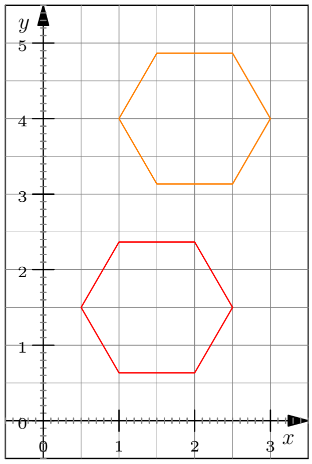
 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

12 Einführung in die analytische Geometrie = Vektorgeometrie

12.0.1. Die analytische Geometrie beschreibt geometrische Objekte im Raum oder in der Ebene durch Gleichungen. Dazu wird meist ein geeignetes Koordinatensystem verwendet (im Gegensatz zur klassischen, «synthetischen» Geometrie der alten Griechen). Beispiele für geometrische Objekte sind Geraden, Kurven, Ebenen oder gekrümmte Flächen im Raum, etwa die Oberfläche einer Kugel. Viele geometrische Probleme kann man mit Hilfe der Vektorgeometrie algebraisch (d.h. rechnerisch) lösen. Dieses Zusammenspiel von Geometrie und Algebra ist äusserst fruchtbar.

12.1 Vektorgeometrie in der Zeichenebene (zweidimensionale Vektorgeometrie)

Motivation 12.1.1 (Vektoren als Pfeile).



In der Zeichnung rechts ist die orange Figur aus der roten Figur durch eine Verschiebung hervorgegangen. Wenn man jeden Punkt der roten Figur mit dem entsprechenden Punkt der orangen Figur durch einen Pfeil (von rot nach orange) verbindet, so erhält man lauter gleich lange Pfeile, die in dieselbe Richtung zeigen. Auch wenn die Pfeile verschiedene Anfangs- und Endpunkte haben, fassen wir sie zu einem Objekt zusammen und nennen dieses Objekt einen **Vektor**. Jeder eingezeichnete Pfeil repräsentiert diesen Vektor. Ein Vektor ist also ein «Pfeil einer gewissen Länge mit einer gewissen Richtung», der Anfangspunkt des Pfeils ist unwichtig.

Wenn man das angegebene Koordinatensystem verwendet, so wird bei unserer Verschiebung jeder Punkt der roten Figur um 0.5 Einheiten nach rechts und 2.5 Einheiten nach oben verschoben. Wir schreiben unseren Vektor deswegen als ✎

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \text{ je nachdem, ob genügend Platz: } = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Definition 12.1.2 Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Ein **Vektor** in der zweidimensionalen Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ besteht aus zwei reellen Zahlen v_1 und v_2, die übereinandergeschrieben und eingeklammert werden: ✎

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Meist notiert man Vektoren als Buchstaben mit einem waagerechten, nach rechts zeigenden Pfeil darüber. Später (und insbesondere an der Universität) lässt man diesen Pfeil oft weg.

Die beiden Zahlen v_1 und v_2 heissen die **Komponenten** des Vektors $\vec{v}$.

Zum Beispiel hat der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ ✎

- 0.5 als erste Komponente (x-Komponente);
- 2.5 als zweite Komponente (y-Komponente).

Statt der Schreibweise $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sind auch die Schreibweisen ✎

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für einen allgemeinen Vektor verbreitet (also v_x oder x für die x-Komponente, v_y oder y für die y-Komponente).

12.1.3. Die folgenden Vorstellungen helfen, Vektoren besser zu verstehen:

- Eine **Parallelverschiebung** oder kurz **Verschiebung** verschiebt alle Punkte des Raumes in die **gleiche Richtung** um die **gleiche Länge**. Jede solche Verschiebung kann in naheliegender Weise durch einen Vektor angegeben werden. Umgekehrt entspricht jedem Vektor eine Parallelverschiebung.
- Ein Vektor kann als **Pfeil** dargestellt werden. Dabei spielt es keine Rolle, wo der Anfangspunkt des Pfeils liegt, nur **Länge und Richtung** sind relevant. Ein Vektor kann durch unendlich viele parallele und gleich lange Pfeile dargestellt werden.

Beispiel 12.1.4. Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

steht für die Parallelverschiebung um 2 Einheiten in x-Richtung und um -1 Einheit in y-Richtung. Wenn wir uns diesen Vektor als Pfeil vorstellen, so geht dieser Pfeil von einem beliebigen Startpunkt um 2 Einheiten in x-Richtung und um -1 Einheit in y-Richtung (also um 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten).

12.1.5. Vektoren spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Beispielsweise kann man die (Momentan-)Geschwindigkeit eines Objekts als Vektor auffassen, den sogenannten *Geschwindigkeitsvektor*: Die Richtung des Vektors ist die aktuelle Fahrtrichtung. Die Länge des Vektors ist die aktuelle Geschwindigkeit.

Definition 12.1.6 Länge eines Vektors

Die **Länge** (oder der **Betrag**) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wird als ✎

$$|\vec{v}| \qquad \text{oder} \qquad \left|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right|$$

notiert und berechnet sich (nach Pythagoras) aus seinen Komponenten v_1 und v_2 wie folgt: ✎

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Aufgabe A1 Für jeden der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sind die folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

- Stellen Sie ihn als Pfeil mit Anfangspunkt $(0, 0)$ in einem Koordinatensystem dar.
- Stellen Sie ihn als Pfeil mit Anfangspunkt $(1, 3)$ in demselben Koordinatensystem dar. Alle Pfeile sind mit dem Namen des jeweiligen Vektors (also $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...) zu beschriften.
- Berechnen Sie seine Länge. Schreiben Sie Ihr Ergebnis auf (z. B. $|\vec{a}| = \dots$) Durch Abmessen können Sie Ihr Ergebnis prüfen.
- Finden Sie einen Vektor, der
  - doppelt so lang ist wie der betrachtete Vektor und dieselbe Richtung hat (der gesuchte Vektor ist in der Form $\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$ anzugeben);
  - genauso lang ist wie der betrachtete Vektor, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt;
  - in dieselbe Richtung wie der betrachtete Vektor zeigt, aber die Länge 1 hat;

12.1.7. Multipliziert man alle Komponenten eines Vektors mit derselben Zahl (= demselben Skalar) λ, so wird der Vektor entsprechend gestreckt (skaliert) (vgl. zentrische Streckung mit Streckfaktor λ; die Lage des Streckzentrums ist dabei unwichtig). Die Richtung bleibt für positive Zahlen erhalten. Für negative Zahlen zeigt der neue Vektor in die entgegengesetzte Richtung.

Definition 12.1.8 Skalare Multiplikation = Zahl-Vektor-Multiplikation

Die Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ (der Buchstabe ist ein kleines griechisches Lambda) mit einem Vektor $\vec{v}$ ist wie folgt komponentenweise definiert. ✎

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{z. B.} \qquad 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Oft wird der Multiplikationspunkt weggelassen und man schreibt kurz $\lambda\vec{v}$ oder $\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
Man beachte, dass die Zahl *links* des Vektors steht.

Abkürzende Schreibweisen:
- Mit $-\vec{v}$ ist $(-1) \cdot \vec{v}$ gemeint (d. h. alle Komponenten werden mit (-1) multipliziert).
- Mit $\frac{\vec{v}}{\lambda}$ ist $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{v}$ gemeint (d. h. alle Komponenten von $\vec{v}$ werden durch λ dividiert).

Aufgabe A2

(a) Mit welcher Zahl λ muss man den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ multiplizieren, um
   (i) einen Vektor der halben Länge zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt?
   (ii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen x-Komponente 1 ist?
   (iii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen erste Komponente 4 ist?
   (iv) einen genauso langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt?
   (v) einen zweimal so langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt?
   (vi) einen Vektor der Länge 1 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? Hinweis: Wie lang ist $\vec{v}$?
   (vii) einen Vektor der Länge 10 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt?
   (viii) einen Vektor der Länge 3 zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt?

(b) Beantworten Sie dieselben Fragen für einen allgemeinen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Merke 12.1.9 Längenänderung beim skalaren Multiplizieren

Multipliziert man eine Zahl λ mit einem Vektor $\vec{v}$,
so ändert sich die Länge des Vektors ✎um den Faktor $|\lambda|$, in Formeln:

$$|\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$$

Wie bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor λ.

Beachte:
- Ist λ positiv, so hat $\lambda \cdot \vec{v}$ dieselbe Richtung wie $\vec{v}$.
- Ist λ negativ, so hat $\lambda \cdot \vec{v}$ die entgegengesetzte Richtung von $\vec{v}$.
- Ist λ Null, so ist $\lambda \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v}$ der sogenannte **Nullvektor** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beweis: Klar, denn x- und y-Komponente von $\vec{v}$ werden mit λ multipliziert. Wenn man sich ein «Steigungsdreieck» mit dem Vektor als Hypotenuse vorstellt, wird dieses mit dem Faktor λ gestreckt.

Aufgabe A3 Beweisen Sie die Formel $|\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$ in Merke 12.1.9 rein rechnerisch mit Hilfe der Definition 12.1.6 der Länge eines Vektors.

Hinweis: Schreibe $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und verwende die Definition der Länge und die Definition der Zahl-Vektor-Multiplikation.

Definition 12.1.10 Einheitsvektor = normierter Vektor

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst genau dann **Einheitsvektor** oder **normiert**, wenn er die Länge 1 hat, d.h. wenn $|\vec{v}| = 1$ gilt.

Merke 12.1.11 Vektoren normieren, d.h. in Einheitsvektoren derselben Richtung verwandeln

Will man einen von Null verschiedenen Vektor normieren, d. h. ihn in einen Vektor derselben Richtung **mit Länge 1** verwandeln, so dividiere man ihn komponentenweise durch seine Länge:

$$\text{Der Vektor } \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \text{ hat die Länge 1 und dieselbe Richtung wie } \vec{v}.$$

Aufgabe A4 Beweisen Sie den Inhalt der obigen Merke-Box 12.1.11. Konkret ist zu zeigen, dass der Vektor $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ normiert ist, also Länge 1 hat. Hinweis: Merke 12.1.9; was ist λ?

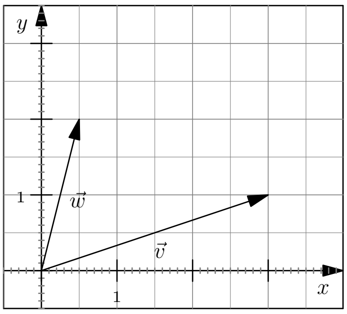
Aufgabe A5 Normieren Sie die folgenden Vektoren (d. h. verwandeln Sie sie in Einheitsvektoren derselben Richtung).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Motivation 12.1.12 (Vektoraddition)**.** Sind zwei Vektoren gegeben, so können wir erst eine Verschiebung um den einen Vektor und dann eine Verschiebung um den anderen Vektor durchführen. Insgesamt ergibt dies wieder eine Verschiebung. Diese entspricht einem Vektor, den wir als *Summe* der beiden Vektoren bezeichnen.

Definition 12.1.13 Vektor-Addition: Summe von Vektoren

Die Summe $\vec{v} + \vec{w}$ zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist zeichnerisch wie folgt definiert: Hefte den Startpunkt des Pfeils $\vec{w}$ an den Endpunkt des Pfeils $\vec{v}$. Die Summe $\vec{v} + \vec{w}$ ist dann definiert als der Pfeil vom Startpunkt von $\vec{v}$ zum Endpunkt von $\vec{w}$.



Sind die Vektoren mit Komponenten gegeben, so wird also komponentenweise addiert: ✎

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

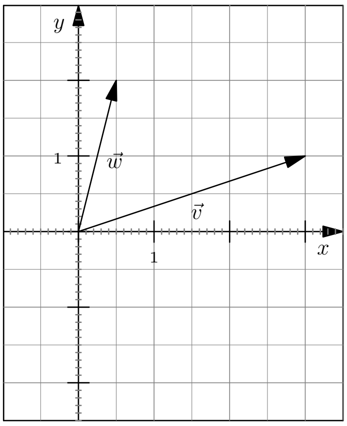
Anschauung: Der Vektor $\vec{v}+\vec{w}$ ist «die Diagonale» in dem von den beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ «aufgespannten Parallelogramm» (sofern man sich die beiden Vektoren als Pfeile mit demselben Anfangspunkt vorstellt).

12.1.14. Vektor-Addition in der Physik: Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Kräfte, die auf einen Punkt (etwa eine Masse) wirken, so ist $\vec{v} + \vec{w}$ die resultierende Kraft auf den Punkt.

Definition 12.1.15 Vektor-Subtraktion: Differenz von Vektoren

Die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$ zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist ebenfalls komponentenweise definiert:✎

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} = \vec{v} + (-\vec{w})$$



Anschauung: Der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ ist der Pfeil von der Pfeilspitze von $\vec{w}$ zur Pfeilspitze von $\vec{v}$ (mit anderen Worten: die «andere Diagonale» in dem von den beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ «aufgespannten Parallelogramm»).

Alternative: Der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ ist derjenige Vektor, der «an den Vektor $\vec{w}$ drangehängt den Vektor $\vec{v}$ liefert», d. h. der zu $\vec{w}$ addiert $\vec{v}$ ergibt.

12.1.16. Da Zahl-Vektor-Multiplikation, Vektoraddition und Vektorsubtraktion komponentenweise definiert sind, gelten die wohlbekannten Rechengesetze für Mal, Plus und Minus auch für Vektoren. Beispielsweise gilt das Distributivgesetz $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$.

Aufgabe A6 Zeichnen Sie für jedes $n \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ in einem Koordinatensystem den Vektor

$$\binom{2}{3} + n \cdot \binom{1}{0.5}$$

als Pfeil mit Startpunkt im Ursprung ein. Was fällt Ihnen auf? Wo liegen die Pfeilspitzen?

Definition 12.1.17 Ortsvektor

Ist $A = (x_A, y_A)$ ein Punkt in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$, so nennen wir

$$\overrightarrow{A} := \binom{x_A}{y_A}$$

den **Ortsvektor** von A. Stellen wir uns diesen Vektor als Pfeil mit Anfangspunkt im Ursprung $(0, 0)$ vor, so befindet sich sein Endpunkt (= die Pfeilspitze) im Punkt A.
Wer mag, darf diesen Vektor $\overrightarrow{A}$ auch ohne die «Überpfeilung» als A schreiben.

Definition 12.1.18 Verbindungsvektor

Sind A und B zwei Punkte, so heisst der Pfeil vom Punkt A zum Punkt B der **Verbindungsvektor von A nach B** und wird als

$$\overrightarrow{AB}$$

notiert. Als Verschiebung interpretiert ist $\overrightarrow{AB}$ die Verschiebung der Ebene in sich, die A auf B abbildet.

Aufgabe A7 Gegeben sind die Punkte $A = (3, -4)$, $B = (-1, 2)$ und $C = (1, -1)$. Berechnen Sie die folgenden Vektoren.

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{CB}$

d) Was folgern Sie aus b) und c)? Erstellen Sie gegebenenfalls eine Skizze der Situation.

Merke 12.1.19

Die Komponenten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet man, indem man von den Koordinaten des Endpunktes die Koordinaten des Anfangspunktes subtrahiert. Kurz:
«Endpunkt minus Anfangspunkt.»
Mit Hilfe der Ortsvektoren schreibt sich dies als

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$$

12.1.20. Der Ortsvektor $\overrightarrow{A}$ eines Punkte A ist der Verbindungsvektor vom Nullpunkt $0 = (0, 0)$ des Koordinatensystems zum Punkt A, in Formeln $\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{A}$.

Definition 12.1.21 Nullvektor

Der **Nullvektor**

$$\vec{0} = \binom{0}{0}$$

steht für die Pallelverschiebung „um nichts“ (auch Identität genannt): Jeder Punkt wird in jeder Koordinatenrichtung um 0 verschoben, bleibt also an seiner Position.

Konvention 12.1.22. Es ist sinnvoll zu vereinbaren, dass der Nullvektor $\vec{0}$ jede mögliche Richtung hat, denn dann ist er zu jedem anderen Vektor parallel und steht senkrecht auf jedem anderen Vektor.

Aufgabe A8 Wie kann man die folgenden Vektoren einfacher darstellen?

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ c) $-\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ f) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

Beispiele 12.1.23 (zum Rechnen mit Vektoren: Schwerpunkte)**.**

- Der Mittelpunkt/Schwerpunkt S_{AB} zweier Punkte A und B «derselben Masse» liegt genau zwischen A und B. Man bekommt seinen Ortsvektor deshalb, indem man zum Ortsvektor von A die Hälfte des Verbindungsvektors von A nach B addiert: ✎

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S_{AB}} &= \vec{A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{A}+\frac{1}{2}\left(\vec{B}-\vec{A}\right) \\ &= \vec{A}+\frac{1}{2}\vec{B}-\frac{1}{2}\vec{A} \\ &= \frac{1}{2}\vec{A}+\frac{1}{2}\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\end{aligned}$$

Skizze ergänzen

bzw. etwas salopper:

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2}$$

- Der Schwerpunkt S_{ABC} dreier Punkte A, B, C «derselben Masse» kann wie folgt berechnet werden: Zunächst kann man die Punkte A und B durch ihren Mittelpunkt/Schwerpunkt S_{AB} mit der doppelten Masse ersetzen. Der Schwerpunkt S_{ABC} teilt dann die Verbindungsstrecke $S_{AB}C$ im Verhältnis $1:2$ (nach den Hebelgesetzen). Also gilt ✎

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S_{ABC}} &= \overrightarrow{S_{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{S_{AB}C} \\ &= \overrightarrow{S_{AB}}+\frac{1}{3}\left(\vec{C}-\overrightarrow{S_{AB}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{S_{AB}}+\frac{1}{3}\vec{C} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\frac{1}{3}\vec{C} = \frac{1}{3}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right)\end{aligned}$$

Skizze ergänzen

Aufgabe A9 Studieren Sie das Beispiel 12.1.23 und bestimmen Sie dann in ähnlicher Weise den Schwerpunkt S_{ABCD} von vier Punkten A, B, C, D «derselben Masse».

Merke 12.1.24 Schwerpunkt von gleichschweren Punkten

Der Schwerpunkt S von n Punkten A_1, A_2, $\ldots A_n$ derselben Masse hat den folgenden Ortsvektor:

$$\vec{S} = \frac{1}{n}\left(\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_n}\right)$$

bzw. etwas salopper:

$$S = \frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$$

Aufgabe A10

(a) «Winkelhalbierende zweier Vektoren»: Betrachte die beiden Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$. Finde einen Vektor, der den Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ zwischen diesen beiden Vektoren halbiert.
Hinweis: Berechne zunächst die Längen von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$. Folgere, dass das von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ aufgespannte Parallelogramm sogar eine/ein $\boxed{}$ ist. Wieso hilft dies bei der Ermittlung des winkelhalbierenden Vektors?

(b) Löse dieselbe Aufgabe für die beiden Vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Hinweis: Im Gegensatz zu Teilaufgabe (a) haben $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ nun verschiedene Längen. Trotzdem ist Teilaufgabe (a) nützlich.

Orthogonalität (= Aufeinander-Senkrecht-Stehen) von Vektoren

Aufgabe A11

Bestimmen Sie zu jedem Vektor alle Vektoren **derselben Länge**, die senkrecht auf dem betrachteten Vektor stehen.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Aufgabe A12

(a) Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. Wenn man den Vektor $\vec{v}$ um 90° in mathematisch positiver Richtung dreht, welchen Vektor erhält man?

(b) Was ist wohl in die Merkebox 12.1.25 einzutragen?

Merke 12.1.25 Vektor um 90° drehen

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor, so steht der Vektor

$$\vec{w} = ✎\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

senkrecht auf $\vec{v}$, in Symbolen $\vec{v} \perp \vec{w}$. Genauer entsteht $\vec{w}$ aus $\vec{v}$ durch eine Drehung um 90° in mathematisch positiver Richtung (insbesondere haben $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe Länge). Wer mag, kann den Vektor $\vec{w}$ als $\vec{v}_{90°}$ notieren.

In Worten: Um einen Vektor um 90° zu drehen, vertauscht man die beiden Komponenten des Vektors und multipliziert danach die erste Komponente mit −1. (Wenn man die zweite Komponente mit −1 multipliziert, erhält man den um −90° gedrehten Vektor.)

Aufgabe A13

Gegeben sind die Punkte $A = (2, 5)$ und $B = (3, 1)$.

(a) Finden Sie Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat bildet (Reihenfolge der Punkte in mathematisch positivem Drehsinn).

(b) Finden Sie Punkte E und F so, dass $ABEF$ ein Rechteck bildet, dessen Seite BE doppelt so lang ist wie die Seite AB.

Aufgabe A14

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC in der Zeicheneben sind jeweils zwei Punkte A und B gegeben; zu bestimmen ist der dritte Punkt C.

(a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$

(b) $A = (0, 0)$, $B = (4, 1)$

(c) Seien A und B zwei beliebige Punkte. Stelle den Ortsvektor $\overrightarrow{C}$ dar mit Hilfe
- der Ortsvektoren $\overrightarrow{A}$ und $\overrightarrow{B}$, der Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ und
- des Vektors $\overrightarrow{w}$, der aus $\overrightarrow{AB}$ durch Drehung um 90° hervorgeht.

Hinweis: Wenn man von A aus in Richtung B losläuft, was muss man tun, um in C anzukommen? Nur drei der fünf angegebenen Vektoren werden benötigt; du darfst die Vektoren mit Zahlen multiplizieren (Zahl-Vektor-Multiplikation) und addieren (Vektoraddition).

Damit das Skalarprodukt besser geschätzt wird: Aufgabe einfügen: (a) Stehen die beiden Vektoren ... senkrecht aufeinander? (nein) (b) Dasselbe nochmal mit Antwort ja. (c) Sind die beiden Vektoren ... parallel? (nein) (d) Dasselbe nochmal mit Antwort ja.

Aufgabe A15 Versuchen Sie, den Inhalt der Merkebox 12.1.26 herauszufinden.

Hinweis: Gesucht ist ein Term in den Komponenten v_1, v_2, w_1, w_2 der beiden Vektoren, der genau dann Null ist, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht aufeinander stehen. Mit einem Term ist ein Ausdruck wie $v_1^2 + 7w_2 + w_1v_2 + 3$ gemeint. In dem gesuchten Term (es gibt uendlich viele Lösungen) müssen alle vier Komponenten v_1, v_2, w_1, w_2 vorkommen.

Mögliches Vorgehen:

- Betrachte ein Beispiel, etwa den Vektor $\vec{v} = \binom{5}{2}$.
- Finde zwei Vektoren, die senkrecht auf $\vec{v}$ stehen.
- Finde zwei Vektoren, die nicht senkrecht auf $\vec{v}$ stehen.
- Betrachte nun jeden der vier soeben gefundenen Vektoren als Vektor $\vec{w}$ und suche einen möglichst einfachen Term in den Variablen v_1, v_2, w_1, w_2, der genau dann Null ergibt, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht aufeinander stehen.

Merke 12.1.26 Kriterium für Orthogonalität (= Aufeinander-senkrecht-Stehen) zweier Vektoren

Sind $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ zwei beliebige Vektoren, so gilt:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ✎ v_1w_1 + v_2w_2 = 0$$

Konvention: Sind alle Komponenten eines Vektors Null (d. h. es handelt sich um den sogenannten Nullvektor), so steht er auf allen anderen Vektoren senkrecht.

Beweis. ✎

$$\begin{aligned}
\vec{v} \perp \vec{w} \iff && \sphericalangle(\vec{v},\vec{w}) &= 90^\circ \\
\iff && |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 &= |\vec{v}-\vec{w}|^2 \quad \text{Pythagoras samt Umkehrung} \\
\iff && \left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{w_1^2+w_2^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2}\right)^2 \\
\iff && v_1^2+v_2^2+w_1^2+w_2^2 &= (v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2 \\
\iff && v_1^2+v_2^2+w_1^2+w_2^2 &= v_1^2-2v_1w_1+w_1^2+v_2^2-2v_2w_2+w_2^2 \\
\iff && 0 &= -2v_1w_1-2v_2w_2 \\
\iff && 0 &= v_1w_1+v_2w_2
\end{aligned}$$

□

12.1.27. Der Ausdruck $v_1w_1 + v_2w_2$ ist interessant, denn er «weiss», ob $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufeinander senkrecht stehen. Später werden wir sehen, dass dieser Ausdruck sogar die Berechnung des Winkels zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ermöglicht. Deswegen bekommt er einen eigenen Namen:

Definition 12.1.28 Skalarprodukt zweier Vektoren

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist eine reelle Zahl, es wird als $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ notiert und ist wie folgt definiert:

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = v_1w_1 + v_2w_2$$

12.1.29. Damit können wir Merke 12.1.26 auch wie folgt ausdrücken.

Merke 12.1.30 Kriterium für Orthogonalität, ausgedrückt mit Hilfe des Skalarprodukts

$$\vec{v} \perp \vec{w} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$$

Aufgabe A16 Berechnen Sie alle Skalarprodukte zwischen je zwei (verschiedenen) der folgenden fünf Vektoren und entscheiden Sie dadurch, welche der Vektoren senkrecht aufeinander stehen und welche nicht.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es genügt, 4+3+2+1=10 Skalarprodukte zu berechnen, denn wer $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ berechnet hat, kennt auch $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ etc. Warum?

Aufgabe A17 Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(a) Für welchen Wert von x steht der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Vektor $\vec{v}$?

(b) Für welchen Wert von x sind die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel?
Bemerkung: Man sagt, dass zwei Vektoren **parallel** sind, wenn sie «in dieselbe oder in einander entgegengesetzte Richtungen zeigen», wenn also einer der beiden aus dem anderen durch Multiplikation mit einer (positiven oder negativen) reellen Zahl hervorgeht.

Aufgabe A18 Kann man die Länge eines Vektors mit Hilfe des Skalarprodukts ausrechnen?
Hinweis: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$; eventuell Beispiele berechnen.

Merke 12.1.31

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist das Quadrat seiner Länge:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2 \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Parameterdarstellung von Geraden

12.1.32. Bisher können Sie (nicht-vertikale) Geraden durch Gleichungen der Form der $g(x) = mx + q$, d. h. durch Steigung m und y-Achsenabschnitt q, beschreiben. Zwei weitere wichtige Beschreibungen von Geraden geschehen durch «Parameterform» und durch «Normalenform». Erstere lernen Sie in diesem Abschnitt kennen.

12.1.33. Bisher wurden Punkte meist in der Form $A = (3, 2)$ notiert. Ab jetzt erlaube und verwende ich auch die Notation $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ für Punkte (Punkte werden also durch ihren Ortsvektor notiert).

Aufgabe A19 Ein Schüler schiesst zur Zeit $t = 0$ vom Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen Ball mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab (pro Zeiteinheit, beispielsweise pro Sekunde, bewegt sich der Ball um diesen Vektor).

Alle Ballbewegungen sind «gleichförmig», d. h. geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit; Reibung, Luftwiderstand und Spin-Effekte werden vernachlässigt.

- Erstellen Sie eine Skizze der Situation.
- Wo ist der Ball zum Zeitpunkt $t = 1$, wo zur Zeit $t = 3$, wo zur Zeit $t = 100$?
- Wo ist der Ball zu einem beliebigen Zeitpunkt t?
- In den beiden Punkten $X = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 70 \\ 25 \end{pmatrix}$ stehen zwei weitere Schüler X und Y. Trifft der Ball einen der beiden Schüler? Wenn ja: Welchen und zu welcher Zeit t?
- Welche (Absolut-)Geschwindigkeit hat der Ball?
Hinweis: Die (Absolut-)Geschwindigkeit (ohne Richtungsangabe) des Balls ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors.

Definition 12.1.34 Parameterdarstellung einer Geraden

Seien P ein Punkt und $\vec{v} \neq 0$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Die **Parameterdarstellung** der Geraden g durch den **Auf-** oder **Stützpunkt** P mit **Richtungsvektor** $\vec{v}$ ist

$$g(t) = \overrightarrow{g(t)} = \overrightarrow{P} + t \cdot \vec{v} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Da wir den Punkt P als Vektor schreiben, spricht man auch vom **Stützvektor**. Man sagt auch, dass die Gerade in **Parameterform** gegeben ist und spricht von der **Parametrisierung** der Geraden.
Man stellt sich hierbei den Parameter t oft physikalisch als Zeit vor und $g(t)$ als Position eines Teilchens zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen am «Startpunkt» $g(0) = P + 0 \cdot \vec{v} = P$, zur Zeit $t = 1$ befindet es sich am Punkt $g(1) = P + 1 \cdot \vec{v} = P + \vec{v}$. (Ein konkretes Beispiel folgt.)

Beispiel 12.1.35. Wir betrachten das Beispiel $P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ (vgl. Aufgabe Aufgabe A19). Ein Teilchen startet zur Zeit $t = 0$ im Punkt P und bewegt sich mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$. Die zugehörige Parameterdarstellung ist

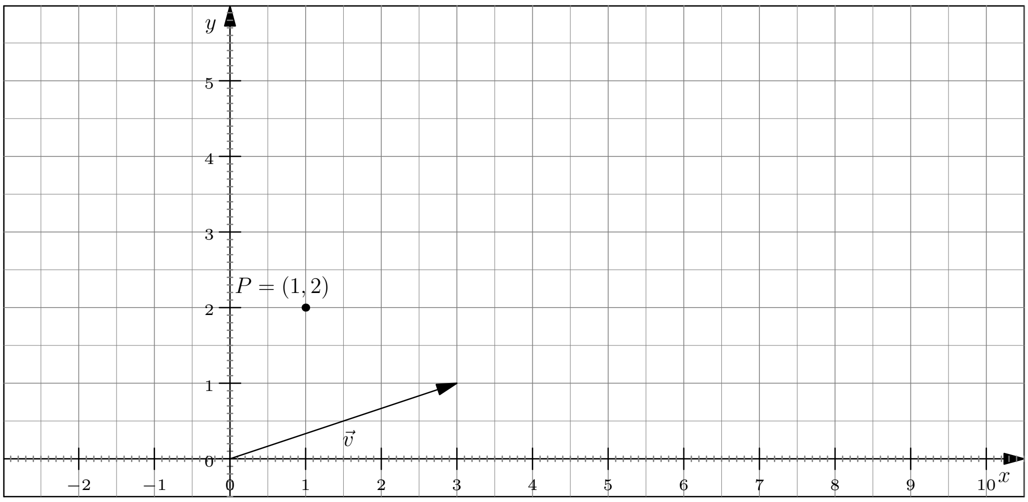
$$g(t) = P + t \cdot \vec{v} = \overrightarrow{P} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3t\\2+t\end{pmatrix}$$

Setzt man für t gewisse Zeitpunkte ein, etwa $t = 1, 3, \frac{1}{2}, 0, -1$, so erhält man die zugehörigen Positionen des Teilchens (bzw. genaugenommen deren Ortsvektoren).

$$g(1) = ✎ P + 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \qquad g(2) = ✎ P + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

$$g(3) = ✎ P + 3 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} \qquad g\left(\tfrac{1}{2}\right) = ✎ P + \tfrac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix}$$

$$g(0) = ✎ P + 0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad g(-1) = ✎ P + (-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$



Warum heisst $\vec{v}$ Geschwindigkeitsvektor? Zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten t_0 und t_1 bewegt sich das Teilchen vom Punkt $A = g(t_0)$ zum Punkt $B = g(t_1)$, es bewegt sich also um den Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{g(t_0)g(t_1)} = \overrightarrow{g(t_1)} - \overrightarrow{g(t_0)} = g(t_1) - g(t_0) = P + t_1\vec{v} - (P + t_0\vec{v}) = P + t_1\vec{v} - P - t_0\vec{v} = (t_1 - t_0)\vec{v}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit (genauer: der Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor) währenddessen beträgt «Weg durch Zeit» bzw. genauer «zurückgelegter Wegvektor $\overrightarrow{AB}$ durch dafür benötigte Zeit $t_1 - t_0$», also

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{t_1 - t_0} = \frac{(t_1 - t_0)\vec{v}}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot (t_1 - t_0) \cdot \vec{v} = \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_0} \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Man sieht, dass die Geschwindigkeit unabhängig von den betrachteten Zeitpunkten t_0 und t_1 stehts $\vec{v}$ beträgt.

Aufgabe A20 Betrachten Sie die folgende in Parameterform gegebene Gerade

$$f(t) = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

(a) Was ist der Aufpunkt = Stützpunkt? Was ist der Richtungsvektor?
(b) Welche Steigung hat die Gerade?
(c) Wo schneidet die Gerade f die x-Achse? Wo die y-Achse?
(d) Wie lautet die Geradengleichung der Geraden f (gemeint ist die «Steigungs-y-Achsenabschnittsgleichung» $y = \ell(x) = mx + q$ der Geraden)?

Aufgabe A21 Wir betrachten die Gerade durch die beiden Punkte $A = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

(a) Beschreiben Sie die Gerade durch eine Parameterdarstellung. Kurz: Parametrisieren Sie die Gerade.
(b) Parametrisieren Sie die Gerade durch eine weitere Parameterdarstellung mit einem anderen Richtungsvektor.
(c) Parametrisieren Sie die Gerade durch eine weitere Parameterdarstellung mit einem anderen Aufpunkt = Stützpunkt.
(d) Wenn man diese Gerade durch eine Parameterdarstellung beschreiben möchte: Wo liegen die möglichen Aufpunkte? Wie kann man die möglichen Richtungsvektoren beschreiben?

Aufgabe A22 Beschreiben Sie die Gerade durch den Punkt $A = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ mit Steigung $-\frac{2}{3}$ durch eine Parameterdarstellung (es gibt unendlich viele korrekte Lösungen).

Aufgabe A23 Betrachten Sie die durch die Geradengleichung $f(x) = \frac{5}{7}x - 3$ gegebene Gerade. Stellen Sie diese Gerade in Parameterform dar (es gibt unendlich viele Lösungen).

Schnitt zweier in Parameterform gegebener Geraden (alias lineares Gleichungssystem lösen)

12.1.36. An Tafel erklärt und zusätzlich im Anhang aufgeschrieben, siehe A.0.1.

Merke 12.1.37 Gegenseitige Lage zweier Geraden

Für zwei Geraden in der Ebene gibt es die folgenden Fälle:
(a) Die beiden Geraden sind nicht parallel. Dann schneiden sie sich in genau einem Punkt.
(b) Die beiden Geraden sind parallel (d. h. die beiden Richtungsvektoren sind skalare Vielfache voneinander). Dann gibt es zwei Unterfälle:
  (i) Die beiden Geraden sind nicht gleich. Dann haben sie keinen Schnittpunkt.
  (ii) Die beiden Geraden sind gleich. Dann schneiden sie sich in jedem ihrer Punkte, d. h. die Schnittmenge stimmt mit jeder der beiden Geraden überein.

Aufgabe A24

(a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der folgenden beiden Geraden:

$$g(t) = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad h(s) = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-12\\7\end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der folgenden beiden Geraden:

$$g(t) = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix} \qquad h(s) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der folgenden beiden Geraden:

$$g(t) = \begin{pmatrix}22\\-5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix} \qquad h(s) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$$

Normalenform und Hessesche Normalenform einer Geraden Ludwig Otto Hesse (1811 – 1874)

Aufgabe A25 Gegeben ist der Vektor $\vec{n} = \binom{2}{1}$.

(a) Zeichne diesen Vektor als «Ursprungsvektor» in ein Koordinatensystem (Ursprungsvektor = Vektor mit Startpunkt im Ursprung $(0, 0)$).

(b) Finde mindestens drei Punkte A mit $\langle \vec{n}, \vec{A} \rangle = 0$. Markiere diese Punkte im Koordinatensystem in einer Farbe deiner Wahl.

(c) Finde mindestens drei Punkte B mit $\langle \vec{n}, \vec{B} \rangle = 5$ und markiere diese in einer neuen Farbe.

(d) Finde mindestens drei Punkte C mit $\langle \vec{n}, \vec{C} \rangle = 10$ und markiere diese in einer neuen Farbe.

(e) Finde mindestens drei Punkte D mit $\langle \vec{n}, \vec{D} \rangle = -5$ und markiere diese in einer neuen Farbe.

(f) Fällt dir etwas auf?

12.1.38. Seien $\vec{n} = \binom{a}{b} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor ungleich Null und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Welche Punktmenge beschreibt die folgende Gleichung? D. h.: Welche Punkte $P = (x, y)$ erfüllen die folgende Gleichung?

$$\left\langle \vec{n}, \vec{P} \right\rangle = c \iff ✎ \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = c \iff ax + by = c$$

Auflösen nach y ergibt (falls $b \neq 0$)[1] ✎

$$by = -ax + c$$
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Antwort: Eine Gerade mit Steigung $m = -\frac{a}{b}$ und y-Achsenabschnitt $q = \frac{c}{b}$.

Unser Vektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$ hat die Steigung

$$\frac{y\text{-Komponente}}{x\text{-Komponente}} = \frac{b}{a} = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} = -\frac{1}{m}$$

Also steht $\vec{n}$ senkrecht auf unserer Geraden.

Definition 12.1.39 Normalenform einer Geraden

Ist $\vec{n} = \binom{a}{b}$ ein beliebiger, vom Nullvektor verschiedener Vektor, so beschreibt die Gleichung

$$ax + by = c \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad \left\langle \vec{n}, \vec{P} \right\rangle = c$$

eine Gerade in der Ebene, die senkrecht zum sogenannten **Normalenvektor** $\vec{n} = \binom{a}{b}$ verläuft. Man nennt die obige Gleichung deswegen eine **Normalenform** dieser Geraden.
Falls der Vektor $\vec{n}$ normiert ist (= Länge 1 hat), d. h. $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ bzw. äquivalent $a^2 + b^2 = 1$ gilt, so spricht man von einer **Hesse-Normalenform** oder **hesseschen Normalenform**.

Statt «senkrecht» wird traditionell auch der Begriff «normal» verwendet – daher der Name «Normalenvektor».

Merke 12.1.40 Zeichnen einer Gerade in (hessescher) Normalenform

Sei eine Gerade in Normalenform $ax + by = c$ gegeben, die wir zeichnen möchten.

(1) Finde einen Punkt $Q = (x_Q, y_Q)$, der auf der Geraden liegt, also $ax_Q + by_Q = c$ erfüllt (stets kann man Q auf der x- oder auf der y-Achse wählen).

(2) Die gesuchte Gerade geht dann durch Q und steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$.

[1] Im Fall $b = 0$ hat unsere Gleichung $ax + by = c$ die Form $ax + 0y = ax = c$ bzw. $x = \frac{c}{a}$ (beachte: $a \neq 0$); diese Gleichung beschreibt offensichtlich eine vertikale Gerade. Der «horizontale» Vektor $\vec{n} = \binom{a}{b} = \binom{a}{0}$ steht senkrecht auf dieser Geraden.

Aufgabe A26 Zeichne jeweils die Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein und stelle dieselbe Gerade durch eine Hesse-Normalenform dar.

Hinweis zum Ermitteln der hesseschen Normalenform: Multiplikation mit einer geeigneten Zahl.

(a) Gerade g, gegeben durch die Normalenform $3x - 4y = 0$
(b) Gerade h_0, gegeben durch $2x - y = 0$
(c) Gerade h_2, gegeben durch $2x - y = 2$
(d) Gerade h_{-4}, gegeben durch $2x - y = -4$
(e) Gerade ℓ, gegeben durch $3x = 2$
(f) Gerade m, gegeben durch $y = 2$

Merke 12.1.41 Transformation von Normalenform in Hesse-Normalenform

Wenn eine Gerade durch eine Normalenform $ax + by = c$ gegeben ist, so ist

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

eine Hesse-Normalenform derselben Gerade. Mit anderen Worten: Division durch die Länge $\sqrt{a^2+b^2}$ des Normalenvektors verwandelt eine beliebige Normalenform in eine hessesche Normalenform.

Merke 12.1.42 Normalenform der Geraden durch gegebenen Punkt, senkrecht zu gegebenem Vektor

Seien ein Punkt $Q = (x_Q, y_Q)$ und ein (Normalen-)Vektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$ gegeben. Dann erhält man eine Normalenform der Geraden durch den Punkt Q, die senkrecht auf $\vec{n}$ steht, wie folgt:

- Definiere die reelle Zahl c durch

$$c := \left\langle \vec{n}, \vec{Q} \right\rangle = \left\langle \binom{a}{b}, \binom{x_Q}{y_Q} \right\rangle = ax_Q + by_Q$$

Dann ist

$$ax + by = c \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad \left\langle \vec{n}, \binom{x}{y} \right\rangle = \left\langle \vec{n}, \vec{Q} \right\rangle$$

die gesuchte Normalenform.

Aufgabe A27

(a) Zeichne in ein Koordinatensystem die folgenden drei Geraden ein:
- Gerade h: Sie geht durch die beiden Punkte $A = (4, -2)$ und $B = (-2, 3)$.
- Gerade g: Sie hat die Steigung $m = \frac{2}{3}$ und den y-Achsenabschnitt $q = -3$.
- Gerade ℓ: Sie geht durch den Punkt $C = (-3, -1)$ und hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \binom{-1}{-2}$.

(b) Bestimme für jede dieser drei Geraden:
- eine Normalenform und eine Hessesche Normalenform;
- eine weitere, neue Normalenform und eine weitere, neue Hessesche Normalenform.

Aufgabe A28 Bestimme für jede der drei Geraden aus der vorigen Aufgabe A27
- eine Parameterform der Geraden;
- eine «Standardform» $y = mx + q$ der Geraden (also als lineare Funktion).

Aufgabe A29 Benötigt elementare Kenntnisse im Lösen linearer Gleichungssysteme (zwei Gleichungen, zwei Variablen).

Schneide jeweils die beiden in Normalenform gegebenen Geraden!

(a) $3x + 2y = 2$ und $-2x + 5y = -1$ (prüfe dein Ergebnis zeichnerisch);
(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = 3\sqrt{5}$ und $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 2$;
(c) $6x + 21y = 3$ und $\frac{2}{\sqrt{53}}x + \frac{7}{\sqrt{53}}y = \frac{1}{\sqrt{53}}$.

Aufgabe A30 Bestimme den Abstand der Geraden g mit Normalenform $3x - 4y = 10$

(a) vom Ursprung $U = (0, 0)$;
(b) vom Punkte $A = (3, -4)$.

Aufgabe A31

(a) Lies und verstehe den Inhalt von Satz 12.1.44.
(b) Versuche, diesen Satz selbst zu beweisen.
(c) Lies den Beweis und verstehe ihn so gut, dass du jeden Schritt erklären kannst. Skizze anfertigen!
(d) Löse die vorherige Aufgabe A30 nun mit Hilfe dieses Satzes. Beachte dabei: Du musst die dort gegebene Normalenform erst hessesch machen («hessesieren»), um den Satz anwenden zu dürfen.
(e) Bestimme den Abstand der Geraden h mit Normalenform $2x - y = 3$
  (i) vom Ursprung $U = (0, 0)$;
  (ii) vom Punkte $A = (3, -4)$.
(f) Welche allgemeine Formel beschreibt den Abstand eines Punktes $P = (x_P, y_P)$ zu einer in Normalenform $ax + by = c$ gegebenen Geraden g? Beachte dabei: Die Normalenform ist nicht notwendig hessesch.

12.1.43. Der folgende Satz 12.1.44 zeigt einen der Vorteile der Hesse-Normalenform: Der Abstand eines Punktes zu einer in dieser Form gegebenen Geraden ist sehr einfach zu berechnen.

Satz 12.1.44 Abstand zwischen Punkt und Hesse-Normalenform-Gerade

Der Abstand eines Punktes $P = (x_P, y_P)$ zu einer in $\boxed{\text{Hesse-Normalenform}}$ $ax + by = c$ gegebenen Geraden g ist

$$\text{Abstand}(P, g) = |ax_P + by_p - c|$$

Beweis. Sei h die zu g senkrechte Gerade durch P. Der Abstand von P zu g ist der Abstand von P zum Schnittpunkt S von g mit h. Wir berechnen deswegen zuerst den Schnittpunkt S.

In Parameterform hat h die Beschreibung

$$h(t) = \overrightarrow{P} + t \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x_P + ta \\ y_P + tb \end{pmatrix}$$

Für welches t liegt dieser Punkt auf der Geraden g? D. h. für welches t erfüllen seine Koordinaten $x_P + ta$ und $y_P + tb$ die Bedingung $ax + by = c$? Eine Rechnung liefert die Antwort:

$$\begin{aligned} a(x_P + ta) + b(y_P + tb) &= c \\ ax_P + ta^2 + by_P + tb^2 &= c \\ ta^2 + tb^2 &= c - ax_P - by_P \\ t\,\underbrace{(a^2 + b^2)}_{=1;\ \text{warum?}} &= c - ax_P - by_P \\ t &= c - ax_P - by_P \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S hat also den Ortsvektor $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{P} + (c - ax_P - by_P) \cdot \overrightarrow{n}$. Subtraktion von $\overrightarrow{P}$ liefert den Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{P} = (c - ax_P - by_P) \cdot \overrightarrow{n}.$$

Die Länge dieses Verbindungsvektors ist der gesuchte Abstand, d. h.

$$\begin{aligned} \text{Abstand}(P, g) = \overline{PS} = \left|\overrightarrow{PS}\right| = |(c - ax_P - by_P) \cdot \overrightarrow{n}| &\overset{\text{Merke 12.1.9}}{=} |c - ax_P - by_P| \cdot \underbrace{|\overrightarrow{n}|}_{=1;\ \text{warum?}} \\ &= |c - ax_P - by_P| \end{aligned}$$

□

A Schnittpunkt zweier in Parameterform gegebener Geraden

Beispiel A.0.1. Zwei Geraden g und h sind wie folgt in Parameterform gegeben.

$$g(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt von g und h.

Zuerst ist es sinnvoll, den Parameter t in der Gleichung für h in s umzubenennen:

$$h(s) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Physikalisch formuliert: Gibt es Zeitpunkte t und s, so dass die Positionen $g(t)$ und $h(s)$ unserer beiden Teilchen übereinstimmen? Mathematisch: Gibt es reelle Zahlen t und s mit $g(t) = h(s)$?

$$\begin{aligned} & g(t) = h(s) \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} -2+3t \\ 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2s \\ 4-s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Gleichung von Vektoren besteht eigentlich aus zwei Gleichungen: Sowohl die ersten als auch die zweiten Komponenten unserer beiden Vektoren müssen übereinstimmen.

$$\iff \quad \begin{cases} -2+3t = -3+2s \\ 1+t = 4-s \end{cases} \quad \text{(lineares) Gleichungssystem, genauer: System zweier Gleichungen in zwei Variablen}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit der sogenannten **Substitutionsmethode** (= **Ersetzungsmethode**):

(1) Löse eine der beiden Gleichungen nach einer der beiden Variablen auf.
Wähle Gleichung und Variable so, dass du möglichst wenig Arbeit hast!

(2) Setze den so erhaltenen Ausdruck in die andere Gleichung ein. Dies liefert eine Gleichung in der «anderen» Variablen.

(3) Löse diese Gleichung auf.

(4) Setze das Ergebnis ein, um die zuerst gewählte Variable zu bestimmen.

Ausführung:

(1) Wir lösen die zweite Gleichung nach t auf und erhalten (die erste Gleichung schreiben wir unverändert ab):

$$\iff \quad \begin{cases} -2+3t = -3+2s \\ t = 3-s \end{cases}$$

(2) Laut der zweiten Gleichung gilt $t = 3-s$. Wir ersetzen (= substituieren) in der ersten Gleichung t deshalb durch den Ausdruck $5-s$ (die zweite Gleichung schreiben wir unverändert ab):

$$\iff \quad \begin{cases} -2+3(3-s) = -3+2s \\ t = 3-s \end{cases}$$

Vorteil: Die erste Gleichung enthält nur noch die Variable s.

(3) Löse die erste Gleichung nach der Variablen s auf:

$$-2+3(3-s) = -3+2s \iff -2+9-3s = -3+2s \iff 10 = 5s \iff 2 = s \iff s = 2$$

(4) Setze das Ergebnis $s = 2$ in die obige zweite Gleichung ein:

$$t = 3-s = 3-2 = 1.$$

Zwischenergebnis: Die Lösung unseres Gleichungssystems ist $s = 2$, $t = 1$.

Dies bedeutet: Es gilt $g(1) = h(2)$ und dieser Punkt/Ortsvektor ist der gesuchte Schnittpunkt!

Konkret ist der Schnittpunkt

$$g(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ hätte man auch $h(2)$ ausrechnen können. Wir machen dies als Probe: Kommt dasselbe heraus, wenn wir $h(2)$ berechnen?

$$h(2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Probe war erfolgreich.

Endergebnis: Unsere beiden Geraden g und h schneiden sich im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A.1 Lösungen

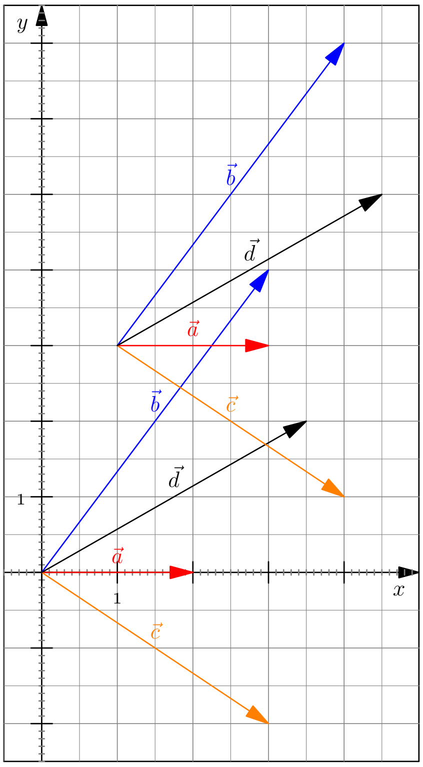
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe A1 ex-vektoren-2d-laenge



- Längen der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$$

$$|\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$|\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{d}| = \left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$

- Doppelt so lange Vektoren mit derselben Richtung (Vektor mit 2 multiplizieren):

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{d}' = \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

- Entgegengesetzte Richtung, selbe Länge (Vektor mit (-1) multiplizieren):

$$\vec{a}'' = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{b}'' = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}'' = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{d}'' = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

- Dieselbe Richtung, Länge 1 (Vektor durch seine Länge teilen):

$$\vec{a}''' = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{b}''' = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}''' = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\-\frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix} \qquad \vec{d}''' = \begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe A2 ex-vektoren-2d-skalarmultiplikation-fragen

(a) Mit welcher Zahl λ muss man den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ multiplizieren, um

 (i) einen Vektor der halben Länge zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $\frac{1}{2}$

 (ii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen x-Komponente 1 ist? $\frac{1}{3}$

(iii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen erste Komponente 4 ist? $\frac{4}{3}$

(iv) einen genauso langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? -1

(v) einen zweimal so langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? -2

(vi) einen Vektor der Länge 1 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}$

(vii) einen Vektor der Länge 10 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $10 \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{10}{5}$

(viii) einen Vektor der Länge 3 zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? $-3 \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = -\frac{3}{5}$

(b) Beantworten Sie dieselben Fragen für einen allgemeinen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(i) einen Vektor der halben Länge zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $\frac{1}{2}$

(ii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen x-Komponente 1 ist? $\frac{1}{x}$, wobei dies nur möglich ist, wenn $x \neq 0$ gilt.

(iii) einen Vektor zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt und dessen erste Komponente 4 ist? $\frac{4}{x}$, wobei dies nur möglich ist, wenn $x \neq 0$ gilt.

(iv) einen genauso langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? -1

(v) einen zweimal so langen Vektor zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? -2

(vi) einen Vektor der Länge 1 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(vii) einen Vektor der Länge 10 zu erhalten, der in dieselbe Richtung zeigt? $10 \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{10}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(viii) einen Vektor der Länge 3 zu erhalten, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt? $-3 \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{10}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Lösung zu Aufgabe A3 ex-vektoren-2d-skalarmultiplikation-laenge

Schreibe $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\lambda \cdot \vec{v}| &= \left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \right| && \text{nach Definition der Zahl-Vektor-Multiplikation} \\
&= \sqrt{(\lambda v_1)^2 + (\lambda v_2)^2} && \text{nach Definition der Länge eines Vektors} \\
&= \sqrt{\lambda^2 v_1^2 + \lambda^2 v_2^2} && \text{wegen Potenzgesetz } (ab)^e = a^e b^e \\
&= \sqrt{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)} && \text{wegen Distributivgesetz/Ausklammern } a(b+c) = ab + ac \\
&= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} && \text{wegen Wurzel-Rechengesetz } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\
&= |\lambda| \cdot |\vec{v}| && \text{da } |x| = \sqrt{x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und nach Definition der Länge eines Vektors}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe A4 ex-vektoren-2d-normieren

Die Annahme, dass $\vec{v}$ nicht Null ist, bedeutet, dass mindestens eine Komponente von $\vec{v}$ von Null verschieden ist. Damit ist die Länge $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} > 0$.

Wir berechnen nun die Länge des Vektors $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| &= \left| \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \right| && \text{nach der abkürzenden Schreibweise in der Definition der Zahl-Vektor-Multiplikation} \\
&= \left| \frac{1}{|\vec{v}|} \right| \cdot |\vec{v}| && \text{nach } |\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}| \text{ (siehe Merke 12.1.9) mit } \lambda = \frac{1}{|\vec{v}|} \\
&= \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| && \text{da } \frac{1}{|\vec{v}|} > 0 \\
&= \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1
\end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass der Vektor $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ die Länge Eins hat (= normiert ist = ein Einheitsvektor ist).

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu Aufgabe A5 ex-vektoren-2d-normieren-konkret

Jeder Vektor ist durch seine Länge zu teilen (d. h. Zahl-Vektor-Multiplikation mit dem Kehrwert der Länge).

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2^2+0^2}} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Wer mag, darf das auch so schreiben:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Die weiteren Lösungen:

$$\frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\-\frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{|\vec{d}|} \cdot \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}} \cdot \begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

Der Nullvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ kann nicht normiert werden, da er die Länge Null hat bzw. da er «keine Richtung hat».

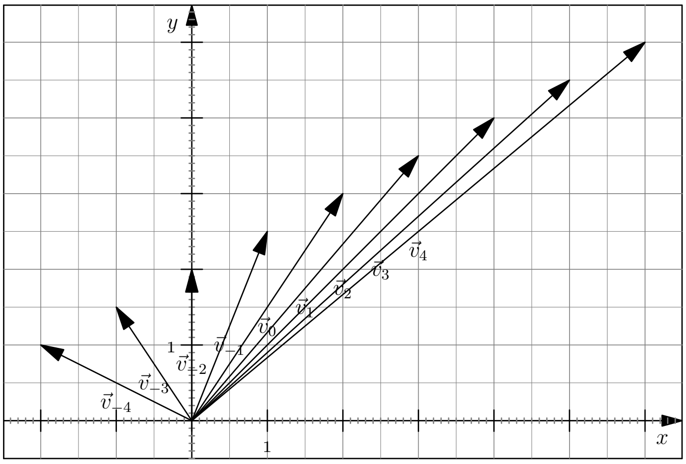
Lösung zu Aufgabe A6 ex-vektoren-2d-rechnen-ueben

Für $n = -4$ berechnet man zum Beispiel

$$\vec{v}_{-4} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(-4)\cdot 1\\(-4)\cdot 0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-4\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Analog berechnet man die anderen Vektoren. Sie liegen alle auf einer Geraden.

Warum liegen sie alle auf einer Geraden? Dazu ist es sinnvoll, zuerst die Vektoren $n \cdot \begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}$ zu betrachten (für die angegebenen Werte von n). Diese sind verschiedene Vielfache von $\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}$ und liegen deshalb alle auf einer Geraden durch den Ursprung. Nun verschiebt man die ganze Situation um den Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, d. h. man addiert zu jedem dieser Vektoren den festen Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Die Spitzen aller so erhaltenen Vektoren liegen dann auf der verschobenen Geraden.



Lösung zu Aufgabe A7 ex-vektor-zwischen-punkten-2d

Man rechnet jeweils «Endpunkt- minus Anfangspunkt», um die Verbindungsvektoren zu erhalten, d. h. als Formel $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

Alternativ kann man das auch so sehen: Wenn man den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zum Vektor $\overrightarrow{P}$ addiert, kommt $\overrightarrow{Q}$ heraus (als Formel $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q}$). Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ gibt also an, was man zu den Komponenten von $\overrightarrow{P}$ addieren muss, um den Vektor $\overrightarrow{Q}$ zu erhalten.

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-3\\2-(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

(d) Die Verschiebung von A nach C stimmt mit der Verschiebung von C nach B überein. Also liegt C genau in der Mitte zwischen A und B.

Lösung zu Aufgabe A8 ex-vektoren-2d-rechnen-mit-verbindungsvektoren

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Ausführlich kann man das so begründen:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{AC}$$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

c) $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

Lösung zu Aufgabe A9 ex-vektoren-2d-schwerpunkt

Zunächst kann man die Punkte A, B und C durch ihren Schwerpunkt S_{ABC} mit der dreifachen Masse ersetzen. Der Schwerpunkt S_{ABCD} teilt dann die Verbindungsstrecke $S_{ABC}D$ im Verhältnis $1:3$ (nach den Hebelgesetzen). Also gilt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S_{ABCD}} &= \overrightarrow{S_{ABC}} + \frac{1}{1+3}\overrightarrow{S_{ABC}D} \\
&= \overrightarrow{S_{ABC}} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{D} - \overrightarrow{S_{ABC}}\right) \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{S_{ABC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D} \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}\right) + \frac{1}{4}\overrightarrow{D} \qquad \text{nach der Formel für den Massenmittelpunkt dreier Punkte} \\
&= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}\right)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe A10 ex-vektoren-2d-winkelhalbierende

(a) Die beiden Vektoren haben dieselbe Länge: $|\vec{v}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$ und $|\vec{w}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$.
Zwei Vektoren spannen jeweils ein Parallelogramm auf (wenn man sie als Pfeile mit dem Ursprung als Anfangspunkt auffasst; der «vierte Eckpunkt» des Parallelogramms ist die Spitze von $\vec{v}+\vec{w}$). Da unsere beiden Vektoren dieselbe Länge haben, ist dieses Parallelogramm sogar ein Rhombus = eine Raute.
Jede Diagonale in einem Rhombus halbiert die Innenwinkel (da sie den Rhombus in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke teilt).
Also halbiert der Vektor $\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Jedes Vielfache dieses Vektors hat dieselbe Eigenschaft.

(b) Die beiden Vektoren haben nun nicht dieselbe Länge: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ und $|\vec{w}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Deswegen spannen sie ein Parallelogramm, aber keinen Rhombus auf. In einem solchen Parallelogramm halbieren die Diagonal die Innenwinkel nicht.

Wenn man beide Vektoren aber so skaliert, dass sie gleich lang sind (und dieselbe Richtung haben), so ist man im Setting von Teilaufgabe (a).

Man könnte beispielsweise beide Vektoren normieren oder den Vektor $\vec{w}$ mit $\sqrt{2}$ multiplizieren, um einen Vektor der Länge $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{10}$ zu erhalten.

Man kann auch die beiden Vektoren

$$\vec{v}' = |\vec{w}|\cdot\vec{v} = \sqrt{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sqrt{5}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$$
$$\vec{w}' = |\vec{v}|\cdot\vec{w} = \sqrt{10}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{10}\\2\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

betrachen. Sie haben beide die Länge $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{50}$, denn wir haben den Vektor $\vec{v}$ der Länge $\sqrt{10}$ mit $\sqrt{5}$ multipliziert und den Vektor $\vec{w}$ der Länge $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{10}$.

(Formal: Z. B. gilt $|\vec{v}'| = \Big||\vec{w}|\cdot\vec{v}\Big| = |\vec{w}|\cdot|\vec{v}| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{50}$.)

Die beiden Vektoren $\vec{v}'$ und $\vec{w}'$ spannen einen Rhombus auf (und zeigen in dieselben Richtungen wie $\vec{v}$ und $\vec{w}$). Also halbiert (wie bei der vorigen Aufgaben) der folgende «Diagonal-Vektor» den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\vec{v}' + \vec{w}' = \begin{pmatrix}3\sqrt{5}\\\sqrt{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{10}\\2\sqrt{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sqrt{5}+\sqrt{10}\\\sqrt{5}+2\sqrt{10}\end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch den Satz über die Winkelhalbierende verwenden: Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten. Dies führt allgemein auf den «Winkelhalbierendenvektor»

$$\begin{aligned}\vec{v} + \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\cdot(\vec{w}-\vec{v}) &= \left(1 - \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\right)\cdot\vec{v} + \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\cdot\vec{w}\\ &= \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\cdot\vec{v} + \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\cdot\vec{w}\\ &= \frac{1}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}\cdot\Big(|\vec{w}|\cdot\vec{v} + |\vec{v}|\cdot\vec{w}\Big)\end{aligned}$$

Bis auf den Skalierungsfaktor $\frac{1}{|\vec{v}|+|\vec{w}|}$ ist das genau der in (der Lösung von) Teilaufgabe (b) verwendete Vektor $\vec{v}' + \vec{w}'$.

Lösung zu Aufgabe A11 ex-rechtwinklige-vektoren-in-der-ebene

a) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe A12 ex-vektoren-2d-90-grad-drehen

(a) Man erhält den Vektor $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

Eine Skizze ist hilfreich! Die x-Komponente des gedrehten Vektors ist das Negative der y-Komponente des Ausgangsvektores. Die y-Komponente des gedrehten Vektors ist die x-Komponente des Ausgangsvektors.

(b) Siehe Lehrerversion des Skripts.

Lösung zu Aufgabe A13 ex-vektoren-2d-quadrat-rechteck

In jedem Parallelogramm $ABCD$ sind die Verbindungsvektoren gegenüberliegender Seiten gleich, d. h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$. Insbesondere gilt dies für Quadrate und Rechtecke.

(a) Zwei Beobachtungen helfen:

- Der Vektor $\overrightarrow{AD}$ entsteht aus dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ durch eine Drehung um 90°.
- «Man erhält D, indem man an A den Vektor $\overrightarrow{AD}$ dranhängt.»

Wir berechnen zuerst

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \binom{3}{1} - \binom{2}{5} = \binom{1}{-4}$$

Die Drehung dieses Vektors um 90° ist $\binom{-(-4)}{1} = \binom{4}{1}$. Dies ist nach der obigen Beobachtung der Vektor $\overrightarrow{AD}$, d. h.

$$\overrightarrow{AD} = \binom{4}{1}$$

Nach der zweiten Beobachtung gilt

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{AD} = \binom{2}{5} + \binom{4}{1} = \binom{6}{6}$$

Also $D = (6, 6)$.
Nun kann man $\vec{C}$ entweder per $\vec{C} = \vec{D} + oraDC = \vec{D} + \overrightarrow{AB}$ oder per $\vec{C} = \vec{B} + oraBC = \vec{B} + \overrightarrow{AD}$ berechnen und erhält $C = (7, 2)$.

(b) Wir können die vorige Teilaufgabe verwenden und erhalten

$$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \vec{A} + 2\overrightarrow{AD} = \binom{2}{5} + 2 \cdot \binom{4}{1} = \binom{10}{7}$$

und damit $F = (10, 7)$. Ähnlich erhält man $E = (11, 3)$.

Lösung zu Aufgabe A14 ex-gleichseitiges-dreieck-neu

In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe das $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache der Seite. (Mit Höhe ist die Länge der Höhe, mit Seite die Länge der Seite gemeint.)

(a) Die x-Koordinate von C ist offensichtlich $\frac{1}{2}$, die y-Koordinate ist die Höhe des Dreiecks, also $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$. Also gilt $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) Allgemein gilt: Um von A nach C zu gelangen, geht man von A aus die Hälfte des Wege nach B, biegt dann rechtwinklig nach links ab und geht das $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache der Länge $s = \overline{AB}$ vorwärts.
Wenn wir $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ schreiben und $\vec{w}$ die Drehung von $\vec{v}$ um 90° bezeichnet, gilt also in mathematischer Symbolsprache:

$$\vec{C} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{w}$$

Damit erhalten wir

$$\vec{C} = \binom{0}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \binom{-1}{4} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Also $C = \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) Siehe Lösung der vorigen Teilaufgabe.

Lösung zu Aufgabe A15 ex-vektoren-2d-skalarprodukt-selbst-entdecken

Man könnte zum Beispiel (heuristisch) so vorgehen. Zwei Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn $\vec{w}$ ein Vielfaches des um 90° gedrehten Vektors $\vec{v}$ ist, wenn also gilt:

$$\text{Es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \binom{w_1}{w_2} = \lambda \cdot \binom{-v_2}{v_1}.$$

Dies ist gleichbedeutend zu:

$$\text{Es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } w_1 = -\lambda v_2 \text{ und } w_2 = \lambda v_1.$$

Dies ist gleichbedeutend zu:

$$\text{Es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } -\frac{w_1}{v_2} = \lambda \text{ und } \frac{w_2}{v_1} = \lambda.$$

Dies ist gleichbedeutend zu:

$$-\frac{w_1}{v_2} = \frac{w_2}{v_1}$$

Dies ist gleichbedeutend zu (multiplizere mit v_2 und v_1):

$$-v_1w_1 = v_2w_2$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$0 = v_1w_1 + v_2w_2$$

Bemerkung: Am Anfang dieser Lösung wurde das Wort «heuristisch» eingefügt, denn genaugenommen stimmt unser Argument nur dann, wenn $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ gelten. Die anderen Fälle müsste man noch separat betrachten.

Dies ist ein Grund, warum in der Lehrerversion der Beweis mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras steht: Dieser Beweis vermeidet die Betrachtung von Spezialfällen.

Lösung zu Aufgabe A16 ex-skalarprodukt-senkrecht

Die folgende Tabelle gibt «die Hälfte» der Skalarprodukte zwischen verschiedenen Vektoren an (Berechnungen siehe unten). Die andere Hälfte (unter der Diagonalen) erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen, denn allgemein gilt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 = w_1v_1 + w_2v_2 = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.

Die Tabelle zeigt:

- $\vec{a}$ und $\vec{c}$ stehen senkrecht aufeinander.
- $\vec{b}$ und $\vec{d}$ stehen senkrecht aufeinander.
- $\vec{b}$ und $\vec{e}$ stehen senkrecht aufeinander.
- Alle anderen Paare von Vektoren stehen nicht senkrecht aufeinander.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
$\vec{a}$		918	0	−60	150
$\vec{b}$			−75	0	0
$\vec{c}$				−510	1275
$\vec{d}$					−1010
$\vec{e}$					

Rechnungen:

Alle Skalarprodukte mit $\vec{a}$ als erstem oder zweitem Argument:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -30 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \cdot 3 + (-30) \cdot (-30) = 918 \qquad = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \cdot 25 + (-30) \cdot 5 = 0 \qquad = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$$

$$\left\langle \vec{a}, \vec{d} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \cdot (-20) + (-30) \cdot (-2) = -60 \qquad = \left\langle \vec{d}, \vec{a} \right\rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \cdot 50 + (-30) \cdot 5 = 150 \qquad = \langle \vec{e}, \vec{a} \rangle$$

Alle noch fehlenden Skalarprodukte mit $\vec{b}$ als erstem oder zweitem Argument:

$$\left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 25 + (-30) \cdot 5 = -75 \qquad = \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{b}, \vec{d} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot (-20) + (-30) \cdot (-2) = 0 \qquad = \left\langle \vec{d}, \vec{b} \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{b}, \vec{e} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 50 + (-30) \cdot 5 = 0 \qquad = \left\langle \vec{e}, \vec{b} \right\rangle$$

Alle noch fehlenden Skalarprodukte mit $\vec{c}$ als erstem oder zweitem Argument:

$$\left\langle \vec{c}, \vec{d} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 25 \cdot (-20) + 5 \cdot (-2) = -510 \qquad = \left\langle \vec{d}, \vec{c} \right\rangle$$

$$\langle \vec{c}, \vec{e} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 25 \cdot 50 + 5 \cdot 5 = 1275 \qquad = \langle \vec{e}, \vec{c} \rangle$$

Alle noch fehlenden Skalarprodukte mit $\vec{d}$ als erstem oder zweitem Argument:

$$\left\langle \vec{d}, \vec{e} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -20 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = (-20) \cdot 50 + (-2) \cdot 5 = -1010 \qquad = \left\langle \vec{e}, \vec{d} \right\rangle$$

Lösung zu Aufgabe A17 ex-finde-senkrechten-parallelen-vektor

(a) Genau dann stehen $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander, wenn $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$ gilt, wenn also $x \cdot 6 + 1 \cdot 15 = 0$ gilt. Aufgelöst nach x ergibt sich $x = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} = -2.5$.

(b) Alle zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ parallelen Vektoren haben die Form $\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6\lambda \\ 15\lambda \end{pmatrix}$. Wenn der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ diese Form haben soll, muss $\begin{pmatrix} 6\lambda \\ 15\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ für geeignete reelle Zahlen λ und x gelten, d. h. $6\lambda = x$ und $15\lambda = 1$. Die zweite Gleichung ist nur für $\lambda = \frac{1}{15}$ erfüllt, und um dann die erste Gleichung zu erfüllen, muss $x = 6\lambda = 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{6}{15}$ gelten.

Lösung zu Aufgabe A18 ex-skalarprodukt-laenge

Es gelten

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_1 v_1 + v_2 v_2 = v_1^2 + v_2^2$$

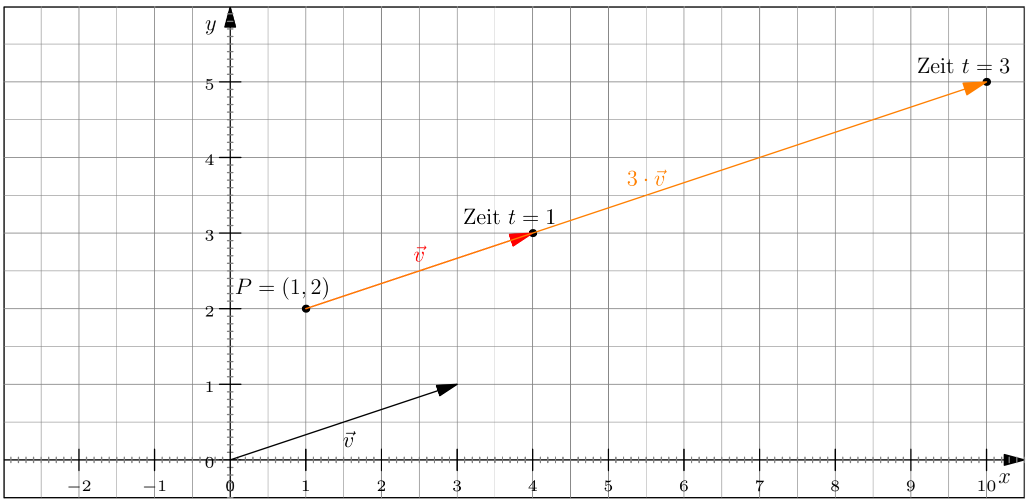
und

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Also $|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ bzw. quadriert $|\vec{v}|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

Lösung zu Aufgabe A19 ex-motivation-parametergleichung-gerade

- Skizze:



- Zur Zeit $t = 1$ ist der Ball am Punkt (mit dem Ortsvektor) $\vec{P} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  Zur Zeit $t = 3$ ist der Ball am Punkt (mit dem Ortsvektor) $\vec{P} + 3 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

  Zur Zeit $t = 100$ ist der Ball am Punkt (mit dem Ortsvektor) $\vec{P} + 3 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 100 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 301 \\ 102 \end{pmatrix}$.

- Zur Zeit t ist der Ball am Punkt (mit dem Ortsvektor) $\vec{P} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 2 + t \end{pmatrix}$.

-
  - Wird Schüler X getroffen? Er wird genau dann getroffen, wenn es eine Zeit/reelle Zahl t mit $\vec{P} + t \cdot \vec{v} = X$ gibt, d. h.

  $$\begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

  Diese Vektorgleichung (= Gleichung von Vektoren) bedeutet, dass die ersten und zweiten Komponenten der beiden beteiligten Vektoren übereinstimmen müssen. Dies führt zu zwei Gleichungen:

$1+3t = 70$ und $2+t = 30$, die **gleichzeitig** zu lösen sind. Die erste Gleichung hat die Lösung $t = 23$, die zweite die Lösung $t = 28$. Also sind die beiden Gleichungen nicht gleichzeitig lösbar, d.h. Schüler X wird nicht getroffen.

– Wird Schüler Y getroffen? Er wird genau dann getroffen, wenn es eine Zeit/reelle Zahl t mit $\overrightarrow{P}+t\cdot\overrightarrow{v} = Y$ gibt, d. h.

$$\begin{pmatrix}1+3t\\2+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}70\\25\end{pmatrix}$$

Wie oben sind die beiden Gleichungen $1+3t = 70$ und $2+t = 25$ **gleichzeitig** zu lösen. Die erste Gleichung hat die Lösung $t = 23$, die zweite die Lösung $t = 23$. Also sind die beiden Gleichungen gleichzeitig lösbar, d.h. Schüler Y wird getroffen, und zwar zur Zeit $t = 23$.

- Die Geschwindigkeit des Balls ist $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$ «Einheiten pro Zeiteinheit».

Lösung zu Aufgabe A20 ex-von-parametergleichung-zur-geradengleichung

(a) Der Aufpunkt = Stützpunkt ist $(-3, 4)$ bzw. als Stützvektor $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor ist $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

(b) Die Steigung ist $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

(c)
- Schnitt mit x-Achse: Gesucht sind t und x mit

$$\begin{aligned}
&& f(t) &= \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\\
\iff && \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\\
\iff && &\begin{cases}-3+2t = x\\ 4-t = 0\end{cases}\\
\iff && &\begin{cases}-3+2t = x\\ 4 = t\end{cases}\\
\iff && &\begin{cases}-3+2\cdot 4 = 5 = x\\ 4 = t\end{cases}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist also $(5, 0)$.

- Schnitt mit y-Achse. Gesucht sind t und y mit

$$\begin{aligned}
&& f(t) &= \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\\
\iff && \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\\
\iff && &\begin{cases}-3+2t = 0\\ 4-t = y\end{cases}\\
\iff && &\begin{cases}t = \dfrac{3}{2}\\ 4-t = y\end{cases}\\
\iff && &\begin{cases}t = \dfrac{3}{2}\\ 4-\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} = 2.5 = y\end{cases}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist also $(0, 2.5)$.

(d) Wir haben oben gesehen: Die Steigung ist $-\frac{1}{2}$; der y-Achsenabschnitt ist $2.5 = \frac{5}{2}$ (denn wir haben den Schnittpunkt mit der y-Achse berechnet).
Also ist die gesuchte Geradengleichung $y = \ell(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Lösung zu Aufgabe A21 ex-parametergleichung-zwei-punkte

(a) Eine mögliche Parametrisierung der Geraden: $g(t) = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \binom{-1}{2} + t \cdot \binom{6}{-3}$.

(b) $h(t) = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{BA} = \binom{-1}{2} + t \cdot \binom{-6}{3}$.

(c) $i(t) = \overrightarrow{B} + t \cdot \overrightarrow{BA} = \binom{5}{-1} + t \cdot \binom{-6}{3}$.

(d) Jeder Punkt auf der Geraden ist ein möglicher Aufpunkt, d. h. für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $g(t) = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \binom{-1}{2} + t \cdot \binom{6}{-3}$ ein möglicher Aufpunkt (geschrieben als Vektor).

Jedes skalare Vielfache von $\binom{6}{-3}$ ist eine möglicher Richtungsvektor, d. h. für jedes $s \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $s \cdot \binom{6}{-3}$ eine möglicher Richtungsvektor.

Lösung zu Aufgabe A22 ex-parametergleichung-punkt-steigung

Eine mögliche Parametrisierung ist $\ell(t) = \binom{-1}{-3} + t \cdot \binom{3}{-2}$, eine andere $m(t) = \binom{-1}{-3} + t \cdot \binom{1}{-\frac{2}{3}}$.

Lösung zu Aufgabe A23 ex-von-geradengleichung-zur-parametergleichung

Die beiden Punkte $A := (0, f(0)) = (0, -3)$ und $B := (7, f(7)) = (7, 2)$ liegen auf unserer Geraden. Also ist $g(t) = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \binom{0}{-3} + t \cdot \binom{7}{5}$ eine mögliche Parametrisierung.

Lösung zu Aufgabe A24 ex-geraden-in-parameterform-schneiden

(a) Der Schnittpunkt ist $(4, \frac{2}{3})$ (für $t = \frac{7}{3}$ und $s = -\frac{1}{3}$).
Ausführlich: Gesucht sind t und s mit

$$
\begin{aligned}
& g(t) = h(s) \\
\iff\quad & \binom{-3}{-4} + t \cdot \binom{3}{2} = \binom{0}{3} + s \cdot \binom{-12}{7} \\
\iff\quad & \begin{cases} -3 + 3t = 0 - 12s \\ -4 + 2t = 3 + 7s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} 3t = 3 - 12s \\ -4 + 2t = 3 + 7s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4s \\ -4 + 2t = 3 + 7s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4s \\ -4 + 2(1 - 4s) = 3 + 7s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4s \\ -4 + 2 - 8s = 3 + 7s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4s \\ -5 = 15s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4s \\ -\dfrac{1}{3} = s \end{cases} \\
\iff\quad & \begin{cases} t = 1 - 4\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{3} \\ -\dfrac{1}{3} = s \end{cases}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt als $g(\frac{7}{3}) = h(-\frac{1}{3}) = (4, \frac{2}{3})$.

(b) Es gibt keinen Schnittpunkt, da die Geraden parallel, aber verschieden sind.
Ausführlich: Gesucht sind t und s mit

$$\begin{aligned}
& g(t) = h(s) \\
& \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases}-3+15t = 2-10s \\ -4-6t = 3+4s\end{cases} \\
\iff & \begin{cases}15t = 5-10s \\ -7-6t = 4s\end{cases} \\
\iff & \begin{cases}t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s \\ -7-6\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}s\right) = 4s\end{cases} \\
\iff & \begin{cases}t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s \\ -7-2+4s = 4s\end{cases} \\
\iff & \begin{cases}t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s \\ -9 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

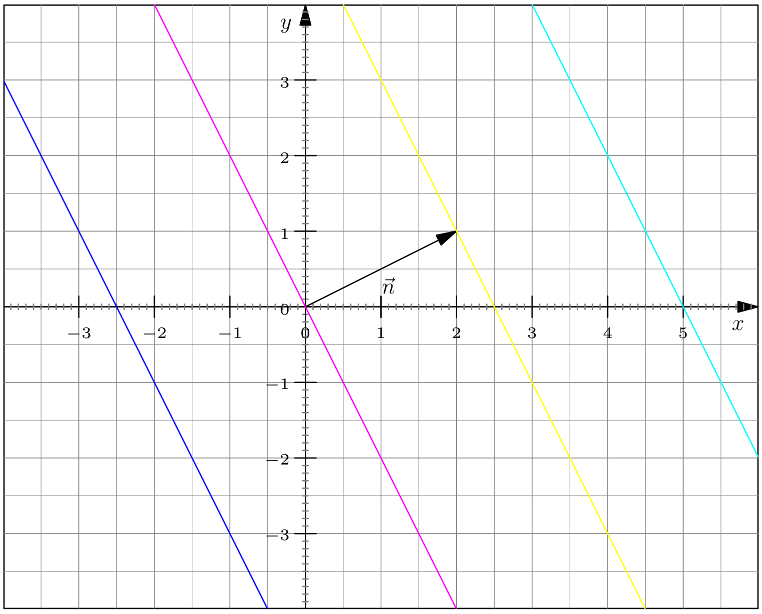
Also hat die Gleichung $g(t) = h(s)$ keine Lösung, d. h. die Geraden haben keinen Schnittpunkt.

(c) Die beiden Geraden sind gleich, d. h. jeder ihrer Punkte ist ein Schnittpunkt.
Ausführlich: Gesucht sind t und s mit

$$\begin{aligned}
& g(t) = h(s) \\
& \begin{pmatrix}22\\-5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix} \\
& \begin{cases}22+15t = 2-10s \\ -5-6t = 3+4s\end{cases} \\
& \begin{cases}15t = -20-10s \\ -8-6t = 4s\end{cases} \\
& \begin{cases}t = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}s \\ -8-6\left(-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}s\right) = 4s\end{cases} \\
& \begin{cases}t = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}s \\ -8+8+4s = 4s\end{cases} \\
& \begin{cases}t = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}s \\ 0 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

D.h. man kann $s \in \mathbb{R}$ beliebig wählen und erhält daraus t nach der obigen Formel. Dies bedeutet, dass jeder Punkt der Geraden h ein Punkt der Geraden g ist (und umgekehrt, denn man erhält jedes $t \in \mathbb{R}$ für ein geeignetes $s \in \mathbb{R}$). Also sind die beiden Geraden gleich.

Lösung zu Aufgabe A25 ex-niveaulinien-skalarprodukt-mit-vektor

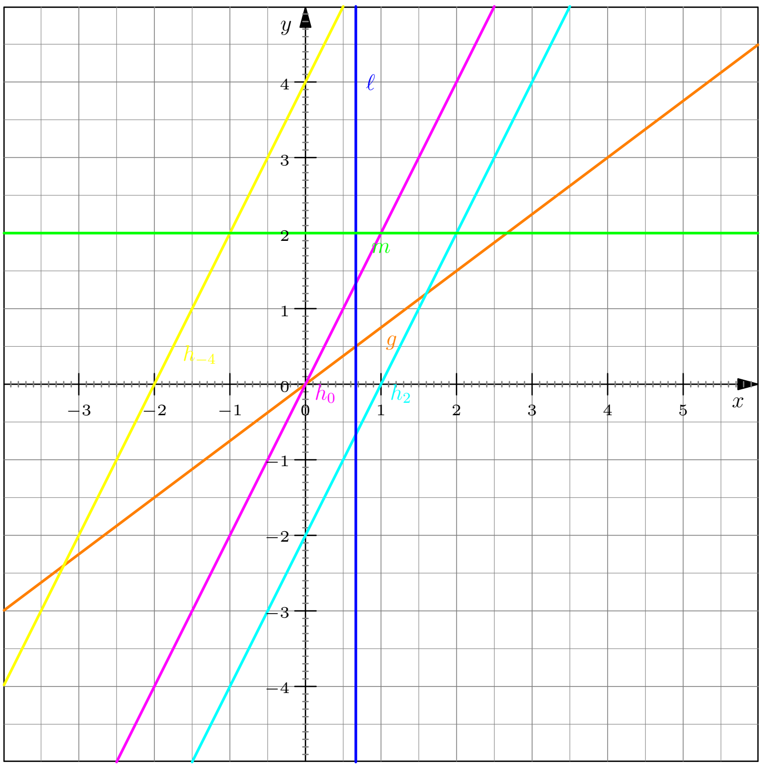


Die möglichen Punkte

- A liegen auf der magentafarbenen Geraden;
- B liegen auf der gelben Geraden;
- C liegen auf der cyanfarbenen Geraden;
- D liegen auf der blauen Geraden.

Was fällt dir auf? Die jeweiligen Punkte liegen auf einer Geraden.

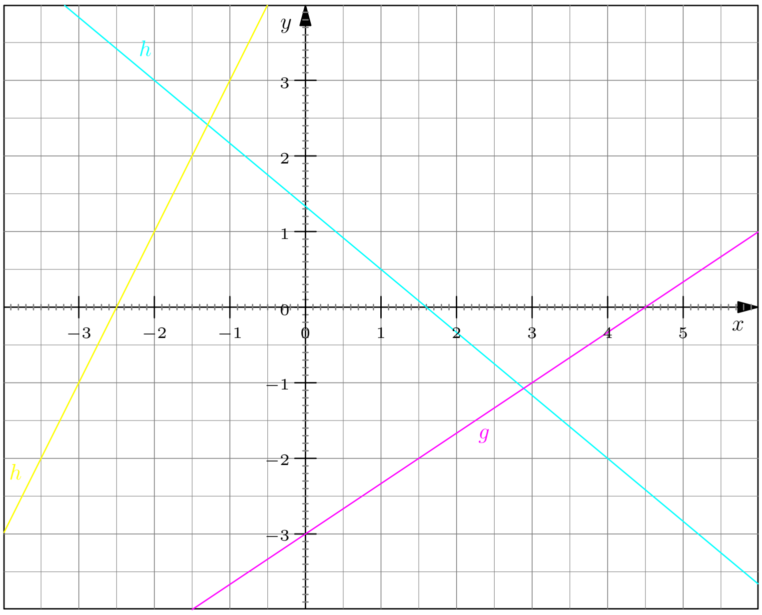
Lösung zu Aufgabe A26 ex-hesse-normalenform-gerade-zeichnen



Wir geben jeweils eine Hesse-Normalenform an. Es gibt jeweils noch genau eine zweite Hesse-Normalenform, die man per Multiplikation mit -1 erhält.

(a) Gerade g, gegeben durch die Normalenform $3x-4y=0$; eine Hesse-Normalenform erhält man per Division durch $\sqrt{3^2+4^2}=5$, d. h. sie ist $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=0$; die andere Hesse-Normalenform ist $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$.
(b) Gerade h_0, gegeben durch $2x-y=0$; Hesse-Normalenform ist $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y=0$.
(c) Gerade h_2, gegeben durch $2x-y=2$; Hesse-Normalenform ist $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y=\frac{2}{\sqrt{5}}$.
(d) Gerade h_{-4}, gegeben durch $2x-y=-4$; Hesse-Normalenform ist $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{4}{\sqrt{5}}y=\frac{-4}{\sqrt{5}}$.
(e) Gerade ℓ, gegeben durch $3x=2$; Hesse-Normalenform ist $x=\frac{2}{3}$ (oder gleichbedeutend $1x+0y=\frac{2}{3}$).
(f) Gerade m, gegeben durch $y=2$; Hesse-Normalenform ist $y=2$.

Lösung zu Aufgabe A27 ex-hesse-normalenform-ermitteln



- Gerade h in Cyan: Sie geht durch die beiden Punkte $A=(4,-2)$ und $B=(-2,3)$.
  Normalenformen: Richtungsvektor ist zum Beispiel $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$. Dreht man ihn um $90°$, so erhält man den Normalenvektor $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$. Die zugehörige Normalenform hat die Gestalt $-5x-6y=c$ für ein geeignetes $c\in\mathbb{R}$. Damit der Punkt A auf der Geraden liegt, muss $c=-5x_A-6y_A=-5\cdot 4-6\cdot(-2)=-8$ gelten.
  Also sind $-5x-6y=-8$ und jedes Vielfache davon (bis auf das Nullfache), etwa $5x+6y=8$, Normalenformen.
  Die beiden Hesse-Normalenformen sind $-\frac{5}{\sqrt{61}}x-\frac{6}{\sqrt{61}}y=-\frac{8}{\sqrt{61}}$ und $\frac{5}{\sqrt{61}}x+\frac{6}{\sqrt{61}}y=\frac{8}{\sqrt{61}}$.
- Gerade g in Magenta: Sie hat die Steigung $m=\frac{2}{3}$ und den y-Achsenabschnitt $q=-3$.
  Als lineare Funktion ist g durch $y=g(x)=\frac{2}{3}x-3$ gegeben.
  Durch Subtraktion von $\frac{2}{3}x$ folgt $-\frac{2}{3}x+y=-3$. Dies ist eine Normalenform, jedes Vielfache davon (bis auf das Nullfache) ist eine weitere Normalenform, also z. B. $-2x+3y=-9$.
  Die beiden Hesse-Normalenformen sind $-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y=\frac{-9}{\sqrt{13}}$ und dessen Negatives $\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y=\frac{9}{\sqrt{13}}$.
- Gerade ℓ in Gelb: Sie geht durch den Punkt $C=(-3,-1)$ und hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.
  Einen Normalenvektor erhält man durch Drehen des Richtungsvektors um $90°$, also $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Also hat die zugehörige Normalenform die Gestalt $2x-y=c$ und es muss gelten $c=2x_C-y_C=2\cdot(-3)-(-1)=-5$.
  Also ist $2x-y=-5$ eine Normalenform, und somit beispielsweise auch dessen Zweifaches $4x-2y=-10$.
  Die beiden Hesse-Normalenformen sind $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y=-\frac{5}{\sqrt{5}}$ und $-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y=\frac{5}{\sqrt{5}}$.

Lösung zu Aufgabe A28 ex-gerade-in-drei-formen-angeben

- Parameterform
  - von h: $\overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$
  - von g: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - von ℓ: $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- «Standardform» (also dargestellt als lineare Funktion)
  - für h: Aus $5x + 6y = 8$ erhält man durch Auflösen nach y die Standardform $y = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$.
  - für g: Standardform ist $y = \frac{2}{3}x - 3$. Diese wurde bereits oben angegeben und folgt direkt aus der Definition der Geraden.
  - für ℓ: Aus $2x - y = -5$ erhält man durch Auflösen nach y die Standardform $y = 2x + 5$.

Lösung zu Aufgabe A29 ex-hesse-geraden-schneiden

(a)

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -2x + 5y = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = 1 - \dfrac{3}{2}x \\ -2x + 5\left(1 - \dfrac{3}{2}x\right) = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = 1 - \dfrac{3}{2}x \\ -2x + 5 - \dfrac{15}{2}x = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = 1 - \dfrac{3}{2}x \\ -4x + 10 - 15x = -2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = 1 - \dfrac{3}{2}x \\ \dfrac{12}{19} = x \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = 1 - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{12}{19} = \dfrac{1}{19} \\ \dfrac{12}{19} = x \end{cases}
\end{aligned}$$

(Gerne Probe ausführen)
Der Schnittpunkt ist also $\left(\frac{12}{19}, \frac{1}{19}\right)$.

(b)

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = 3\sqrt{5} \\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + 2y = 15 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = 15 - 2y \\ 3 \cdot (15 - 2y) - 4y = 10 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = 15 - 2y \\ 45 - 6y - 4y = 10 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = 15 - 2y \\ 35 = 10y \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = 15 - 2 \cdot 3.5 = 8 \\ 3.5 = y \end{cases}
\end{aligned}$$

(Gerne Probe ausführen)
Der Schnittpunkt ist $(8, 3.5)$.

(c) Wer aufmerksam ist, sieht sofort, dass die erste Gleichung aus der zweiten durch Multiplikation mit $3\sqrt{53}$ entsteht. Deswegen beschreiben beide Gleichungen dieselbe Gerade, d. h. die Schnittpunkte sind genau die Punkte dieser Geraden.
Wer rechnen mag:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 6x + 21y = 3 \\ \frac{2}{\sqrt{53}}x + \frac{7}{\sqrt{53}}y = \frac{1}{\sqrt{53}} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 6x + 21y = 3 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 6x + 21y = 3 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases} \\
\iff &\quad 2x + 7y = 1
\end{aligned}$$

Dies bedeutet: Alle Punkte der Geraden $2x + 7y = 1$ lösen das Gleichungssystem. D. h. alle diese Punkte sind Schnittpunkte der beiden Geraden.

Lösung zu Aufgabe A30 ex-hesse-normalenform-abstand-zu-punkt

Die Gerade g ist durch die Normalenform $3x - 4y = 10$ gegeben, der Normalenvektor ist $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Die Gerade durch $U = (0, 0)$, die senkrecht auf g steht, kann durch die Parametrisierung

$$h(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \overrightarrow{n} = t \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3t \\ -4t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Der gesuchte Abstand ist der Abstand von U zum Schnittpunkt von g und h.
Der «variable» Punkt $h(t)$ liegt genau dann auf g (definiert per $3x - 4y = 10$), wenn

$$3 \cdot 3t - 4 \cdot (-4t) = 10$$

gilt, was äquivalent zu $t = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$ ist.
Also ist $S = (3t; -4t) = (1.2, -1.6)$ der Schnittpunkt.
Der gesuchte Abstand ist also

$$\sqrt{(1.2-0)^2 + (-1.6-0)^2} = \sqrt{1.2^2 + 1.6^2} = \sqrt{1.44 + 2.56} = \sqrt{4} = 2$$

«Probe»: Wir wenden Satz 12.1.44 an: Zuerst «hessesieren» wir unsere Normalenform zu $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}y = 2$ und erhalten dann

$$\text{Abstand}(U, g) = \left|\frac{3}{5}x_U - \frac{4}{5}y_U - 2\right| = \left|\frac{3}{5} \cdot 0 - \frac{4}{5} \cdot 0 - 2\right| = |-2| = 2$$

(b) Wir gehen wir zuvor vor, nur verwenden wir nun die Senkrechte h zu g durch A mit Parametrisierung

$$h(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3+3t \\ -4-4t \end{pmatrix}$$

Der «variable» Punkt $h(t)$ liegt genau dann auf g (definiert per $3x - 4y = 10$), wenn

$$3 \cdot (3+3t) - 4 \cdot (-4-4t) = 10$$

gilt, was äquivalent zu $t = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5} = -0.6$ ist. Also ist $S = (1.2, -1.6)$ der Schnittpunkt. Der gesuchte Abstand ist also

$$\sqrt{(1.2-3)^2 + (-1.6-(-4))^2} = \sqrt{1.8^2 + 2.4^2} = \sqrt{3.24 + 5.76} = \sqrt{9} = 3$$

«Probe»: Wir wenden Satz 12.1.44 an: Zuerst «hessesieren» wir unsere Normalenform zu $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}y = 2$ und erhalten dann

$$\text{Abstand}(A, g) = \left|\frac{3}{5}x_A - \frac{4}{5}y_A - 2\right| = \left|\frac{3}{5} \cdot 3 - \frac{4}{5} \cdot (-4) - 2\right| = \left|\frac{9}{5} + \frac{16}{5} - 2\right| = \left|\frac{25}{5} - 2\right| = |5-2| = 3$$

Lösung zu Aufgabe A31 ex-satz-abstand-punkt-hessegerade

(a)
(b)
(c)
(d) Siehe die beiden «Proben» in der Lösung von Aufgabe A30.
(e) Die Gerade h hat die Hesse-Normalenform $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Damit erhalten wir

$$\text{Abstand}(U, h) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}x_U - \frac{1}{\sqrt{5}}y_U - \frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \left|-\frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

und

$$\begin{aligned}\text{Abstand}(A, h) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}x_A - \frac{1}{\sqrt{5}}y_A - \frac{3}{\sqrt{5}}\right| &= \left|\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-4) - \frac{3}{\sqrt{5}}\right| \\ &= \left|\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{7}{\sqrt{5}}\right| = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{5}\end{aligned}$$

(f) Die oder genauer eine (der beiden) «Hessesierung(en)» von $ax + by = c$ ist $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Auf diese darf man Satz 12.1.44 anwenden und erhält

$$\text{Abstand}(P, g) = \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot x_P + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_p - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot |ax_P + by_p - c|$$