$

Wenn man (unten genügend Platz lässt und) die Faktoren genau untereinander schreibt, muss man oben gar nicht mehr zählen.

Zum Namen «Binomialkoeffizient»

Wir betrachten im Folgenden das Binom $(a+b)^n$ und dessen auspotenzierte Form:

$(a+b)^0$ $\quad 1$

$(a+b)^1$ $\quad a+b$

$(a+b)^2$ $\quad a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3$ $\quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4$ $\quad a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5$ $\quad a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$\vdots$

letzte Zeile erst nach Lösung der folgenden Aufgaben eintragen

$\vdots$

$(a+b)^n$ $\quad a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

Trägt man die Koeffizienten (= die Zahlen vor den $a^?b^?$) in ein Dreieck ein, so erhält man das sogenannte **Pascal'sche Dreieck**:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1\\
1\ 5\ 10\ 5\ 1
\end{array}
$$

Aufgabe A11 Begründen Sie, warum im Pascal'schen Dreieck jeder Eintrag die Summe seiner beiden oberen Nachbarn ist. *Hinweis: Beachten Sie, dass* $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$ *ist.*

Der Koeffizient von $a^k b^{n-k}$ ist gleich der Summe der Koeffizienten von $a^{k-1}b^{n-k}$ (wird mit a multipliziert) und $a^k b^{n-k-1}$ (wird mit b multipliziert).

Aufgabe A12 Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten. Was fällt Ihnen auf?

$\binom{5}{0} =$ $\binom{5}{1} =$ $\binom{5}{2} =$ $\binom{5}{3} =$ $\binom{5}{4} =$ $\binom{5}{5} =$

Aufgabe A13 Begründen Sie, warum der Koeffizient von $a^{n-k}b^k$ in der auspotenzierten Form von $(a+b)^n$ gleich $\binom{n}{k}$ ist.

(Nur eine Lösung aufschreiben) Beim Ausmultiplizieren der n Klammern/Faktoren $(a+b)$ wird aus jeder Klammer jeweils ein Summand (a oder b) ausgewählt und dann deren Produkt gebildet. (All diese Produkte werden dann summiert.) Jedes solche Produkt ist ein Produkt einiger a mit einigen b, hat also die Form $a^?b^?$ (ohne Zahl davor).
Wir sind am Koeffizienten bei $a^{n-k}b^k$ interessiert. Dieser ist die Anzahl der Produkte, bei denen man genau k mal b wählt. D.h. man wählt aus den n Klammern k Klammern aus, die ein b liefern, die restlichen liefern ein a. Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
Alternativbegründung: Jedes beim Ausmultiplizieren entstehende Produkt ist ein Wort in a und b der Länge n (wenn man das Kommutativgesetz noch nicht verwendet).
Beispiel: $n = 5$. Wählt man aus $(a+b)^5 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$ zum Beispiel aus der ersten Klammer das a, aus den beiden nächsten Klammern das b, dann a und dann b, so erhält man das Wort *abbab* (mit dem Kommutativgesetz wird dies zu a^2b^3)
Genau diejenigen Wörter der Länge n, in denen a genau $(n-k)$ Mal vorkommt und b genau k Mal, liefern mit dem Kommutativgesetz das Produkt $a^{n-k}b^k$. Der Koeffizient bei $a^{n-k}b^k$ ist also die Anzahl dieser Wörter, welche $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$ beträgt (Permutationen mit Wiederholung).
Nun Zeile mit $(a+b)^n$ oben ergänzen.

Verstehen Sie nun, warum die Binomialkoeffizienten so heissen?

✎Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist der Koeffizient bei $a^{n-k}b^k$, wenn man das Binom $(a+b)^n$ ausmultipliziert.

Eigenschaften von Binomialkoeffizienten

Vielleicht nett: Pascalsches Dreieck mit Binomialkoeffizienten aufschreiben und dann sehen, dass die beiden Gleichheiten in b) und c) in der folgenden Aufgabe gelten müssen (da wir A11 und A12 gelöst haben und das Dreieck symmetrisch ist (warum?)). Das löst diese Teilaufgaben bereits. Finden Sie neue Begründungen.

Aufgabe A14 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von Binomialkoeffizienten,

a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Die schönsten Beweise sind natürlich jene, die möglichst anschaulich und einleuchtend sind. Man kann natürlich auch algebraisch verfahren.

Merke 21.4.3 Binomialkoeffizienten mit dem TR

Die Funktion heisst `nCr(n,k)`, z.B. liefert `nCr(10,2)` das Resultat 45.
TI-92 Plus: Via «MATH»: 2nd 5 7 2
TI-nspire: menu 5 3

21.5 Kombinationen mit Wiederholung tendenziell weglassen

Die Formel zur Berechnung der Anzahl von Kombinationen mit Wiederholung soll hier nur als Ausblick dienen. Konkret geht es um die Anzahl möglicher Farbzusammenstellungen, wenn aus n Farben eine *ungeordnete* Gruppe von k Farben zusammengestellt werden soll, wobei jede Farbe mehrmals vorkommen kann.

Aufgabe A15 Gegeben sind 3 Farben R (rot), G (grün) und B (blau). Machen Sie ein komplette Liste aller möglichen ungeordneten Zusammenstellungen von 3 Farben, wobei sich die Farben wiederholen dürfen. Wie viele unterschiedliche Zusammenstellungen gibt es?

Aufgabe A16 Zur Herleitung der Formel für die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung für die Bildung von Gruppen der Grösse k aus n Objekten kann wie folgt vorgegangen werden:

Man platziert $n+k-1$ Streichhölzer in eine Reihe. Davon wählt man $n-1$ aus und markiert diese. Die Anzahl unmarkierter Streichhölzer zwischen den Rändern und den markierten Hölzern gibt die Anzahl an, wie oft jedes der n Objekte vorkommt.

Zeichnen Sie dazu ein Beispiel für die Aufgabe A15 und ein Beispiel für $n=4$ und $k=3$.

Merke 21.5.1

Die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten bei k Ziehungen mit Zurücklegen aus n Objekten beträgt

$$m\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

21.6 Übungsaufgaben

Folgende Aufgaben (A17 bis A24) stammen aus dem Buch «Stochastik» der «DMK» und wurden von Andreas Meier, KSBG mit LaTeX gesetzt. Ihm sei herzlich gedankt.

Aufgabe A17 Siebenstellige Telefonnummern dürfen nicht mit einer 0 oder einer 1 beginnen.

a) Wie viele verschiedene siebenstellige Telefonnummern erfüllen diese Bedingung?

b) Jemand hat die Telefonnummer 523 46 87. Wie viele andere Telefonabonnenten könnten eine Telefonnummer mit genau denselben Ziffern haben?

c) Jemand hat die Nummer 523 23 23. Wie viele andere Telefonabonnenten können eine Telefonnummer mit genau denselben Ziffern haben?

d) In wie vielen siebenstelligen Telefonnummern kommt die Ziffer 1 mindestens zweimal vor? Die Bedingung «Keine Null oder Eins am Anfang» gilt weiterhin!

Aufgabe A18

a) $P=(23,14)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten. Wie viele unterschiedliche kürzeste Gitterwege gibt es vom Ursprung $O=(0,0)$ zu P?

b) Wie viele kürzeste Gitterwege gibt es vom Punkt $Q=(3,6)$ zum Punkt $R=(12,45)$?

c) $P=(x,y)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten: $x,y\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es $\binom{x+y}{x}$ kürzeste Gitterwege gibt, die vom Ursprung $O=(0,0)$ zum Punkt P führen.

d) Wie viele kürzeste Wege von a) führen durch den Zwischenpunkt $Z=(5,6)$?

Aufgabe A19 Aus einer Gruppe von 17 Schülern sollen fünf für ein Organisationskomitee ausgewählt werden. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe A20 An einem Velorennen nehmen zwölf Velofahrer teil. Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind theoretisch möglich,

a) wenn alle Teilnehmer das Ziel erreichen?

b) wenn nur zehn der zwölf Teilnehmer das Ziel erreichen?

Aufgabe A21 Im Schweizer Zahlenlotto ging es 1986 - 2012 darum, diejenigen sechs von 45 Zahlen, die von einer Maschine gezogen werden, richtig vorherzusagen. Die Reihenfolge der Ziehung spielt dabei keine Rolle. Löse die folgenden Aufgaben für diese Version des Zahlenlottos.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs aus 45 Zahlen auszuwählen? Wie wahrscheinlich ist es demnach, alle sechs Zahlen richtig zu vorherzusagen?

b) Wie viele mögliche Vorhersagen gibt es, bei denen genau k Zahlen richtig sind $(k = 1, 2, ..., 5)$?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass 1 unter den sechs Zahlen ist, die von der Maschine gezogen werden? Ändert sich das Resultat, wenn man statt der 1 eine andere Zahl betrachtet?

Aufgabe A22 Fassen Sie zu einem einzigen Binomialkoeffizienten zusammen.

a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ b) $\binom{5}{2} + \binom{5}{2}$ c) $\binom{6}{3} - \binom{5}{3}$ d) $\binom{9}{6} + \binom{9}{4}$

Aufgabe A23 Wie viele verschiedene Teiler hat die natürliche Zahl n?

a) $n = 3^8 \cdot 5^{11}$

b) $n = 4000$

c) $n = 2100$

d) $n = 10^m,\ m \in \mathbb{N}$

Aufgabe A24 Gegeben ist die Gleichung $x + y + z = 14$. Je nach Geschmack, mag b) einfacher sein.

a) Wie viele Lösungen (x, y, z) hat diese Gleichung für den Fall, dass $x, y, z \in \mathbb{N}^\star$ (d.h. positive ganze Zahlen)?

b) Wie viele Lösungen hat diese Gleichung für $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ (d.h. inklusive der Null)?

21.7 Repetitionsaufgaben

Folgende Aufgaben (A25 bis A28) stammen aus dem Buch «Stochastik» der «DMK» und wurden von Andreas Meier, KSBG mit LaTeX gesetzt. Ihm sei herzlich gedankt.

Aufgabe A25 Emma und Luca gehören zu einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern. Eine Siebenergruppe darf die Klasse bei einer kulturellen Veranstaltung vertreten.

a) Wie viele verschiedene Siebenergruppen können gebildet werden?

b) In wie vielen dieser möglichen Gruppen wäre Emma dabei?

c) In wie vielen Gruppen fehlt Luca?

d) Wie viele Gruppen gibt es, zu denen sowohl Emma als auch Luca gehören?

Aufgabe A26 Es sollen mit den Buchstaben des deutschen Alphabets sechsstellige Buchstabencodes mit vier Konsonanten und zwei Vokalen erstellt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dazu, wenn die Vokale an der zweiten und fünften Position stehen sollen?

Aufgabe A27

a) Eine Klasse mit zehn Schülerinnen und zehn Schülern muss für den Halbklassenunterricht in zwei gleich grosse Gruppen aufgeteilt werden. Bei wie vielen Aufteilungen der Klasse sind in beiden Halbklassengruppen je gleich viele Schülerinnen und Schüler?

b) Die Parallelklasse hat zwölf Schülerinnen und zehn Schüler. Wie viele Aufteilungen in zwei gleich grosse Gruppen gibt es, wenn in beiden Gruppen die Anzahl Schülerinnen wie auch die Anzahl Schüler gleich gross sein soll?

Aufgabe A28 Eine Gruppe mit sieben Volleyballerinnen bezieht eine Hotelunterkunft. Es wurden zwei Doppelzimmer und ein Dreibettzimmer gebucht. Auf wie viele Arten können die reservierten Zimmer belegt werden, wenn Anja und Tanja keinesfalls im gleichen Zimmer untergebracht werden möchten? Wir gehen davon aus, dass die beiden Zweierzimmer unterscheidbar sind.

21.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-permutationen-intro

a) 123, 132, 213, 231, 312, 321. 6 Möglichkeiten.

b) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321. Total 24 Möglichkeiten.
Es gibt genausoviele Möglichkeiten. Beim Aufzählen kann man beispielsweise 1 durch 9, 2 durch 5, 3 durch 2 und 4 durch 8 ersetzen.

c) 1. Parkplatz: 10 Möglichkeiten, 2. Parkplatz 9 M. etc. Also total $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 3'628'800$ Möglichkeiten.

d) Nummer 1: n Möglichkeiten, Nummer 2, $n-1$ Möglichkeiten etc. Total $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Lösung zu A2 ex-erste-schritte-fakultaet

(a) Sie finden eine solche (um 90 Grad gedrehte) Tabelle beispielsweise auf Wikipedia: Fakultät (Mathematik) Beachten Sie, wie schnell die Fakultäten wachsen!

(b) $10! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 9}_{=9!} \cdot 10 = 362880 \cdot 10 = 3628800.$

(c) $20! = 19! \cdot 20 = 121645100408832000 \cdot 10 \cdot 2 = 1216451004088320000 \cdot 2 = 2432902008166640000$

(d) $\frac{1000!}{999!} = \frac{999! \cdot 1000}{999!} = 1000.$

(e) $\frac{100!}{98!} = \frac{98! \cdot 99 \cdot 100}{98!} = 99 \cdot 100 = 9900.$

(f) $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$

(g) $(n-1)! \cdot n = n!$

(h) Wenn man 19! berechnet, kommen unter den Faktoren 5, $10 = 2 \cdot 5$ und $15 = 3 \cdot 5$ vor (und kein anderer Faktor ist durch 5 teilbar). Der (Prim-)Faktor 5 kommt also genau dreimal vor. Der Faktor 2 kommt deutlich häuifiger vor. Also ist 19! sicherlich durch $5^3 \cdot 2^3 = 10^3$ teilbar, endet also im Dezimalsystem mit drei Nullen.

(i)
$$100! = 100 \cdot \underbrace{99}_{<100} \cdot \underbrace{98}_{<100} \cdot \cdots \cdot \underbrace{3}_{<100} \cdot \underbrace{2}_{<100} \cdot \underbrace{1}_{<100} < 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \cdots \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 100^{100}$$

Genauso zeigt man $n! > n^n$ für alle $n \leq 2$.

Lösung zu A4 ex-fakultaeten-kuerzen

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n = n^2 + n$

b) $\dfrac{(n!)^{2024}}{((n-1)!)^{2024}} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2024} = n^{2024}$

c) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n+2}{(n+1)!}$

d) $\dfrac{(n+1)!}{n!} \cdot \dfrac{1}{n+1} = (n+1) \cdot \dfrac{1}{n+1} = 1$

e) $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{n!} = 2n \cdot \dfrac{1}{n} = 2$

f) $\dfrac{2n}{n+1} \cdot \dfrac{n^2-1}{n!} = \dfrac{2n}{n+1} \cdot \dfrac{(n+1)\cdot(n-1)}{n!} = 2n \cdot \dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{2}{(n-2)!}$

Lösung zu A5 ex-permutationen-mit-wiederholung-intro

a) 9 Buchstaben, wobei das 'E' drei mal vorkommt. Wären die 'E' unterschiedlich, gäbe es 9! Wörter. Man zählt jetzt aber die Vertauschungen der 'E' mehrfach, und zwar genau 3! mal. Es gibt also total $\frac{9!}{3!} = 60'480$ Möglichkeiten.
Alternative: Wenn man zuerst alle Buchstaben abgesehen von den drei E auf die 9 Buchstabenpositionen verteilt (und diese 6 Buchstaben in beliebiger Reihenfolge durchnummeriert), hat man für den ersten Buchstaben 9 Möglichkeiten, für den zweiten 8, usw. für den sechsten 4 Möglichkeiten. Die drei freibleibenden Positionen füllt man dann mit den drei E. Dies ergibt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60'480$ Wörter.

b) 3 'A', 2 'N', 1 'S'. Wären alle Buchstaben verschieden, gäbe es 6! Möglichkeiten. Man hat aber 3! Vertauschungen der 'A' zu viel gezählt, und für jede dieser Vertauschungen 2! Vertauschen der 'N'. Es gibt also insgesamt $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$ Möglichkeiten.

c) 1. Preis, 50 Personen zur Auswahl, 2. Preis noch 49 etc. Total also $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 254'251'200$ Möglichkeiten. Alternativ kann man 45 fiktive identische Preise hinzufügen. Dann hat man 50! Möglichkeiten, hat aber 45!-fach zu viel gezählt (für die Vertauschungen der fiktiven Preise). Also $\frac{50!}{45!}$.

Lösung zu A6 ex-permutationen-mit-wiederholung-baelle-in-boxen

Mit dem Hinweis genügt es, die Anzahl der Wörter zu bestimmen, die man aus dem Wort «IIIIooo» bilden kann. Diese Anzahl ist $\frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$.

Lösung zu A7 ex-permutationen-mit-wiederholung-wege-in-gitter

Der Buchstabe R steht für «rechts» bzw. genauer für «eine Einheit nach rechts laufen».

Der Buchstabe O steht für «oben» bzw. genauer für «eine Einheit nach oben laufen».

(a) Die Anzahl der Wege ist die Anzahl der Permutationen des Wortes «RRRRRRRRRROOOOOO», und diese ist nach dem Satz

$$\frac{16!}{10!\cdot 6!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{16\cdot 14\cdot 13\cdot 11}{4} = 4\cdot 14\cdot 13\cdot 11 = 8008$$

(b) Ähnlich wie oben ist die Anzahl der Wege

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Das Zeichnen dieser 10 Wege ist dem Leser überlassen.

Lösung zu A8 ex-variationen-ohne-wiederholung

Es gibt $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$ Möglichkeiten (an ersten Position 10 Möglichkeiten, an zweiter Position 9 Möglichkeiten, an dritter Position 8 Möglichkeiten, an vierter Position 7 Möglichkeiten).

Lösung zu A9 ex-variation-mit-wiederholung

a) Für jede Position 3 Möglichkeiten, also total $3^5 = 243$.

b) Für jeden Wurf 6 Möglichkeiten, also total 6^{10} Möglichkeiten.

Lösung zu A10 ex-kombination-intro

a) Man bildet zuerst geordnete 3er-Gruppen, d.h. Variationen ohne Wiederholung. Man dividiert dann durch die Anzahl Mehrfachzählungen, also die Permutation der 3 Personen. Als Resultat: $\frac{25!}{22!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = 2300$

b) Man betrachtet wieder erst Variationen ohne Wiederholung, d.h. auf wie viele Arten kann man 3 (vorerst unterscheidbare) Köpfe auf 50 Positionen verteilen kann. Danach dividiert man wieder durch die Anzahl Mehrfachzählungen, d.h. die Anzahl Permutation von 3 Objekten. Resultat: $\frac{50!}{47!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{50!}{47! \cdot 3!} = 19600$.

Alternativlösung: Als Wörterproblem: Jede Folge von 50 Münzwürfen ist ein Wort der Länge 50 in den beiden Buchstaben K (für Kopf) und Z (für Zahl). Da Kopf dreimal vorkommen soll, betrachten wir nur die Wörter aus 3 K und 47 Z. Davon gibt es (Permutationen mit Wiederholung) $\frac{50!}{3! \cdot 47!}$.

Bei 25 Köpfen sind es total $\frac{50!}{25! \cdot 25!} = 126'410'606'437'752 \approx 1.3 \cdot 10^{14}$ Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es $2^{50} = 1'125'899'906'842'624 \approx 1.1 \cdot 10^{16}$ Möglichkeiten.

c) $\frac{36!}{27! \cdot 9!} = 94'143'280$ Möglichkeiten.

Lösung zu A14 ex-eigenschaften-binomialkoeffizient

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
Variante algebraisch: Man potenziert das Binom $(1+1)^n$ aus und erhält so die Summe aller Binomialkoeffizienten mit fixem n.
Variante kombinatorisch: Man betrachtet alle Variationen mit Wiederholung für die Besetzung von n geordneten Plätzen mit Nullen und Einsen. Davon gibt es 2^n. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele davon genau k Nullen haben (d.h. auf wie viele Arten man k Plätze für die Nullen auswählen kann). Die Summe aller dieser Möglichkeiten muss also 2^n sein.

b) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
Variante algebraisch:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Variante kombinatorisch:
Um $k+1$ Elemente aus $n+1$ auszuwählen, können wir zwei Gruppen von Kombinationen unterscheiden: Jene, die das letzte Element enthalten, und jene, die es nicht enthalten.
Für diejenigen, die das letzte Element enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen noch k Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
Für diejenigen, die das letzte Element nicht enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen $k+1$ Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k+1}$ Möglichkeiten.

c) Variante algebraisch:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.
Variante kombinatorisch:
Wählt man k Objekte aus n aus, hat man damit automatisch auch $n-k$ Objekte nicht ausgewählt. Dafür gibt es natürlich genauso viele Möglichkeiten.

Lösung zu A15 ex-kombination-mit-wiederholung
Drei gleiche Farben: RRR, GGG, BBB
Zwei gleiche Farben: RRG, RRB, GGR, GGB, BBR, BBG
Unterschiedliche Farben: RGB
Total 10 Möglichkeiten.

Lösung zu A17 ex-varohne-telefonnummern

a) Für die erste Ziffer gibt es 8 Möglichkeiten, für die restlichen sechs Ziffern jeweils 10 Möglichkeiten: $8 \cdot 10^6 = 8'000'000$.

b) $7! - 1 = 5039$

c) $\frac{7!}{3!\cdot 3!} - 1 = 139$ («Minus Eins», denn es ist nach den **anderen** Telefonnummern gefragt, die 523 46 87 zählt also nicht mit.)

d) Man berechne, in vielen Nummern keine und in wie vielen Nummern genau eine 1 vorkommt und ziehe dies von der Anzahl aller möglichen Nummern ab: $8'000'000 - \underbrace{8\cdot 9^6}_{\text{keine Eins}} - \underbrace{8\cdot 6\cdot 9^5}_{\text{genau eine Eins}} = 914'120$.

Erklärung zu «genau eine Eins»: Da die Eins nicht an der ersten Position stehen darf, gibt es 8 Möglichkeiten für die erste Ziffer; es gibt 6 Positionen, an denen man die 1 platzieren kann; für jede der restlichen 5 Positionen gibt es je 9 mögliche Ziffern.

Lösung zu A18 ex-combohne-wege-im-gitternetz

a) $\binom{37}{14} = 6'107'086'800$

b) $\binom{48}{9} = 1'677'106'640$

c) Ein kürzester Weg von $O(0|0)$ nach $P(x, y)$ besteht aus x horizontalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach rechts gehen und y vertikalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach oben verlaufen. Wenn ein nach rechts verlaufener horizontaler Abschnitt mit H bezeichnet wird und ein vertikal nach oben mit V, kann ein kürzester Weg wie folgt codiert werden: HHVVVHVH...VHVHH.

Dieser Weg führt also zuerst zwei Schritte nach rechts, dann drei Schnitte nach oben, dann nach rechts, wieder nach oben usw. Das Zeichen H kommt in dieser Zeichenkette x-mal vor, das Zeichen V genau y-mal. Da ein solcher Weg aus total $x + y$ Abschnitten besteht, wird sein Code aus $x + y$ Zeichen gebildet.

Ein solcher Weg-Code ist eine Kombination, denn er ist bestimmt, sobald wir wissen an welchen der $x+y$ möglichen Positionen im Code das Symbol H steht. Für H müssen x Stellen aus den $x + y$ möglichen Positionen ausgewählt werden, was auf exakt $\binom{x+y}{x}$ Arten möglich ist: $\binom{x+y}{x} = \frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}$.

d) Die Anzahl Wege über Z ist $\binom{11}{5}\cdot\binom{26}{8} = 721'771'050$.

Lösung zu A19 ex-komb-komitee

$\binom{17}{5} = \frac{17!}{5!\cdot 12!} = 6188$

Lösung zu A20 ex-perm-varohne-zieleinlaeufe

a) $12! = 479'001'600$

b) $\frac{12!}{2!} = 239'500'800$

Lösung zu A21 ex-combohne-altes-ch-lotto

Die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle.

a) $\binom{45}{6} = 8'145'600 \qquad P = \frac{1}{8'145'600} \approx 0.000\,01\,\%$

b) Es müssen k Zahlen aus den sechs gezogenen Zahlen und $(6 - k)$ Zahlen aus den restlichen 39 Zahlen gezogen werden:

$$\begin{array}{lll}
n=0 & \binom{39}{6}\cdot\binom{6}{0} = 3'262'623 & P = \frac{3'262'623}{8'145'600} \approx 40.1\,\% \\
n=1 & \binom{39}{5}\cdot\binom{6}{1} = 3'454'542 & P = \frac{3'454'542}{8'145'600} \approx 42.4\,\% \\
n=2 & \binom{39}{4}\cdot\binom{6}{2} = 1'233'765 & P = \frac{1'233'765}{8'145'600} \approx 15.1\,\% \\
n=3 & \binom{39}{3}\cdot\binom{6}{3} = 182'780 & P = \frac{182'780}{8'145'600} \approx 2.2\,\% \\
n=4 & \binom{39}{2}\cdot\binom{6}{4} = 11'115 & P = \frac{11'115}{8'145'600} \approx 0.14\,\% \\
n=5 & \binom{39}{1}\cdot\binom{6}{5} = 234 & P = \frac{234}{8'145'600} \approx 0.003\,\%
\end{array}$$

c) $P = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{2}{15} \approx 13.33\,\%$. Das Resultat bleibt gleich.

Lösung zu A22 ex-binoialkoeffizienten-zusammenfassen
Für diese Aufgaben werden die bereits bewiesenen Formeln (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und (ii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ benötigt.

a) (ii): $\binom{7}{3} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$
b) (i): $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ und mit (ii): $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$
c) Mit (ii): $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$ gilt $\binom{6}{3} - \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$
d) Mit (ii): $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$ gilt $\binom{9}{6} + \binom{9}{4} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5} = \binom{10}{6}$

Lösung zu A23 ex-varmit-anzahl-teiler

a) Jeder Teiler von $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ hat die Form $3^a \cdot 5^b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq 8$, $b \leq 11$. a kann somit $(8+1)$ verschiedene Werte annehmen, b kann $(11+1)$ verschiedene Werte annehmen. Somit besitzt die Zahl $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ genau $(8+1) \cdot (11+1) = 108$ unterschiedliche natürliche Teiler.
b) $4000 = 2^5 \cdot 5^3$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(5+1) \cdot (3+1) = 24$.
c) $2100 = 7 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 36$.
d) $10^m = 2^m \cdot 5^m$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(m+1)^2$

Lösung zu A24 ex-anzahl-natuerliche-loesungen-einer-gleichung

a) Wenn in $1+1+ ... +1 = 14$ zwei der dreizehn Pluszeichen „gelöscht“ werden, erhalten wir eine mögliche Lösung. Daraus folgt die Anzahl Lösungen insgesamt: $\binom{13}{2} = 78$.
Alternativ: Wenn man $x = x' + 1$ und $y = y' + 1$ und $z = z' + 1$ schreibt, sind x', y' und $z' \in \mathbb{N}$ (inklusive Null) gesucht mit $x' + y' + z' = 11$. Dazu wähle man aus 13 Boxen 2 aus. Dann ist x' die Anzahl der Boxen vor der linken gewählten Box, y die Anzahl der Boxen zwischen den beiden gewählten Boxen, und z' die Anzahl der Boxen nach der rechten gewählten Box. (Genauso kann man Teilaufgabe b) lösen.)
b) Werden bei einer Reihe von vierzehn 1 zwei Trennstriche eingefügt, können Lösungen in $\mathbb{N}_0$ dargestellt werden. Auf sechzehn Plätze werden also zwei Trennstriche eingefügt: $\binom{16}{2} = 120$.

Lösung zu A25 ex-comb-schuelerauswaehlen-mit-bedingungen

a) $\binom{24}{7} = 346'104$
b) Wenn Emma dabei ist, müssen noch sechs Mitglieder aus den verbleibenden 23 ausgewählt werden: $\binom{23}{6} = 100'947$.
c) Wenn Luca nicht dabei sein soll, stehen nur 23 Personen zur Auswahl: $\binom{23}{7} = 245'157$.
d) Luca und Emma sind dabei, es müssen noch fünf gewählt werden: $\binom{22}{5} = 26'334$.

Lösung zu A26 ex-varohne-woerter-mit-bedingungen
Es gibt 21 Konsonanten und 5 Vokale, die auf die Plätze zu verteilen sind: $21 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 = 4'862'025$.

Lösung zu A27 ex-combohne-mit-bedingungen-halbklassen-bilden

a) Wähle fünf aus zehn Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = \binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = 63'504$.
b) Wähle sechs aus zwölf Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = \binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = 232'848$.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu A28 ex-comb-personen-in-zimmer-verteilen

Es wird davon ausgegangen, dass die beiden Zweierzimmer unterscheidbar sind.

Ohne Einschränkungen gibt es $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = P_7(2,2,3) = 210$ mögliche Zimmerbelegungen (Multiplikation der Möglichkeiten, das erste Zweierzimmer, das zweite Zweierzimmer und dann das Dreierzimmer zu belegen.

Sind Anja und Tanja beide im ersten Zweierzimmer, gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 10$ mögliche Zimmerbelegungen. Sind die beiden im zweiten Zweierzimmer, gibt es ebenfalls 10 Möglichkeiten.

Sind die beiden im Dreierzimmer gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 30$ mögliche Belegenungen. Somit gibt es total $210 - 20 - 30 = 160$ mögliche Zimmerbelegungen, in denen Anja und Tanja nicht im gleichen Zimmer schlafen.