Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

14 Analytische Geometrie = Vektorgeometrie (Fortsetzung)

14.0.1. Bisher haben wir Vektorgeometrie in der Ebene, also im zweidimensionalen Raum, betrieben. Nun wenden wir uns dem dreidimensionalen Raum zu. Viele Begriffe und Konzepte (z. B. Rechnen mit Vektoren, Skalarprodukt, Parameterdarstellung von Geraden etc.), die wir in zwei Dimensionen behandelt haben, lassen sich leicht auf den dreidimensional Fall verallgemeinern (und übrigens auch auf den n-dimensionalen Fall).

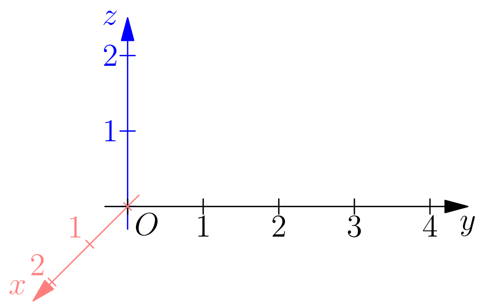
14.0.2. Im zweidimensionalen Raum haben wir neben den einfachsten Objekten, den Punkten, bisher vor allem Geraden (also besonders einfache «eindimensionale Unterobjekte des zweidimensionalen Raumes») studiert. Im dreidimensionalen Raum werden wir neben Punkten und Geraden insbesondere Ebenen (also besonders einfache «zweidimensionale Unterobjekte des dreidimensioalen Raums») studieren und beschreiben.

14.1 Dreidimensionales Koordinatensystem

14.1.1. Zur Beschreibung von Punkten im (dreidimensionalen) Raum verwendet man meistens ein (rechtwinkliges) *räumliches Koordinatensystem* (= *dreidimensionales Koordinatensystem*).

Man wählt dazu einen beliebigen Punkt O als den sogenannten **Ursprung** oder **Nullpunkt** (Buchstabe O wegen lateinisch *origo* oder englisch *origin*), eine feste Einheitslänge und drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Strahlen durch den Ursprung. Diese Strahlen bilden die **Koordinatenachsen** und werden meist als x-, y- und z-Achse bezeichnet.

Nach der Wahl eines Koordinatensystems kann jeder Punkt des Raums in offensichtlicher und eindeutiger Weise durch seine drei Koordinaten beschrieben werden. Zum Beispiel gilt $O = (0, 0, 0)$.



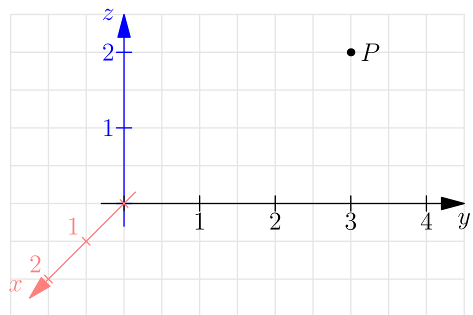
14.1.2. In der Regel verwenden wir ein **rechtsdrehendes** Koordinatensystem; dies bedeutet, dass x-, y- und z-Achse wie **Daumen** (x), **Zeigefinger** (y) und **Mittelfinger** (z) der **rechten Hand** orientiert sind.

14.1.3. In zweidimensionalen Zeichnungen wird das Koordinatensystem im **Schrägbild** meistens wie rechts unten gezeigt dargestellt:

- Die x-Achse weist nach unten links («in Richtung des Lesers»),
- die y-Achse nach rechts und
- die z-Achse nach oben.

Typischerweise ist eine x-Einheit auf dem Papier halb so lang wie die Diagonale im «Einheitsquadrat» in der y-z-Ebene.

Im Koordinatensystem rechts ist ein Punkt P eingezeichnet. Welche Koordinaten hat er?



✎Unklar; unendlich viele Möglichkeiten:

$(0, 3, 2)$ oder $(2, 4, 3)$ oder $(0, 3, 2) + t \cdot (2, 1, 1)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$

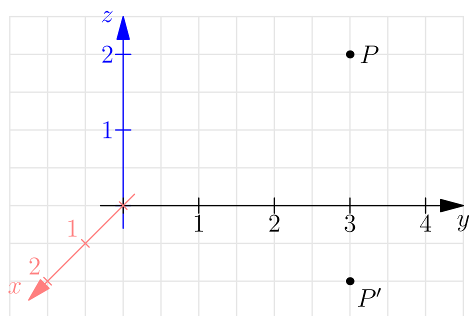
14.1.4. Um die Koordinaten eines Punktes P eindeutig aus dem zweidimensionalen Schrägbild ablesen zu können, zeichnet man zusätzlich zum Punkt P noch seinen sogenannten

Grundriss/Grundpunkt P'

ein. Dieser ist definiert als der Schnittpunkt der x-y-Ebene mit der zur z-Achse parallelen Geraden durch P. Mit anderen Worten hat er dieselbe x- und y-Koordinate wie P, aber die z-Koordinate Null.

Man nennt das Paar (P, P') (von Punkten der Zeichenebene) eine **axonometrische Darstellung von** P.

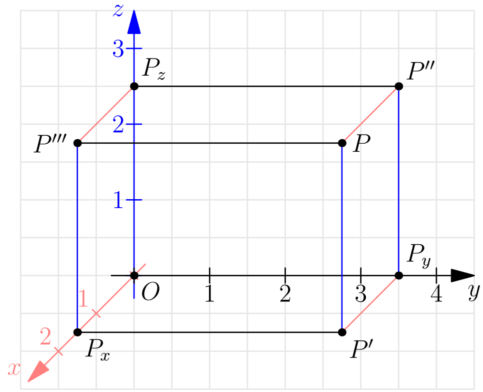
Welchen Punkt P beschreibt das im obigen Schrägbild eingezeichnete Paar (P, P')?



✎Hilfslinien einzeichnen: $P' = (2, 4, 0)$ (da z-Koordinate Null) und folglich $P = (2, 4, 3)$.

b

14.1.5. Die Koordinaten eines Punktes P werden auch durch das folgende «Quaderbild» eines Punktes P schön illustriert (alle Kanten des Quaders sind parallel zu Koordinatenachsen).



Den Grundriss/Grundpunkt P' von P haben wir schon kennengelernt. Die Punkte P'' und P''' haben auch Namen, die wir aber kaum verwenden werden.

- Der Punkt P'' heisst **Aufriss von** P
- Der Punkt P''' heisst **Seitenriss von** P

Welche Koordinaten haben die acht im Schrägbild rechts eingezeichneten Punkte?

$P = (1.5, 3.5, 2.5)$ $\quad P' = (1.5, 3.5, 0)$

$P'' = (0, 3.5, 2.5)$ $\quad P''' = (1.5, 0, 2.5)$

$P_x = (1.5, 0, 0)$ $\quad P_y = (0, 3.5, 0)$

$P_z = (0, 0, 2.5)$ $\quad O = (0, 0, 2.5)$

Aufgabe A1 Zeichnen Sie ein 3-dimensionales Koordinatensystem im Schrägbild und markieren Sie die folgenden Punkte mitsamt ihrer Grundpunkte/Grundrisse.

a) $A = (3, 4, 2)$ b) $B = (2, 5, 3)$ c) $C = (-3, -1, 2)$ d) $D = (-2, 1, -4)$ e) $E = (-3, -3, -2)$

Aufgabe A2 Beschreibungen der **Koordinatenebenen**: Die x-y-Ebene E_{xy} (d. h. die von x- und y-Achse «aufgespannte» Ebene) ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ und kann auf die folgenden drei Arten beschrieben werden.

$$E_{xy} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$E_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$
$$E_{xy} = (\text{Lösungsmenge der Gleichung } z = 0 \text{ in den drei Variablen } x, y, z.)$$

Beachte: Die Gleichung $z = 0$ kann auch als $0x + 0y + 1z = 0$ geschrieben werden. Die zweite und die dritte Beschreibung stimmen im Wesentlichen überein.

(a) Beschreiben Sie die x-z-Ebene E_{xz} ähnlich auf drei Weisen. (Analog kann man die y-z-Ebene E_{yz} beschreiben.)

(b) Beschreiben Sie x-Achse A_x ähnlich auf drei Weisen. (Analog kann man die beiden anderen Achsen beschreiben.)
Hinweis zur Beschreibung als Lösungsmenge: Naheliegend ist die Beschreibung als Lösungsmenge eines *Gleichungssystems* mit zwei Gleichungen (in drei Variablen).

(c) Kann man die x-Achse auch als Lösungsmenge einer einzigen Gleichung beschreiben? Wenn ja, wie?

Aufgabe A3 Wir wollen die Menge M aller Punkte (x, y, z) im Raum $\mathbb{R}^3$ verstehen, die die Gleichung

$$6x + 3y + 4z = 12$$

erfüllen. (In Formelschreibweise gilt also $M = \{(x, y, z) \mid 6x + 3y + 4z = 12\}$.) Wer sieht schon hier, wie die Menge M aussieht?

(a) Welche Punkte der x-Achse liegen in M? Zeichne sie in ein Schrägbild ein. Löse dieselbe Aufgabe für die beiden anderen Achsen.

(b) Bestimme alle Punkte der x-y-Ebene E_{xy}, die in der Menge M liegen (mit anderen Worten ist $E_{xy} \cap M$ zu bestimmen). Zeichne diese Punkte in dein Schrägbild ein. Löse dieselbe Aufgabe für die anderen beiden Koordinatenebenen.

(c) Vermute, wie die Menge M aussieht. Kannst du deine Vermutung begründen?

Aufgabe A4

(a) Beschreibe die Teilmenge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid y = 1\}$ des Raums und skizziere sie in einem Schrägbild.

(b) Beschreibe die Teilmenge $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid 2x + y = 2\}$ des Raums und skizziere sie in demselben Schrägbild.

(c) Beschreibe den Schnitt $A \cap B$ der beiden Mengen A und B. (D. h. welche Punkte des Raums liegen sowohl in A als auch in B?)

14.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum

Aufgabe A5 Fast alles, was Sie bisher über Vektorgeometrie in der Zeichenebene (2-dimensionale Vektorgeometrie) gelernt haben, lässt sich ins 3-dimensionale verallgemeinern (und auch ins 4-dimensionale, 5-dimensionale, n-dimensionale). Versuchen Sie, die folgenden Lücken im Skript selbstständig zu füllen.

Hinweis: Abschnitt «12 Einführung in die analytische Geometrie = Vektorgeometrie» des Skripts anschauen.

Definition 14.2.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Ein **Vektor** in dem dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ besteht aus drei reellen Zahlen v_1, v_2 und v_3, die übereinandergeschrieben und eingeklammert werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}.$$

Die drei Zahlen v_1, v_2 und v_3 heissen die ✎**Komponenten** des Vektors $\vec{v}$.

14.2.2. Vektoren kann man sich vorstellen

- als ✎Pfeile, wobei es nur auf Länge und Richtung, nicht aber auf den Anfangspunkt ankommt, oder
- als ✎Verschiebungen / Parallelverschiebungen des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ in sich.

Definition 14.2.3 Länge eines Vektors

Die **Länge** $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist wie folgt definiert (Pythagoras):

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| := ✎\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Definition 14.2.4 Skalare Multiplikation = Zahl-Vektor-Multiplikation

Die Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v}$ ist wie folgt komponentenweise definiert.

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} := ✎\begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \\ \lambda v_z \end{pmatrix}$$

Merke 14.2.5 Längenänderung beim skalaren Multiplizieren

Multipliziert man eine Zahl λ mit einem Vektor $\vec{v}$,
so ändert sich die Länge des Vektors ✎um den Faktor $|\lambda|$, in Formeln:

$$|\lambda \cdot \vec{v}| = ✎|\lambda| \cdot |\vec{v}|$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Definition 14.2.6 Einheitsvektor = normierter Vektor

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst genau dann **Einheitsvektor** oder **normiert**,

✎wenn er die Länge 1 hat, d.h. wenn $|\vec{v}| = 1$ gilt.

Definition 14.2.7 Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion

Vektor-Addition («Aneinanderhängen von Vektoren», Nacheinanderausführung von Verschiebungen) bzw. Vektor-Subtraktion sind wie folgt komponentenweise definiert:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \boxed{✎\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}} \qquad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \boxed{✎\begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}}$$

Definition 14.2.8 Ortsvektor

Ist $A = (x_A, y_A, z_A)$ ein Punkt im Raum $\mathbb{R}^3$, so nennen wir

$$\vec{A} := \boxed{✎\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}}$$

den ✎**Ortsvektor von A**.
Stellen wir uns diesen Vektor als Pfeil mit Anfangspunkt im Ursprung $(0,0)$ vor, so befindet sich sein Endpunkt (= die Pfeilspitze) im Punkt A. Wer mag, darf diesen Vektor $\vec{A}$ auch ohne die «Überpfeilung» als A schreiben.

Definition 14.2.9 Verbindungsvektor

Sind A und B zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$, so heisst der Pfeil vom Punkt A zum Punkt B der ✎**Verbindungsvektor von A nach B** und wird als

$$\boxed{✎\overrightarrow{AB}}$$

notiert. Als Verschiebung interpretiert ist dieser Vektor die Verschiebung des Raums in sich, ✎die A auf B abbildet.

Aufgabe A6

(a) Zeichne das Dreieck ABC mit den folgenden Eckpunkten in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

$$A = (3, 4, -1) \qquad B = (1, 5, 1) \qquad C = (2, 3, 3)$$ Neu: Mit Grundrissen = Grundpunkten

(b) Gib die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ an und berechne ihre Länge.

(c) Zeige mit Pythagoras, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Bei welchem Punkt liegt der rechte Winkel?

(d) Zeige mit Hilfe des Skalarprodukts (wie ist dieses wohl definiert?), dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(e) Diese und die folgende Teilaufgabe sind unabhängig von den drei vorherigen Teilaufgaben. Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC und stelle ihn axonometrisch dar (d. h. als Punkt mit Grundpunkt).

(f) Normiere den Ortsvektor $\vec{S}$.

Definition 14.2.10 Skalarprodukt zweier Vektoren

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist eine reelle Zahl, es wird als $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ notiert und ist wie folgt definiert:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \boxed{✎ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

Merke 14.2.11 Kriterium für Orthogonalität (= Aufeinander-senkrecht-Stehen) zweier Vektoren

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei beliebige Vektoren, so gilt:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{✎ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0}$$

Der Beweis geht mit Pythagoras genauso wie im Zweidimensionalen. Wer kann den Beweis aufschreiben?

Merke 14.2.12

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist ✎das Quadrat seiner Länge:

Als Formel geschrieben gilt

$$\boxed{✎ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2 \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}$$

Beweis. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir: Hinweis: Linke und rechte Seite ausschreiben und zeigen, dass sie gleich sind.

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \boxed{✎ \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3 = \left(\sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3}\right)^2} = |\vec{v}|^2$$

□

14.2.13. Für die Beschreibung von Ebenen im Raum durch die sogenannte Koordinaten- oder Normalenform benötigen wir die folgenden Eigenschaften des Skalarprodukts.

Merke 14.2.14 Eigenschaften des Skalarprodukts/Rechenregeln für das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften.

Verträglichkeit mit Addition	$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
Verträglichkeit mit Zahl-Vektor-Multiplikation	$\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
Kommutativität	$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

Hier sind die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Die beiden Verträglichkeiten mit Addition und Zahl-Vektor-Multiplikation gelten auch für das rechte Argument, d. h. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} + \vec{w} \rangle$ und $\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Dies rechnet man entweder genauso nach oder verwendet Kommutativität.

Beweis. Verträglichkeit mit Addition: Für beliebige Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir:

Hinweis: Zu zeigen ist $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Vorgehen: Linke Seite der Gleichung ausschreiben. ausschreiben. Danach rechte Seite ausschreiben. Dann sehen, dass dasselbe herauskommt.

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \boxed{✎\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$= \boxed{✎ = (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) \cdot w_2 + (u_3 + v_3) \cdot w_3 = u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 + u_3 w_3 + v_3 w_3}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \boxed{✎\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \text{= Ausdruck darüber}}$$

Verträglichkeit mit Zahl-Vektor-Multiplikation (= skalarer Multiplikation): Vorgehen wie oben. ✎

$$\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \boxed{\left\langle \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda v_1 w_1 + \lambda v_2 w_2 + \lambda v_3 w_3}$$

$$\lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \boxed{\lambda \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \text{= Ausdruck darüber}}$$

Der Beweis der Kommutativität geht ähnlich und ist dem Leser überlassen. □

Satz 14.2.15 Koordinaten- oder Normalenform einer Ebene

Wenn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind mit der Eigenschaft, dass mindestens eine der drei Zahlen a, b, c von Null verschieden ist, so beschreibt die Gleichung

$$ax + by + cz = d \qquad \textbf{Koordinatenform}$$

eine Ebene (d. h. die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine Ebene bzw. ausführlich: Die Menge aller Punkte $P = (x, y, z)$, die diese Gleichung erfüllen, ist eine Ebene).
Diese Ebene kann man zum Beispiel wie folgt beschreiben:

- Man wähle einen beliebigen Punkt Q, der die obige Gleichung erfüllt. (Das ist möglich, da nicht $a = b = c = 0$.)
- Dann ist die gesuchte Ebene diejenige Ebene, die durch Q geht und den Vektor $\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als Normalenvektor hat (d. h. dieser Vektor steht senkrecht auf der Ebene).

Die obige Gleichung $ax + by + cz = d$ ist dann äquivalent zur Gleichung

$$\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q} \right\rangle = 0 \qquad \text{für } P = (x, y, z) \qquad \textbf{Normalenform}$$

Beispiel 14.2.16. In Aufgabe A3 sollten Sie die Lösungsmenge der Gleichung $6x + 3y + 4z = 12$ beschreiben. Nach dem obigen Satz 14.2.15 ist diese Lösungsmenge eine Ebene.

Genauere Beschreibung: Wähle eine Lösung der obigen Gleichung, etwa $Q = (2, 0, 0)$. Dann ist die gesuchte Menge die Ebene durch Q, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

Die zugehörige Normalenform ist $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

Beweis. Sei $Q = (x_Q, y_Q, z_Q) \in \mathbb{R}^3$ eine fixierte Lösung der Gleichung $ax + by + cz = d$, d. h. es gilt ✎

$$d = ax_Q + by_Q + cz_Q = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{Q} \rangle$$

Sei $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt ✎

$$ax + by + cz = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{P} \rangle$$

Mit Hilfe der beiden obigen Gleichungen sehen wir die Äquivalenz der folgenden Gleichungen: ✎

$$\begin{aligned}
& ax + by + cz = d && \\
\iff\quad & \langle \vec{n}, \overrightarrow{P} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{Q} \rangle && \mid \text{Subtrahiere rechte Seite} \\
\iff\quad & \langle \vec{n}, \overrightarrow{P} \rangle - \langle \vec{n}, \overrightarrow{Q} \rangle = 0 && \mid \text{Additivität des Skalarprodukts, Merke 14.2.14} \\
\iff\quad & \langle \vec{n}, \overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q} \rangle = 0 && \mid \text{Definition des Verbindungsvektors} \\
\iff\quad & \langle \vec{n}, \overrightarrow{QP} \rangle = 0 &&
\end{aligned}$$

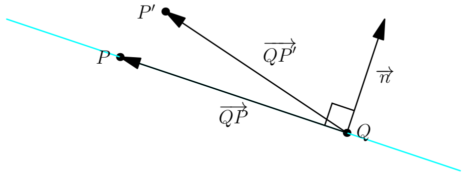
Die letzte Gleichung hat den Vorteil, dass man sie gut geometrisch verstehen kann (beachte, dass $\vec{n}$ und Q fixiert sind):

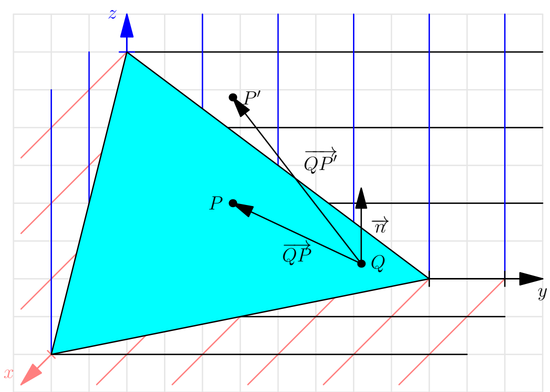
✎Lösungen der Gleichung sind alle Punkte P, für die der Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$ senkrecht auf dem Normalenvektor $\vec{n}$ steht.

Die Menge all dieser Punkte ist offensichtlich eine Ebene und genauer die Ebene durch Q, die senkrecht auf $\vec{n}$ steht.

In der Zeichnung rechts steht der Normalenvektor $\vec{n}$ senkrecht auf der farbigen Ebene (auch wenn es nicht so aussieht). Der Punkt P liegt in dieser Ebene, was bedeutet, dass $\langle \overrightarrow{QP}, \vec{n} \rangle = 0$ gilt. Der Punkt P' liegt hingegen nicht in dieser Ebene, was bedeutet, dass $\langle \overrightarrow{QP'}, \vec{n} \rangle \neq 0$ gilt.

Die Zeichnung unten illustriert die Situation vielleicht besser, die farbige Gerade ist unsere Ebene.





□

14.2.17. Die folgende abkürzende Schreibweise wird oft verwendet, um eine Ebene E anzugeben:

$$E\colon \quad ax + by + cz = d$$

Sie bedeutet ausführlich: Die Ebene E besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichung $ax+by+cz = d$ erfüllen, ist also die Lösungsmenge dieser Gleichung. In Formelnotation gilt also

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

Beispiel 14.2.18 (Wechsel zwischen Koordinaten und Normalenform und umgekehrt)**.** Wie man von Koordinatenform zu Normalenform wechselt, ist abstrakt in Satz 14.2.15 bzw. konkret in Beispiel 14.2.16 erklärt.

Der Wechsel von Normalenform zu Koordinatenform geht am elegantesten[1] wie folgt (am Beispiel erklärt).

$$\text{Normalenform}\quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \overset{\text{s.u.}}{\iff} \quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\iff \quad \text{Koordinatenform} \quad x + 3y - 5z = -40$$

Die erste Umformung gilt wegen der Äquivalenz $\langle \vec{n}, \overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q} \rangle = 0 \iff \langle \vec{n}, \overrightarrow{P} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{Q} \rangle$ aus dem Beweis von Satz 14.2.15.

Aufgabe A7 Gib für die folgenden, verbal beschriebenen Ebenen jeweils sowohl eine Normalenform als auch eine Koordinatenform an.

Beispiel: Die um zwei Einheiten in z-Richtung verschobene E_{xy}-Ebene hat die Koordinatenform $0x+0y+1z = 2$ oder kurz $z = 2$ (oder Vielfache davon (Faktor in $\mathbb{R}^*$)) und die Normalenform $\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle = 0$. Es gibt viele mögliche andere Normalenformen; ausgeschrieben/expandiert muss die Normalenform ein Vielfaches von $z = 2$ sein.

(a) Die Ebene E_{xz}.
(b) Die Ebene durch den Ursprung, die senkrecht auf der x-Achse steht.
(c) Die Ebene durch den Nullpunkt, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ steht.
(d) Die Ebene durch den Punkt $(5, 6, 7)$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
(e) Die Ebene durch den Punkt $A = (6, -5, 4)$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$-Achse steht.
(f) Die Ebene, die jede der drei Koordinatenachsen bei 3 schneidet. Hinweis: Zuerst die Koordinatenform wie folgt bestimmen. Ansatz für die Koordinatenform $ax + by + cz = d$. Bestimme nun a, b, c und d geeignet.
(g) Die Ebene, die jede der drei Koordinatenachsen bei -2 schneidet.
(h) Die Ebene, die die x-Achse bei 3, die y-Achse bei 4 und die z-Achse bei 7 schneidet.
(i) Die Ebene, die durch die beiden Punkte $A = (3, 0, 0)$ und $(0, 4, 0)$ geht und die z-Achse nicht schneidet.
(j) Die Ebene, die durch die drei Punkte $A = (1, 1, -1)$, $B = (1, -1, 3)$ und $C = (-1, 3, 1)$ geht.

Aufgabe A8

(a) Beschreibe die folgenden in Normalenform gegebenen Ebenen verbal (= in Worten).

$$E: \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad F: \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

(b) Beschreibe die folgenden in Koordinatenform gegebenen Ebenen verbal.

$$G: \quad 5x + 6y + 7z = 0 \qquad H: \quad 5x + 6y + 7z = 3 \qquad I: \quad 0x + 0y + 0z = 0$$

14.2.19. Koordinatenform und Normalenform gibt es analog im 2-dimensionalen (siehe Definition 12.1.39 im 2d-Vektorgeometrie-Skript, dort ohne Verwendung des Begriffs «Koordinatenform»). Sie beschreiben Geraden im $\mathbb{R}^2$. Zum Beispiel hat die Gerade in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt $(0, 3)$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ steht,

- die Normalenform $\left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \right\rangle$ und
- die Koordinatenform $2x + 3y = 9$.

[1] Alternative: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} \right\rangle = 0$ konkret ausrechnen: $1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - (-4)) + (-5) \cdot (z - 6)$ und umformen zu $x + 3y - 5z = -40$.

Definition 14.2.20 Spurgeraden und Spurpunkte einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Ebene
- mit den Koordinatenebenen nennt man **Spurgeraden**;
- mit den Koordinatenachsen nennt man **Spurpunkte**.

Aufgabe A9

(a) Bestimme die Spurgeraden und die Spurpunkte der Ebene $E : 3x + y + 2z = 6$ und zeichne diese in ein Koordinatensystem ein. Schraffiere zusätzlich das von den Spurpunkten gebildete Dreieck. Wer mag, kann auch den/einen Normalenvektor an einem der Spurpunkte einzeichnen.

(b) In einem neuen Koordinatensystem: Bearbeite dieselbe Aufgabe für die Ebene $F : -3x + y + 2z = 6$.

14.2.21. Die Definition der Parameterdarstellung einer Geraden im Raum stimmt wortwörtlich mit der entsprechenden Definition für eine Gerade in der Ebene überein: Der Unterschied ist nur, dass Stützpunkt und Richtungsvektor nun im Raum statt in der Ebene liegen.

Definition 14.2.22 Parameterdarstellung einer Geraden (nun im Raum)

Seien P ein Punkt und $\vec{v} \neq 0$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Die **Parameterdarstellung** der Geraden g durch den **Auf-** oder **Stützpunkt** P mit **Richtungsvektor** $\vec{v}$ ist

$$g(t) = \overrightarrow{g(t)} = \overrightarrow{P} + t \cdot \vec{v} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Da wir den Punkt P als Vektor schreiben, spricht man auch vom **Stützvektor**. Man sagt auch, dass die Gerade in **Parameterform** gegeben ist und spricht von der **Parametrisierung** der Geraden.

Aufgabe A10

(a) Bestimme den Abstand des Ursprungs von der Ebene $E : 3x + y + 2z = 28$.
Überlege dir selbst die Lösung oder gehe anhand der folgenden Anleitung vor.
  (i) Beschreibe die Gerade g durch den Ursprung $O = (0, 0, 0)$, die senkrecht auf der Ebene E steht, durch eine Parameterdarstellung.
  (ii) Bestimme den Schnittpunkt S von E mit g.
  (iii) Berechne den Abstand von O zu S. Das ist der gesuchte Abstand (warum?).

(b) Bestimme den Abstand des Punktes $P = (-1, 5, c)$ von der Ebene $E : 3x + y + 2z = 6$.

(c) Bestimme den Abstand des Punktes $P = (x_P, y_P, z_P)$ von der Ebene $E : ax + by + cz = d$, d. h. finde den Inhalt des folgenden Satzes 14.2.23 heraus.

Satz 14.2.23 Abstand zwischen Punkt und Ebene in Koordinatenform

Der Abstand eines Punktes $P = (x_P, y_P, z_P)$ zu einer in Koordinatenform $E : ax + by + cz = d$ gegebenen Ebene ist

$$\text{Abstand}(P, E) ✎ = \frac{|ax_P + by_p + cz_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{n}, P \right\rangle - d\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$$

Ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ hierbei sogar normiert (d. h. $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$), so gilt

$$\text{Abstand}(P, g) = |ax_P + by_p + cz_P - d|$$

Beweis. Sei g die zu E senkrechte Gerade durch P. Der Abstand von P zu E ist der Abstand von P zum Schnittpunkt S von g mit E. Wir berechnen deswegen zuerst den Schnittpunkt S. Dass dies der Abstand ist, sieht man mit dem Satz von Pythagoras: Der Abstand zu jedem anderen Punkt ist grösser.

Die Gerade g nennt man auch das «Lot von P auf E». Den Schnittpunkt S des Lots mit der Ebene nennt man den «Fusspunkt des Lotes».

In Parameterform hat g die Beschreibung ✎

$$g(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ y_P \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P + ta \\ y_P + tb \\ y_P + tc \end{pmatrix}$$

Für welches t liegt der Punkt $g(t)$ auf der Ebene E? D. h. für welches t ist $g(t)$ eine Lösung der Gleichung $ax + by + cz = d$? Eine Rechnung liefert die Antwort: ✎

$$\begin{aligned}
a(x_P + ta) + b(y_P + tb) + c(z_P + tc) &= d \\
ax_P + ta^2 + by_P + tb^2 + cz_P + tc^2 &= d \\
ta^2 + tb^2 + tc^2 &= d - ax_P - by_P - cz_P \\
t(a^2 + b^2 + c^2) &= d - ax_P - by_P - cz_P \\
t &= \frac{d - ax_P - by_P - cz_P}{a^2 + b^2 + c^2}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S hat also den Ortsvektor $\vec{S} = \vec{P} + t \cdot \vec{n}$. Subtraktion von $\vec{P}$ liefert den Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{PS} = \vec{S} - \vec{P} = t \cdot \vec{n}.$$

Die Länge dieses Verbindungsvektors ist der gesuchte Abstand, d. h.

$$\begin{aligned}
\text{Abstand}(P, E) = \overline{PS} = \left|\overrightarrow{PS}\right| = |t \cdot \vec{n}| &\overset{\text{Merke 14.2.5}}{=} |t| \cdot |\vec{n}| \\
&= \left| \frac{d - ax_P - by_P - cz_P}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\
&= \frac{|d - ax_P - by_P - cz_P|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\
&= \frac{|d - ax_P - by_P - cz_P|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|ax_P + by_P + cz_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}$$

Alles geht auch koordinatenfrei! Bitte zoomen: Ich lasse faulerweise alle «Überpfeilungen weg»: Der von t abhängige Punkt $g(t) = P + tn$ soll in der Ebene $E : \langle n, ? \rangle = d$ liegen. Dies bedeutet $\langle n, P + tn \rangle = d$ oder gleichbedeutend (wegen Verträglichkeit des Skalarprodukts mit Addition und Multiplikation) $\langle n, P \rangle + t\langle n, n \rangle = d$. Auflösen nach t liefert $t_0 := \frac{d - \langle n,P \rangle}{\langle n,n \rangle} = \frac{d - \langle n,p \rangle}{|n|^2}$. Der Schnittpunkt ist also $S = P + t_0 n$. Wie im obigen Text muss man $\overline{PS}$ berechnen und erhält $\overline{PS} = |t_0 n| = |t_0| \cdot |n| = \frac{|d - \langle n,P \rangle|}{|n|} = \frac{|\langle n,P \rangle| - d}{|n|}$.

□

Folgerung 14.2.24

Die Ebene $ax + by + cz = d$ hat vom Ursprung den Abstand ✎

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{|\vec{n}|}$$

14.3 Lösungen

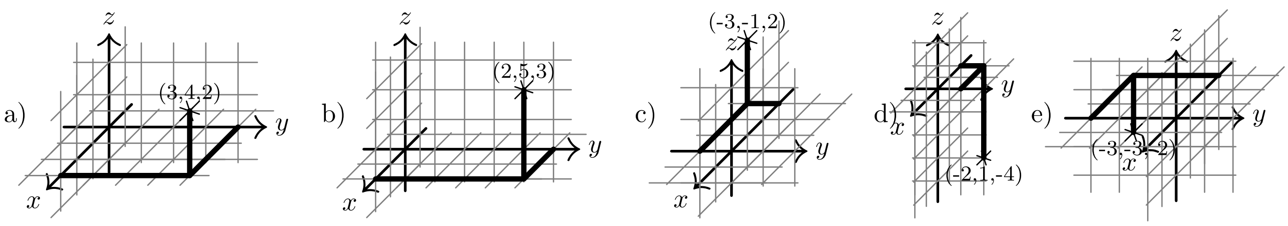
Hinweise zu den Symbolen:

⚒ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

⚙ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

🔭 Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

⚒ Lösung zu A1 ex-punkte-einzeichnen



Hoffentlich ist klar, welcher Punkt in der Zeichnung jeweils der Grundpunkt ist.

⚒ Lösung zu A2 ex-koordinatenebenen-und-achsen-beschreiben

(a)

$$\begin{aligned}
E_{xz} &= \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}\\
E_{xz} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}\\
E_{xz} &= (\text{Lösungsmenge der Gleichung } y = 0 \text{ in den drei Variablen } x, y, z.)
\end{aligned}$$

Hier noch die Beschreibung der y-z-Ebene:

$$\begin{aligned}
E_{yz} &= \{(0, y, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}\\
E_{yz} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}\\
E_{yz} &= (\text{Lösungsmenge der Gleichung } x = 0 \text{ in den drei Variablen } x, y, z.)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
A_x &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}\\
A_x &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ und } z = 0\}\\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}\\
A_x &= \left(\text{Lösungsmenge des Gleichungssystems } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}\right)\\
&= ((\text{simultane}) \text{ Lösungsmenge der beiden Gleichungen } y = 0 \text{ und } z = 0)
\end{aligned}$$

(c) Ja, als

$$\begin{aligned}
A_x &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 0\}\\
&= (\text{Lösungsmenge der Gleichung } y^2 + z^2 = 0.)
\end{aligned}$$

⚒ Lösung zu A3 ex-ebenengleichung-mit-koordinatenachsen-und-ebenen-schneiden-und-skizzieren

Wir betrachten die Menge $M = \{(x, y, z) \mid 6x + 3y + 4z = 12\}$.

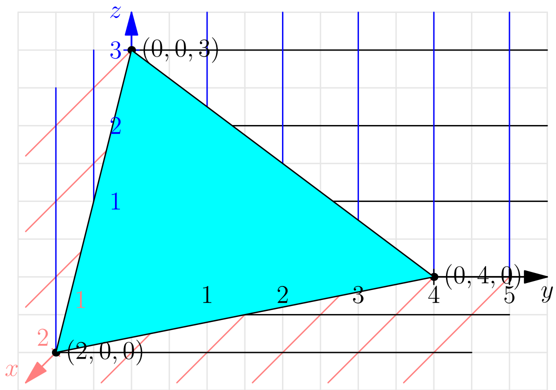
(a) Punkte auf der x-Achse haben die Form $(x, 0, 0)$, d. h. sie erfüllen die obige Gleichung genau dann, wenn $6x + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 12$ gilt, wenn also $6x = 12$ gilt, d. h. $x = 2$. Der einzige Punkt auf der x-Achse, der in M liegt, ist der Punkt $(2, 0, 0)$.

Analog: Der einzige Punkt auf der y-Achse, der in M liegt, ist der Punkt $(0, 4, 0)$.
Der einzige Punkt auf der z-Achse, der in M liegt, ist der Punkt $(0, 0, 3)$.

(b) Punkte auf der x-y-Ebene haben die Form $(x, y, 0)$, d. h. sie erfüllen die obige Gleichung genau dann, wenn $6x + 3y + 4 \cdot 0 = 12$ gilt, wenn also $6x + 3y = 12$ gilt. Diese Gleichung beschreibt eine Gerade in der x-y-Ebene. Die beiden obene berechneten Punkte $(2, 0, 0)$ und $(0, 4, 0)$ liegen auf dieser Geraden. Also ist die gesuchte Punktmenge die Gerade durch diese beiden Punkte.
Analog: Der Schnitt $E_{xz} \cap M$ ist die Gerade durch die beiden Punkte $(2, 0, 0)$ und $(0, 0, 3)$.
Der Schnitt $E_{yz} \cap M$ ist die Gerade durch die beiden Punkte $(0, 4, 0)$ und $(0, 0, 3)$.

(c) Die Menge M ist eine Ebene im Raum.
Später werden wir sehen, dass M die Ebene durch einen beliebigen der drei zuvor berechneten Punkte mit Normalenvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

Das folgende Bild zeigt den Teil der Ebene M, der im «ersten Oktanten» liegt (alle drei Koordinaten positiv oder Null).

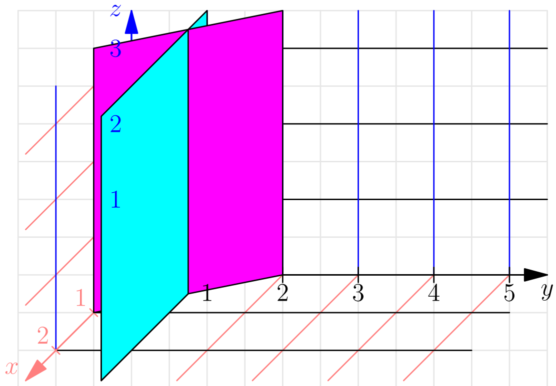


Lösung zu A4 ex-lineare-nullstellenmengen-skizzieren

(a) Jeder Punkt in A erfüllt $y = 1$, die beiden anderen Koordinaten x und z können beliebige reelle Zahlen sein. Also ist die Menge A die Ebene, die man erhält, wenn man die x-z-Ebene um eine Einheit in y-Richtung verschiebt.

(b) Wenn man B nur in der E_{xy}-Ebene betrachtet, handelt es sich um die Gerade $2x + y = 2$, d. h. um die Gerade durch die beiden Punkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 2, 0)$. Diese Gerade kann man nun in z-Richtung beliebig verschieben und erhält so die gesamte Menge B. (Gemeint ist: B ist Vereinigung aller Verschiebungen dieser Geraden in z-Richtung.) Es ist anschaulich klar, dass es sich dabei um eine Ebene handelt.

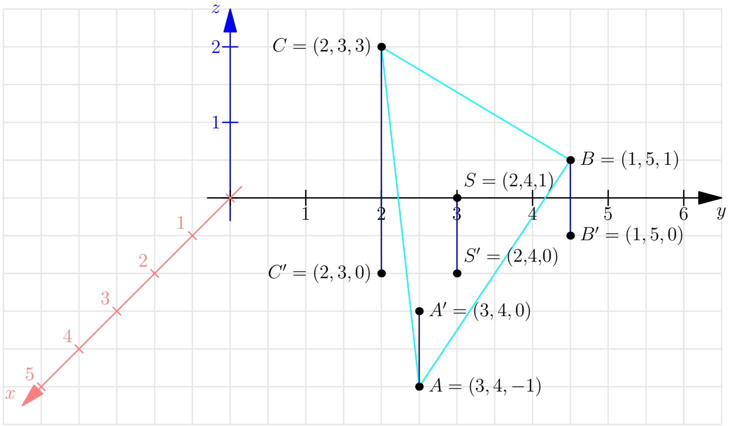
(c) Ein Punkte $P = (x, y, z)$ liegt genau dann in A und in B, wenn $y = 1$ und $2x + y = 2$ gelten, d. h. wenn $y = 1$ und $x = \frac{1}{2} = 0.5$ gelten. Also ist $A \cap B$ die Menge aller Punkte $(0.5, 1, z)$ für beliebiges $z \in \mathbb{R}$. Dies ist eine zur z-Achse parallele Gerade.



Lösung zu A5 ex-verallgemeinerung-vektoren-2d-zu-3d

Siehe Lehrerversion des Skripts.

Lösung zu A6 ex-vektoren-3d-erste-aufgabe



(a) siehe Zeichnung (Punkte sind inklusive Grundpunkten eingezeichnet)

(b)

$$\vec{c} := \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$c := \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3$$

$$\vec{a} := \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$a := \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$$

$$\vec{b} := \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$b := \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

(d) Genauer verwenden wir die Umkehrung des Satzes von Pythagoras: Wegen Die Seitenlängen a, b, c wurden oben definiert.

$$c^2 + a^2 = 9 + 9 = 18 \stackrel{!}{=} b^2$$

ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B.
Beachte: Im Schrägbild ist weder der rechte Winkel bei B sichtbar noch sieht man, dass die Seiten a und c gleich lang sind.
Das Dreieck ABC ist nicht nur rechtwinklig, sondern auch gleichschenklig.

(e) Um zu zeigen, dass das Dreieck bei B rechtwinklig ist, genügt es zu zeigen, dass die beiden Vektoren $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ senkrecht aufeinander stehen. Dies ist aber der Fall, denn das entsprechende Skalarprodukt ist Null:

$$\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle = -2-2+4 = 0$$

(f) Der (Ortsvektor des) Schwerpunkts ist

$$S = \vec{S} = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt ist also $S = (2,4,1)$ (in der Zeichnung ist er mit Grundpunkt eingezeichnet).

(g) Normiere den Ortsvektor $\vec{S}$.

$$\frac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{21}}\\\frac{4}{\sqrt{21}}\\\frac{1}{\sqrt{21}}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{21} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{21}}{21}\\\frac{4\sqrt{21}}{21}\\\frac{\sqrt{21}}{21}\end{pmatrix}$$

Lösung zu A7 ex-beschreibung-zu-koordinaten-und-normalenform-ebene

Man beachte: Es gibt jeweils viele korrekte Lösungen. Ihre Lösung für die Koordinatenform ist genau dann korrekt, wenn Sie aus der angegebenen Lösung per Multiplikation mit einer reellen Zahl ungleich Null hervorgeht.

Ihre Lösung für die Normalenform ist genau dann korrekt, wenn sie expandiert eine korrekte Koordinatenform liefert.

(a) Die Ebene E_{xz}.
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = 0$
Koordinatenform: $y = 0$

(b) Die Ebene durch den Ursprung, die senkrecht auf der x-Achse steht.
(Es handelt sich um die Ebene E_{yz}.)
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = 0$
Koordinatenform: $x = 0$

(c) Die Ebene durch den Nullpunkt, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ steht.
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = 0$
Koordinatenform: $x + y + z = 1$

(d) Die Ebene durch den Punkt $(5, 6, 7)$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} \right\rangle = 0$
Expandiert ist dies $1(x-5) + 1(y-6) + 1(z-7)$, was per Äquvivalenzumformungen die folgende Koordinatenform liefert.
Koordinatenform: $x + y + z = 5 + 6 + 7 = 18$

(e) die Ebene durch den Punkt $A = (6, -5, 4)$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$-Achse steht?
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-5\\4\end{pmatrix} \right\rangle = 0$
Expandieren liefert $-1(x-6) + 2(y+5) - 3(z-4)$, was umgeformt die die folgende Koordinatenform liefert.
Koordinatenform: $-x + 2y - 3z = -6 - 10 - 12 = -28$

(f) Die Ebene, die jede der drei Koordinatenachsen bei 3 schneidet. Hinweis: Zuerst die Koordinatenform wie folgt bestimmen. Ansatz für die Koordinatenform $ax + by + cz = d$. Bestimme nun a, b, c und d geeignet.
Ansatz: $ax + by + cz = d$. Da die Punkte $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ und $(0, 0, 3)$ in der Ebene liegen, müssen die drei Gleichungen $3a = d$, $3b = d$ und $3c = d$ gelten, d. h. $d = 3a = 3b = 3c$, d. h. $a = b = c$ und $d = 3a$. Man kann also $a \neq 0$ beliebig wählen und muss dann $b = c = a$ und $d = 3a$ setzen.
Für $a = 1$ erhält man eine mögliche Koordinatenform $x + y + z = 3$. Jedes Vielfache davon ist ebenfalls eine mögliche Lösung solange der Faktor nicht Null ist.
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

(g) Die Ebene, die jede der drei Koordinatenachsen bei -2 schneidet.
Ähnlich wie bei der vorigen Teilaufgabe erhält man
Koordinatenform $x + y + z = -2$.
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

(h) Die Ebene, die die x-Achse bei 3, die y-Achse bei 4 und die z-Achse bei 7 schneidet.
Ansatz: $ax + by + cz = d$.

Die folgenden drei Gleichungen müssen gelten (sie bilden ein lineares Gleichungssystem):

$$\begin{cases} 3a & = d \\ 4b & = d \\ 7c & = d \end{cases}$$

Man kann hier d beliebig wählen, etwa $d = 1$, und erhält $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{7}$, d. h. die Koordinatenform

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{7}z = 1$$

Wer mag, kann dies mit $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ wählen und erhält die Koordinatenform

$$28x + 21y + 12z = 84$$

Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ oder $\left\langle \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

(i) Die Ebene, die durch die beiden Punkte $A = (3, 0, 0)$ und $(0, 4, 0)$ geht und die z-Achse nicht schneidet.
Ansatz: $ax + by + cz = d$.
Die folgenden beiden Gleichungen müssen gelten (sie bilden ein lineares Gleichungssystem):

$$\begin{cases} 3a & = d \\ 4b & = d \end{cases}$$

Es muss $c = 0$ gelten, denn sonst läge der Punkt $(0, 0, \frac{d}{c})$ in der Ebene. Man kann auch argumentieren, dass c als z-Komponente des Normalenvektors Null sein muss.
Wenn man zum Beispiel $d = 1$ wählt, erhält man $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{1}{4}$.
Also ist $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1$ eine mögliche Koordinatenform (oder auch $4x + 3y = 12$).
Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

(j) Die Ebene, die durch die drei Punkte $A = (1, 1, -1)$, $B = (1, -1, 3)$ und $C = (-1, 3, 1)$ geht.
Ansatz: $ax + by + cz = d$.
Die folgenden drei Gleichungen müssen gelten (sie bilden ein lineares Gleichungssystem):

$$\begin{cases} a + b - c & = d \\ a - b + 3c & = d \\ -a + 3b + c & = d \end{cases}$$

Löung mit dem Additionsverfahren
Variable a eliminieren: Die dritte Gleichung zu den beiden ersten hinzuaddieren:

$$\begin{cases} 4b & = 2d \\ 2b + 4c & = 2d \end{cases}$$

Variable b eliminieren: Das Zweifache der zweiten Gleichung von der ersten subtrahieren.

$$-8c = -2d \qquad \iff \qquad 4c = d$$

Man kann d beliebig wählen, etwa $d = 1$ und erhält $c = \frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{2}$ und (per Rückwärts-Einsetzen) $a = d - b + c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also die Koordinatenform

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1$$

Mit 4 multipliziert (oder per Wahl $d = 4$) erhält man die vielleicht schönere Koordinatenform

$$3x + 2y + z = 4$$

Normalenform: $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu A8 ex-von-koordinaten-bzw-normalenform-ebene-zu-anderer-beschreibung

(a) Die Ebene E ist die Ebene durch den Ursprung $(0, 0, 0)$, die senkrecht auf dem (Normalen-)Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ steht. Statt des Ursprungs kann man irgendeinen anderen Punkt der Ebene E wählen.

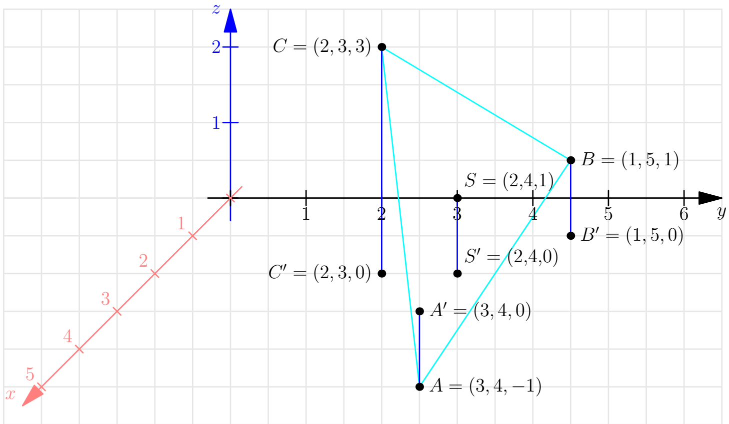
Die Ebene F ist die Ebene durch den Punkt $(4, 5, 6)$, die senkrecht auf dem (Normalen-)Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ steht. Statt des Punktes $(4, 5, 6)$ kann man irgendeinen anderen Punkt der Ebene F wählen. Die Ebene F hat die Koordinatenform $x + 2y + 3z = 32$, d. h. man kann zum Beispiel den Punkt $(32, 0, 0)$ oder den Punkt $(0, 16, 0)$ oder den Punkt $(18, 4, 2)$ oder ....

(b) Die Ebene H ist die Ebene durch den Punkt $(\frac{3}{5}, 0, 0)$ (oder durch eine beliebige andere Lösung der Gleichung $5x + 6y + 7z = 3$, etwa durch den Punkt $(-3, -\frac{1}{2}, 3)$) mit Normalenvektor $\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$.

Die bei I angegebene Gleichung ist keine Koordinatenform, denn alle Koeffizienten bei den Variablen sind Null.

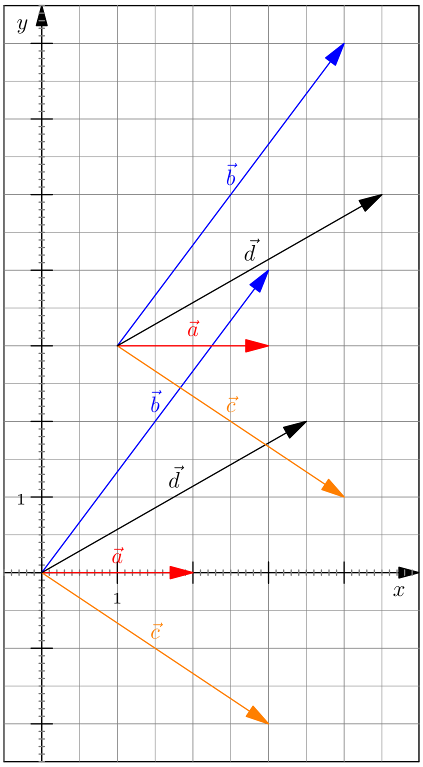
Lösung zu A9 ex-ebene-mit-spurgeraden-und-spurpunkten-zeichnen

(a) betrachtete Ebene: $E : 3x + y + 2z = 6$
Die Spurpunkte sind $(2, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ und $(0, 0, 3)$.
Die Spurgeraden sind $3x + y = 6$ (aufgefasst als Gerade in der x-y-Ebene E_{xy}), $3x + 2z = 6$ (aufgefasst als Gerade in der x-z-Ebene E_{xz}) und $y + 2z = 6$ (aufgefasst als Gerade in der y-z-Ebene E_{yz}).



In der Skizze sind zusätzlich zwei Normalenvektoren an Spurpunkten eingezeichnet samt Grundpunkte ihrer Spitzen.

(b) betrachtete Ebene: $F : -3x + y + 2z = 6$
Die Spurpunkte sind $(-2, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ und $(0, 0, 3)$.
Die Spurgeraden sind $-3x + y = 6$ (aufgefasst als Gerade in der x-y-Ebene E_{xy}), $-3x + 2z = 6$ (aufgefasst als Gerade in der x-z-Ebene E_{xz}) und $y + 2z = 6$ (aufgefasst als Gerade in der y-z-Ebene E_{yz}).



Lösung zu A10 ex-abstand-punkt-ebene