Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Punkte, Geraden, Ebenen (vieles davon Wiederholung)

Aufgabe A1 Beispiel: Wenn man im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ zwei Kreise k und ℓ miteinander schneidet, gibt es für die Schnittmenge $k \cap \ell$ vier mögliche «Gestalten»:

(1) Sie kann leer sein (die beiden Kreise liegen «weit auseinander» oder ein Kreis liegt echt innerhalb des anderen).
(2) Sie kann aus genau einem Punkt bestehen (die beiden Kreise berühren sich).
(3) Sie kann aus genau zwei Punkten bestehen (die beiden Kreise schneiden sich in genau zwei Punkten).
(4) Sie kann ein Kreis sein (die beiden Kreise stimmen überein, $k = \ell$).

Wir betrachten nun den Schnitt von Teilmengen des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$.

(a) Wenn g und h Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $g \cap h$ haben?
Welche Gestalt hat die Schnittmenge $g \cap h$ höchstwahrscheinlich, wenn man g und h zufällig wählt?
(b) Wenn g eine Gerade und E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $g \cap E$ haben?
Welche Gestalt hat die Schnittmenge $g \cap E$ höchstwahrscheinlich, wenn man g und E zufällig wählt?
(c) Wenn E und F Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $E \cap F$ haben?
Welche Gestalt hat die Schnittmenge $E \cap F$ höchstwahrscheinlich, wenn man E und F zufällig wählt?
(d) Wenn E eine Ebene und k eine Sphäre (= Kugeloberfläche) im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $E \cap k$ haben?

Merke 20.0.1 Test, ob Punkt auf parametrisierter Gerade liegt

Seien P ein Punkt und $\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{v}$ die Parametrisierung einer Geraden g im $\mathbb{R}^3$. Dann liegt P genau dann auf der Geraden g, wenn es eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Gleichung

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{g}(t)$$

gilt.
Beachte: Das ist eine Gleichung von Vektoren; komponentenweise geschrieben handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem aus drei Gleichungen in einer Variablen t (ein 3×1-LGS).

Merke 20.0.2 Schnittmenge zweier parametrisierter Geraden bestimmen

Seien

$$g\colon \overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{v} \qquad \text{und} \qquad h\colon \overrightarrow{h}(t) = \overrightarrow{B} + t\overrightarrow{w}$$

Parametrisierungen zweier Geraden.
Um die Schnittmenge von g und h zu bestimmen, löse man die Vektorgleichung besser in Zukunft u statt s verwenden

$$\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(s)$$

(beachte, dass rechts $\overrightarrow{h}(s)$ steht und nicht $\overrightarrow{h}(t)$; komponentenweise ist dies ein lineares Gleichungssystem aus drei Gleichungen in zwei Variablen (ein 3×2-LGS)).
Für jede Lösung $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ erhält man einen Schnittpunkt $\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(s)$ (als Vektor geschrieben).
Dieses Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Geometrische Bedeutung:

$$\text{Gleichungssystem hat} \begin{cases} \text{keine Lösung} & \iff \text{✎}g \text{ und } h \text{ schneiden sich nicht} \\ \text{genau eine Lösung} & \iff \text{✎}g \text{ und } h \text{ schneiden sich in genau einem Punkt} \\ \text{unendlich viele Lösungen} & \iff \text{✎}g \text{ und } h \text{ stimmen überein} \end{cases}$$

Definition 20.0.3

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heissen **kollinear** genau dann, wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
Wir sagen, dass zwei Geraden **parallel** sind, wenn ihre (beliebig gewählten) Richtungsvektoren kollinear sind. (Sind zwei Geraden gleich, so sind sie auch parallel; wer mag, kann zwischen «parallel und gleich» und «parallel und verschieden» unterscheiden.)
Man sagt, dass zwei Geraden im dreidimensionalen Raum **windschief** sind, wenn sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

Aufgabe A2 Betrachte die Gerade g durch die beiden Punkte $P = (2, 0, 3)$ und $Q = (3, 2, 6)$.

(a) Schreibe zwei verschiedene Parametrisierungen von g auf (sowohl Aufpunkt als auch Richtungsvektor sollen verschieden sein).

(b) Entscheide, ob die folgenden Punkte auf g liegen oder nicht:
 (i) $(5, 6, 11)$
 (ii) $(5, 6, 12)$

(c) Bestimme, falls vorhanden, den Schnittpunkt von g
 (i) mit der x-y-Ebene;
 (ii) mit der x-z-Ebene;
 (iii) mit der y-z-Ebene.

(d) In dieser Aufgabe sollst du lernen, wie man rechnerisch sieht, ob der Schnitt zweier Geraden einpunktig oder eine Gerade oder leer (und dann parallel oder windschief) ist. Alle Fälle treten auf.
Betrachte die folgenden Geraden:

$$a\colon \vec{a}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad b\colon \vec{b}(t) = \begin{pmatrix}-1\\-6\\-6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$$

$$c\colon \vec{c}(t) = \begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \qquad d\colon \vec{d}(t) = \begin{pmatrix}-1\\-8\\-6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

Bestimme durch das Lösen eines Gleichungssystems (wenn es keinen Schnittpunkt gibt, ist zusätzlich anzugeben, ob die Geraden parallel sind oder windschief)
 (i) die Schnittmenge von g und a;
 (ii) die Schnittmenge von g und b;
 (iii) die Schnittmenge von g und c;
 (iv) die Schnittmenge von g und d.

Merke 20.0.4

Jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ kann durch eine Koordinatengleichung

$$E\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{oder gleichbedeutend {\tiny (mit dem Skalarprodukt)}} \qquad E\colon \left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle + d = 0$$

beschrieben werden (wobei a, b, c, d reelle Zahlen sind und mindestens eine der drei Zahlen a, b, c von Null verschieden ist).
Die Ebene E besteht genau aus denjenige Punkten $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, deren Koordinaten x, y, z diese Gleichung erfüllen.
Der Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf der Ebene und heisst **Normalenvektor** der Ebene.

Nachträge zum Schneiden zweier Geraden

20.0.5. Wenn zwei Geraden in Parameterform gegeben sind, kann man sehr schnell sehen, ob die beiden Geraden parallel sind: Man prüft einfach, ob die beiden Richtungsvektoren kollinear sind.

- Sind sie parallel, so können die beiden Geraden entweder gleich oder verschieden sein.
  Sie sind genau dann gleich, wenn der Aufpunkt einer der beiden Geraden auf der anderen Geraden liegt (was leicht zu prüfen ist).
- Sind sie nicht parallel, so können die Geraden sich entweder in genau einem Punkt schneiden oder windschief sein. Um dies festzustellen, muss man im Allgemeinen ein Gleichungssystem lösen, das dann genau eine oder keine Lösung hat.

Aufgabe A-2 Einige hatten Probleme mit dem Schneiden zweier Geraden in A2(d).
Lies die folgenden drei Beispiele 20.0.6, 20.0.7 und 20.0.9 genau durch!

Beispiel 20.0.6 (Schnittmenge zweier Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden)**.** Bestimme die Schnittmenge der beiden Geraden

$$g\colon \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Gesucht sind reelle Zahlen t und u mit

Es ist hier geschickter, die Variable u statt s zu verwenden, denn u kommt nach t im Alphabet.

$$\vec{g}(t) = \vec{h}(u)$$

Als Gleichungssystem geschrieben (beachte, dass rechts die Variabel u verwendet wird):

$$\begin{cases} 2+2t & = 0+u \\ -3+4t & = -4+u \\ -2t & = 2-u \end{cases}$$

Auf Standardform bringen (Variablen alphabetisch sortiert nach links, einzelne Zahlen nach rechts):

$$\begin{cases} 2t - u = -2 & (G1) \\ 4t - u = -1 & (G2) \\ -2t + u = 2 & (G3) \end{cases}$$

Lösungsweg 1 (Additionsverfahren): Addiere die Gleichung (G3) zu den beiden ersten Gleichungen (um u zu eliminieren); die dritte Gleichung lassen wir stehen, damit das gesamte Gleichungsssytem zu dem zuvor äquivalent ist, was wir mit dem Zeichen $\iff$ andeuten:

$$\iff \begin{cases} & 0 = 0 & (H1) = (G1) + (G3) \\ 2t & = 1 & (H2) = (G2) + (G3) \\ -2t + u & = 2 & (H3) = (G3) \end{cases}$$

Die Gleichung (H1) ist $\boxed{\text{immer}}$ erfüllt und kann somit weggelassen werden:

$$\iff \begin{cases} 2t & = 1 & (H2) \\ -2t + u = 2 & & (H3) \end{cases}$$

Auflösen von (H2) nach t liefert $t = \frac{1}{2}$. Setzt man dies in (H3) ein und löst die erhaltene Gleichung nach u auf (oder addiert alternativ (H2) und (H3)), so erhält man (bitte nachrechnen)

$$\iff \begin{cases} t & = \frac{1}{2} \\ & u = 3 \end{cases}$$

Fazit: Die Lösung unseres Gleichungssystems ist $t = \frac{1}{2}$, $u = 3$ oder kompakt geschrieben $(t, u) = (\frac{1}{2}, 3)$.

Lösungsweg 2 (Substitutionsverfahren): Wir lösen (G1) nach u auf und erhalten (bitte nachrechnen)

$$u = 2t + 2$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die beiden anderen Gleichungen (G2) und (G3) ein und erhalten das folgende Gleichungssystem (damit es gleichbedeutend zum obigen Gleichungssystem ist, haben wir die nach u aufgelöste Gleichung (G1) zuerst als (H1) aufgeschrieben).

$$\iff \begin{cases} u & = 2t + 2 & \text{(H1) aus (G1)} \\ 4t - (2t+2) & = -1 & \text{(H2)} \\ -2t + (2t+2) & = 2 & \text{(H3)} \end{cases}$$

Gleichungen (H2) und (H3) auf Standardform bringe (während wir (H1) so belassen):

$$\iff \begin{cases} & u & = 2t + 2 & (H1) \\ 2t & & = 1 & (H2') \\ & & 2 = 2 & (H3') \end{cases}$$

Die Gleichung (H3') ist $\boxed{\text{immer}}$ erfüllt und kann somit weggelassen werden.
Die Gleichung (H2') nach t aufgelöst liefert $t = \frac{1}{2}$. Setzt man dies in die Gleichung (H1) ein, so erhält man $u = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3$.
Fazit: Die Lösung unseres Gleichungssystems ist $t = \frac{1}{2}$, $u = 3$ oder kompakt geschrieben $(t, u) = (\frac{1}{2}, 3)$.

Also schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt. Diesen Punkt erhält man, wenn man $t = \frac{1}{2}$ in $\vec{g}(t)$ einsetzt oder $u = 3$ in $\vec{h}(u)$. Beide Male ergibt sich (bitte nachrechnen) der Schnittpunkt (als Vektor notiert)

$$\vec{g}(\tfrac{1}{2}) = \vec{h}(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 20.0.7 (Schnittmenge zweier Geraden, die sich nicht schneiden)**.** Wir variieren das obige Beispiel. Nur die rote Zahl wurde verändert.

$$g\colon \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Gesucht sind reelle Zahlen t und u mit $\vec{g}(t) = \vec{h}(u)$. Schreibt man dies als Gleichungssystem und bringt letzteres auf Standardform, so erhält man (bitte nachrechnen)

$$\begin{cases} 2t - u = -2 & (G1) \\ 4t - u = -1 & (G2) \\ -2t + u = 1 & (G3) \end{cases}$$

20.0.8 (Fortsetzung von Beispiel 20.0.7)**.**
1 **Lösungsweg 1 (Additionsverfahren):** Addiere die Gleichung (G3) zu den beiden ersten Gleichungen (um u zu eliminieren):

$$\iff \begin{cases} \qquad 0 = -1 & (H1) = (G1) + (G3) \\ 2t \qquad = 0 & (H2) = (G2) + (G3) \\ -2t + u \quad = 1 & (H3) = (G3) \end{cases}$$

Die Gleichung (H1) ist $\boxed{\text{niemals}}$ erfüllt. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Lösungsweg 2 (Substitutionsverfahren): Wir lösen (G1) nach u auf und erhalten

$$u = 2t + 2$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die beiden anderen Gleichungen (G2) und (G3) ein und erhalten das folgende Gleichungssystem.

$$\iff \begin{cases} u & = 2t + 2 \quad \text{(H1) aus (G1)} \\ 4t - (2t + 2) & = -1 \quad \text{(H2)} \\ -2t + (2t + 2) & = 1 \quad \text{(H3)} \end{cases}$$

Letzte beiden Gleichungen auf Standardform bringen:

$$\iff \begin{cases} \quad u & = 2t + 2 & (H1) \\ 2t & = 1 & (H2') \\ & 2 = 1 & (H3') \end{cases}$$

Die Gleichung (H3') ist $\boxed{\text{niemals}}$ erfüllt. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Also schneiden sich die beiden Geraden nicht. Die Schnittmenge ist die leere Menge: $g \cap h = \emptyset$.

Beispiel 20.0.9 (Schnittmenge zweier Geraden, die gleich sind (was aber nicht offensichtlich ist, da verschiedene Parametrisierungen))**.** Zu bestimmen ist die Schnittmenge der folgenden beiden Geraden.

$$g\colon \overrightarrow{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \overrightarrow{h}(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wer hier aufmerksam ist, sieht sofort, dass die beiden Geraden parallel sind, denn ihre Richtungsvektoren sind kollinear (warum?). Parallele Geraden sind entweder verschieden oder gleich (was leicht herauszubekommen ist). Damit ist bereits jetzt klar, dass das sogleich betrachtete Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen haben wird.
Lösung: Gesucht sind reelle Zahlen t und u mit $\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(u)$. Schreibt man dies als Gleichungssystem und bringt letzteres auf Standardform, so erhält man (bitte nachrechnen)

$$\begin{cases} 2t - u = 5 & (G1) \\ 4t - 2u = 10 & (G2) \\ -2t + u = -5 & (G3) \end{cases}$$

Lösungsweg 1 (Additionsverfahren): Addiere geeignete Vielfache von (G3) zu den anderen beiden Gleichungen, um u zu eliminieren:

$$\iff \begin{cases} \qquad 0 = 0 & (H1) = (G1) + (G3) \\ \qquad 0 = 0 & (H2) = (G2) + 2 \cdot (G3) \\ -2t + u \quad = -5 & (H3) = (G3) \end{cases}$$

Die Gleichungen (H1) und (H2) sind $\boxed{\text{immer}}$ erfüllt und können deswegen weggelassen werden. Damit ist unser Gleichungssystem äquivalent zu der Gleichung (G3), die wir zum Beispiel nach u auflösen können:

$$u = 2t - 5$$

Lösungsweg 2 (Substitutionsverfahren): Wir lösen (G1) nach u auf und erhalten

$$u = 2t - 5$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die beiden anderen Gleichungen (G2) und (G3) ein und erhalten das folgende Gleichungssystem.

$$\iff \begin{cases} u & = 2t - 5 \quad \text{(H1) aus (G1)} \\ 4t - 2 \cdot (2t - 5) & = 10 \quad \text{(H2)} \\ -2t + (2t - 5) & = -5 \quad \text{(H3)} \end{cases}$$

Letzte beiden Gleichungen auf Standardform bringen:

$$\iff \begin{cases} u & = 2t - 2 & (H1') \\ 10 & = 10 & (H2') \\ 0 & = 0 & (H3') \end{cases}$$

Die Gleichungen (H2') und (H3') sind $\boxed{\text{immer}}$ erfüllt und können deswegen weggelassen werden.

Fazit bei beiden Lösungswegen: Unsere Vektorgleichung $\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(u)$ (bzw. unser Ausgangsgleichunssystem aus drei Gleichungen in zwei Variablen) ist gleichbedeutend zur Gleichung (= dem Gleichungssystem aus einer Gleichung in zwei Variablen)

$$u = 2t - 5$$

(Diese Gleichung beschreibt eine Gerade im t-u-Koordinatensystem mit Steigung 2 und u-Achsenabschnitt -5: Ihre Lösungsmenge (und damit die Lösungsmenge unserer Vektorgleichung) ist die Gerade $\mathbb{L} = \{(t, 2t + 5) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$.)
Konkret: Wählt man $t \in \mathbb{R}$ beliebig und setzt $u = 2t - 5$, so ist das Zahlenpaar $(t, u) = (t, 2t - 5)$ ein Lösung der Vektorgleichung

$$\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(u)$$

Ersetzt man hier $u = 2t - 5$, so gilt also

$$\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{h}(2t - 5) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass jeder Punkt der Geraden g auch auf der Geraden h liegt.
Die Schnittmenge der beiden Geraden ist $g \cap h = g = h$.
Beispiele:

- Für $t = 0$ ergibt sich $u = 2 \cdot 0 - 5 = -5$. In der Tat gelten $\overrightarrow{g}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{h}(-5) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (bitte nachrechnen).
- Für $t = 3$ ergibt sich $u = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ und es gilt $\overrightarrow{g}(3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{h}(1)$.

Merke 20.0.10

Zwei durch Koordinatengleichungen gegebene Ebenen

$$E\colon ax+by+cz+d=0 \qquad \text{und} \qquad F\colon a'x+b'y+c'z+d'=0$$

- sind genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ kollinear sind.
- sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinatengleichungen Vielfache voneinander sind.

Merke 20.0.11 Schnittmenge einer parametrisierten Gerade mit einer durch eine Koordinatengleichung gegebenen Ebene

Seien

$$g\colon \vec{g}(t)=\vec{A}+t\vec{v} \qquad \text{und} \qquad E\colon ax+by+cz+d=0$$

eine Parametrisierung einer Geraden g und eine Koordinatengleichung einer Ebene E.
Um die Schnittmenge von g und E zu bestimmen, setze man die Komponenten von $\vec{g}(t)$ in die Koordinatengleichung von E ein. Wenn man die Komponenten von $\vec{g}(t)$ als $\vec{g}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ schreibt, so liefert dies eine lineare Gleichung

$$ax(t)+by(t)+cz(t)+d=0$$

in der Variablen t. Für jede Lösung $t\in\mathbb{R}$ dieser Gleichung ist $\vec{g}(t)$ ein Schnittpunkt von g und E.
Diese Gleichung kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Geometrisch bedeutet dies:

$$\text{Gleichung hat}\begin{cases}\text{keine Lösung} & \iff \text{✎kein Schnittpunkt } (g \text{ und } E \text{ parallel und } g \text{ nicht in } E)\\ \text{genau eine Lösung} & \iff \text{✎}g \text{ und } E \text{ schneiden sich in genau einem Punkt}\\ \text{unendlich viele Lösungen} & \iff \text{✎}g \text{ liegt in } E\end{cases}$$

Aufgabe A3 Betrachte die Ebene $E\colon 2x-3y+5z-7=0$.

(a) Löse die Ebenengleichung nach z auf und bestimme jeweils die fehlende dritte Koordinate so, dass die folgenden Punkte auf E liegen.

$$(0,0,\quad) \qquad (2,0,\quad) \qquad (0,2,\quad) \qquad (2,2,\quad)$$

(b) Wo schneidet die Ebene die x-Achse bzw. die y-Achse bzw. die z-Achse?

(c) In dieser Aufgabe sollst du lernen, wie man rechnerisch sieht, ob der Schnitt einer Gerade mit einer Ebene einpunktig, leer oder eine Gerade ist. Alle Fälle treten auf.
Betrachte die folgenden Geraden:

$$a\colon \vec{a}(t)=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} \qquad b\colon \vec{b}(t)=\begin{pmatrix}12\\-2\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\-1\\-5\end{pmatrix} \qquad c\colon \vec{c}(t)=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}11\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

Bestimme durch das Lösen ~~eines Gleichungssystems~~ einer Gleichung

(i) die Schnittmenge von E und a;
(ii) die Schnittmenge von E und b;
(iii) die Schnittmenge von E und c.

(d) Rechne für jede der drei obigen Geraden a, b, c das Skalarprodukt des Richtungsvektors mit dem Normalenvektor der Ebene E aus. Was hat das Ergebnis mit der Schnittmenge zu tun und warum?
Wie kann man also einfach feststellen, ob eine Ebene und eine Gerade sich in genau einem Punkt schneiden?

Aufgabe A4 Seien E die x-y-Ebene, F die y-z-Ebene, G die Ebene $z = 1$ und H die Ebene $z = 0$. Überlege dir jeweils anschaulich, wie die jeweilige Schnittmenge aussieht, und beschreibe sie mathematisch.

- $E \cap F$;
- $E \cap G$;
- $E \cap H$.

Beispiel 20.0.12. Anschaulich ist klar, dass zwei nicht-parallele Ebenen sich in einer Geraden (= der Schnittgeraden) schneiden. Wir zeigen dies rechnerisch in einem Beispiel. Dabei erklären wir insbesondere, wie man eine Parametrisierung der Schnittgeraden erhält.

Betrachte die beiden Ebenen

$$E\colon 2x - 3y + 3z + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad F\colon 3x - 2y + 5z + 2 = 0$$

Wir wollen die Schnittmenge $E \cap F$ bestimmen.

Die beiden Ebenen E und F sind nicht parallel (und insbesondere nicht gleich), denn die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear.

Wir erwarten also, dass die Schnittmenge $E \cap F$ eine Gerade ist. Sie besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die die beiden Koordinatengleichungen erfüllen, also Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3z + 1 &= 0 \\ 3x - 2y + 5z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

sind. Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren. Wir elimineren x. Das Dreifache der ersten Gleichung minus das Zweifache der zweiten Gleichung ist (bitte nachrechnen!)

$$-5y - z - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen (sie beschreibt eine Gerade in einem y-z-Koordinatensystem). Man kann sie beispielsweise nach z auflösen und erhält

$$z = -5y - 1$$

Wir sehen: Wählt man $y \in \mathbb{R}$ beliebig, so muss man $z = -5y - 1$ wählen und dann (löse eine beliebige der beiden obigen Koordinatengleichungen nach x auf und ersetze $z = -5y - 1$)

$$x = \frac{1}{2}(3y - 3z - 1) = \frac{1}{2}(3y - 3(-5y - 1) - 1) = \frac{1}{2}(18y + 2) = 9y + 1$$

Wer an dieser Stelle bereits glaubt, dass der Schnitt eine Gerade ist (was wir gleich zeigen werden), kann auch einfach zwei verschiedene Punkte im Schnitt ausrechnen (etwa für $y = 0$ und $y = 1$), nennen wir sie A und B. Die Schnittgerade ist dann die Gerade durch diese beiden Punkte und hat als naheliegende Parametrisierung $\overrightarrow{A} + t\overrightarrow{AB}$.

Fazit: Die Lösungsmenge (= die Schnittmenge der beiden Ebenen E und F) besteht aus allen Punkten

$$\begin{pmatrix} 9y + 1 \\ y \\ -5y - 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für beliebiges } y \in \mathbb{R}$$

(Der besseren Lesbarkeit haben wir die Punkte hier als Vektoren geschrieben.)

Aufgabe: Teste selbst, dass jeder dieser Punkte auf E und F liegt und damit im Schnitt (= der Schnittmenge) $E \cap F$ (per Einsetzen in die beiden Koordinatengleichungen).

Nun bestätigen wir rechnerisch unsere Anschauung, dass $E \cap F$ eine Gerade ist. Punkte der Schnittmenge kann man auch wie folgt schreiben.

$$\begin{pmatrix} 9y + 1 \\ y \\ -5y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 9y \\ 0 + y \\ -1 - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{für beliebiges } y \in \mathbb{R}$$

Dies ist offensichtlich die Parametrisierung einer Geraden. Wer lieber t als Parameter verwendet, kann den Parameter y durch t ersetzen und erhält die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{für beliebiges } t \in \mathbb{R}$$

Etwas abstrakter haben wir gezeigt:

$$E \cap F = (\text{Lösungsmenge unseres } 2 \times 3\text{-LGS}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Merke 20.0.13 Schnittmenge zweier Ebenen

Seien

$$E\colon ax+by+cz+d=0 \qquad \text{und} \qquad F\colon a'x+b'y+c'z+d'=0$$

die Koordinatengleichungen zweier Ebenen E und F.
Die Schnittmenge $E\cap F$ dieser beiden Ebenen besteht aus allen Punkten $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, die beide Koordinatengleichungen erfüllen, also Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax+by+cz+d&=0\\ a'x+b'y+c'z+d'&=0 \end{aligned}$$

aus zwei Gleichungen und drei Variablen sind.
Man kann dieses Gleichungssystem lösen und erhält

- entweder keine Lösung, d. h. die Lösungsmenge ist die leere Menge;
  Geometrisch: Die beiden Ebenen sind parallel und verschieden, $E\cap F=\emptyset$.
  Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ der beiden Ebenen kollinear sind, die beiden Koordinatengleichungen aber **keine** Vielfache voneinander sind.
- oder eine «eindimensionale» Lösungsmenge;
  Geometrisch: Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden.
  Dies ist der «Normalfall» (= der «wahrscheinlichste» Fall bei zufällig gewählten Ebenen).
  Wie man in diesem Fall die Schnittgerade als parametrisierte Gerad angeben kann, wurde im vorherigen Beispiel 20.0.12 erklärt.
- oder eine «zweidimensionale» Lösungsmenge.
  Geometrisch: Die beiden Ebenen sind gleich, $E=F=E\cap F$.
  Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die Koordinatengleichungen der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind (insbesondere sind ihre Normalenvektoren dann kollinear).

Aufgabe A5 Betrachte die folgenden vier Ebenen:

$$\begin{aligned} E&\colon 6x-3y+9z-6=0\\ F&\colon x+y+z=0\\ G&\colon -4x+2y-6z-4=0\\ H&\colon -4x+2y-6z+4=0 \end{aligned}$$

Berechne die folgenden Schnittmengen; wenn die Schnittmenge eine Gerade ist, gib diese in Parameterform mit Parameter t an.

- $E\cap F$;
- $E\cap G$;
- $E\cap H$;

Abstände

Aufgabe A6 Abstand von Punkt zu Ebene und nächster Punkt auf Ebene
Gegeben sind eine Ebene E in Koordinatenform und ein Punkt P durch seine Koordinaten.
Beschreibe in Worten,

- wie man den Abstand von P zu E berechnen kann;
- wie man denjenigen Punkt auf E berechnen kann, der den kleinsten Abstand zu P hat.

Hinweis: Verwende eine Hilfsgerade, um das zweite Problem zu lösen. Das erste Problem ist danach sehr einfach zu lösen.

Aufgabe A7 Abstand von Punkt zu Gerade und nächster Punkt auf Gerade

Gegeben sind eine Gerade g durch eine Parametrisierung und ein Punkt P durch seine Koordinaten. Beschreibe in Worten,

- wie man den Abstand von P zu g berechnen kann;
- wie man denjenigen Punkt auf g berechnen kann, der den kleinsten Abstand zu P hat.

Hinweis: Verwende eine Hilfsebene, um das zweite Problem zu lösen. Das erste Problem ist danach sehr einfach zu lösen.

Algorithmus 20.0.14 Abstand von Punkt zu Ebene und nächster Punkt auf Ebene

Seien ein Punkt P durch seine Koordinaten und eine Ebene E durch eine Koordinatenform gegeben.

(a) Bestimme eine Parametrisierung der Geraden g durch P, die senkrecht auf E steht.
Dies ist rechnerisch einfach: Aus der Koordinatenform von E erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}_E$ von E. Dann ist $\vec{g}(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{n}_E$ eine solche Parametrisierung.

(b) Berechne den Schnittpunkt von g und E und nenne ihn P_E.

Dann gelten:

- $\text{Abstand}(P, E) = \text{Abstand}(P, P_E)$ (und letzterer ist als Abstand zwischen Punkten einfach zu berechnen);
- P_E ist der Punkt auf E, der den kleinsten Abstand zu P hat.

Dass P_E wirklich der Punkt auf E ist, der den kleinsten Abstand zu P hat, folgt aus dem Satz des Pythagoras.

20.0.15. Den folgenden Satz haben wir bereits auf der letzten Seite des vorherigen Vektorgeometrie-Skripts bewiesen, und zwar mit Hilfe des obigen Algorithmus 20.0.14.

Satz 20.0.16 Abstand zwischen Punkt und Ebene in Koordinatenform

Der Abstand eines Punktes $P = (x_P, y_P, z_P)$ zu einer in Koordinatenform verbessert: $E : ax+by+cz+d = 0$ gegebenen Ebene ist

$$\text{Abstand}(P, E) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left|\left\langle \vec{n}, \vec{P} \right\rangle + d\right|}{|\vec{n}|}$$

In der Formelsammlung steht die 2-dimensionale Version dieser Formel auf Seite 102. Die 3-dimensionale Version finde ich nicht, nur eine in meinen Augen nicht besonders gut verständlich aufgeschriebene Formel auf Seite 108: Empfehlung: Man merke sich, dass die Formel von Seite 102 sinngemäss auch im Raum gilt.

Ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ hierbei sogar normiert (d. h. $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$), so gilt

$$\text{Abstand}(P, g) = |ax_P + by_p + cz_P + d|$$

Algorithmus 20.0.17 Abstand von Punkt zu Gerade und nächster Punkt

Seien ein Punkt P durch seine Koordinaten und eine Gerade g durch eine Parametrisierung gegeben.

(a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E, die durch P geht und senkrecht auf g steht.
Dies ist rechnerisch einfach: Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g. Bestimme dann d so, dass der Punkt P auf der Ebene $ax + by + cz + d = 0$ liegt (mit anderen Worten: Setze $d = -(ax_P + by_P + cz_P)$). Die gesuchte Koordinatengleichung ist dann $ax + by + cz + d = 0$.

(b) Berechne den Schnittpunkt von g und E und nenne ihn P_g.

Dann gelten:

- $\text{Abstand}(P, g) = \text{Abstand}(P, P_g)$ (und letzterer ist als Abstand zwischen Punkten einfach zu berechnen);
- P_g ist der Punkt auf g, der den kleinsten Abstand zu P hat.

Dass P_g wirklich der Punkt auf g ist, der den kleinsten Abstand zu P hat, folgt aus dem Satz des Pythagoras.

20.0.18. Wir werden bald eine Formel kennenlernen, mit der man $\text{Abstand}(P, g)$ direkt aus P und einer beliebigen Parameterdarstellung von g berechnen kann. In dieser Formel kommt das Kreuzprodukt (= Vektorprodukt) vor, das wir bald behandeln.

21 Vektorgeometrie, Teil 3

21.1 Winkelberechnungen mit dem Skalarprodukt

Notation 21.1.1. Wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind, so bezeichne

$$\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \qquad \in [0°, 180°] = [0, \pi]$$

den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Wenn beide Vektoren durch am selben Punkt startende Pfeile dargestellt werden, so wird dieser Winkel in einer und meist der Ebene gemessen, in der beide Pfeile liegen. Von den zwei in Frage kommenden Winkeln nimmt man den kleineren.

Satz 21.1.2 Skalarprodukt und Winkel

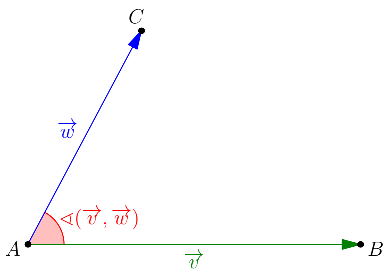
Für alle Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ gilt ✎

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})\right)$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt ihrer Längen und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Ist einer der beiden Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ der Nullvektor, so gilt die obige Gleichung für jede Wahl des (undefinierten) Winkels, denn beide Seiten sind dann Null.

Beweis. Wir stellen uns $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Pfeile dar, die am selben Punkt A starten. Seien B der Endpunkt von $\vec{v}$ und C der Endpunkt von $\vec{w}$. Bezeichnen a, b, c und α die üblichen Grössen im Dreieck ABC. ✎a, b, c in Zeichnung eintragen und Verbindungspfeil $\vec{v} - \vec{w} = \overrightarrow{CB}$.



$$a = |\vec{v} - \vec{w}| \quad b = |\vec{w}| \quad c = |\vec{v}| \quad \alpha = |\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})|$$

Kosinussatz: Linke und rechte Seite des Kosinussatzes umschreiben mit Gleichheitszeichen bis Zeile 4 bzw. 3, dann gleiches markieren und drittletzte Gleichung anschreiben.

$$\begin{aligned}
& a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
\iff\quad & |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\,|v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha) \\
\iff\quad & (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2\,|v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha) \\
\iff\quad & v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2 + v_2^2 - 2v_2w_2 + w_2^2 + v_3^2 - 2v_3w_3 + w_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2\,|v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha) \\
\iff\quad & -2v_1w_1 - 2v_2w_2 - 2v_3w_3 = -2\,|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) \\
\iff\quad & v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) \\
\iff\quad & \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))
\end{aligned}$$

□

21.1.3. Mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt (Verträglichkeit mit Summen, Kommutativität) kann man das obige Resultat abstrakter wie folgt beweisen. Kosinussatz:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha)$$

Umformung der linken Seite des «Kosinussatzes»:

$$\begin{aligned}
& |\vec{v} - \vec{w}|^2 \\
&= \langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle \\
&= \langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{w} \rangle \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle - (\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle) \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle
\end{aligned}$$

Umformung der rechten Seite des «Kosinussatzes»:

$$\begin{aligned}
& |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha) \\
&= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - 2 \cdot |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Da die umgeformten Terme nach dem Kosinussatz gleich sind, folgt

$$-2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -2 \cdot |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{oder gleichbedeutend wie gewünscht} \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha)$$

Vorteile dieses Beweises: Man muss sich nicht um die Komponenten der beteiligten Vektoren kümmern; ausserdem funktioniert er für Vektoren im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

21.1.4. Die Formel in Satz 21.1.2 wird selten zur Berechnung des Skalarprodukts verwendet, sondern meistens zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren, indem man sie nach dem Winkel auflöst:

Folgerung 21.1.5 aus Satz 21.1.2

Für beliebige, vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt:

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{w}\right)\right) = \frac{\left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right|} \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad \sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = \arccos\left(\frac{\left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right|}\right)$$

Hierbei wird verwendet, dass $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$ im Intervall $[0, \pi]$ liegt und $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ und $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ Umkehrfunktionen voneinander sind.

Aufgabe A8 Berechnen Sie alle Winkel zwischen den folgenden drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Was ist speziell an der gegenseitigen Lage dieser Vektoren?
Welcher Winkel ist auf den zweiten Blick leicht zu ermitteln?
Wie hängen die anderen beiden Winkel zusammen?
Gilt ein solcher Zusammenhang für beliebige drei Vektoren? Begründen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

⚒ **Aufgabe A9** Mit Hilfe des Skalarprodukts: Berechnen Sie für einen Würfel den Winkel

(a) zwischen einer Raumdiagonalen und einer Kante (= Seite); (implizite Annahme: startend am selben Eckpunkt des Würfels)
(b) zwischen einer Raumdiagonalen und einer Flächendiagonalen. (selbe Annahme)

Hinweis: Wählen Sie einen Würfel mit möglichst einfachen Eckpunkten im $\mathbb{R}^3$, etwa denjenigen mit einer Ecke im Ursprung und drei Kanten auf den positiven Koordinatenachsen.

Wer mag, kann dieselben Winkel koordinatenfrei mit SOH-CAH-TOA (oder GAGAHHAG) bestimmen und so seine Resultate überprüfen.

⚒ **Aufgabe A10** Anschaulich ist hoffentlich klar, dass alle Punkte mit Koordinaten 0 oder 1 die Eckpunkte eines Würfels bilden (es handelt sich um die acht Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$).

Wir betrachten davon die vier Punkte $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$. Es handelt sich dabei um paarweise nicht benachbarte Ecken des Würfels. Deswegen ist anschaulich klar, dass je zwei dieser vier Punkte denselben Abstand voneinander haben (was man auch leicht mit Pythagoras nachrechnen kann).

Mit anderen Worten sind A, B, C und D die Eckpunkte eines (regelmässigen) Tetraeders (Vierflächern = Körper mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen).

Berechnen Sie mit Vektorgeometrie die folgenden Winkel:

- den Winkel zwischen zwei Kanten des Tetraeders (die am selben Punkt starten);
- den Winkel zwischen benachbarten Flächen;
- den Winkel zwischen Kante und (nicht anliegender) Fläche;
- den sogenannten Tetraederwinkel: Dies ist der Winkel, unter dem man jede Kante vom Mittelpunkt aus sieht.

Lösungen: $60°$, etwa $70.53°$, etwa $54.74°$, etwa $109.47°$ laut `https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder#Formeln`.

⚒ **Aufgabe A11** Überlegen Sie sich, wie man die folgenden Winkel sinnvoll definieren sollte:

- den Winkel zwischen zwei Ebenen im Raum, die sich schneiden;
- den Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden im Raum, die sich schneiden;
- den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden im Raum.

Wie kann man diese Winkel konkret berechnen, wenn die beteiligten Geraden durch Parametrisierungen und die beteiligten Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben sind?

Folgerung 21.1.6 aus Satz 21.1.2: Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung (CSU) (in der Schule selten verwendet, aber später)

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ beliebige Vektoren, so gilt die folgende Abschätzung/Ungleichung

$$|\langle\vec{v},\vec{w}\rangle| \leq |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$$

Genau dann gilt Gleichheit, wenn die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind.

Beweis. Nimm den Betrag beider Seiten der Gleichung in Satz 21.1.2 und verwende, dass der Kosinus Werte in $[-1, 1]$ annimmt und genau dann 1 oder -1 ist, wenn sein Argument $0°$ oder $180°$ ist. □

Merke 21.1.7 (oder Definition) Winkel zwischen Gerade und Ebene berechnen

Seien E eine Ebene und g eine Gerade. Sei $\vec{n}_E$ ein beliebiger Normalenvektor von E und sei $\vec{v_g}$ ein beliebiger Richtungvektor von g. Der Winkel zwischen E und g ist dann ✎

$$\sphericalangle(E,g) = \left|90°-\sphericalangle(\vec{n}_E,\vec{v_g})\right|$$

Mit Skizze begründen. Papierebene enthält g und steht senkrecht auf E.

Er liegt stets im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}] = [0°, 90°]$.
Die Betragsstriche sind nötig, damit der Winkel weder von der Wahl des Richtungsvektors noch von der Wahl des Normalenvektors abhängt: Insbesondere kann man jeden dieser Vektoren mit -1 multiplizieren, ohne dass sich der Winkel ändert. Dieser Winkel ist genau dann $0°$, wenn g parallel zu E liegt (d. h. g liegt in E oder g und E schneiden sich nicht).

Merke 21.1.8 (oder Definition) Winkel zwischen zwei Ebenen

Seien E und F zwei Ebenen. Sei $\vec{n_E}$ und $\vec{n_F}$ beliebige Normalenvektoren dieser beiden Ebenen. Einer der beiden Winkel zwischen E und F ist dann ✎

$$\sphericalangle(E,F) = \sphericalangle(\vec{n_E},\vec{n_F})$$

Mit Skizze begründen. Papierebene steht senkrecht auf Schnittgeraden.

Der andere Winkel ist «180° minus dieser Winkel».
Möchte man sich auf einen dieser beiden Winkel festlegen, so nimmt man denjenigen im Intervall $[0°, 90°]$.

21.2 Kreuzprodukt von Vektoren

Motivation 21.2.1. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$. Gesucht ist ein Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, der auf diesen beiden Vektoren senkrecht steht.

Ansatz: Das Skalarprodukt des gesuchten Vektors mit beiden Vektoren muss Null sein. Dies führt zum Gleichungssystem ✎

$$\begin{cases} v_1x + v_2y + v_3z &= 0 \quad (G1) \\ w_1x + w_2y + w_3z &= 0 \quad (G2) \end{cases} \implies \begin{cases} v_1w_3x + v_2w_3y + v_3w_3z &= 0 \quad w_3(G1) \\ v_3w_1x + v_3w_2y + v_3w_3z &= 0 \quad v_3(G2) \end{cases}$$

Bilde die Differenz «oben minus unten»: rechts mit Differenzstrich und Wort Differenz drunterschreiben

$$\underbrace{(v_1w_3 - v_3w_1)}_{\text{(2) definiere dies als } -y} x + \underbrace{(v_2w_3 - v_3w_2)}_{\text{(1) definiere dies als } x} y = 0$$

Mit den so definierten Werten von x und y gilt die letzte Gleichung. Um daraus z zu berechnen, lösen wir (G1) nach z auf:

$$z = \frac{1}{v_3}(-v_1x - v_2y) = \frac{1}{v_3}(-v_1(v_2w_3 - v_3w_2) - v_2(-v_1w_3 + v_3w_1))$$
$$= \frac{1}{v_3}(-v_1v_2w_3 + v_1v_3w_2 + v_2v_1w_3 - v_2v_3w_1) = \frac{1}{v_3}(v_1v_3w_2 - v_2v_3w_1) = v_1w_2 - v_2w_1$$

Definition 21.2.2 Kreuzprodukt (= Vektorprodukt)

Das **Kreuzprodukt** zwischen zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \qquad \text{lies «}v\text{ kreuz }w\text{»}$$

Merke 21.2.3 Eselsbrücke für Berechnung des Kreuzprodukts

Man kann die Vektoren «zyklisch verlängern» und die «Multiplikationen über Kreuz» (alias Determinanten von 2×2-Matrizen) «nach unten schieben»:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

21.2.4. Sowohl das Kreuzprodukt als auch das Skalarprodukt nehmen als «Input» zwei Vektoren entgegen. Das Kreuzprodukt liefert einen Vektor, während das Skalarprodukt eine Zahl (= einen Skalar) liefert. Das Kreuzprodukt existiert nur im dreidimensionalen Raum. Es ist aber möglich, eine ähnliche Operation auf $n-1$ Vektoren im n-dimensionalen Raum zu definieren.

Aufgabe A12 Wählen Sie zwei beliebige Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$. Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt auf jedem der beiden Ausgangsvektoren senkrecht steht.

Aufgabe A13 Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht sowohl auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$ steht. Dies ist für beliebige Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu zeigen.

Bemerkung: Dies zeigt, dass unser Ansatz in Motivation 21.2.1 das dortige Problem löst.

21.2.5. Man kann sich an dieser Stelle elementar überlegen, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ genau dann der Nullvektor ist, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind. Wir folgern dies in Bälde aus einer allgemeineren Aussage (Satz 21.2.7).

Algorithmus 21.2.6 Ebenengleichung der Ebene durch drei Punkte per Kreuzprodukt

Seien drei Punkte A, B, C im Raum gegeben, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Gesucht ist eine Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ der eindeutigen Ebene E durch diese drei Punkte.

(a) Setze
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$
(oder ein anderes Kreuzprodukt von Verbindungsvektoren). Dies ist ein Normalenvektor von E. Seien a, b, c die Komponenten von $\vec{n}$. Damit ist die Ebenengleichung $ax + by + cz + d = 0$ bis auf den Wert von d festgelegt.

(b) Bestimme d so, dass der Punkt A die Ebenengleichung $ax+by+cz+d = 0$ erfüllt (dazu die Koordinaten von A einsetzen und nach d auflösen). Statt A kann man auch B oder C verwenden.

Die gesuchte Ebenengleichung ist $E\colon ax + by + cz + d = 0$.

Aufgabe A14

(a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung (= Koordinatengleichung) der Ebene E, die durch die drei Punkte $A = (-2, 3, -1)$, $B = (1, 5, 0)$ und $C = (2, 1, -2)$ festgelegt ist. (Gemeint ist damit: Die Ebene E geht durch diese drei Punkte.) Lösung: $E\colon y - 2z - 5 = 0$ oder Vielfache.

(b) Testen Sie zur Probe, dass die Punkte A, B und C die von Ihnen gefundene Ebenengleichung erfüllen.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt (falls vorhanden) der Ebene E mit der Geraden g durch den Punkt $P = (1, -5, 7)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Lösung: $(4, 1, -2)$

(d) Bestimmen Sie den Winkel, unter dem die Ebene E und die Gerade g sich schneiden.

Lösung: $\sphericalangle(E, g) = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}\right) - 90° \approx 72.976°$

Satz 21.2.7 Länge des Kreuzprodukts als Fläche

Für alle Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt✎

$$\left|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right| = \left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|\cdot\sin(\sphericalangle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}))$$
$$= (\text{Fläche des von } \overrightarrow{v} \text{ und } \overrightarrow{w} \text{ aufgespannten Parallelogramms})$$

Diese Gleichheit ist etwas seltsam: Die Länge eines Vektors hat die Dimension «Länge», während die Parallelogrammfläche die Dimension «Länge^2» hat. Mit Einheiten geht es also nicht auf.

Insbesondere gilt:

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \quad \text{(Nullvektor)} \qquad \iff \qquad \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ kollinear}$$

Denn: Nach der obigen Gleichheit ist das Kreuzprodukt genau dann Null (= der Nullvektor), wenn das Parallelogramm die Fläche Null hat, was offensichtlich dazu äquivalent ist, dass $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ kollinear sind (das schliesst den Fall ein, dass einer dieser beiden Vektoren Null ist).

Beweis. Wir benötigen die folgende interessante Beziehung zwischen Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Längen.

$$\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2 + \left|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right|^2 = \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2 \quad \text{salopp:} \quad \text{Skalarprodukt}^2 + (\text{Länge Kreuzprodukt})^2 = \text{Länge}^2\cdot\text{Länge}^2$$

Der Beweis ist eine gute Rechenübung, die wir dem interessierten Leser überlassen (siehe A15). Diese Gleichung liefert die folgende Gleichung, deren rechte Seite wir umschreiben (mit Hilfe von Satz 21.1.2). ✎

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2 - \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2\\
&= \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2 - \Big(\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|\cdot\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right)\Big)^2\\
&= \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2 - \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2\cdot\cos^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right)\\
&= \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2\cdot\left(1-\cos^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right)\right)\\
&= \left|\overrightarrow{v}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|^2\cdot\sin^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right)
\end{aligned}$$

Alle quadrierten Terme sind nicht-negativ (denn Winkel zwischen Vektoren liegen per Definition im Intervall $[0°, 180°]$, auf dem der Sinus nicht-negative Werte annimmt). ✎Wurzelziehen liefert

$$\left|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right| = \left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|\cdot\sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right)$$
$$= \text{Fläche des von } \overrightarrow{v} \text{ und } \overrightarrow{w} \text{ aufgespannten Parallelogramms}$$

Die letzte Gleichung gilt auf Grund der trigonometrischen Dreiecksflächenformel: Die Fläche jedes Dreiecks ist das Produkt zweier Seiten a, b und des Sinus des eingeschlossenen Winkels γ:

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$$

□

Merke 21.2.8 Zusammenfassung der Sätze 21.1.2 und 21.2.7

Für alle Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ gilt

$$\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle = \left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|\cdot\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right) \qquad \left|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right| = \underbrace{\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{w}\right|\cdot\sin(\sphericalangle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}))}_{\text{Parallelogrammfläche}}$$

Salopp in Worten:

- Skalarprodukt = Länge mal Länge mal Kosinus
- Länge Kreuzprodukt = Länge mal Länge mal Sinus = Parallelogrammfläche

Summiert man beide Gleichungen und verwendet $\sin^2 + \cos^2 = 1$, so erhält man die Gleichung vom Anfange des Beweises von Satz 21.2.7.

Aufgabe A15 Zeige die Gleichung

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 + \left|\vec{v} \times \vec{w}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 \cdot \left|\vec{w}\right|^2$$

die wir im Beweis von Satz 21.2.7 verwendet haben, wie folgt durch «Expandieren und Ausschreiben»:

- Expandiere in der linken Seite der Gleichung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ und zeige (durch Anwenden der Definitionen), dass die linke Seite sich umformen lässt zu dem Ausdruck

$$v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_1^2w_3^2 \quad + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_2^2w_3^2 \quad + v_3^2w_1^2 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_3^2$$

- Zeige, dass sich die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung ebenfalls zu diesem Ausdruck umformen lässt.

Merke 21.2.9 Eigenschaften des Kreuzprodukts

Seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann gelten

- Das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ ist ein Vektor.
- Das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$. (siehe A13)
- Wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht kollinear sind:
  Die drei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ (in dieser Reihenfolge) sind in derselben Weise orientiert wie die Standardbasisvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, gebräuchlicherweise wie Daumen ($\vec{v}$), Zeigefinger ($\vec{w}$) und Mittelfinger ($\vec{v} \times \vec{w}$) der **rechten Hand**. (ohne Beweis)
  Mit anderen Worten: Wenn die Standardbasisvektoren wie üblich ein **Rechtssystem** bilden, bilden auch die drei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ ein Rechtssystem.
- Es gilt

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \underbrace{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))}_{\text{Parallelogrammfläche}}$$

- Rechengesetze: (Beweis durch Nachrechnen laut Definition des Kreuzprodukts)
  - Antisymmetrie: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
  - Linearität: $(\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w})$ und $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ und analog im zweiten Argument.

Aufgabe A16 Gegeben sind die Punkte $A = (2, -3, 4)$, $B = (-1, 2, 3)$ und $C = (4, 3, -1)$.

(a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC. $\frac{\sqrt{1434}}{2} \approx 18.9341$

(b) Sei $D = (4, 0, 8)$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD$. $\frac{67}{2} = 33.5$
Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Abstand von D zur Ebene der «Pyramidengrundfläche $\triangle ABC$» (siehe Satz 20.0.16 oder Algorithmus 20.0.14).

(c) Wie gross ist der Winkel $\sphericalangle ADB$? $\arccos\left(\frac{24}{\sqrt{29 \cdot 54}}\right) \approx 52.66°$

Aufgabe A17 Berechnen Sie alle Vektorprodukte zwischen den **Standardbasisvektoren** $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wer mag, kann sich überzeugen, dass jeweils erster Vektor, zweiter Vektor und Kreuzprodukt ein Rechtssystem bilden.

Bemerkung: Wenn man sich diese Vektoren am Ursprung des Koordinatensystems startend vorstellt, zeigen sie in Richtung der Koordinatenachsen und haben die Länge eins. Jeden Vektor kann man auf eindeutige Weise als Linearkombination (= Summe von reellen Vielfachen) dieser drei Standardbasisvektoren schreiben.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 - 2e_2 + e_3$.

Je drei Vektoren mit dieser Eigenschaft nennt man eine **Basis** des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

22 Geometrie: Diverses am Ende des Schuljahres

22.1 Abstände

Aufgabe A18 (Abstand windschiefer Geraden und nächste Punkte)
Betrachte die beiden Geraden

$$g\colon \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überzeuge dich, dass die beiden Geraden windschief sind und berechne ihren Abstand und die beiden Punkte auf g und h, die diesen Abstand realisieren.

Der Abstand ist $d(g,h) = 14$; die beiden Punkte $\vec{g}(-3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{h}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ realisieren diesen Abstand.

Aufgabe A19 Gegeben sind ein Punkte P (durch seine Koordinaten) und eine Gerade g (durch eine Parametrisierung $\vec{g}(t)$).
Gesucht ist der Abstand $d(P,g)$ vom Punkt P zur Geraden g und der Punkt Q auf g, der diesen Abstand realisiert.

(a) Überlege dir abstrakt mindestens drei Möglichkeiten, wie man dieses Problem lösen könnte.
Hinweise:
- 1. Möglichkeit: Schneide g mit einer geeigneten Ebene durch P (so dass der Schnittpunkt Q ist).
- 2. Möglichkeit: Bestimme t so, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{g(t)P} = \vec{P} - \vec{g}(t)$ senkrecht auf einem Richtungsvektor der Geraden g steht.
- 3. Möglichkeit (als Extremalproblem; in gewisser Weise ist dies die beste Möglichkeit): Bestimme t so, dass der Abstand/die Funktion $f(t) = d(\vec{g}(t), P)$ minimal wird.
Schreibe dazu $f(t)$ als Funktion in der Variablen t. Warum können wir diese Funktion mit unserem Wissen über quadratische Funktionen minimieren?

(b) Wende die von dir gefundenen Möglichkeiten im folgenden Beispiel an:

$$P = (2,3,7) \qquad g\colon \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 21 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand $d(P,g) = 9$; der zu P nächste Punkt auf g ist $Q = (1,-1,-1)$.

22.2 Sphärische Geometrie = Kugelgeometrie

Aufgabe A20 Wir nehmen in dieser Aufgabe vereinfacht an, dass die Erde eine Kugel mit Radius $R = 6371\,\text{km}$ ist.
Wir legen ein 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem wie folgt fest:

- Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Erdmittelpunkt.
- Die z-Achse geht durch Nord- und Südpol und zeigt in Richtung Norden.
- Die positive x-Achse geht durch den Punkt auf dem Äquator mit den (sphärischen) Koordinaten 0° N, 0° E.
- Die positive y-Achse geht durch den Punkt auf dem Äquator mit den Koordinaten 0° N, 90° E.
- Eine Einheit ist 1 km.

(a) St. Gallen hat die (sphärischen oder Kugel-)Koordinaten 47.4° N, 9.4° E (und Radius 6371 km). Welche kartesischen Koordinaten hat St. Gallen? $(4254.471, 704.323, 4689.675)$

(b) Eine Stadt hat die kartesischen Koordinaten $(-2678.679, -4329.373, 3830.255)$. Welche sphärischen Koordinaten hat dieser Ort? Wie heisst er? 36.956° N, 121.746° W, Name per Internet

Definition 22.2.1 Grosskreis

Schneidet man eine Sphäre (= Kugeloberfläche) mit einer Ebene durch den Mittelpunkt der Sphäre, so erhält man als Schnittmenge einen Kreis auf der Sphäre (der die Sphäre in zwei Halbsphären zerlegt).
Jeder Kreis auf der Sphäre, der auf diese Weise entsteht, heisst **Grosskreis**.

Beispiel 22.2.2. Wenn man sich die Erde als Kugel vorstellt, so ist jeder Längenkreis ein Grosskreis. Die Breitenkreise – abgesehen vom Äquator – sind keine Grosskreise.

Merke 22.2.3 Abstand zweier Punkte auf einer Sphäre und kürzeste Verbindung (Orthodrome)g

Seien A und B zwei Punkte auf einer Sphäre. Dann ist ihr Abstand (auf der Sphäre) und die kürzeste Verbindung zwischen diesen beiden Punkten wie folgt ermittelbar.

- Betrachte einen Grosskreis durch A und B.
- Die beiden Punkte A und B zerlegen diesen Grosskreis in zwei Teilbögen.
- Eine **kürzeste Verbindung von A und B auf der Sphäre** ist der kürzere dieser beiden Teilbögen (Fachbegriff: **Orthodrome**).
- Der **Abstand von A und B auf der Sphäre** ist die Länge des kürzeren dieser beiden Teilbögen. Dieser Abstand wird auch als **sphärische Distanz** oder als **sphärischer Abstand** bezeichnet.

(Meist gibt es genau einen Grosskreis durch A und B (und genau eine kürzeste Verbindung zwischen A und B); die einzige Ausnahme ist der Fall, dass sich A und B diametral gegenüberliegen (also so wie Nord- und Südpol auf der Erdoberfläche). In diesem Fall gibt es unendlich viele Grosskreise, die von A und B jeweils in zwei gleich lange Halbkreise zerlegt werden; all diese Halbkreise sind kürzeste Verbindungen. Man kann beweisen, dass die hier als «kürzeste Verbindung» bezeichnete Kurve wirklich die kürzeste Verbindung zwischen A und B ist.

Aufgabe A21 Wir nehmen in dieser Aufgabe vereinfacht an, dass die Erde eine Kugel mit Radius $R = 6371\,\text{km}$ ist.

Laut Internet (Wikipedia) hat

- der Flughafen Zürich(-Kloten) (ZRH) die Koordinaten 47.5° N, 8.5° E;
- der John F. Kennedy Flughafen (JFK) in New York die Koordinaten 40.6° N, 73.8° W.

(a) Löse «klassisch», ohne Vektorgeometrie, aber mit Trigonometrie:
  - Wie weit ist der Flughafen Zürich auf der Erdoberfläche vom Äquator entfernt? 5281.759 km
  - Wenn man vom Flughafen Zürich einen möglichst kurzen Tunnel zum Äquator (gemeint ist ein Punkt auf der Erdoberfläche am Äquator) baut, wie lang ist dieser? 5131.798 km

(b) Löse mit Vektorgeometrie:
  - Bestimme den Abstand zwischen dem Flughafen Zürich und dem JFK Airport in New York.
    sphärische Distanz: 6308.507 km
  - Wie lang wäre eine Tunnel zwischen dem Flughafen Zürich und dem JFK Airport? 6053.924 km
  - Wenn ein Flugzeug auf der kürzesten Verbindung von Zürich nach New York fliegt: Welches ist der nördlichste Punkt, den das Flugzeug überfliegt? Welche Koordinaten hat dieser Punkt und in welchem Land bzw. über welchem ozeanischen Gebiet liegt er?
    52.558° N, 24.818° W
  - Der Flughafen von Neapel hat die Koordinaten 40.9° N, 14.3° E, liegt also fast auf demselben Breitenkreis wie der JFK Airport.
    Wir nehmen (leicht gerundet) an, dass Neapel und New York beide auf dem 41°-Breitenkreis liegen.
    - Wie gross ist die kürzeste Distanz zwischen Neapel und New York auf der Erdoberfläche?
      sphärische Distanz(Neapel, JFK): 7038.787 km
    - Wie gross ist die kürzeste Distanz zwischen Neapel und New York auf dem 41°-Breitenkreis?
      Breitenkreisdistanz(Neapel, JFK): 7393.341 km

(c) Der Los Angeles International Airport (LAX) hat die Koordinaten 33.9° N, 118.4° W.
Bestimme die sphärische Distanz von Zürich nach Los Angeles, die Tunnellänge und den nördlichsten Punkt auf der kürzesten Verbindung.
sphärische Distanz: 9532.283°
Tunnellänge: 8667.706°
nördlichster Punkt: 63.277° N, 48.173° W

Eventuell angeben lassen, wie tief der tiefste Tunnelpunkt unter der Erdoberfläche liegt.

Bemerkungen:

- Wer mag, kann `https://www.luftlinie.org` verwenden, um die Orthodromen auf der Karte zu sehen (ich hoffe, dass dort die Orthodromen eingezeichnet werden).
- Mit gängigen Karten-Apps kann man Punkte zu gegebenen sphärischen Koordinaten auf der Landkarte anzeigen lassen. Die Eingabe sollte etwa wie folgt erfolgen (Beispiel St. Gallen): «47.4 N, 9.4 E».

23 Platonische Körper und eulersche Polyederformel

23.1 Polygone = Vielecke

23.1.1. Der Begriff des Polygons ist uns bereits beim Satz von Pick über die Fläche von Gitterpolygonen begegnet. Wir erinnern an die Definition.

Definition 23.1.2 Wiederholung: Polygon = Vieleck

Ein **Polygon** oder **Vieleck** ist eine ebene Figur, die durch einen geschlossenen Streckenzug gebildet wird. Die beteiligten Strecken heissen **Seiten** oder **Kanten** des Polygons. Die Endpunkte der beteiligten Strecken heissen **Ecken** oder **Eckpunkte** des Polygons.
Wenn ein Polygon n Ecken hat, spricht man bisweilen von einem n-gon.

Definition 23.1.3 einfaches Polygon

Ein Polygon heisst **einfach**, wenn sich nur direkt aufeinanderfolgende Strecken des Streckenzugs schneiden und dies nur in den Eckpunkten geschieht.

Aufgabe A22 Finde den Inhalt des folgenden Satzes heraus.

Satz 23.1.4 (Innen-)Winkelsumme eines einfachen Polygon

Die Summe der Innenwinkel jedes einfachen n-gons (= Polygons mit n Ecken) beträgt ✎

$$(n-2)\cdot 180^\circ = (n-2)\cdot \pi$$

Hier ist $n \geq 3$ eine beliebige natürliche Zahl.

Beweis. Anschaulich ist klar, dass sich jedes einfache n-gon in Dreiecke zerlegen lässt, indem man geeignete Ecken durch Kanten verbindet (Triangulierung/Triangulation eines einfachen Polygons). ✎
Dabei entstehen $n-2$ Dreiecke, und jedes dieser Dreiecke hat die Innenwinkelsumme $180^\circ = \pi$.

Warum sich jedes einfache Polygon triangulieren lässt, sollte man eigentlich beweisen.
(Vielleicht per «ear clipping method»? Vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon_triangulation oder https://en.wikipedia.org/wiki/Two_ears_theorem.)

□

Definition 23.1.5 regelmässiges Polygon

Ein Polygon heisst **regelmässiges** oder auch **regulär**, wenn es einfach, gleichseitig (= alle Kanten gleich lang) und gleichwinklig (= alle Innenwinkel gleich gross) ist.

Aufgabe A23 Wir betrachten ein regelmässigeses n-Eck. Sei U sein Umfang und A seine Fläche. Zeige:

(a) Ist R der Umkreisradius unseres n-Ecks, so gelten

$$U = 2n\cdot R\cdot \sin(\tfrac{\pi}{n}) \overset{\text{Halbwinkelformel für Sinus}}{=} nR\sqrt{2-2\cos(\tfrac{2\pi}{n})}$$

$$A = n\cdot R^2\cdot \sin(\tfrac{\pi}{n})\cdot\cos(\tfrac{\pi}{n}) \overset{\text{Additionsformel/Doppelwinkelformel}}{=} \frac{1}{2}n\cdot R^2\cdot\sin(\tfrac{2\pi}{n})$$

(b) Überzeuge dich, dass diese beiden Formeln für Umfang und Fläche für regelmässige Dreiecke (= gleichseitige Dreiecke), regelmässige 4-Ecke (= Quadrate) und regelmässige 6-Ecke die korrekten Werte liefern.

(c) (einfach und unabhängig von (a)) Ist r der Innkreisradius unseres n-Ecks, so gilt $A = \frac{1}{2}\cdot r\cdot U$.

(d) Die Beziehung zwischen Umkreisradius R und Innkreisradius r ist $r = R\cdot\cos(\frac{\pi}{n})$.

Definition 23.1.6 Fermat-Zahl = fermatsche Zahl

Eine **Fermat-Zahl** ist eine Zahl der Form

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Genauer nennt man F_n die n-te Fermat-Zahl. Eine **fermatsche Primzahl** ist eine Fermat-Zahl, die eine Primzahl ist.

Aufgabe A24

(a) Schreibe die Fermat-Zahlen F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 auf.

Fermat vermutete 1640, dass alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind. Dies ist aber falsch, wie Euler 1732 zeigte.

(a) Schreibe ein Python-Programm, das zeigt:
- F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sind Primzahlen.
- F_5 und F_6 sind keine Primzahlen.

Vermutet wird, dass es nur 5 fermatsche Primzahlen gibt, nämlich F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.

Satz 23.1.7 Konstruierbarkeit regelmässiger Polygone (Gauß, 1796)

Das regelmässige n-Eck ist genau dann **mit Zirkel und Lineal** konstruierbar, wenn n das Produkt einer Potenz von 2 mit paarweise verschiedenen **fermatschen Primzahlen** ist.

Für Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge_and_compass_construction#The_basic_constructions

Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon#Construction und https://en.wikipedia.org/wiki/Exact_trigonometric_values#Constructible_values.

Beweis. Siehe Algebra-Vorlesung (Galois-Theorie). https://de.wikipedia.org/wiki/Konstruierbares_Polygon □

Aufgabe A25 Entscheide mit Satz 23.1.7 für jede der Zahlen $n \in \{3, 4, 5, \ldots, 20\}$, ob das regelmässige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Lösung: https://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge_and_compass_construction

23.2 Polyeder = Vielflächner

Definition 23.2.1 Polyeder

Ein (beschränkter) **Polyeder** oder **Vielflächner** ist ein dreidimensionaler Körper, der von endlich vielen einfachen Polygonen begrenzt wird. (für Bilder siehe z. B. https://de.wikipedia.org/wiki/Polyeder)
Die begrenzenden Polygone heissen **Flächen** des Polyeders; ausserdem werden die Begriffe **Kanten** und **Ecken** in hoffentlich offensichtlicher Weise verwendet (englische Begriffe: faces, edges, vertices).

Definition 23.2.2 regelmässiger Polyeder

Ein Polyeder heisst **regelmässig**, wenn *alle* seine Flächen *zueinander kongruente regelmässige* Polygone sind und an jeder Ecke gleich viele Flächen aufeinandertreffen.

Definition 23.2.3 konvexe Menge

Eine Teilmenge des Raumes oder der Ebene (zum Beispiel ein Polyeder oder ein Polygon) heisst **konvex**, wenn die Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten der Teilmenge ganz in der Teilmenge enthalten ist.

Definition 23.2.4

Ein **platonischer Körper** ist ein konvexer, regelmässiger Polyeder.

23.2.5. Anschaulich sind die platonischen Körper diejenigen konvexen Polyeder mit grösstmöglicher Symmetrie.

Satz 23.2.6 seit der Antike bekannt

Es gibt genau … platonische Körper, nämlich …

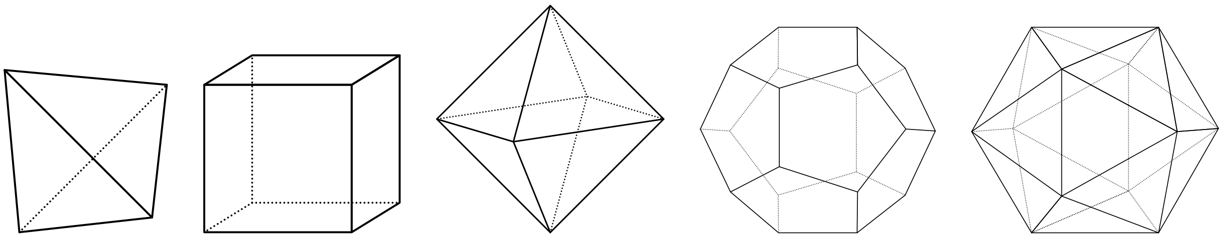
Aufgabe A26 Finde heraus, wie der obige Satz lautet.

Hinweise: Kommen gleichseitige Dreiecke als Flächen eines platonischen Körpers in Frage? Quadrate? regelmässige Fünfecke? regelmässige Sechsecke? regelmässige Siebenecke?

Satz 23.2.7 seit der Antike bekannt

Es gibt genau fünf platonische Körper, nämlich ✎

- Tetraeder (Vierflächner aus gleichseitigen Dreiecken),
- Hexaeder (= Würfel = Sechsflächner aus Quadraten),
- Oktaeder (= Achtflächner aus gleichseitigen Dreiecken),
- Dodekaeder (= Zwölfflächner aus regelmässigen Fünfecken),
- Ikosaeder (= Zwanzigflächner aus gleichseitigen Dreiecken).



Hierbei werden zwei Körper als «gleich» angesehen, wenn sie durch eine Kombination von Verschiebungen, Drehungen und zentrischen Streckungen auseinander hervorgehen.

Beweis. Beobachtungen: Jeder platonische Körper erfüllt die folgenden Bedingungen. ✎

(1) An jeder Ecke treffen mindestens drei Flächen aufeinander.

(2) An jeder Ecke gilt: Die Summe der Innenwinkel der angrenzenden Flächen an der betrachteten Ecke ist echt kleiner als 360°.

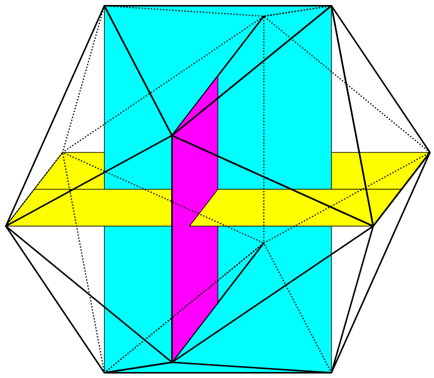
Plausibel ist dies per «Auffalten/Faltplan der Ecke». Strenggenommen kann man z. B. so argumentieren: Jede Ecke ist die Spitze einer geraden Pyramide über einem regelmässigen Polygon. Über jeder Kante der Grundfläche ist der Winkel zum Schwerpunkt der Grundfläche echt grösser als der Winkel zur Pyramidenspitze: Beide Winkel tauchen als Spitzenwinkel in gleichschenkligen Dreiecken über derselben Grundseite auf, wobei die beiden (gleich langen) Schenkel zur Pyramidenspitze echt länger sind als die beiden Schenkel zum Schwerpunkt; also ist der Spitzenwinkel beim Dreieck mit den längeren Schenkeln kleiner (das ist elementargeometrisch offensichtlich oder folgt aus dem Cosinussatz). Die Summe der Winkel der «Kuchenstückespitzen am Schwerpunkt» beträgt 360°. Also ist die Summe der an die Ecke angrenzenden Winkel echt kleiner als 360°.

regelmässiges Polygon (= Seitenflächen des platonischen Körpers)	Innenwinkel	Winkelsumme pro Ecke bei angegebener Anzahl angrenzender Flächen				
		3	4	5	6	≥ 7
gleichseitiges Dreieck	$\frac{180°}{3} = 60°$	180° am Ende: Tetraeder	240° Oktaeder	300° Ikosaeder	360°	$> 360°$
Quadrat	$\frac{2\cdot 180°}{4} = 90°$	270° Hexaeder	360°	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$
gleichmässiges Fünfeck	$\frac{3\cdot 180°}{5} = 108°$	324° Dodekaeder	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$
gleichmässiges Sechseck	$\frac{4\cdot 180°}{6} = 120°$	360°	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$
gleichmässiges n-Eck mit $n \geq 7$	$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 180° - \frac{360°}{n} \geq 180° - \frac{360°}{7} > 128.57°$	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$	$> 360°$

Die Tabelle zeigt, dass es maximal fünf platonische Körper gibt. Ob es zu jeder der fünf Möglichkeiten einen platonischen Körper gibt (was stets der Fall its), muss man sich separat überlegen. Man kann es sich plausibel machen, indem man die entsprechenden fünf platonischen Körper aus Papier bastelt (aus einem sogenannten Netz, vgl. https://www.mathematische-basteleien.de/polyeder.pdf).

- 3 gleichseitige Dreiecke pro Ecke: Ein solcher Körper existiert, nämlich der Tetraeder. Mögliche Wahl der Eckpunkte in einem dreidimensionalen Koordinatensystem: $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ (= vier Eckpunkte des Standardwürfels, die nicht benachbart sind).
- 4 gleichseitige Dreiecke pro Ecke: Oktaeder, z. B. $(0,0,\pm 1)$, $(0,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,0)$.
- 5 gleichseitige Dreiecke pro Ecke: Ikosaeder. Mögliche Eckpunkte, mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldener Schnitt):

  $$(0,\pm 1,\pm\varphi), \quad (\pm 1,\pm\varphi,0), \quad (\pm\varphi,0,\pm 1)$$

  Man kann sich diese Eckpunkte wie folgt vorstellen (besser Zeichnung: https://de.wikipedia.org/wiki/Ikosaeder#Struktur_des_Ikosaeders):
  - Die «ersten» vier Punkte $(0,\pm 1,\pm\varphi)$ bilden ein «goldenes Rechteck» in der y-z-Ebene (goldenes Rechteck = Rechteck, dessen Seitenverhältnis der goldene Schnitt ist); in der Zeichnung ist es in Cyan (Türkis?) dargestellt.
  - Die zweiten vier Punkte $(\pm 1,\pm\varphi,0)$ bilden ein goldenes Rechteck in der x-y-Ebene; in der Zeichnung in Gelb.
  - Die dritten vier Punkte $(\pm\varphi,0,\pm 1)$ bilden ein goldenes Rechteck in der x-z-Ebene; in der Zeichnung in Magenta.
- 3 Quadrate pro Ecke: Hexaeder = Würfel; mögliche Eckpunkte $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$.
- 3 Fünfecke pro Ecke: Dodekaeder; mögliche Eckpunkte (wieder ist φ der goldene Schnitt):

  $$(\pm 1,\pm 1,\pm 1), \quad (0,\pm\tfrac{1}{\varphi},\pm\varphi), \quad (\pm\tfrac{1}{\varphi},\pm\varphi,0), \quad (\pm\varphi,0,\pm\tfrac{1}{\varphi})$$

  Nun sollte man noch angeben, welche dieser Eckpunkte durch Kanten miteinander verbunden sind. Die ersten acht Punkte $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ bilden die Eckpunkte eines Würfels. Ergänzt man auf jeder Würfelseite geeignete «Dächer», so erhält man den Dodekaeder, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Dodekaeder#Einbeschriebener_W%C3%BCrfel □

Dualität erwähnen, auch in folgender Tabelle sichtbar. Falls gewünscht, Faltpläne/-netze ausdrucken.

Aufgabe A27 Entdecke selbst die eulersche Polyederformel!

(a) Trage in der folgenden Tabelle die richtigen Werte ein.
Abzählen ist erlaubt; man kann dabei unterschiedlich clever vorgehen.

(b) Entdecke den allgemeinen Zusammenhang zwischen Eckenanzahl e, Kantenanzahl k und Flächenanzahl f, der für jeden Polyeder «ohne Löcher» gilt. Der Zusammenhang hat die folgende Form, wobei in die Boxen geeignete ganze Zahlen einzutragen sind.

$$\square \cdot e + \square \cdot k + \square \cdot f = \square$$

Polyeder	e = Anzahl der Ecken	k = Anzahl der Kanten	f = Anzahl der Flächen
Tetraeder			
Hexaeder (= Würfel)			
Oktaeder			
Dodekaeder			
Ikosaeder			
ein Fussball (aus Fünf- und Sechsecken)			
ein Polyeder deiner Wahl (ohne «Löcher»)			
weitere Polyeder deiner Wahl (ohne «Löcher»)			

Satz 23.2.8 Eulerscher Polyedersatz (Name historisch bedingt: eigentlich ein Satz über zusammenhängende planare Graphen)

Für jeden (beschränkten) konvexen Polyeder und allgemeiner für jeden zusammenhängenden, planar dargestellten Graphen (mit endlich vielen Ecken und Kanten) mit

- e Ecken,
- k Kanten und
- f Flächen (Wichtig: Beim Graphen wird die äussere, umgebende Fläche mitgezählt.)

gilt: ✎

$$e - k + f = 2$$

Ecken plus Flächen = Kanten plus 2

Der Satz gilt auch für nichtkonvexe Polyeder, die «zur zweidimensionalen Sphäre homöomorph» sind: Wenn man sich den Polyeder aus Gummi hergestellt denkt, bedeutet dies salopp, dass er «durch Aufblasen» zu einem Luftballon wird.

23.2.9 (Graph (informelle Definition))**.** Ein **Graph** besteht aus **Ecken** (auch Knoten genannt) und Verbindungen zwischen diesen Ecken; diese Verbindungen nennt man **Kanten**. Mehrfachkanten und Kanten von einer Ecke zu sich selbst sind erlaubt.

Beispiele:

- Der Plan der Buslinien in St. Gallen bildet einen Graphen: Die Ecken sind die Haltestellen; zwei Haltestellen sind durch eine Kante miteinander verbunden, wenn ein Bus diese beiden Haltestellen direkt hintereinander anfährt (in beliebiger Richtung).
- Die folgenden Daten definieren einen Graphen. Als Menge der Ecken nehme man die Menge aller Schüler der Kanti. Zwei Ecken alias Schüler sind durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Schüler mindestens eine Lektion gemeinsam besuchen.

23.2.10. Graphen stellt man sich oft wie folgt vor: Für jede Ecke zeichnet man einen Punkt in der Ebene. Man verbindet zwei Ecken durch eine Linie, wenn die beiden Ecken durch einen Kante miteinander verbunden sind. Dabei dürfen sich Kanten schneiden.

Hierbei ist die genau Lage der Ecken und Kanten nicht relevant. Man kann also einen Graphen auf viele verschiedene Weisen darstellen.

23.2.11 (planarer Graph)**.** Ein Graph heisst **planar**, wenn er in der Ebene (mit Punkten für die Ecken und Linien für die Kanten) so dargestellt werden kann, dass sich keine Kanten schneiden.

(Planar bedeutet eben, vergleiche etwa englisch «plane».)

23.2.12 (zusammenhängender Graph)**.** Ein Graph heisst **zusammenhängend**, wenn er mindestens eine Ecke hat und wenn je zwei beliebig gewählte Ecken durch eine Folge von Kanten miteinander verbunden sind.

Beweis. Schritt 1: Zuerst erklären wir, wie man die Aussage für konvexe Polyeder auf die Aussage für zusammenhängende planare Graphen zurückführt.

Man stelle sich den Polyeder aus Gummi hergestellt vor. Man wähle eine beliebige Fläche und ziehe deren Ecken sehr weit auseinander. Dann wird diese Fläche zu einem sehr grossen Polygon und der ganze restliche Polyeder «liegt auf diesem Polygon». Man legt nun das gesamte Gummigebilde in die Ebene und ersetzt das grosse Polygon durch die umgebende Fläche. Damit erhält man einen zusammenhängenden, planar dargestellten Graphen. Bilder malen, Würfel, Tetraeder, Oktaeder; auch gut als Projektion, siehe etwa Bild auf `https://ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/` □

Schritt 2: Wir beweisen den Satz nun für zusammenhängende, planar dargestellt Graphen (Beweismethode: strukturelle Induktion).

Wir behaupten, dass man jeden planar dargestellten Graphen mit Hilfe der folgenden Schritte erhalten kann.

(a) ✎Starte mit dem Graphen in der Ebene, der nur aus **einer Ecke und keiner Kante** besteht. Bild malen

(b) Wende endlich oft jeweils einen der folgenden beiden Konstruktionsschritte an:

- ✎Ergänze eine neue Ecke und male eine neue Kante von der neuen Ecke zu einer alten Ecke (ohne Kantenüberschneidungen). Bild malen
- ✎Verbinde zwei alte Ecken durch eine neue Kante (ohne Kantenüberschneidungen); hierbei ist es erlaubt, eine alte Ecke mit sich selbst zu verbinden (also zweimal dieselbe Ecke zu wählen). Bild malen

Man beachte, dass der Startgraph zusammenhängend und planar dargestellt ist und dass diese beiden Eigenschaften in beiden Konstruktionsschritten erhalten bleiben.

Der Eulersche Polyedersatz folgt nun aus den folgenden Beobachtungen:

(a) ✎Er stimmt für den Startgraphen: $e - k + f = 1 - 0 + 1 = 2$

(b) Stimmt $e - k + f = 2$ für einen «alten» Graphen, so stimmt diese Gleichung auch für den «neuen» Graphen, wenn dieser durch einen der beiden oben angegebenen Konstruktionsschritte aus dem alten Graphen entsteht:

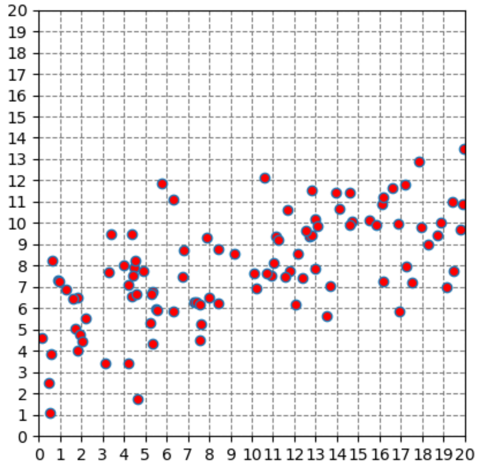
- ✎Im ersten Konstruktionsschritt erhöhen sich e und k um eins und f bleibt gleich, also bleibt $e - k + f$ konstant.
- ✎Im zweiten Konstruktionsschritt erhöhen sich k und f um eins und e bleibt gleich, also bleibt $e - k + f$ konstant.

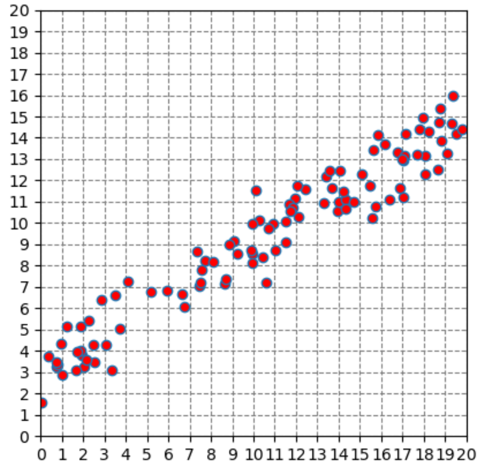
Warum stimmt die obige Aussage, dass sich jeder planar dargestellte Graph so aufbauen lässt? Jeder zeichnet einen zusammenhängenden planar dargestellten Graphen und überlegt sich, dass er mit der behaupteten Prozedur entsteht aus dem «einpunktigen Graphen ohne Kante».

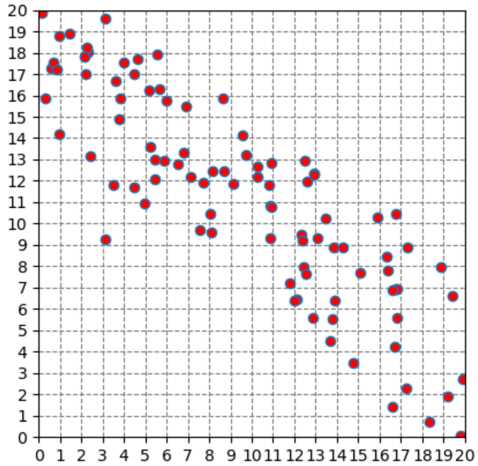
✎Rückwärts denken: Ecke vom Grad 1: beseitige Ecke und zugehörige Kante; sonst gibt es Zyklus (ausser nur ein Punkt ohne Kante): Lösche eine Kante darin; dabei nimmt die Zahl der Kanten stets um eins ab, bis sie Null ist. Dann Ausgangsgraph.

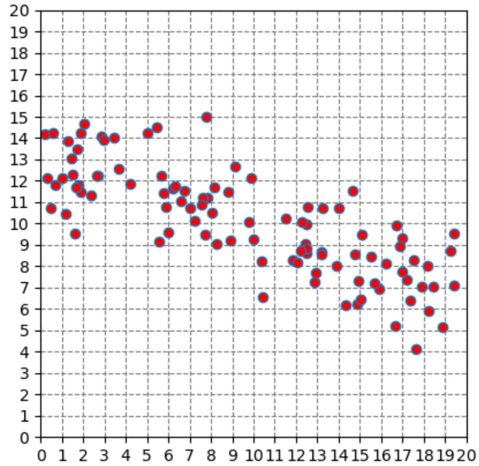
24 Ausgleichsgerade (Methode der kleinsten Quadrate)

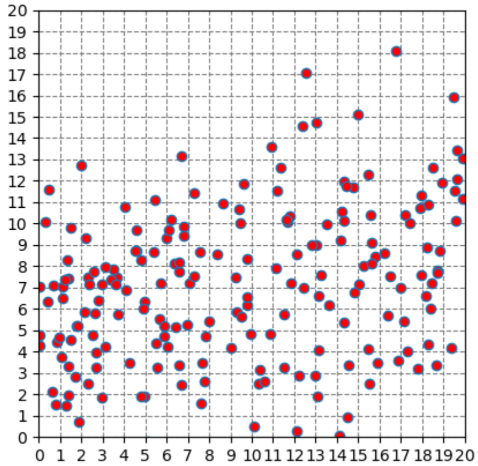
Aufgabe A28 Für jede dargestellte Wolke aus Messpunkten: Zeichne eine Gerade $y = mx + q$ ein, die die Messpunkte möglichst gut approximiert (= annähert). Lies die Steigung m und den y-Achsenabschnitt q ab und schreibe ihn auf.

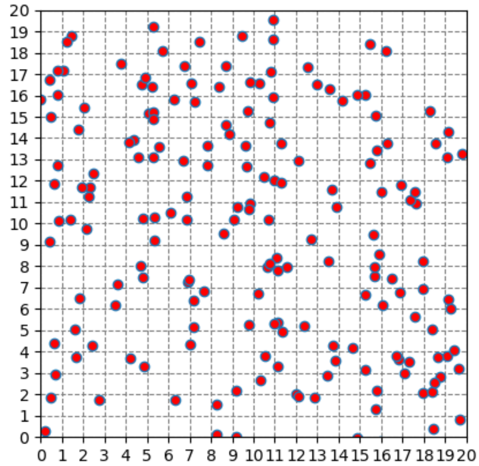












Nekommen alle Schüler mehr oder weniger dieselben Geraden heraus (bis auf unterste Punktewolken)? Lösung: siehe diese Fussnote[1].

24.0.1 (Formulierung des Problems)**.** Gegeben sind n Punkte

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2), \quad \dots, \quad P_n = (x_n, y_n)$$

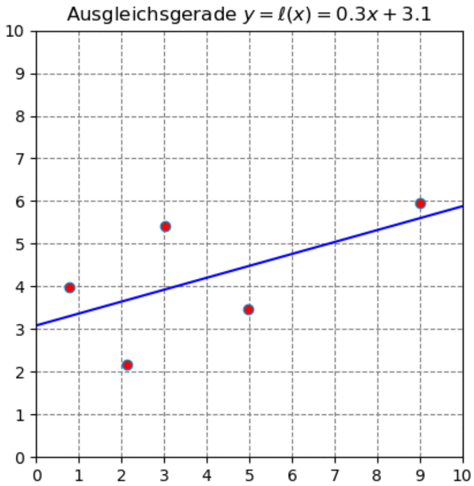
in der Ebene $\mathbb{R}^2$, etwa gewisse Messwerte eines physikalischen Experiments; beispielsweise könnte man an eine Feder eine Kraft x_i anlegen und die Auslenkug y_i der Feder messen.
Gesucht ist eine Gerade

$$y = \ell(x) = mx + q$$

so dass die $\boxed{\text{Summe der quadrierten «Fehler»}}$

$$\big(\ell(x_1)-y_1\big)^2+\big(\ell(x_2)-y_2\big)^2+\dots+\big(\ell(x_n)-y_n\big)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(\ell(x_i) - y_i\big)^2$$

möglichst klein ist.
✎Fehler beim Punkt P_i ist $|\ell(x_i) - y_i|$, in der Zeichnung als senkrechte Strecke einzeichnen.



Satz 24.0.2 Ausgleichsgerade = Regressionsgerade

Seien n Punkte $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$. vorgegeben, wobei $n \geq 2$ gelte und nicht alle Punkte dieselbe x-Koordinate haben (das schliesst langweilige Spezialfälle aus)..
Wir bezeichnen mit

- $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ den Durschschnitt der x-Koordinaten der Punkte und mit
- $\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ den Durschschnitt der y-Koordinaten der Punkte.

Dann gibt es genau eine Gerade, für die die Summe der quadrierten Fehler minimal ist. Diese Gerade heisst **Ausgleichsgerade** oder **Regressionsgerade** (zu den gegebenen Punkten).

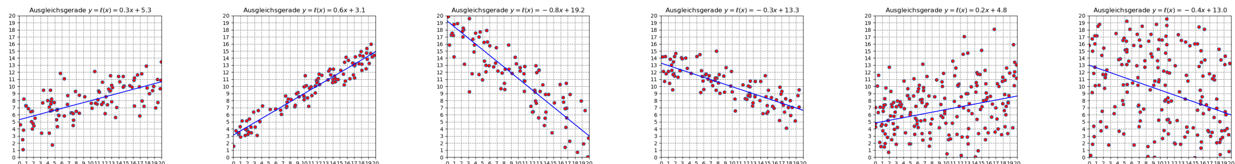
Diese Gerade verläuft durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ unserer Punktwolke und hat die Steigung

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Mit anderen Worten hat sie die Funktionsgleichung

$$y = \ell(x) = m(x - \overline{x}) + \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

[1] «Lösung»: Dieselben Bilder wie oben, nun jedoch mit der berechneten Ausgleichsgeraden. Oberhalb jeder Zeichnung steht die Gleichung der Ausgleichsgeraden.



Aufgabe A29 (Übung zum Auswerten von Summenzeichen)

Lies aus der in 24.0.1 dargestellten Punktewolke die Koordinaten aller Punkte auf eine Nachkommastelle genau ab (eventuell gemeinsam). Berechne daraus mit Hilfe des Satzes die Ausgleichsgerade.

Beweis. Ansatz: Die gesuchte Gerade hat die Form $y = \ell(x) = mx + q$. Zu bestimmen sind reelle Zahlen m und q, so dass die Summe der Fehlerquadrate möglichst klein ist.

Wie in der Formulierung des Satzes seien

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad \text{und} \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$$

die Mittelwerte (= Durchschnitte) der x_i's bzw. der y_i's.

(a) Schritt 1: Wir zeigen den Satz zuerst unter der Annahme, dass beide Mittelwerte Null sind, dass also $\overline{x} = 0$ und $\overline{y} = 0$ gelten. (In diesem Fall ist die Berechnung der Ausgleichsgeraden besonders einfach.)

Gesucht sind m und q, so dass der folgende Ausdruck (= die Summe der Fehlerquadrate) möglichst klein wird. ✎ (Die folgende Rechnung zeigt am Beispiel, wie man mit Σ-Summen rechnet.)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\ell(x_i) - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(mx_i + q - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(m^2x_i^2 + 2mx_iq - 2mx_iy_i + q^2 - 2qy_i + y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m^2x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2mx_iq - \sum_{i=1}^{n} 2mx_iy_i + \sum_{i=1}^{n} q^2 - \sum_{i=1}^{n} 2qy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2) \\
&= m^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2mq\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=n\overline{x}=0} - 2m\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + nq^2 - 2q\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{=n\overline{y}=0} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= m^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + nq^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{\text{feste Zahl}} m^2 - 2\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)}_{\text{feste Zahl}} m + \underbrace{nq^2}_{\text{für nächste Erklärung: } \geq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{\text{feste Zahl}}
\end{aligned}$$

Nun ist bereits klar, welchen Wert q haben muss: ✎ $q = 0$.

In Abhängigkeit von m ist unser zu minimierender Ausdruck eine quadratische Funktion, ihr Graph ist also eine Parabel mit

$$\text{Öffnungsfaktor} = ✎ \sum_{i=1}^{n}\underbrace{x_i^2}_{\geq 0} > 0, \quad \text{(da mindestens ein } x_i \neq 0\text{)},$$

also eine nach oben offene Parabel. Ihr Scheitel ist ein Tiefpunkt und hat die x-Koordinate ✎

$$m \quad \left[= \frac{-b}{2a}\right] \quad = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Für diesen Wert von m wird unser Ausdruck also minimal (das gilt für jedes beliebige, fixierte q).

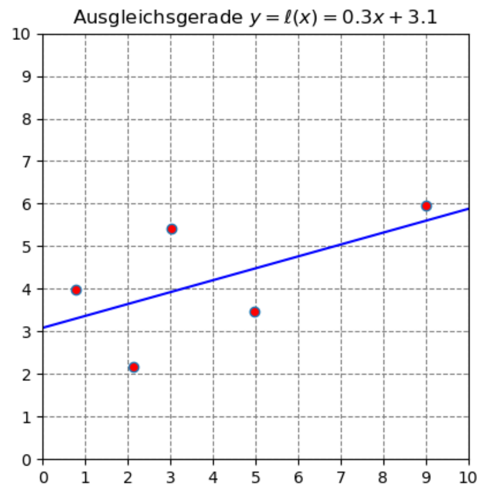
Fazit in diesem Schritt: Die Ausgleichsgerade hat die Funktionsgleichung ✎

$$y = \ell(x) = mx + q = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} x + 0$$

Wegen $q = 0$ handelt sich um eine Ursprungsgerade (= Gerade durch Ursprung des Koordinatensystems). Beachte, dass dies wirklich die Behauptung des Satzes zeigt: Wegen der Annahme $\overline{x} = \overline{y} = 0$ geht diese Gerade durch den Punkt $(0,0) = (\overline{x}, \overline{y})$ und hat die Steigung

$$m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - 0)(y_i - 0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - 0)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

(b) Schritt 2: Nun dürfen $\overline{x}$ und $\overline{y}$ beliebig sein.
Ergänze in der Zeichnung ein $\tilde{x}$-$\tilde{y}$-Koordinatensystem ein, dessen Ursprung die x-y-Koordinaten $(\overline{x}, \overline{y})$ hat. Seien $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ die Koordinaten des Punktes $P_i = (x_i, y_i)$ im $\tilde{x}$-$\tilde{y}$-Koordinatensystem.



Dann gelten ✎

$$\tilde{x}_i = x_i - \overline{x} \quad \text{und} \quad \tilde{y}_i = y_i - \overline{y}$$

Wir dürfen Schritt 1 im Tilde-Koordinatensystem anwenden, denn ✎

$$\left(\text{Mittelwert der } \tilde{x}_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}$$
$$= \overline{x} - \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overline{x} = 0 \qquad \text{und analog für den Mittelwert der } \tilde{y}_i.$$

Also ist die gesuchte, die Fehlerquadratsumme minimierende Gerade in den Tilde-Koordinaten gegeben durch ✎

$$\tilde{y} = \tilde{\ell}(\tilde{x}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2} \tilde{x} + 0$$

Wegen $\tilde{y} = y - \overline{y}$ und $\tilde{x} = x - \overline{x}$ und den obigen Formeln für die x_i und y_i erhalten wir daraus

$$y - \overline{y} = \tilde{\ell}(x - \overline{x}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} (x - \overline{x})$$

oder gleichbedeutend (gesuchte Gerade im x-y-Koordinatensystem)

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} (x - \overline{x}) + \overline{y}$$

Dies ist genau die im Satz behauptete Gerade. Sie hat die gewünschte Steigung und geht durch den Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ (denn aus dem x-Wert $x = \overline{x}$ berechnet man den zugehörigen y-Wert zu $y = 0 + \overline{y} = \overline{y}$). □

24.1 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-schnittmenge-figuren-in-R3

(a) Wenn g und h Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $g \cap h$ haben?
Leere Menge, einelementige/einpunktige Menge (= Menge, die genau ein Element/einen Punkt enthält), Gerade
Höchstwahrscheinlich: leere Menge

(b) Wenn g eine Gerade und E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $g \cap E$ haben?
Leere Menge, einpunktige Menge, Gerade
Höchstwahrscheinlich: einpunktige Menge

(c) Wenn E und F Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $E \cap F$ haben?
Leere Menge, Gerade, Ebene
Höchstwahrscheinlich: Gerade

(d) Wenn E eine Ebene und k eine Sphäre (= Kugeloberfläche) im $\mathbb{R}^3$ sind, welche Gestalt kann die Schnittmenge $E \cap k$ haben?
Leere Menge, einpunktige Menge, Kreis

Lösung zu A2 ex-schnittmenge-zweier-geraden-in-R3

Die Gerade g geht durch die beiden Punkte $P = (2, 0, 3)$ und $Q = (3, 2, 6)$.

(a) Zwei verschiedene Parametrisierungen von g:

$$g\colon \overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{P} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$g\colon \overrightarrow{g'}(t) = \overrightarrow{Q} + t \cdot 3 \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

(b) (i) $(5, 6, 11)$

Zu prüfen ist, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\overrightarrow{g}(t) = \begin{pmatrix}5\\6\\11\end{pmatrix}$. Diese Gleichung von Vektoren bedeutet ausführlich

$$\begin{aligned} && \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5\\6\\11\end{pmatrix} \\ \iff && \begin{pmatrix}2+t\\2t\\3+3t\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5\\6\\11\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gleichung in der ersten Komponente gilt genau dann, wenn $t = 3$.
Die Gleichung in der zweiten Komponente gilt genau dann, wenn $t = 3$.
Die Gleichung in der dritten Komponente gilt genau dann, wenn $t = \frac{8}{3}$.
Also gibt es kein solches t, d. h. unser Punkt liegt nicht auf der Geraden g.

(ii) $(5, 6, 12)$

Analog wie soeben, jedoch ist die Gleichung in der dritten Komponente nun $3+3t=12$, was die eindeutige Lösung $t=3$ hat. Die Gleichungen in den anderen Komponenten sind genau wie oben. Also liegt unser Punkt auf g.

(c) Schnittpunkt von g

(i) mit der x-y-Ebene: (Eine Koordinatengleichung dieser Ebene ist $z=0$.)
Die Punkte dieser Ebene sind genau die Punkte der Form $(x_0, y_0, 0)$ für reelle Zahlen x_0, y_0.
Also ist zu prüfen, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen dritte Koordinate 0 ist. Mit anderen Worten: Gibt es ein t mit $3+3t=0$? Die Antwort ist ja, $t=-1$.
Fazit: Der Punkt (als Vektor geschrieben) $\begin{pmatrix} 2+(-1) \\ 2\cdot(-1) \\ 3+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auf g und der x-y-Ebene.
Als Punkt geschrieben: $(1,-2,0)$.

(ii) mit der x-z-Ebene:
Offensichtlich liegt der Aufpunkt $(2,0,3)$ auf dieser Ebene. (Oder man rechnet und sieht, dass $t=0$ gelten muss, was ebenfalls diesen Punkt liefert.)

(iii) mit der y-z-Ebene.
Zu lösen ist $2+t=0$, was $t=-2$ ergibt. Also liegt der Punkt $(0,-4,-3)$ auf g und der y-z-Ebene.

(d) Betrachtete Geraden:

$$a\colon \overrightarrow{a}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b\colon \overrightarrow{b}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$c\colon \overrightarrow{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad d\colon \overrightarrow{d}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimme durch das Lösen eines Gleichungssystems (wenn es keinen Schnittpunkt gibt, ist zusätzlich anzugeben, ob die Geraden parallel sind oder windschief)

(i) die Schnittmenge von g und a: Man löst $\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{a}(t)$, also

$$\begin{pmatrix} 2+s \\ 2s \\ 3+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2+t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{cases} 2+s &= 1+2t \\ 2s &= 2+t \\ 3+3s &= 3-t \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} s &= -1+2t \\ s &= 1+\frac{t}{2} \\ s &= -\frac{t}{3} \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen liefern $-1+2t = 1+\frac{t}{2} \iff -2+4t = 2+t \iff 3t=4 \iff t=\frac{4}{3}$.
Erste Gleichung und letzte Gleichung liefern $-1+2t = -\frac{t}{3} \iff -3+6t=-t \iff 7t=3 \iff t=\frac{3}{7}$.
Also hat das Gleichungssystem keine Lösung, die Schnittmenge ist leer, $g \cap a = \emptyset$. Da die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nicht kollinear sind, sind die beiden Geraden windschief.

(ii) die Schnittmenge von g und b: Man löst $\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{b}(t)$, also

$$\begin{pmatrix} 2+s \\ 2s \\ 3+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2t \\ -6-4t \\ -6-6t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2+s &= -1-2t \\ 2s &= -6-4t \\ 3+3s &= -6-6t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s &= -3+2t \\ s &= -3-2t \\ s &= -3-2t \end{cases}$$

Da hier dreimal dieselbe Gleichung steht, bedeutet dies: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ setze man $s = -3+2t$; dann ist $(s,t) = (-3+2t, t)$ eine Lösung unseres Gleichungssystems.
Also hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass $g \cap b = g = b$.
Man sieht auch leicht, dass die Richtungsvektoren kollinear sind. Um dann festzustellen, on die Geraden (parallel und verschieden) oder (gleich (und automatisch parallel) sind, kann man prüfen, ob der Aufpunkt einer der beiden Gerade auf der anderen liegt.

(iii) die Schnittmenge von g und c: Man löst $\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{c}(t)$, also

$$\begin{pmatrix} 2+s \\ 2s \\ 3+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -4+2t \\ -3+4t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2+s &= t \\ 2s &= -4+2t \\ 3+3s &= -3+4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s &= -2+t \\ s &= -2+t \\ s &= -2+\frac{4}{3}t \end{cases}$$

Da die ersten beiden Gleichungen identisch sind, genügt es, die beiden letzten simultan zu lösen. Diese beiden liefern $-2+t = -2+\frac{4}{3}t$, also $t = \frac{4}{3}t$, also $3t = 4t$, also $0 = t$. Daraus folgt $s = -2$. Die eindeutige Lösung unseres Gleichungssystems ist $(s,t) = (-2, 0)$.

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $\overrightarrow{c}(0) = \overrightarrow{g}(-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Also $g \cap c = \{(0,-4,-3)\}$.

(iv) die Schnittmenge von g und d: Man löst $\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{d}(t)$, also

$$\begin{pmatrix} 2+s \\ 2s \\ 3+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ -8+4t \\ -6+6t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2+s &= -1+2t \\ 2s &= -8+4t \\ 3+3s &= -6+6t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s &= -3+2t \\ s &= -4+2t \\ s &= -3+2t \end{cases}$$

Da die erste mit der letzten Gleichung identisch ist, genügt es, die beiden ersten Gleichungen simultan zu lösen. Die ersten beiden Gleichungen liefern $-3+2t = -4+2t \iff -3 = -4 \iff 1 = 0$. Also haben sie keine Lösung, und damit hat unser Gleichungssystem keine Lösung, also $g \cap d = \emptyset$.

Nun sind die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ offensichtlich kollinear. Also sind g und d parallel, aber nicht gleich.

Lösung zu A-2 ex-schnittmenge-zweier-geraden-in-R3-beispiel-lesen
Leseauftrag, keine Musterlösung.

Lösung zu A3 ex-schnittmenge-gerade-ebene-in-R3
Ebene E: $2x - 3y + 5z - 7 = 0$.

(a)

$(0, 0, \frac{7}{5})$ $\quad$ $(2, 0, \frac{3}{5})$ $\quad$ $(0, 2, \frac{13}{5})$ $\quad$ $(2, 2, \frac{9}{5})$

(b)
- Schnitt mit x-Achse: Jeder Punkt auf der x-Achse hat die Form $(t, 0, 0)$. Der Punkt $(t, 0, 0)$ liegt genau dann in der Ebene E, wenn $2t - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 7 = 0$ gilt, also $t = \frac{7}{2}$. Damit besteht der gesuchte Schnitt nur aus dem Punkt $(\frac{7}{2}, 0, 0)$; bzw. die gesuchte Schnittmenge ist $\{(\frac{7}{2}, 0, 0)\}$.
  Alternative: Die x-Achse ist definiert durch die beiden Gleichungen $y = 0$ und $z = 0$; oder kurz $y = z = 0$. Das Gleichungsssystem aus diesen beiden Gleichungen und der Ebenengleichung hat als einzige Lösung $(x, y, z) = (\frac{7}{2}, 0, 0)$.
- Schnitt mit y-Achse: $(0, -\frac{7}{3}, 0)$
- Schnitt mit z-Achse: $(0, 0, \frac{7}{5})$ (dieser Punkt tauchte bereits in der vorigen Teilaufgabe auf).

(c)
- Koordinaten von $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix}3-2t\\1+2t\\1+2t\end{pmatrix}$ in Ebenengleichung einsetzten liefert

$$\begin{aligned} & 2(3-2t) - 3(1+2t) + 5(1+2t) - 7 = 0 \\ \iff \quad & 6 - 4t - 3 - 6t + 5 + 10t - 7 = 0 \\ \iff \quad & 1 = 0 \end{aligned}$$

  Keine Lösung, also kein Schnittpunkt. In Mengenschreibweise $E \cap a = \emptyset$.
- Setze $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix}12+10t\\-2-t\\-5-5t\end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & 2(12+10t) - 3(-2-t) + 5(-5-5t) - 7 = 0 \\ \iff \quad & 24 + 20t + 6 + 3t - 25 - 25t - 7 = 0 \\ \iff \quad & -2 + -2t = 0 \\ \iff \quad & -1 = t =: t_0 \end{aligned}$$

  Genau eine Lösung, der Schnittpunkt ist also (in Vektorschreibweise)

$$\vec{b}(t_0) = \begin{pmatrix}12 + 10 \cdot (-1)\\-2-(-1)\\-5-5\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

  In Mengenschreibweise $E \cap b = \{(2, -1, 0)\}$.
- Setze $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix}4+11t\\-3-t\\-2-5t\end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} & 2(4+11t) - 3(-3-t) + 5(-2-5t) - 7 = 0 \\ \iff \quad & 8 + 22t + 9 + 3t - 10 - 25t - 7 = 0 \\ \iff \quad & 0 + 0t = 0 \\ \iff \quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

  Alle reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$ lösen diese Gleichung, Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R}$. Also liegt die Gerade c in E, d. h. $E \cap c = c$.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

(d)
- Gerade a:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 = -4 - 6 + 10 = 0$$

Der Richtungsvektor von a (oder genauer: der Richtungsvektor der gegebenen Parametrisierung von a) steht also senkrecht auf dem Normalenvektor von E. Anschaulich hoffentlich klar: a parallel zu E, d. h. a in E oder (wie bereits berechnet) a parallel zu E ohne Schnittpunkt.

- Gerade b:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 20 + 3 - 25 = -2$$

Also b nicht parallel zu E, also (anschaulich klar) genau ein Schnittpunkt (wie berechnet).

- Gerade c:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 22 + 3 - 25 = 0$$

Also b parallel zu E.

Fazit: Falls das Skalarprodukt $\neq 0$ ist, gibt es genau einen Schnittpunkt (da Gerade nicht parallel zu Ebene). Sonst Gerade parallel zu Ebene und man muss prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt oder nicht: Teste beispielsweise, ob der Aufpunkt der Gerade in E liegt.

Lösung zu A4 ex-schnittmenge-ebene-ebene-in-R3-einfach

Seien E die x-y-Ebene, F die y-z-Ebene, G die Ebene $z = 1$ und H die Ebene $z = 0$. Überlege dir jeweils anschaulich, wie die jeweilige Schnittmenge aussieht, und beschreibe sie mathematisch.

- $E \cap F$: Dies ist die y-Achse. Wer mag, beschreibt E durch $z = 0$ und F durch $x = 0$, damit ist der Schnitt durch $x = z = 0$ beschrieben, was offensichtlich die y-Achse ist.
- $E \cap G$: Dies ist die leere Menge, da E durch $z = 0$ beschrieben ist und nicht gleichzeitig $z = 0$ und $z = 1$ gelten kann (das Gleichungssystem hat keine Lösung).
- $E \cap H$: Wegen $E = H$ gilt $E \cap H = E = H$.

Lösung zu A5 ex-schnittmenge-ebene-ebene-in-R3

Um uns das Leben einfacher zu machen, dividieren wir die Gleichung von E durch 3 und erhalten

$$\begin{aligned} E&\colon 2x - y + 3z - 2 = 0 \\ F&\colon x + y + z = 0 \\ G&\colon -4x + 2y - 6z - 4 = 0 \\ H&\colon -4x + 2y - 6z + 4 = 0 \end{aligned}$$

Wir rechnen im Folgenden mit dieser Gleichung.

- $E \cap F$: Wir addieren die Gleichung von E und die von F und erhalten

$$3x + 4z - 2 = 0 \iff 4z = 2 - 3x \iff z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$$

Wir können also x frei wählen, müssen dann $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$ setzen und dann (wegen der Gleichung von F) $y = -x - z = -x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$. Mit anderen Worten liegt für jedes x der folgende Punkt auf beiden Ebenen:

$$\begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Wenn man den Richtungsvektor mit 4 multipliziert und den Parameter als t schreibt, erhält man die Alternativparametrisierung der Schnittgeraden

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $E \cap G$: Addiert man zur Gleichung von G das Doppelte der Gleichung von E, so erhält man $-8 = 0$, was keine Lösung hat. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung, die Ebenen sind parallel und verschieden, $E \cap G = \emptyset$.
  Alternativ sieht man, dass die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ kollinear sind, also die Ebenen parallel. Da die Ebenegleichungen aber keine Vielfache voneinander sind, sind die Ebene parallel und verschieden.
- $E \cap H$: Addiert man zur Gleichung von H das Doppelte der Gleichung von E (um x zu eliminieren), so erhält man $0 = 0$.[2]
  Mit anderen Worten ist die Gleichung von H das -2-fache der Gleichung von E. Dies bedeutet, dass die beiden Ebenen gleich sind; es gilt $E = H = E \cap H$.

Lösung zu A6 ex-abstand-punkt-ebene-elementar

Nach dem Satz von Pythagoras hat derjenige Punkt von E den kleinsten Abstand zu P, für den die Verbindungsstrecke zu P senkrecht auf E steht.

Mit anderen Worten ist der nächste Punkt auf E der Schnittpunkt von E mit der Geraden durch P, die senkrecht auf E steht. Diese Gerade ist einfach zu beschreiben, denn aus der Koordinatengleichung von E lesen wir einen Normalenvektor von E ab und können diesen als Richtungsvektor unserer Geraden verwenden (der naheliegende Aufpunkt ist der Punkt P).

Genauer ist dies im Algorithmus 20.0.14 beschrieben.

Lösung zu A7 ex-abstand-punkt-gerade-elementar

Nach dem Satz von Pythagoras hat derjenige Punkt von g den kleinsten Abstand zu P, für den die Verbindungsstrecke zu P senkrecht auf E steht.

Mit anderen Worten ist der nächste Punkt auf g der Schnittpunkt von g mit der Ebene durch P, die senkrecht auf g steht. Diese Ebene ist einfach zu beschreiben, denn als Normalenvektor können wir einen Richtungsvektor der Geraden verwenden und müssen dann in der Ebenegleichung $ax + by + cz + d = 0$ nur noch d so bestimmen, dass P auf der Ebene liegt.

Genauer ist dies im Algorithmus 20.0.17 beschrieben.

Lösung zu A8 ex-winkel-zwischen-vektoren

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-17}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 153.004°$$
$$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-52}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{104}}\right) = \arccos(-1) = 180°$$
$$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{34}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{104}}\right) \approx 26.996°$$

Es gilt $-2 \cdot \vec{a} = \vec{c}$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ zeigen in entgegengesetzte Richtungen, weshalb der Winkel zwischen ihnen 180° beträgt. Die beiden anderen Winkel müssen sich deswegen zu 180° summieren.

Allgemein summieren sich die zwei «kleinen» Winkel nicht zum «grossen» Winkel. Als Gegenbeispiel kann man beispielsweise die drei Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ betrachten (alle Winkel zwischen diesen Vektoren betragen 90°).

Wenn aber alle drei Vektoren parallel zu einer Ebene sind (anschaulich: wenn sie denselben Startpunkt haben, liegen sie in einer Ebene), so gilt diese Eigenschaft.

[2]Dies ist als Gleichung in y und z aufzufassen; die Lösungsmenge ist $\mathbb{R}^2$: Jedes Paar (y, z) reeller Zahlen ist eine Lösung. Man kann dann die Gleichung von E nach x auflösen und erhält das zugehörige x.

Lösung zu A9 ex-winkel-im-wuerfel

Am einfachsten betrachtet man den Einheitswürfel, dessen Eckpunkte alle Koordinaten 0 oder 1 haben.

Diagonale $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, eine anliegende Kante/Seite $\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, eine anliegende Flächendiagonale $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(a) $\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{d}, \overrightarrow{s} \rangle}{|\overrightarrow{d}|\cdot|\overrightarrow{s}|} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}$, daraus $\alpha \approx 54.735610$.

(b) $\cos(\beta) = \frac{\langle \overrightarrow{d}, \overrightarrow{f} \rangle}{|\overrightarrow{d}|\cdot|\overrightarrow{f}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$, daraus $\beta \approx 35.264390$

Lösung zu A10 ex-winkel-im-tetraeder

Lösungen: $60°$, etwa $70.53°$, etwa $54.74°$, etwa $109.47°$ laut https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder#Formeln.

Den Winkel zwischen benachbarten Flächen kann man aktuell berechnen als Winkel zwischen den zwei Vektoren, die von der Kantenmitte auf den beiden angrenzenden Dreiecken zu den gegenüberliegenden Ecken zeigen.

Später kann man diesen Winkel auch berechnen, indem man die Normalenvektoren der Ebenen dieser zwei Flächen ausrechnet (etwa per Kreuzprodukt von «Kantenvektoren») und dann Merke 21.1.8 verwendet.

In ähnlicher Weise kann man den Winkel zwischen Kante und nicht anliegender Fläche auf zwei Arten berechnen.

eventuell noch die konkreten Rechnungen ergänzen?

Lösung zu A11 ex-winkel-zwischen-geraden-und-ebenen-sinnvoll-definieren

- Winkel zwischen zwei Ebenen im Raum, die sich schneiden:
  Schneide die beiden Ebenen mit einer beliebigen Ebene, die senkrecht auf der Schnittgeraden steht; die beiden Ebenen liefern Geraden in der neuen Ebene. Zwischen diesen gibt es zwei Winkel; wähle denjenigen, der im Intervall $[0°, 90°]$ liegt.
  Berechnung über Normalenvektoren: Siehe Merke 21.1.8.
- Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden im Raum, die sich schneiden:
  Miss den Winkel in der Ebene, die die Gerade enthält und senkrecht auf der Ebene steht. Es gibt zwei Winkel; wähle denjenigen, der im Intervall $[0°, 90°]$ liegt.
  Berechnung über Normalen- und Richtungsvektor: Siehe Merke 21.1.7
- Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden im Raum:
  Miss den Winkel in der Ebenec, die die beiden Geraden enthält. Wähle von den zwei möglichen Winkeln denjenigen im Intervall $[0°, 90°]$.
  Wählt man Richtungsvektoren der beiden Geraden, so ist dieser Winkel der Winkel zwischen diesen Richtungsvektoren oder $180°$ minus dieser Winkel.

Lösung zu A12 ex-kreuzprodukt-beispiel

Keine Musterlösung sinnvoll.

Lösung zu A13 ex-crossP-ist-rechtwinklig

Mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ erhalten wir $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}bz-cy\\cx-az\\ay-bx\end{pmatrix}$

Um zu zeigen, dass $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{v}$, zeigen wir, dass das Skalarprodukt Null ist:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{p} &= a\cdot(bz-cy) + b\cdot(cx-az) + c\cdot(ay-bx)\\ &= abz - acy + bcx - abz + acy - bcx\\ &= 0\end{aligned}$$

Für $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{w}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{p} &= x\cdot(bz-cy) + y\cdot(cx-az) + z\cdot(ay-bx)\\ &= bxz - cxy + cxy - ayz + ayz - bxz\\ &= 0\end{aligned}$$

Lösung zu A14 ex-ebenengleichung-per-kreuzprodukt-und-schnittwinkel-mit-gerade

(a) Ebenengleichung der Ebene durch $A=(-2,3,-1)$, $B=(1,5,0)$ und $C=(2,1,-2)$ bestimmen.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)-1\cdot(-2)\\1\cdot 4-3\cdot(-1)\\3\cdot(-2)-2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung hat also die Form $0x+7y-14z+d=0$.
Einsetzen von A liefert

$$7\cdot 3-14\cdot(-1)+d=0 \qquad\iff\qquad 35+d=0 \qquad\iff\qquad d=-35$$

Auf denselben Wert von d kommt man, wenn man B oder C einsetzt.
Also ist die gesuchte Ebenengleichung

$$E\colon 7y-14z-35=0$$

Jedes Vielfache dieser Gleichung beschreibt dieselbe Ebene (solange es nicht das Nullfache ist), etwa die durch 7 geteilte Gleichung

$$E\colon y-2z-5=0$$

(b) Test der Ebenegleichung durch Einsetzen der (Koordinaten der) Punkte:

Punkt A einsetzen:	$3-2\cdot(-1)-5\overset{?}{=}0$	stimmt
Punkt B einsetzen:	$5-2\cdot 0-5\overset{?}{=}0$	stimmt
Punkt C einsetzen:	$1-2\cdot(-2)-5\overset{?}{=}0$	stimmt

(c) Schnittpunkt von E mit der Geraden g durch den Punkt $P=(1,-5,7)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Parametrisierung der Geraden ist $\vec{g}(t)=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-5-2t\\7+3t\end{pmatrix}$. Komponenten dieser Parametrisierung in die Ebenengleichung einsetzen und nach t auflösen:

$$\begin{aligned}-5-2t-2(7+3t)-5&=0\\-5-2t-14-6t-5&=0\\-8t&=24\\t=t_0&=-3\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist also $\vec{g}(t_0)=\vec{g}(-3)=\begin{pmatrix}1-(-3)\\-5-2\cdot(-3)\\7+3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$.
Auf der Geraden g liegt dieser Punkt sicherlich, wenn wir $\vec{g}(t_0)$ korrekt berechnet haben. Wer mag, kann als Probe testen, ob der berechnete Schnittpunkt $(4,1,-2)$ auf E liegt.

(d) Bestimmung des Winkels zwischen E und Gerade g.

Wir verwenden nun $\vec{n'}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E und den Richtungsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ von g.
Der gesuchte Winkel ist

$$\sphericalangle(E,g)=\left|90^\circ-\sphericalangle(\vec{n'},\vec{v})\right|$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Wir berechnen zuerst den Winkel zwischen Normalen- und Richtungsvektor.

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{v}) &= \arccos\left(\frac{\left\langle \overrightarrow{n'}, \overrightarrow{v} \right\rangle}{\left|\overrightarrow{n'}\right| \cdot |\overrightarrow{v}|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{0-2-6}{\sqrt{0+1+4} \cdot \sqrt{1+4+9}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{70}}\right) \\
&\approx 162.976^\circ
\end{aligned}
$$

Damit können erhalten wir den gesuchten Winkel

$$
\sphericalangle(E, g) = \left|90^\circ - \sphericalangle(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{v})\right| = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{70}}\right) - 90^\circ \approx 72.976^\circ
$$

Lösung zu A15 ex-laenge-kreuzprodukt-durch-laengen-und-skalarprodukt

- Linke Seite:

$$
\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle^2 + \left|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right|^2 &= \Big(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3\Big)^2 + \left|\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}\right|^2 \\
&= v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 \\
&\quad + 2v_1w_1v_2w_2 + 2v_1w_1v_3w_3 + 2v_2w_2v_3w_3 \\
&\quad + (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2 \\
&= v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 \\
&\quad + \cancel{2v_1w_1v_2w_2} + \cancel{2v_1w_1v_3w_3} + \cancel{2v_2w_2v_3w_3} \\
&\quad + v_2^2w_3^2 \cancel{-2v_2v_3w_2w_3} + v_3^2w_2^2 \\
&\quad + v_3^2w_1^2 \cancel{-2v_1v_3w_1w_3} + v_1^2w_3^2 \\
&\quad + v_1^2w_2^2 \cancel{-2v_1v_2w_1w_2} + v_2^2w_1^2
\end{aligned}
$$

- Rechte Seite:

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{v}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{w}\right|^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\
&= v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_1^2w_3^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_2^2w_3^2 + v_3^2w_1^2 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_3^2
\end{aligned}
$$

- Genaues Hinschauen (und eventuell Summanden farblich hervorheben oder anderweitig markieren) zeigt, dass die beiden erhaltenen Ausdrücke übereinstimmen.

Lösung zu A16 ex-flaechen-berechnen-variante

(a) Die Dreiecksfläche ist halb so gross wie die des Parallelogramms, das durch z.B. die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, also

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -25+6 \\ -2-15 \\ -18-10 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -28 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{\sqrt{1434}}{2} \\ &\approx 18.9341 \end{aligned}$$

(b) In der vorherigen Teilaufgabe haben wir ausgerechnet

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Also hat die Ebene E durch die drei Punkte A, B, C die Gleichung

$$E\colon -19x - 17y - 28z + d = 0$$

wobei d noch zu bestimmen ist. Setzt man die Koordinaten von irgendeinem der drei Punkte A, B, C ein und löst nach d auf, so erhält man $d = 99$. Somit kennen wir die Koordinatengleichung von E:

$$E\colon -19x - 17y - 28z + 99 = 0$$

Es folgt (wohlbekannte Formel)

$$\begin{aligned} \text{Abstand}(D, E) &= \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|-19x_D - 17y_D - 28z_D + 99|}{\sqrt{19^2+17^2+28^2}} \\ &= \frac{|-19 \cdot 4 - 17 \cdot 0 - 28 \cdot 8 + 99|}{\sqrt{19^2+17^2+28^2}} \\ &= \frac{|-201|}{\sqrt{1434}} \\ &= \frac{201}{\sqrt{1434}} \\ &\approx 5.307884717 \end{aligned}$$

Das Pyramidenvolumen ist also

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1434}}{2} \cdot \frac{201}{\sqrt{1434}} \\ &= \frac{201}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{67}{2} \qquad = 33.5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sphericalangle ADB &= \sphericalangle(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) \\
&= \arccos\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\2\\-5\end{pmatrix}}{\sqrt{4+9+16}\cdot\sqrt{25+4+25}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{10-6+20}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{54}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{29\cdot 54}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{29\cdot 54}}\right) \\
&\approx 52.664\,695\,86^\circ
\end{aligned}$$

Lösung zu A17 ex-crossP-orientierung

$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$	und andersherum das Negative	$\vec{e_2} \times \vec{e_1} = -\vec{e_3}$
$\vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$		$\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$
$\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$		$\vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1}$
$\vec{e_i} \times \vec{e_i} = \vec{0}$	für alle $i \in \{1,2,3\}$	

Lösung zu A18 ex-abstand-windschiefe-geraden

Lösung zu A19 ex-abstand-punkt-gerade-und-naechster-punkt

Lösung zu A20 ex-kugelkoordinaten-vs-kartesische-koordinaten

Lösung zu A21 ex-abstaende-auf-der-erde

Lösung zu A22 ex-winkelsumme-einfaches-polygon

Lösung zu A23 ex-regelmaessiges-n-eck-umfang-und-flaeche

to be done:

(a) erster Lösungsweg mit Kuchenstücken, zweiter mit Koordinatensystem (an Tafel erklärt)

Das liefert beide angegebenen Formeln und beweist somit noch einmal die Halbwinkel- bzw. Doppelwinkelformeln.

Fläche kann man auch mit der trigo Flächenformel ausrechnen oder per Determinante.

Auch könnte man mit (c) und (d) sich darauf zurückziehen, nur «Eins-von-Zweien» aus Umfang und Fläche zu berechnen und daraus das andere.

Lösung zu A24 ex-fermatsche-zahlen

Lösung zu A25 ex-konstruierbare-regelmaessige-polygone

Lösung zu A26 ex-platonische-koerper

Lösung zu A27 ex-tabelle-ecken-kanten-flaechen-polyeder

Lösung zu A28 ex-ausgleichsgerade-selbst-zeichnen

Lösung zu A29 ex-ausgleichsgerade-selbst-berechnen