I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

20 Integralrechnung

20.0.1. Bisher können wir den Flächeninhalt von Dreiecken und von Kreisen ausrechnen und somit auch den Flächeninhalt von Figuren, die auf einfache Weise aus diesen beiden Grundfiguren entstehen (etwa von Parallelogrammen oder Kreissektoren).

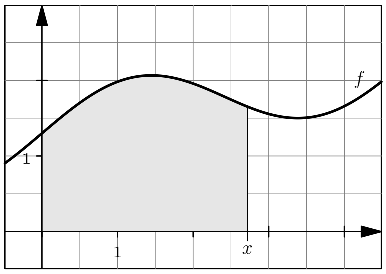
Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung des Flächeninhalts von Flächen, die durch möglicherweise gebogene Linien begrenzt werden.

20.1 Motivation

20.1.1. Im folgenden sei f eine Funktion. Wir setzen voraus, dass f stetig ist. Dies bedeutet anschaulich, dass man den Graphen von f ohne Abzusetzen zeichnen kann.

Wir möchten gerne die graue Fläche in der Skizze berechnen, d. h. den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von 0 bis x; hierbei ist x eine reelle Zahl, die wir uns variabel vorstellen. Wir nennen diesen Flächeninhalt

$$I(x) = \text{Flächeninhalt der grauen Fläche}$$



Beispiele 20.1.2. Berechnung einiger Beispiele (an der Tafel, mit Skizzen und Erklärungen):

- konstante Funktionen, d. h. $f(x) = q$ für eine beliebige, aber fixierte reelle Zahl q. Dann gilt $I(x) = qx$.
- Ursprungsgeraden, d. h. $f(x) = mx$. Dann gilt $I(x) = \frac{1}{2}mx^2$.
- beliebige nicht vertikale Gerade/lineare Funktion, d. h. $f(x) = mx + q$. Dann gilt $I(x) = \frac{1}{2}mx^2 + qx$.
- quadratische Funktionen, z. B. $f(x) = x^2$.
  Erstmal nicht so klar, was $I(x)$ ist, denn die Fläche unter der Parabel hat einen «gebogene Seite».

20.1.3. Wir fassen die Ergebnisse, ergänzt um konkrete Beispiele mit Zahlenwerten, aus dem obigen Beispiel in einer Tabelle zusammen:

$f(x)$	q	7	1	mx	x	$2x$	$mx+q$	$2x+1$	x^2
$I(x)$	qx	$7x$	x	$\frac{1}{2}mx^2$	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$\frac{1}{2}mx^2+qx$	x^2+x	?

Was fällt in der Tabelle auf? Welche Beziehung zwischen $f(x)$ und $I(x)$ könnte man vermuten?

Satz 20.1.4

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $I(x)$ ist $f(x)$, in Formeln

$$I'(x) = f(x)$$

Im Sinne der unten folgenden Definition 20.1.5 ist also $I(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis. siehe Tafelanschrieb bzw. Abschnitt A.3 □

Definition 20.1.5

Eine **Stammfunktion** einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = 0$.

Aufgabe A1 Füllen Sie die folgende Tabelle aus. In der ersten Zeile steht eine Funktion $f(x)$, in der zweiten eine Stammfunktion von $f(x)$ und in der dritten eine andere Stammfunktion von $f(x)$.

Funktion $f(x)$	x^2	x^3	1	2	0	e^x	$\frac{1}{x}$	
Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$								x^7
andere Stammfunktion $G(x)$ von $f(x)$								

Merke 20.1.6 Eindeutigkeit von Stammfunktionen

Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei beliebige Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$, so unterscheiden sich $F(x)$ und $G(x)$ nur um eine Konstante (= eine fixierte reelle Zahl), d. h. es gibt eine reelle Zahl c mit

$$F(x) = G(x) + c$$

Beweis. Betrachte die Differenz $d(x) := F(x) - G(x)$ der beiden Stammfunktionen. Die Ableitung dieser Funktion ist

$$d'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Wenn die Ableitung einer Funktion 0 ist (d. h. alle Tangenten an den Graphen horizontal verlaufen), muss die Funktion konstant sein. Also ist $d(x)$ eine konstante Funktion, d. h. es gibt eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $d(x) = c$. Es folgt

$$F(x) = G(x) + d(x) = G(x) + c$$

□

Folgerung 20.1.7 Berechnung der Flächeninhaltsfunktion

Wie oben sei $f(x)$ stetige eine Funktion und $I(x)$ die zugehörige Flächeninhaltsfunktion (von der wir bereits wissen, dass sie eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, siehe Satz 20.1.4).
Ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$I(x) = F(x) - F(0)$$

Beweis. Sowohl $I(x)$ als auch $F(x)$ sind Stammfunktionen von $f(x)$. Nach Merke 20.1.6 unterscheiden sie sich nur um eine Konstante, d. h. es gibt eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit

$$I(x) = F(x) + c$$

Beachte, dass $I(0) = 0$ gilt. Damit folgt $0 = I(0) = F(0) + c$, also $c = -F(0)$ und damit wie gewünscht

$$I(x) = F(x) + c = F(x) - F(0)$$

□

Beispiel 20.1.8. An Tafel erklärt, wie man mit dieser Folgerung den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse von 0 bis 10 berechnet.

Aufgabe A2 Bestimmen Sie mit Hilfe von Folgerung 20.1.7 den Inhalt der folgenden Flächen (im Unterricht Flächen an Tafel gemalt):

(a) Die Fläche unter $f(x) = x^3$ von 0 bis 10.
(b) Die Fläche unter $f(x) = x^2$ von 1 bis 3.
(c) Die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ von 0 bis 1.
(d) Die Fläche zwischen x-Achse und $f(x) = -x^2$ von 0 bis 3. Was fällt Ihnen auf?

20.2 Neue bzw. übliche Schreibweisen

Definition 20.2.1 Bestimmtes Integral

Seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen und sei $f(x)$ eine stetige, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Dann nennt man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \begin{pmatrix}\text{Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von } f(x) \text{ und} \\ \text{der } x\text{-Achse über dem Intervall } [a,b]\text{. Dabei werden} \\ \text{Flächen unter der } x\text{-Achse negativ gezählt.}\end{pmatrix}$$

das **bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ von a bis b.**
Sprechweise: «Integral von a bis b über $f(x)\,\mathrm{d}x$»
Man nennt a die **untere** und b die **obere Integrationsgrenze** und x die **Integrationsvariable**.
Das Zeichen $\int$ heisst Integralzeichen und ist ein stilisiertes «S» für *Summe*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ steht symbolisch für eine Rechteck mit Höhe $f(x)$ und «infinitesimal» kleiner Breite $\mathrm{d}x$. (Eventuell Skizze ergänzen.)

20.2.2. An Stelle von x kann man eine beliebige andere (noch nicht anderweitig benutzte) Variable als Integrationsvariable verwenden, etwa t, d. h.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

20.2.3. Die Funktion $I(x)$, die wir bisher verwendet haben, schreibt sich nun wie folgt.

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Die beiden wichtigen obigen Resultate, Satz 20.1.4 und Folgerung 20.1.7, können nun mit Hilfe von Integralen formuliert werden. Statt mit 0 als unterer Integrationsgrenze verwenden wir nun a als untere Integrationsgrenze. Alle oben erklären Argumente kann man leicht in dieses Setting übertragen und wir erhalten:

Satz 20.2.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(1) Berechnung bestimmter Integrale: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Def.}}{=} F(b) - F(a)$$

(2) Fasst man die obere Grenze eines bestimmten Integals als variabel auf, so definiert dies eine Funktion

$$I(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Diese Funktion ist eine Stammfunktion von $f(x)$, d. h. es gilt

$$I'(x) = f(x)$$

Aufgabe A3 Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Satz 20.2.4; Formelsammlung erlaubt):

Beispiel: $\int_1^{10} x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6}\Big|_1^{10} = \frac{1000000}{6} - \frac{1}{6} = \frac{999999}{6}$.

a) $\displaystyle\int_1^6 2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^6 2x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^4 (4-x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^8 x^3\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_0^3 4\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_1^6 2-\sin(x)\,\mathrm{d}x$ l) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe A4

(a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Parabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $\ell(x) = 2$. (Mit einer Skizze sollte klar sein, welche Fläche gemeint ist.)

(b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Parabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $\ell(x) = \frac{1}{2}x + 2$. (Ohne Taschenrechner ist dies relativ aufwändig.) deutlich einfacher: und der Geraden $\ell(x) = x + 6$ (ohne TR).

(c) Bestimmen Sie die reelle Zahl q so, dass die Fläche zwischen der Parabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $\ell(x) = q$ genau 9 beträgt.

Aufgabe A5

Bestimme $q \in \mathbb{R}$ so, dass $\int_0^1 x^2 + q\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

Aufgabe A6

Berechnen Sie vollständig von Hand die eingeschlossene Fläche zwischen den Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -5x^2 + 3x + 26$ b) $f(x) = -2x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 3x + 31$

c) $f(x) = -x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 2x + 19$ d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 - 5x + 7$

Definition 20.2.5

Wir haben bisher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nur definiert, falls $a \le b$ gilt.
Wir definieren nun im Fall $a > b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

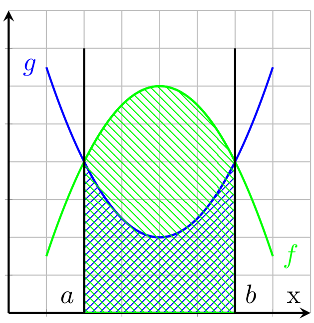
Diese Definition ist so gemacht, dass die oben erklärte Berechnung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Def.}}{=} F(b) - F(a)$$

weiterhin stimmt. Denn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(F(a) - F(b)) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$.

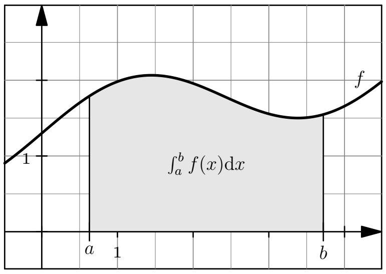
Merke 20.2.6 Regeln für das bestimmte Integral

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- Wenn $f(x) \ge g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist die eingeschlossene Fläche zwischen f und g gleich $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b r \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = r \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}$.



20.3 Einige hoffentlich hilfreiche Zeichnungen und Erinnerungen

20.3.1. Erinnerung:

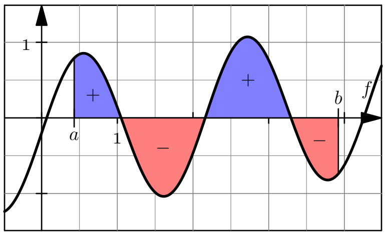


Das «Integral von a bis b über $f(x)\,\mathrm{d}x$», geschrieben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

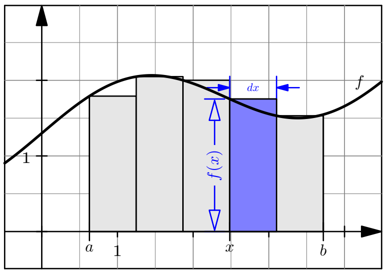
ist per Definition die graue Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von a bis b.

20.3.2. Dabei ist die Fläche vorzeichenbehaftet:



Flächen unter der x-Achse werden negativ gezählt. In der Zeichnung rechts werden die blauen Flächen positiv, die roten Flächen negativ gezählt.

20.3.3. Näherungsweise Berechnung von Integralen



Wenn man Integrale näherungsweise ausrechnen möchte (etwa mit dem Computer), kann man die zu bestimmende Fläche, wie in der Zeichnung rechts angedeutet, durch (gleich breite) Rechtecke annähern. Je schmaler man die Rechtecke wählt, desto genauer berechnet man das Integral.

Die Zeichnung rechts erklärt zusätzlich die Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Das blau hervorgehobene Rechteck hat die Fläche $f(x)\ \mathrm{d}x$, wenn man seine Breite wie in der Skizze als $\mathrm{d}x$ bezeichnet. Das Integralzeichen $\int$ ist ein abstrahiertes S für «Summe» und deutet an, dass man alle Rechtecksfläche aufsummiert.

Statt $\mathrm{d}x$ wäre wohl Δx besser, denn $\mathrm{d}x$ ist erst das «infinitesimale Δx».

20.4 Unbestimmtes Integral (= alternative Bezeichnung für eine Stammfunktion)

Definition 20.4.1 Unbestimmtes Integral

Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ wird auch als **unbestimmtes Integral** von $f(x)$ bezeichnet und wie folgt als «Integral mit nicht angegebenen (d. h. unbestimmten) Integrationsgrenzen» geschrieben:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sehr verbreitet ist die auch die folgende etwas unpräzie Schreibweise:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Sie bedeutet: Die Funktion $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$, und wenn man zu $F(x)$ eine beliebige reelle Zahl C addiert, so erhält man alle Stammfunktionen von $f(x)$. Man bezeichnet C als **Integrationskonstante**.

Beispiele 20.4.2.

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C \qquad \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1} + C$$

Diese Schreibweisen bedeuten nur, dass $\frac{1}{4}x^4$ als Ableitung x^3 hat, dass die Ableitung von $\ln(x)$ die Funktion $\frac{1}{x}$ ist und dass die Ableitung von $-x^{-1}$ die Funktion x^{-2} ist.

20.4.3. Man mag sich fragen, warum man statt $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ nicht gleichbedeutend $F'(x) = f(x)$ schreibt. Ich vermute, dass das Vorteil darin besteht, dass man die Integrationsgrenzen nachträglich ergänzen kann und so Integrale konkret ausrechnen kann:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (F(x)+C)\Big|_a^b \overset{\text{Definition des «Rechtsstrichs»}}{=} F(b) - C - (F(a) - C) = F(b) - F(a)$$

Aufgabe A7 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale (d. h. finden Sie die zugehörigen Stammfunktionen = «Anti-Ableitungen»). Geben Sie das Ergebnis in der in Definition 20.4.1 erklärten Form mit Integrationskonstante an.

Ohne TR zu lösen. Nach den Sommerferien darf die Formelsammlung verwendet werden, sonst nicht.

a) $\int 5\,\mathrm{d}x$

b) $\int 1\,\mathrm{d}x$

c) $\int x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^3 - 2x^7\,\mathrm{d}x$

e) $\int x^{-3} - 2x^{-7}\,\mathrm{d}x$

f) $\int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int x^{-\frac{5}{7}}\,\mathrm{d}x$

h) $\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

i) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

k) $\int (1+x)^2\,\mathrm{d}x$

l) ⚙ $\int \big(2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$ (Produktregel)

Aufgabe A8 Berechnen Sie von Hand:

a) $\int_{-2}^{3} \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$

b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x)\right)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-\ln(3)}^{\ln(5)} \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

d) $\int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int_1^4 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

f) ⚙ $\int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Kettenregel

Aufgabe A9 Überprüfen Sie:

a) $\int x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\cdot \mathrm{e}^x + C$

b) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$

c) $\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

d) $\int (\sin(x))^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\cos(x))^3 - \cos(x) + C$

Aufgabe A10 Berechnen Sie die Fläche des Einheitskreises wie folgt.

a) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, deren Graph die obere Hälfte des Einheitskreises ist. Hinweis: Pythagoras.

b) Mit Hilfe des Taschenrechners: Bestimmen Sie die Fläche unter $f(x)$ und damit die Einheitskreisfläche. (Wer mag, kann sich auch vom Taschenrechner eine Stammfunktion von $f(x)$ anzeigen lassen.)

c) Neu: Berechnen Sie nun in ähnlicher Weise die Fläche des Kreises mit Radius r.

Aufgabe A11 Berechnen Sie die durch die Graphen folgender Funktionen eingeschlossene Fläche. Erstellen Sie erst eine Skizze.

a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ (Flächenstück, das die y-Achse schneidet).

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

20.5 Volumen von Rotationskörpern

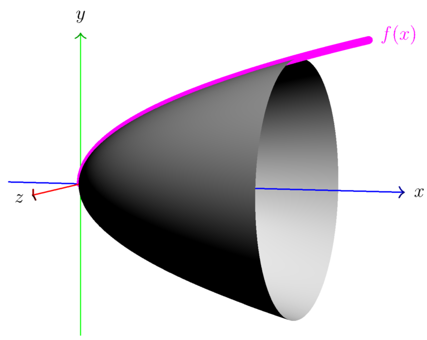
Definition 20.5.1 Rotationsfläche/-körper

Wenn man den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ um die x-Achse dreht, erhält man eine **Rotationsfläche**.

Betrachtet man eine solche Rotationsfläche samt ihrem «Inneren», so spricht man von einem **Rotationskörper**.

In der Zeichung rechts ist nur die Rotationsfläche dargestellt. Den Rotationskörper erhält man durch «Auffüllen des Inneren».

In der Zeichnung sind die Koordinatenachsen in anderer Reihenfolge beschriftet als in der Vektorgeometrie üblich. Dort zeicht die x-Achse auf den Betrachter, die z-Achse nach oben.



Satz 20.5.2 Volumen eines Rotationskörpers per «disc integration»

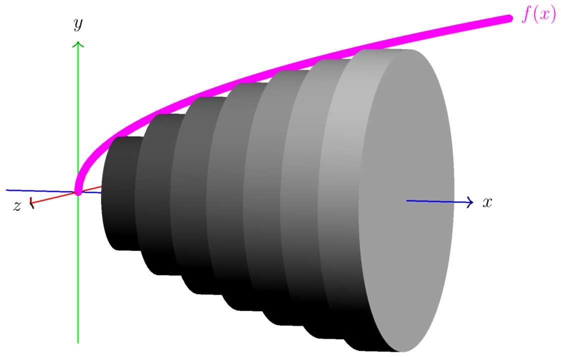
Das Volumen V des Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

Beweis. (kein mathematisch strenger Beweis, aber Plausibilitätsargument, vermutlich zusätzlich an Tafel erklärt.)

Das übliche Integral kann man sich näherungsweise als Summe von Rechtecksflächen der Höhe $f(x)$ und der Breite $\mathrm{d}x$ vorstellen, wobei x die x-Koordinaten der linken Seiten der Rechtecke durchläuft, siehe 20.3.3.

Die Fläche eines Rotationskörpers kann man sich ähnlich näherungsweise als Summe von Zylindervolumina vorstellen, wie in der Zeichnung rechts ersichtlich. Wenn x die x-Koordinate der linken Seite eines solchen Zylinders ist, so hat der zugehörige Zylinder den Radius $f(x)$ und die Breite $\mathrm{d}x$, also die Grundfläche $\pi \cdot \text{Radius}^2 = \pi \cdot f(x)^2$ und somit das Volumen $\pi \cdot f(x)^2 \cdot \mathrm{d}x$. Dies macht die obige Formel hoffentlich plausibel.



□

Beispiel 20.5.3. Die in den obigen Zeichnungen dargestelle Funktion ist $f(x) = \sqrt{x}$. Wenn man ihren Graphen zwischen $a = 0$ und $b = 10$ um die x-Achse rotiert, so hat der erhaltene Rotationskörper (eine Art «Blumentopf») das Volumen

$$V = \pi \int_5^{10} (\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_5^{10} x \,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right)\Big|_5^{10} = \pi \left(\frac{10^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right) = (50 - 12.5) \cdot \pi = 37.5 \cdot \pi \approx 117.81$$

20.5.4. Die folgenden Aufgaben erklären einige Formeln in der Formelsammlung.

Aufgabe A12

(a) Bestimmen Sie das Volumen der Einheitskugel (als Rotationskörper).
Hinweis: Welche Kurve/welcher Graph ist zu rotieren? Welche Funktion hat diesen Graphen?

(b) Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius r.

Aufgabe A13 Wer lieber mit Parametern als konkreten Zahlen rechnet, löse zuerst Teilaufgabe (b).

(a) Mit konkreten Zahlen: Bestimmen Sie das Volumen eines (geraden) Kreiskegels der Höhe $h = 7$ mit Radius $r = 2$ des Grundkreises.

«Gerade Kreiskegel» bedeutet, dass die Grundfläche ein Kreis ist und sich die Spitze des Kegels senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises befindet.

Hinweis: Welche Kurve/welcher Graph ist zu rotieren? Welche Funktion hat diesen Graphen?

(b) Mit Parametern: Bestimmen Sie das Volumen eines geraden Kreiskegels mit Höhe h und Grundkreisradius r.

Aufgabe A14 Schneidet man von einem (geraden) Kreiskegel die Spitze mit Hilfe eines zur Grundfläche parallelen Schnitts ab, so entsteht ein sogenannter **Kegelstumpf**. Die durch den Schnitt neu entstandene Kreisfläche nennt man meist **Deckfläche**.

Wer lieber mit Parametern als konkreten Zahlen rechnet, löse zuerst Teilaufgabe (b).

(a) Ein Kegelstumpf hat Höhe $h = 8$, Grundflächenradius $R = 5$ und Deckflächenradius $r = 3$. Bestimmen Sie sein Volumen.
Hinweis: Welche Kurve/welcher Graph ist zu rotieren? Welche Funktion hat diesen Graphen?

(b) Bestimmen Sie das Volumen eines Kegelstumpfs mit Höhe h, Grundflächenradius R und Deckflächenradius r.

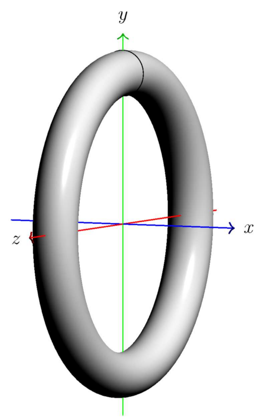
(c) Suchen Sie ein Trinkglas (oder eine Vase o. ä.), das ungefähr die Form eines Kegelstumpfs hat.
- Vermessen Sie Ihr Gefäss und berechnen Sie sein Volumen mit der Formel aus Teilaufgabe (b) (oder indem Sie Teilaufgabe (a) mit Ihren Werten lösen).
- Füllen Sie Ihr Gefäss mit Wasser und bestimmen Sie sein Volumen mit Hilfe eines Messbechers.
- Liegen Messwert und berechneter Wert nahe beisammen? Wenn nicht: Finden Sie den/die Fehler.

Aufgabe A15 Taschenrechner erlaubt.

Ein Torus (wie z. B. ein Veloschlauch mit kreisförmigem Querschnitt oder ein «Donut» oder ein Rettungsring) wird durch zwei Grössen R und r charakterisiert:
- die Entfernung R vom Schlauchmittelpunkt zum Radmittelpunkt (= Achse);
- den Radius r des Schlauchs (= halbe Breite des Schlauchs).

Berechnen Sie das Volumen des Torus (wer mag, kann auch erst konkrete Werte verwenden statt der Parameter r und R).

Hinweis: Stellen Sie das Volumen als Differenz zweier Rotationskörper dar.



Aufgabe A16 Wenn man eine Kugel durch einen geraden Schnitt in zwei Teile teilt, entstehen zwei Kugelsegmente. Beispiel: Wenn man die Erdkugel entlang eines Breitenkreises zerschneidet, erhält man zwei Kugelsegmente.

Ein Kugelsegment einer Kugel mit Radius r hat die Höhe h. In einer Formelsammlung steht, dass ein solches Kugelsegment das Volumen $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)$ hat. Bestätigen Sie diese Formel rechnerisch!

20.6 Physikalische Anwendungen

Aufgabe A17 In dieser Aufgabe wollen wir die aus der Physik bekannten Formeln für die gleichmässig beschleunigte Bewegung herleiten.

Wir betrachten die Funktionen $s(t)$ (Position in Abhängigkeit von der Zeit t), $v(t)$ (Geschwindigkeit) und $a(t)$ (Beschleunigung). Allgemein gelten $v'(t) = a(t)$ und $s'(t) = v(t)$ (dies wurde früher erklärt).

Da wir eine gleichmässig beschleunigte Bewegung betrachten, ist $a(t) = a_0$ konstant, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl ist (für den freien Fall gilt beispielsweise $a = 9.81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$).

Bestimmen Sie $v(t)$ und $s(t)$ und beschreiben Sie die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten.

Bemerkung: Die Gleichung $s'(t) = v(t)$ bedeutet, dass s eine Stammfunktion von v ist. Diese Aussage kann man auch als $\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t)$ schreiben. Anschaulich ist der zurückgelegte Weg die Fläche unter dem Graphen von v.

Analog kann man $v'(t) = a(t)$ als $\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t)$ schreiben.

Aufgabe A18 Beschleunigung von Fahrzeugen: Ein Sportwagen beschleunigt in 3 s gleichmässig von $v = 0\,[\text{m/s}]$ auf $v = 24\,[\text{m/s}]$. Welche Wegstrecke legt er währenddessen zurück?

Aufgabe A19 Freier Fall: Eine Bleikugel wird von einem Turm der Höhe h fallengelassen. Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf dem Boden auf?

Berechnen Sie die Aufprallgeschwindigkeit (in km/h) konkret

- für den schiefen Turm von Pisa, der 55.8 m hoch ist;
- für einen Zehn-Meter-Turm im Freibad.

Annahme: Der Luftwiderstand spielt keine Rolle. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9.81\,[\text{m/s}^2]$.

Differentialgleichungen

20.6.1. Die folgenden Aufgaben bieten eine erste Begegnung mit Differentialgleichungen, die zur Beschreibung der meisten physikalischen Phänomene von entscheidender Bedeutung sind.

Aufgabe A20 Ein Massepunkt mit der Masse m ist an einer idealen, linearen Feder befestigt, d.h. einer Feder mit Federkonstante k, deren Kraft F proportional zur Auslenkung s ist, d.h. $F = -k \cdot s$. Warum das negative Vorzeichen?

Ziel ist es, eine Funktion $s(t)$ zu bestimmen, die die Position des Punktes zu jedem Zeitpunkt t angibt.

Nach dem ersten Newtonschen Gesetz gilt $F = m \cdot a$ bzw. zeitabhängig $F(t) = m \cdot a(t)$, wobei $a(t)$ die Beschleunigung ist. Wie immer ist letztere die zweite Ableitung der Position, d. h. $a(t) = s''(t)$.

Die obige Gleichung $F = -k \cdot s$ zeitabhängig geschrieben lautet $F(t) = -k \cdot s(t)$.

All dies zusammengenommen erhalten wir

$$m \cdot s''(t) = m \cdot a(t) = F(t) = -k \cdot s(t)$$

Wir suchen also eine Funktion $s(t)$, für die gilt:

$$m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t).$$

(Solch eine Gleichung, in der eine Funktion samt Ableitungen (= Differentialen) auftaucht, nennt man eine Differentialgleichung.)

a) Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -s(t)$ gilt.

b) Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -c^2 \cdot s(t)$ gilt, mit $c \in \mathbb{R}^+$. Welche physikalische Interpretation hat c?

c) Finden Sie nun eine Funktion, für die oben hergeleitete Bedingung $m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t)$ erfüllt. Interpretieren Sie den Einfluss der Grössen k und m auf die Lösung.

Aufgabe A21 Wir betrachten eine Bakterien-Kultur in einer Nährschale. Sei $N(t)$ die Anzahl Bakterien zum Zeitpunkt t. Am Anfang kann davon ausgegangen werden, dass die Wachstumsrate $N'(t)$ (= Änderung der Anzahl zur Zeit t) proportional zur Anzahl Bakterien ist. Die Proportionalitätskonstante sei c und ist gegeben, z.B. durch die Art der Bakterien und Umgebungsbedingungen. Es gilt also die (Differential-)Gleichung

$$N'(t) = c \cdot N(t) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}^+.$$

a) Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$, für die $N'(t) = N(t)$ gilt.

b) Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$, für die $N'(t) = c \cdot N(t)$ gilt.

c) Welche weitere Grösse muss z. B. noch bekannt sein, damit die Funktion $N(t)$ eindeutig bestimmt ist?

Aufgabe A22 Eine Tasse Tee kühlt bei 0°C Umgebungstemperatur ab. Sei $T(t)$ die Temperatur des Tees zum Zeitpunkt t. Die Abkühlrate ist proportional zu $T(t)$. (Je heisser der Tee, desto grösser ist die momentane Abkühlrate.) Sei c die entsprechende Proportionalitätskonstante. Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf (d. h. eine Gleichung, die $T(t)$ und $T'(t)$ enthält) und finden Sie deren Lösungen.

20.7 Standard-Aufgaben

Aufgabe A23 Mit Hilfe des TR, skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen für Werte zwischen 0 und 2:

$f(x) = \sqrt{1-(1-x)^2}, \quad g(x) = -3\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{2}}}.$

Spiegelt man die beiden Graphen an der y-Achse, erhält man eine geschlossene Figur. Berechnen Sie die Fläche dieser Figur.

Aufgabe A24 Ziel ist es, eine «schöne» Vase zu entwerfen. Diese soll als Rotationskörper eines Funktionsgraphen einer Funktion $f(x)$ konzipiert werden. Der Graph soll durch die Punkte $(0,1)$ und $(6,2)$ gehen. Die Steigungen der Tangenten in diesen Punkten sollen beide 1 sein. Damit haben wir vier Bedingungen, nämlich $f(0)=1$, $f(6)=2$, $f'(0)=1$ und $f'(6)=1$.

Als Ansatz sei $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ eine kubische Funktion. Bestimmen Sie die vier Koeffizienten mit Hilfe obiger Bedingungen.

Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie dann die Oberfläche und das Volumen der so entstehenden Vase. Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie mit einem ähnlich grossen Zylinder vergleichen.

20.8 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A25 Rotiert man den Graphen von $f(x)=\sqrt{x}$ zwischen $x=1$ und $x=4$ um die x-Achse, so erhält man einen rotationssymmetrischen Blumentopf. Erstellen Sie eine Skizze. Berechnen Sie das Volumen des Blumentopfs. Machen Sie eine Plausibilitätsprüfung Ihres Resultats, indem Sie das Volumen eines einfacheren, ähnlich grossen Körpers berechnen.

Aufgabe A26 Eine Bahn beschleunigt aus dem Stillstand. Während der ersten 10 s nimmt die Beschleunigung linear von $0\,\mathrm{m/s^2}$ auf $2\,\mathrm{m/s^2}$ zu, während der nächsten 10 s nimmt die Beschleunigung wieder linear auf $0\,\mathrm{m/s^2}$ ab.

a) Skizzieren Sie die Beschleunigung als Funktion der Zeit $a(t)$.
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm von $a(t)$.
c) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und skizzieren Sie diese.
d) Berechnen Sie die Positionsfunktion $s(t)$ und skizzieren Sie diese.
e) Wie schnell ist die Bahn nach 20 s und welche Strecke wurde dabei zurückgelegt?

Aufgabe A27 Ein Pistenfahrzeug baut eine Schneeschanze in der Form eines Sinuskurvenstücks («halbe Sinuskurve», sie startet und endet unten). Die Schanze beginnt mit horizontaler Tangente bei $x=0$ [m] und endet bei $x=20$ [m] mit ebenfalls horizontaler Tangente. Die Schanze erreicht an der höchsten Stelle eine Höhe von $h=2$ [m]. Die Breite der Schanze beträgt 5 [m]. Berechnen Sie das Volumen der Schanze und schätzen Sie das Gewicht der Schanze ab.

Zusatzfrage*: Wie schnell muss man über die Schanze fahren, um abzuheben? *Berechnen Sie dazu die quadratische Funktion, deren Graph die Position eines Massepunkts im freien Fall beschreibt, wenn er mit einer horizontalen Geschwindigkeit v der Schwerkraft überlassen wird. Man hebt ab, wenn die zweite Ableitung kleiner oder gleich der 2. Ableitung der Schanzenkurve im höchsten Punkt ist.*

Aufgabe A28 Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) E eines Massepunktes ist proportional zu seiner Masse m und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit und genauer durch $E=\frac{1}{2}mv^2$ gegeben.

Wir nehmen an, dass ein Elektromotor eine konstante Leistung (Energie pro Zeit) liefert. Wie nimmt damit die kinetische Energie in der Zeit zu? Welche Art von Funktion ist $E(t)$ sein?

Wenn vom Stillstand zur Zeit $t=0$ mit einer konstanten Leistung beschleunigt wird, welche Form hat die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$?

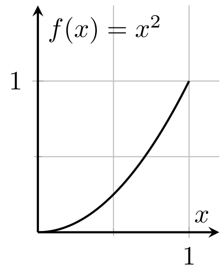
Welche Form hat also die Beschleunigungsfunktion $a(t)$? Was bedeutet das für das Fahrgefühl zum Zeitpunkt $t=0$?

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Aussagen aus Internet-Videos zum Beschleunigungsrekord eines bekannten Elektroautos.

A Zusatzmaterial und einige Beweise

A.1 Längen von Graphen

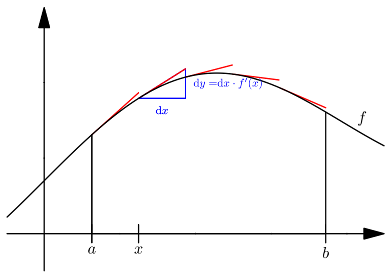
Aufgabe A29 Wie lang ist der Parabelbogen der Funktion $f(x) = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$?
Diese Länge (auch Bogenlänge genannt) ergibt sich als unendliche Summe aus «unendlich vielen infinitesimal kleinen» Bogenstückchen. Beispielhaft betrachten wir ein Stückchen bei einem bestimmten x-Wert (zur Veranschaulichung $x = 0.5$). Das $\mathrm{d}x$ zeichnen wir als Kathete im Stützdreieck in Übergrösse 0.5, das Bogenstückchen wird zu einem Abschnitt auf der Tangente. Berechnen Sie die Länge dieses Tangentenabschnitts. Formen Sie dann so um, dass $\mathrm{d}x$ ein Faktor ist und integrieren Sie dann diesen Ausdruck.



Merke A.1.1 Länge eines Funktionsgraphen/Kurvenlänge

Die Länge L einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$



A.2 Mantelfläche(ninhalt) einer Rotationsfläche

Aufgabe A30 Ziel ist es, die Oberfläche der Einheitskugel zu bestimmen.

Dazu zerschneiden wir die Kugeloberfläche mit Ebenen senkrecht zur x-Achse. Die entstehenden «schiefen Ringe» betrachten wir (per Aufschneiden und Abrollen) näherungsweise als Rechtecke, deren Länge der Ringumfang ist und deren Breite die Ringbreite ist (= Länge des Funktionsgraphen). Diese Rechtecksflächen werden aufsummiert, um die Kugeloberfläche zu erhalten.

Merke A.2.1 Flächeninhalt einer Rotationsfläche

Die Fläche der Rotationsfläche, die man erhält, wenn man den Graphen einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$O = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Möchte man die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers berechnen, muss man noch die Flächen der beiden «Randkreise» addieren, d. h. $\pi \cdot (f(a)^2 + f(b)^2)$.

Aufgabe A31 Im Setting von Aufgabe A15: Berechnen Sie die Oberfläche des Torus (= des Fahrradschlauchs = des Donuts = des Rettungsrings).

A.3 Beweis von Satz 20.1.4

Beweis. Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h}$$

Der Zähler $I(x+h) - I(x)$ des Differenzenquotienten ist der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f zwischen x und $x+h$. Wir nehmen hierbei an, dass $h > 0$ gilt.

Diese Fläche ist grösser als die Rechtecksfläche $f_{\min} \cdot h$ und kleiner als die Rechtecksfläche $f_{\max} \cdot h$, wobei $f_{\min}$ das Minimum von f im Intervall $[x, x+h]$ ist und $f_{\max}$ das entsprechende Maximum (bitt Zeichnung erstellen, damit dies klar wird). Es gilt also

$$f_{\min} \cdot h \leq I(x+h) - I(x) \leq f_{\max} \cdot h$$

Division dieser Gleichung durch $h > 0$ liefert.

$$f_{\min} \leq \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \leq f_{\max}$$

Bilden wir über den Limes für $h \to 0$ (welcher «Kleiner-Gleich-Ungleichheiten» erhält), so erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} f_{\min} \leq \lim_{h\to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f_{\max}$$

Beachte, dass $f_{\min}$ und $f_{\max}$ von h abhängen. Da f stetig ist, sind die Limiten rechts und links beide $f(x)$. Der Limes in der Mitte ist per Definition $I'(x)$. Also erhalten wir

$$f(x) \leq I'(x) \leq f(x)$$

Dies bedeutet $I'(x) = f(x)$ wie gewünscht. $\square$

A.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-stammfunktion-finden

Funktion $f(x)$	x^2	x^3	1	2	0	e^x	$\frac{1}{x}$	$7x^6$
Stammfunktion $F(x)$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	x	$2x$	0	e^x	$\ln(x)$	x^7
andere Stammfunktion $G(x)$	$\frac{1}{3}x^3+42$	$\frac{1}{4}x^4-42$	$x+100$	$2x+\sqrt{3}$	$\frac{1}{7}$	e^x-1	$\ln(x)+2$	x^7+10

In der zweiten und dritten Zeile gibt es jeweils unendlich viele Lösungen, die sich aber nur um eine konstante Zahl unterscheiden.

Lösung zu A2 ex-inhalt-bestimmen

(a) Die Fläche unter $f(x) = x^3$ von 0 bis 10.
Eine Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$. Damit ergibt sich

$$I(10) = F(10) - F(0) = 2'500$$

Bemerkung: Wenn $G(x)$ eine beliebige andere Stammfunktion ist, so gilt $G(x) = F(x) + c = \frac{1}{4}x^4 + c$ für eine reelle Zahl c und man erhält dasselbe Ergebnis:

$$I(10) = G(10) - G(0) = F(10) + c - (F(0) + c)) = F(10) + c - F(0) - c = F(10) - F(0) = 2'500$$

(b) Die Fläche unter $f(x) = x^2$ von 1 bis 3.
Eine Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
Die Fläche unter $f(x) = x^2$ von 0 bis 1 ist

$$I(1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

Die Fläche unter $f(x) = x^2$ von 0 bis 3 ist

$$I(3) = F(3) - F(0) = 9$$

Die gesuchte Fläche ist die Differenz dieser beiden Flächen, also

$$I(3) - I(1) = 9 - \frac{1}{3}$$

(c) Die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ von 0 bis 1.
Im Bereich von 0 bis 1 gilt $x^3 \leq x^2$.
Die Fläche unter $f(x) = x^2$ von 0 bis 1 ist (unter Verwendung der Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$)

$$I(1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

Die Fläche unter $g(x) = x^3$ von 0 bis 1 ist (unter Verwendung der Stammfunktion $G(x) = \frac{1}{4}x^4$)

$$J(1) = G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$$

Die gesuchte Fläche ist die Differenz dieser beiden Flächen, also

$$I(1) - J(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

(d) Die Fläche zwischen x-Achse und $f(x) = -x^2$ von 0 bis 3. Was fällt Ihnen auf?
Eine Stammfunktion ist $F(x) = -\frac{1}{3}x^3$. Damit ergibt sich

$$I(3) = F(3) - F(0) = -9$$

Die Fläche ist negativ!

Lösung zu A3 ex-bestimmte-integrale-drill

a) $\displaystyle\int_1^6 2\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^6 = 2\cdot 6 - 2\cdot 1 = 10$

b) $\displaystyle\int_1^6 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^6 = 6^2 - 1^2 = 35$

c) $\displaystyle\int_1^4 (4-x)\,\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^4 = (16-8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

d) $\displaystyle\int_0^8 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^8 = \frac{1}{4}8^4 = 2^{10} = 1024$

e) $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-3}^3 = \frac{1}{3}\cdot(27) - \frac{1}{3}\cdot(-27) = 18$

f) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^2 - 1$

g) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$ (da $\ln(1) = 0$)

h) $\displaystyle\int_0^3 4\,\mathrm{d}x = 4x\Big|_0^3 = 12 - 0 = 12$

i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

k) $\displaystyle\int_1^6 2 - \sin(x)\,\mathrm{d}x = (2x + \cos(x))\Big|_1^6 = (12 + \cos(6)) - (2 + \cos(1)) = 10 + \cos(6) - \cos(1)$

l) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{-3}^3 = \cos(3) - \cos(-3) = \cos(3) - \cos(3) = 0$

Lösung zu A4 ex-bestimmte-integrale-drill-2

(a) Wegen $f(\pm\sqrt{2}) = 2$ ist von $-\sqrt{2}$ bis $\sqrt{2}$ zu integrieren. (Ausführlich löst man die Gleichung $f(x) = \ell(x)$, also $x^2 = 2$, und erhält $x = \pm\sqrt{2}$.)

Die gesuchte Fläche ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} &= 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \left(2(-\sqrt{2}) - \frac{(-\sqrt{2})^3}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \\
&= 4\sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}^3}{3} \\
&= 4\sqrt{2} - 4\frac{\sqrt{2}}{3} \\
&= 4\sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{8}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(b) Lösung der vereinfachten «roten Aufgabe» (die Lösung der ursprünglichen schwarzen Aufgabe folgt danach).
Man berechnet zuerst die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade, indem man $f(x) = \ell(x)$ löst:

$$\begin{aligned}
x^2 &= x + 6 \\
x^2 - x - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man entweder per Mitternachtsformel lösen:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

oder, indem man die linke Seite faktorisiert: Man erhält $(x+2)(x-3) = 0$, was genau dann stimmt, wenn einer der Faktoren Null ist, wenn als $x + 2 = 0$ oder $x - 3 = 0$, d. h. $x = -2$ oder $x = 3$.
Die beiden Lösungen sind also $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$
Zwischen x_1 und x_2 verläuft die Gerade unterhalb der Parabel. Die gesuchte Fläche ist also

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} x + 6 - x^2 \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 9 + 6\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 27\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 4 + 6\cdot(-2) - \frac{1}{3}\cdot(-8)\right) \\
&= \frac{9}{2} + 18 - 9 - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3} \\
&= \frac{9}{2} + 19 - \frac{8}{3} \\
&= 19 + \frac{27}{6} - \frac{16}{6} \\
&= 19 + \frac{11}{6} = 20 + \frac{5}{6} = \frac{125}{6} = 20.8\overline{3}
\end{aligned}$$

Lösung der «schwarzen Aufgabe» (die Lösung geht im Prinzip genauso, jedoch muss man mit schwierigern Ausdrücken rechnen): Man berechnet zuerst die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade,

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

indem man $f(x) = \ell(x)$ löst:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{1}{2}x + 2 \\
x^2 - \frac{1}{2}x - 2 &= 0 \\
2x^2 - x - 4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}
\end{aligned}$$

Sei x_1 die kleinere dieser beiden Zahlen (also der Ausdruck mit dem Minuszeichen). Zwischen x_1 und x_2 verläuft die Gerade unterhalb der Parabel. Die gesuchte Fläche ist also

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}x + 2 - x^2 \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{33}}{4}}^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{1+\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)^3\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{1-\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{4}\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{4^3}\cdot\left(\left(1+2\sqrt{33}+33\right) - \left(1-2\sqrt{33}+33\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left(\left(1+\sqrt{33}\right) - \left(1-\sqrt{33}\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{3\cdot 4^3}\cdot\left(\left(1+3\sqrt{33}+3\cdot 33+33\sqrt{33}\right) - \left(1-3\sqrt{33}+3\cdot 33-33\sqrt{33}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4^3}\cdot 4\sqrt{33} + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{33} - \frac{1}{3\cdot 4^3}\cdot\left(6\sqrt{33}+66\sqrt{33}\right) \\
&= \frac{1}{4^2}\cdot\sqrt{33} + \sqrt{33} - \frac{1}{4^2}\cdot 6\sqrt{33} \\
&= \frac{1}{4^2}\cdot\left(\sqrt{33} + 16\cdot\sqrt{33} - 6\sqrt{33}\right) \\
&= \frac{11}{16}\cdot\sqrt{33} \approx 3.94
\end{aligned}$$

(c) Man berechnet zuerst die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade, indem man $f(x) = \ell(x)$ löst:

$$\begin{aligned}
x^2 &= q \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{q}
\end{aligned}$$

Genauer: Für $q < 0$ gibt es keine Lösung, für $q = 0$ gibt es eine Lösung, für $q > 0$ gibt es zwei Lösungen. Die Fläche in Abhängigkeit von $q \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{q}}^{\sqrt{q}} q - x^2 \,\mathrm{d}x &= \left(qx - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-\sqrt{q}}^{\sqrt{q}} \\
&= \left(q\sqrt{q} - \frac{1}{3}q\sqrt{q}\right) - \left(-q\sqrt{q} + \frac{1}{3}q\sqrt{q}\right) \\
&= 2q\sqrt{q} - \frac{2}{3}q\sqrt{q} \\
&= \frac{4}{3}q\sqrt{q}
\end{aligned}$$

Dieser Flächeninhalt soll 9 sein. Also ist die folgenden Gleichung zu lösen.

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}q\sqrt{q} &= 9\\ \frac{16}{9}q^3 &= 81\\ q^3 &= \frac{9^3}{2^3\cdot 2}\\ q &= \sqrt[3]{\frac{9^3}{2^3\cdot 2}} = \frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Lösung zu A5 ex-parabel-verschieben-so-dass-flaeche-null

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2+q\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{3}x^3+qx\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{3}+q\end{aligned}$$

Dies soll laut Aufgabenstellung Null sein, d. h. es soll $\frac{1}{3}+q=0$ gelten. Auflösen nach q liefert $q=-\frac{1}{3}$.

Lösung zu A6 ex-flaeche-zwischen-parabeln

a) hoffentlich sind nun alle Schreibfehler in der Lösung korrigiert...

- Integrationsgrenzen bestimmen, d. h. x-Koordinaten der Schnittpunkte bestimmen:
  $f(x)=g(x)$, bzw. $f(x)-g(x)=0$.
  $f(x)-g(x)=-2x^2-3x+2-\left(-5x^2+3x+26\right)=3x^2-6x-24=0$
  Lösungen entweder per Mitternachtsformel (dem Leser überlassen) oder per Faktorisieren:
  $3\cdot\left(x^2-2x-8\right)=0$, also $3\cdot(x+2)(x-4)=0$, also $x=-2$ oder $x=4$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -8 und Summe -2).
- Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist (eventuell bis auf Vorzeichen, da wir nicht geprüft haben, ob f oder g zwischen den Integrationsgrenzen oberhalb liegt; man beachte, dass wir $f(x)-g(x)$ oben bereits ausgerechnet haben)

$$\begin{aligned}\pm\text{Fläche} &= \int_{-2}^4 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int_{-2}^4\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x = 3\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right)\Big|_{-2}^4\\ &= 3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64-16-8\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-8)-4-8\cdot(-2)\right)\right) = 3\cdot\left(\left(\frac{64}{3}-16-32\right)-\left(-\frac{8}{3}-4+16\right)\right)\\ &= 3\cdot\left(\left(\frac{64}{3}-\frac{48}{3}-\frac{96}{3}\right)-\left(-\frac{8}{3}-\frac{12}{3}+\frac{48}{3}\right)\right) = 3\cdot\left(-\frac{80}{3}-\frac{28}{3}\right) = -80-28=-108\end{aligned}$$

Da das Ergebnis negativ ist hätten wir $\int(g-f)$ statt $\int(f-g)$ ausrechnen müssen. Die Fläche ist also $\int(g-f)=-\int(f-g)=108$.

Wer will, kann auch bei einem Testwert zwischen den Integrationsgrenzen prüfen, ob f oder g «oberhalb» verläuft: Die Zahl 0 liegt etwa zwischen den Integrationsgrenzen -2 und 4. Wegen $f(0)=2$ und $g(0)=26$ liegt g zwischen den Integrationsgrenzen oberhalb. Also muss man $\int(g-f)$ ausrechnen.

b) Achtung, die Lösung enthält einige Vorzeichenfehler und auch sonstige Fehler. Das Endergebnis sollte aber stimmen.
Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.
$g(x) - f(x) = -2x^2 - x + 1 - \left(-4x^2 + 3x + 31\right) = -2x^2 + 4x + 30 = 0$
$-2 \cdot \left(x^2 - 2x - 15\right) = 0$, also $-2 \cdot (x+3)(x-5) = 0$, also $x = -3$ oder $x = 5$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -15 und Summe -2).
Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.
Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist $\displaystyle\int_{-3}^{5} -2 \cdot (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -2 \cdot \int_{-3}^{5} \left(x^2 - 2x - 15\right)\mathrm{d}x =$
$-2 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x\right)\Big|_{-3}^{5} = -2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 125 - \cdot 25 - 15 \cdot 5\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-27) - \cdot 9 - 15 \cdot (-3)\right)\right) =$
$-2 \cdot \left(\left(\frac{125}{3} - 25 - 75\right) - (-9 - 9 + 45)\right) = -2 \cdot \left(\left(\frac{125}{3} - \frac{75}{3} - \frac{225}{3}\right) - (-9 - 9 + 45)\right) = -2 \cdot \left(-\frac{175}{3} - 27\right) =$
$-2 \cdot -\frac{256}{3} = \frac{512}{3}$

c) Achtung, die Lösung enthält einige Vorzeichenfehler und auch sonstige Fehler. Das Endergebnis sollte aber stimmen.
Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.
$g(x) - f(x) = -x^2 - x + 1 - \left(-4x^2 + 2x + 19\right) = -3x^2 + 3x + 18 = 0$
$-3 \cdot \left(x^2 - x - 6\right) = 0$, also $-3 \cdot (x+2)(x-3) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 3$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -6 und Summe -1).
Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.
Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist $\displaystyle\int_{-2}^{3} -3 \cdot (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -3 \cdot \int_{-2}^{3} \left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{d}x =$
$-3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_{-2}^{3} = -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-8) - \frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot (-2)\right)\right) =$
$-3 \cdot \left(\left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right)\right) = -3 \cdot \left(\left(\frac{18}{2} - \frac{9}{2} - \frac{36}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{6}{3} + \frac{36}{3}\right)\right) = -3 \cdot \left(-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right) =$
$-3 \cdot -\frac{125}{6} = \frac{125}{2}$

d) Achtung, die Lösung enthält einige Vorzeichenfehler und auch sonstige Fehler. Das Endergebnis sollte aber stimmen.
Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.
$g(x) - f(x) = 2x^2 - 2x + 1 - \left(-x^2 - 5x + 7\right) = -3x^2 - 3x + 6 = 0$
$-3 \cdot \left(x^2 + x - 2\right) = 0$, also $-3 \cdot (x+2)(x-1) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 1$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -2 und Summe 1).
Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.
Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist $\displaystyle\int_{-2}^{1} -3 \cdot (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -3 \cdot \int_{-2}^{1} \left(x^2 + x - 2\right)\mathrm{d}x =$
$-3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-8) + \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot (-2)\right)\right) =$
$-3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right)\right) = -3 \cdot \left(\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6}\right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12}{3}\right)\right) = -3 \cdot \left(-\frac{7}{6} - \frac{10}{3}\right) =$
$-3 \cdot -\frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

Lösung zu A7 ex-repe-stammfunktionen-bestimmen

a) $\displaystyle\int 5\,\mathrm{d}x = 5x + C$

b) $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$

c) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$

d) $\displaystyle\int x^3 - 2x^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{8}x^8 + C$

e) $\int x^{-3} - 2x^{-7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2}x^{-2} - 2 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{x^{-6}}{3} + C$

f) $\int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

g) $\int x^{-\frac{5}{7}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{2}{7}}x^{\frac{2}{7}} + C = \frac{7}{2}x^{\frac{2}{7}} + C$

h) $\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln(x) - x^{-1} + C = \ln(x) - \frac{1}{x} + C$

i) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$

j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

k) $\int (1+x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + 2x + x^2\right)\mathrm{d}x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

l) $\int \left(2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)\right)\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) + C$ (Hat die Form $f'g + fg'$).

Lösung zu A8 ex-repe-bestimmte-integrale

a) $\int_{-2}^{3} \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)\Big|_{-2}^{3} = \left(-3 + \frac{27}{2} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{8}{9} + 6 + 1\right) = 9 - \frac{71}{9} = \frac{10}{9}$

b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x)\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{3}\sin(x)\right)\Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \left(0 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{5}{6}$

c) $\int_{-\ln(3)}^{\ln(5)} \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cdot (\mathrm{e}^x)\Big|_{-\ln(3)}^{\ln(5)} = \sqrt{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\ln(5)} - \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(5 - \left(\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)^{-1}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}\sqrt{2}$

d) $\int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 4\ln(x)\Big|_1^{\mathrm{e}^4} = 4 \cdot (4 - 0) = 16$

e) $\int_1^4 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_1^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left(-x^{-1}\right)\Big|_1^4 = -2 \cdot (\frac{1}{4} - 1) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

f) $\int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \sin(x^2)\Big|_0^1 = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1)$ (*Hat die Form* $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.)

Lösung zu A9 ex-repe-komplizierte-integrale-ueberpruefen

Man leitet die Stammfunktion ab und muss den Integranden (das im Integral) erhalten.

a) $((x-1) \cdot \mathrm{e}^x + C)' = (x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C)' = \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x \cdot \mathrm{e}^x$

b) $(x\ln(x) - x + C)' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

c)

$$\left(\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C\right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2 + C\right)' = \frac{1}{2}\left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x = x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x \cdot \ln(x)$$

d)

$$\left(\frac{1}{3}(\cos(x))^3 - \cos(x) + C\right)' = \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x)) + \sin(x) = (1-\sin(x)^2)\cdot(-\sin(x)) + \sin(x) = -\sin(x) + \sin(x)^3 - \sin(x) = \sin(x)^3$$

Man verwendet $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Lösung zu A10 ex-kreisflaeche

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (via Satz von Pythagoras).

b) $A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (via TR). Also ist die Einheitskreisfläche π.

Lösung zu A11 ex-repe-flaeche-zwischen-kurve

a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$. Man stellt fest, dass beide Funktionen bei $\pm\frac{\pi}{2}$ Nullstellen haben. Die Fläche beträgt also

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) - x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(\sin(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi^2}{4}x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} - \left(-1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8}\right) = 2 + \frac{\pi^3}{6}$$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$. Die Cosinus- und Sinuswerte sind gleich bei $45° = \frac{\pi}{4}$ oder $-135° = -\frac{3\pi}{4}$ (plus Vielfache von $360° = 2\pi$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x))\,\mathrm{d}x = (\sin(x) + \cos(x))\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Die Schnittpunkte sind bei $x = 0$ und $x = 1$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0-0) = \frac{1}{3}$$

Lösung zu A12 ex-volumen-kugel

(a)

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x = \ldots = \frac{4}{3}\pi$$

(b)

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x = \ldots = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Lösung zu A13 ex-volumen-kegel

(a) Ersetze in der Lösung der folgenden Teilaufgabe $h = 7$ und $r = 2$.

(b)

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\ldots=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

Lösung zu A14 ex-volumen-kegelstumpf

(a) Setzen Sie die gegebenen Werte in die Lösung der folgenden Teilaufgabe ein.

(b) **Erste Lösungmöglichkeit:** Rotiert wird der Graph der Geraden $\ell(x)$, die bei 0 den Wert r hat und bei h den Wert R. (Rotiert wird natürlich nur der Teil zwischen $a=0$ und $b=h$.)
Ansatz: $\ell(x)=mx+q$.
Es sollen gelten: $\ell(0)=r$ und $\ell(h)=R$.
Die erste Gleichung bedeutet $m\cdot 0+q=r$, liefert also $q=r$.
Die zweite Gleichung bedeutet $mh+q=R$ bzw., da $q=r$ bereits bekannt ist, $mh+r=R$, was nach m aufgelöst $m=\frac{R-r}{h}$ bedeutet.
Damit ist der zu rotierende Graph $\ell(x)=\frac{R-r}{h}x+r$.
Damit berechnet man

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^h\left(r+\frac{R-r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x && \text{Binomische Formel bzw. Ausmultiplizieren}\\
&=\pi\int_0^h r^2+2\cdot r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot x+\frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x && \text{Hauptsatz}\\
&=\pi\left(r^2\cdot x+2\cdot r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h\\
&=\pi\left(r^2\cdot h+2\cdot r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}-(0+0+0)\right)\\
&=\pi\left(r^2\cdot h+r\cdot(R-r)\cdot h+(R-r)^2\frac{h}{3}\right)\\
&=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(3r^2\cdot h+3r\cdot(R-r)\cdot h+(R-r)^2\cdot h\right)\\
&=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(3r^2\cdot h+3rRh-3r^2h+(R^2-2Rr+r^2)\cdot h\right)\\
&=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(3r^2+3rR-3r^2+R^2-2Rr+r^2\right)\\
&=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rR+R^2)
\end{aligned}$$

Zweite Lösungsmöglichkeit: Man kann auch eine Ursprungsgerade $\ell(x)=mx$ rotieren; dann muss man aber überlegen, zwischen welchen Grenzen der Graph zu rotieren ist.
Die Steigung ist offentischtlich $\frac{R-r}{h}$ (denn der Radius steigt von r auf R auf der Höhe h), es gilt also $\ell(x)=\frac{R-r}{h}\cdot x$.
Gesucht sind nun die Integrationsgrenzen. Die linke Grenze a soll $\ell(a)=r$ erfüllen, d. h. $\frac{R-r}{h}\cdot a=r$, was $a=\frac{rh}{R-r}$ liefert.
Die rechte Grenze ist dann $b=a+h=\frac{rh}{R-r}+h=\frac{rh+h(R-r)}{R-r}=\frac{Rh}{R-r}$. Wer mag, kann auch $\ell(b)=R$ nach b auflösen und erhält dasselbe Resultat.

Nun können wir das Volumen berechnen:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (\ell(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_a^b \left(\frac{R-r}{h} \cdot x\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_a^b \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_a^b \\
&= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{rh}{R-r}}^{\frac{Rh}{R-r}} \\
&= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{R^3h^3}{(R-r)^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3h^3}{(R-r)^3}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R^3h}{R-r} - \frac{r^3h}{R-r}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{R^3-r^3}{R-r} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{(R-r)(R^2+rR+r^2)}{R-r} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2+rR+r^2)
\end{aligned}$$

(c) Dem Leser überlassen.

Lösung zu A15 ex-volumen-torus

Einen Torus mit Radien R und r erhält man, wenn man den Kreis mit Radius r und Zentrum $(0, R)$ um die x-Achse rotiert.

Der obere Halbkreis ist der Graph der Funktion

$$f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

Der untere Halbkreis ist der Graph der Funktion

$$g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Das Volumen des Torus ist dann

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} \left(R^2 + 2R\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2)\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2-x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Taschenrechner}}{=} 4R\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2
\end{aligned}$$

Beachten Sie die Schönheit des Ergebnisses: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnitssfläche des Schlauches. Ein Torus hat also das gleiche Volumen wie ein Zylinder mit gleicher Grundfläche, dessen Höhe so gross ist wie der Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.

Man kann das Ergebnis natürlich auch als $V = 2\pi^2 Rr^2$ schreiben, jedoch ist dann obige Interpretation nicht mehr offensichtlich.

Lösung zu A16 ex-volumen-kugelsegment

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{r-h}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{r-h}^{r} r^2 - x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{r-h}^{r} \\
&= \pi \left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3}\right)\right) \\
&= \pi \left(r^3 - r^2(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right) \\
&= \pi \left(r^2 h + \frac{1}{3}\left(-3r^2 h + 3rh^2 - h^3\right)\right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}\left(3rh^2 - h^3\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)
\end{aligned}
$$

Lösung zu A17 ex-gleichmaessig-beschleunigt-formeln-herleiten

Da $v(t)$ eine Stammfunktion von $a(t) = a$ ist, muss $v(t) = at + C$ gelten (wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist). Wenn man $t = 0$ einsetzt, erhält man $v(0) = C$, d. h. C ist die Anfangsgeschwindigkeit (zum Zeitpunkt $t = 0$), die man in der Regel als $C = v_0$ notiert. Wir erhalten die bekannte Formel

$$v(t) = at + v_0$$

Da $s(t)$ eine Stammfunktion von $v(t) = at + v_0$ ist, muss $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C'$ gelten, wobei $C' \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wegen $s(0) = C'$ ist C' die Anfangsposition, die man normalerweise als $C' = s_0$ notiert. Wir erhalten die bekannt Formel

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

In der Physik lernt man die obigen Formeln in der Regel zuerst ohne Integrationskonstanten, d. h. man lernt die Formeln $v(t) = at$ und $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

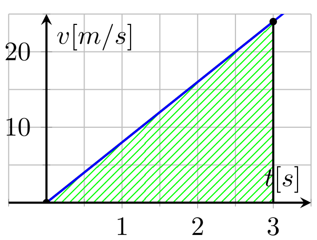
Lösung zu A18 ex-acceleration-distance

Allgemein gilt $v(t) = at + v_0$ bei gleichmässiger Beschleunigung (mit konstanter Beschleunigung a), vgl. Aufgabe A17).

Wegen $v(0) = 0\,[\mathrm{m/s}]$ muss $v_0 = 0$ gelten, d. h. $v(t) = at$. Wegen $v(3) = 24\,[\mathrm{m/s}]$ folgt $3a = 24$, d. h. die konstante Beschleunigung ist $a = 8\,[\mathrm{m/s}^2]$ (pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um $8\,[\mathrm{m/s}]$ zu.

Wegen $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 = \frac{1}{2}at^2$ (da $s_0 = 0$) gilt $s(3) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3^2 = 36 = 36[m]$. Damit legt der Sportwagen eine Strecke von $36\,\mathrm{m}$ zurück

Anschauung: Das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm ist rechts dargestellt, die blaue Gerade ist der Graph von $v(t) = 8t$. Die Fläche unter dem blauen Graphen ist der zurückgelegte Weg



$$s(t) = \int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 8t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2} \cdot 8t^2\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot 83^2 - 0 = 36$$

Lösung zu A19 ex-freier-fall

Formel für die Position $s(t)=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}gt^2$ (Nullpunkt ist bei der Turmspitze, die Achse zeigt nach unten.

Gesucht ist zunächst t, so dass $s(t)=h$ gilt, denn dann ist die Kugel am Boden. Auflösen nach t der Gleichung $\frac{1}{2}gt^2=h$ liefert $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt beträgt $v(t)=gt=g\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2gh}$.

- Schiefer Turm von Pisa: Die Aufprallgeschwindigkeit ist

$$\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 55.8}\approx 33.09\,\mathrm{m/s}=3.6\cdot 33.09\,\mathrm{km/h}\approx 119.1\,\mathrm{km/h}$$

- 10-Meter-Turm

$$\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 10}\approx 14\,\mathrm{m/s}=3.6\cdot 14\,\mathrm{km/h}=50.4\,\mathrm{km/h}$$

Lösung zu A20 ex-federpendel

Die Kraft zieht in der entgegengesetzten Richtung wie die Auslenkung.

a) $s(t)=\sin(t)$ oder $s(t)=\cos(t)$ und Vielfache und Summen davon erfüllen die Bedingung.

b) $s(t)=\sin(ct)$ oder $s(t)=\cos(ct)$ und Vielfache und Summen davon erfüllen die Bedingung.
~~Die Konstante c ist proportional zur Frequenz, welche gleich $2\pi\cdot c$ ist.~~
Die Periodenlänge T erfüllt $cT=2\pi$, d. h. $T=\frac{2\pi}{c}$. Also ist die Frequenz $f=\frac{1}{T}=\frac{c}{2\pi}$ proportional zu c.

c) Die Gleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$s''(t)=-\underbrace{\frac{k}{m}}_{=c^2}\cdot s(t)$$

Also erfüllt z.B. $s(t)=\sin(ct)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$ die Bedingung. Die Frequenz steigt mit der Federkonstante k (je härter die Feder, desto höher die Frequenz) und fällt mit der Masse m (je grösser die Masse, desto kleiner die Frequez, d. h. desto langsamer die Schwingung).

Lösung zu A21 ex-exponentielles-wachstum

a) Die Funktion $N(t)=\mathrm{e}^t$ hat diese Eigenschaft, aber auch jedes reelle Vielfache dieser Funktion, d. h. $N(t)=N_0\cdot\mathrm{e}^t$ mit $N_0\in\mathbb{R}$.
Der folgende nette Trick zeigt, dass dies alle Funktionen sind, die die gegebene Differentialgleichung lösen. Sei $N(t)$ eine Lösung. Betrachte nun die Funktion $g(t)=N(t)\cdot e^{-t}$. Ableiten von $g(t)$ liefert

$$g'(t)\overset{\text{Produktregel}}{=}N'(t)\cdot e^{-t}+N(t)\cdot e^{-t}\cdot(-1)\overset{N'(t)=N(t)}{=}N(t)e^{-t}-N(t)e^{-t}=0$$

Also muss $g(t)$ konstant sein, d. h. $g(t)=N_0$ für eine reelle Zahl N_0. Also gilt $g(t)=N(t)\cdot e^{-t}=N_0$. Daraus folgt

$$N(t)=N(t)\cdot 1=N(t)\cdot e^{-t+t}=N(t)\cdot e^{-t}\cdot e^t=N_0\cdot e^t$$

Also hat $N(t)$ die behauptete Form.

b) Die Funktion $N(t)=\mathrm{e}^{c\cdot t}$ hat diese Eigenschaft, wie auch jedes reelle Vielfache davon, z. B. $N(t)=N_0\cdot\mathrm{e}^{c\cdot t}$ mit $N_0\in\mathbb{R}$.
Eine Variation des obigen Tricks zeigt, dass dies alle Möglichkeiten sind.

c) Wenn neben der Wachstumsrate c auch die Anzahl der Bakterien N_0 zur Zeit $t=0$ gegeben ist, ist $N(t)=N_0\cdot e^{ct}$ die einzige Lösung.

Lösung zu A22 ex-abkuehlen

Abkühlrate ist das c-fache der Temperatur $T(t)$, mit $c\in\mathbb{R}^+$:

$$T'(t)=-cT(t)$$

Eigentlich wäre es sinnvoller, die Abkühlrate mit einem negativen Vorzeichen zu versehen, die Gleichung ist so aber sprechender.

Betrachtet man erst $T'(t) = -T(t)$ findet man z.B. $T(t) = \mathrm{e}^{-t}$ als Lösung.

Eine Lösung ist $T(t) = \mathrm{e}^{-ct}$, die allgemeine Lösung ist $T(t) = T_0 \cdot \mathrm{e}^{-ct}$, wobei $T_0 \in \mathbb{R}$ die Anfangstemperatur (zur Zeit $t = 0$) ist.

Lösung zu A23 ex-herzflaeche

$$2 \cdot \int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^2 \left(\sqrt{1-(1-x)^2} + 3\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)\mathrm{d}x = \pi + \frac{32}{5} \approx 4.771$$

Wobei π der Fläche der beiden Halbkreise über der x-Achse entspricht und $\frac{32}{5}$ der Fläche unter der x-Achse.

Lösung zu A24 ex-vase

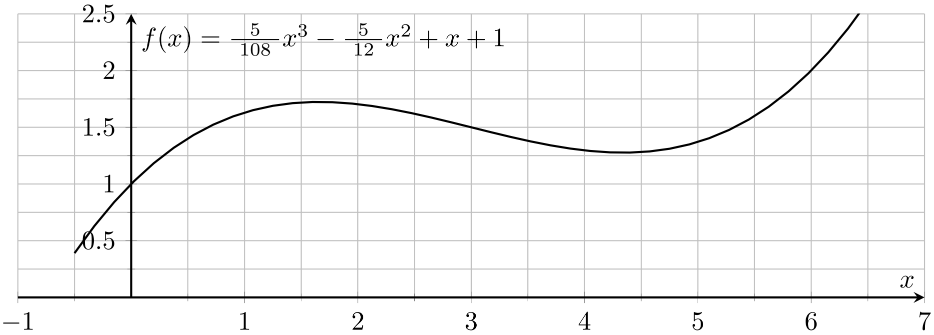
Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 & d &= 1\\
f(6) &= 2 & 216a + 36b + 6c + d &= 2\\
f'(0) &= 1 & c &= 1\\
f'(6) &= 1 & 108a + 12b + c &= 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $a = \frac{5}{108}$, $b = -\frac{5}{12}$, $c = 1$ und $d = 1$ und damit

$$f(x) = \frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1.$$

Hinweis: Definieren $f(x)$ im TR für die weiteren Berechnungen.



Das Volumen erhält man mit folgendem Integral:

$$\int_0^6 \pi (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^6 \pi\left(\frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{96}{7} \approx 43.08$$

Plausibilitäts-Check: Ein Zylinder mit Radius 1.5 und Höhe 6 hat ein Volumen von $\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 \approx 42.41$.

Die Oberfläche erhält man mit folgendem Integral:

$$\int_0^6 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^6 \left(\frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{5}{36}x^2 - \frac{5}{6}x + 1\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx 60.79$$

Plausibilitäts-Check: Ein Zylinder mit Radius 1.5 und Höhe 6 hat eine Mantelfläche von $2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 18\pi \approx 56.54$.

Lösung zu A25 ex-repe-rotationsvolumen

$$V = \pi\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 \sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{15}{2}\pi \approx 23.56$$

Der Topf hat einen Höhe von 3 und einen Radius von 1 am Boden und 2 oben. Das Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und Radius 1.5 hat ein Volumen von $V = \pi r^2 h = \pi \frac{9}{4} \cdot 3 \approx 21.21$.

Das Resultat ist also plausibel.

Lösung zu A26 ex-repe-weg-aus-beschleunigung

a) Skizze.

b) $a(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}t & \text{für } 0 \leq t < 10 \\ -\frac{1}{5}(t-10)+2 & \text{für } 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$

c) Die Geschwindigkeit zur Zeit t entspricht der Fläche unter der Beschleunigungskurve zwischen 0 und t. Für $t \leq 10$ erhält man:

$$v(t) = \int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{5}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}x^2\Big|_0^t = \frac{1}{10}t^2$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ beträgt also $v(10) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 10\,\mathrm{m/s}$.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$v(t) = 10 + \int_{10}^t a(x)\,\mathrm{d}x = 10 + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{5}(x-10)+2\right)\mathrm{d}x = 10 + \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x\right)\Big|_{10}^t =$$
$$10 - \frac{1}{10}t^2 + 4t + 10 - 40 = -\frac{1}{10}t^2 + 4t - 20$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20$ beträgt also
$v(20) = -\frac{1}{10} \cdot 400 + 80 - 20 = -40 + 80 - 20 = 20\,\mathrm{m/s}$.

d) Die Positionsfunktion $s(t)$ entspricht der Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen. Es gilt für $0 \leq t \leq 10$:

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{10}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}x^3\Big|_0^t = \frac{1}{30}t^3$$

Bis zum Zeitpunt $t = 10$ wurde eine Strecke von $s(10) = \frac{1}{30} \cdot 1000 = \frac{100}{3} \approx 33.33\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$s(t) = \frac{100}{3} + \int_{10}^t v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{100}{3} + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x - 20\right)\mathrm{d}x = \frac{100}{3} + \left(-\frac{1}{30}x^3 + 2x^2 - 20x\right)\Big|_{10}^t =$$
$$\frac{100}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t + \frac{100}{3} - 200 + 200 = \frac{200}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t$$

Für $t = 20$ erhält man die Strecke nach $20\,\mathrm{s}$:
$s(20) = \frac{200}{3} - \frac{800}{3} + 800 - 400 = 200\,\mathrm{m}$

e) Nach $20\,\mathrm{s}$ hat die Bahn eine Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$ und hat eine Strecke von $200\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.

Lösung zu A27 ex-skischanzenvolumen

Um die Funktion zu erhalten, die dem Verlauf der Schanze entspricht, muss die «normale» Sinus-Funktion $\sin(x)$ mit dem Faktor $\frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right))$, dann um $+5$ Einheiten in x-Richtung verschoben werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right))$, und noch $+1$ in y-Richtung verschoben werden, also $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + 1$.

Die Querschnittsfläche der Schanze ist also:

$$\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} \left(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + 1\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + x\right)\Big|_0^{20} =$$
$$\left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 20\right) - \left(-\frac{10}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0\right) = \frac{10}{\pi} + 20 - \left(\frac{10}{\pi} + 0\right) = 20\,[\mathrm{m}^2]$$

Damit ist das Volumen $5 \cdot 20 = 100\,[\mathrm{m}^3]$.

Bei einer geschätzten Schneedichte von $200\,\mathrm{kg/m^3}$ wiegt die Schanze 20 Tonnen.

Zusatzaufgabe: Bei einer horizontalen Geschwindigkeit von v [m/s] im freien Fall gilt: $x = vt$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Aus der ersten Gleichung folgt $t = \frac{x}{v}$. Eingesetzt in die zweite Gleichung: $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = -\frac{g}{2v^2}x^2$. Die zweite Ableitung davon ist $y'' = -\frac{g}{v^2}$.

Die zweite Ableitung der Schanzenkurve ist

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right)$$

Im höchsten Punkt gilt $f''(10) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2$

Damit haben wir eine Gleichung für die Grenzgeschwindigkeit v:

$$\begin{aligned} -\frac{g}{v^2} &= -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \\ \frac{v^2}{g} &= \frac{100}{\pi^2} \\ v^2 &= \frac{100g}{\pi^2} \\ v &= \pm\frac{10\sqrt{g}}{\pi} \approx 9.970\,[\mathrm{m/s}] \end{aligned}$$

Das entspricht knapp $36\,\mathrm{km/h}$.

Lösung zu A28 ex-konstante-leistung-beschleunigen

Die Energiezunahme ist bei konstanter Leistung linear zunehmend. D.h. $E(t) = P \cdot t$, wobei P hier gerade die Leistung ist. Und ja, die Energie ist das Integral über die Leistung, bzw. die Leistung ist die Ableitung der Energie.

Da die kinetische Energie eine lineare Funktion ist, ist die Geschwindigkeitsfunktion, die in der Energie im Quadrat erscheint, eine Wurzelfunktion sein, d.h. $v(t) = c \cdot \sqrt{t}$, wobei c eine Konstante ist, die von der Leistung und der Masse abhängig ist. Genauer folgt aus $E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$, die Beziehung

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \underbrace{\sqrt{\frac{2P}{m}}}_{c} \cdot \sqrt{t}$$

Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion, also $a(t) = c \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Für $t = 0$ ist die Beschleunigungsfunktion gar nicht definiert (bzw. unendlich gross). Für sehr kleine t ist die Beschleunigung sehr gross, und damit auch die Kraft, die auf den Fahrer wirkt.

D.h. für eine sehr kurze Zeit wirkt plötzlich eine sehr grosse Kraft auf den Fahrer, was als Schlag (oder Tritt in den Allerwertesten) empfunden wird. Das deckt sich mit den Aussagen von Test-Fahrern.

Lösung zu A29 ex-parabel-bogenlaenge

Die eine horizontale Kathete ist $\mathrm{d}x$, die vertikale Kathete ist $f'(x) \cdot \mathrm{d}x$. Damit hat das Tangentenstück die Länge $\sqrt{(f'(x)\cdot \mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \cdot \mathrm{d}x$.

Die Länge ist also

$$\int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{4\ln\left(\sqrt{5}+1\right) - 4\ln(2) + \sqrt{5}}{4} \approx 1.04023 \quad \text{mit TR}$$

Lösung zu A30 ex-kugeloberflaeche

Wir betrachten die Kugel als Rotationskörper des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nach Rotation um die x-Achse.

Der Umfang eines Ringes an der Stelle x ist $2\pi f(x)$. Die infinitesimale Bogenlänge beträgt $\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Und damit beträgt die Rechtecksfläche $2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Die Oberfläche ist also

$$O_{\text{Kugel}} = \int_{-1}^{1} 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\left(x\Big|_{-1}^{1}\right) = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$$

Lösung zu A31 ex-torus

Ein Torus mit Radien R und r erhält man, wenn man den Kreis mit Radius r und Zentrum $(0,R)$ um die x-Achse rotiert.

Dazu betrachten wir den oberen Kreisbogen als Graphen einer Funktion $f(x)$ und den unteren Kreisbogen als Graphen einer Funktion $g(x)$:

$$f(x) = R+\sqrt{r^2-x^2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = R-\sqrt{r^2-x^2}$$

Das Volumen kann nun als Differenz der Volumina der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden. Anstatt die ganzen Umformungen im Integral vorzunehmen, könnten im TR auch einfach die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert werden und dann damit die Integrale berechnet werden.

$$V = \pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-r}^{r}(g(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-r}^{r}\left((f(x))^2-(g(x))^2\right)\mathrm{d}x =$$
$$\pi\int_{-r}^{r}\left(R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-(R^2-2R\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2))\right)\mathrm{d}x = \pi\int_{-r}^{r}4R\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$4R\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{TR}}{=} 4R\pi\cdot\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R\cdot\pi r^2$$

Beachten Sie die Schönheit des Ergebnisses: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnitssfläche des Schlauches. Ein Torus hat also das gleiche Volumen wie das eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.

Die Oberfläche ist die Summe der Oberflächen der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

$$O = 2\pi\int_{-r}^{r}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_{-r}^{r}g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}+g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{-2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}r\left(\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}+1+\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\mathrm{d}x =$$
$$4\pi r\int_{-r}^{r}\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi rR\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{TR}}{=} 4\pi rR\cdot\pi = (2\pi R)\cdot(2\pi r)$$

Beachten Sie die Schönheit des Ergebnisses: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Umfang des Schlauches. Ein Torus hat also die gleiche Oberfläche wie die Mantelfläche eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.