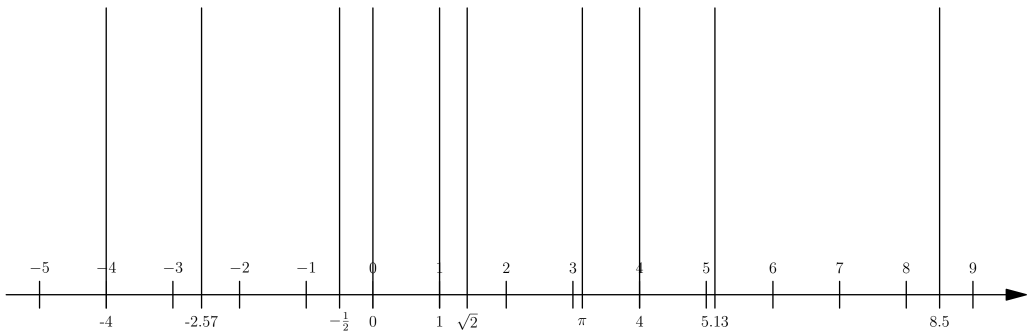
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Erinnerung: Intervalle

Intervalle sind „zusammenhängende“ Bereiche auf der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$. Eckige bzw. runde Klammern deuten an, ob die jeweiligen Grenzen dazugehören oder nicht. Hier einige Beispiele zur Erinnerung:

✎

$\left[\sqrt{2}, \pi\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \pi\right\}$	Die Menge aller Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit π
$(4, 8.5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 8.5\}$	Die Menge aller Zahlen grösser als 4 (ohne die 4) bis und mit 8.5
$\left[-4, -\frac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -\frac{1}{2}\right\}$	Die Menge aller Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$)
$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$	Die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und ohne 1
$(-\infty, 5.13] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5.13\}$	Die Menge aller Zahlen kleiner oder gleich 5.13
$(-2.57, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.57 < x\}$	Die Menge aller Zahlen grösser als -2.57 (ohne -2.57)



11 Ungleichungen

Definition 11.0.1 Ungleichung, Lösung, Lösungsmenge

Eine **Ungleichung** ist ein Ausdruck aus zwei Termen, zwischen denen ein (Grössen-)Vergleichszeichen steht oder ein Ungleichzeichen, also eines der folgenden fünf Zeichen:

- $<$ «(echt) kleiner»;
- $\leq$ «kleiner-gleich»;
- $>$ «(echt) grösser»;
- $\geq$ «grösser gleich»;
- $\neq$ «ungleich».

Merkhilfe: Bei der «Spitze» (= der optisch kleineren Seite) des Zeichens soll der kleinere Wert stehen. Das Zeichen $\leq$ ist eine Kombination der beiden Zeichen $<$ und $=$. Analog ist $\geq$ kombiniert aus $>$ und $=$.

Jede Belegung der Variablen, für die die Ungleichung wahr wird, heisst **Lösung der Ungleichung**.

Die Menge aller Lösungen einer Ungleichung heisst **Lösungsmenge** und wird oft als $\mathbb{L}$ notiert.

Aufgabe A1 Male einen Zahlenstrahl und markiere dort zwei beliebige Zahlen a und b mit $a < b$ (beispielsweise die Zahlen $a = 2$ und $b = 3$; wenn du diese Zahlen nimmst, sollte der Zahlenstrahl von -10 bis 10 gehen). Welche der folgenden Ungleichungen gelten dann?

Empfehlung: Markiere die jeweiligen Zahlen auf dem Zahlenstrahl.

a) $3a < 3b$
b) $-a < -b$
c) $-3a < -3b$
d) $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$
e) $-\frac{a}{3} = \frac{a}{-3} < \frac{b}{-3} = \frac{b}{3}$
f) $a + 3 < b + 3$
g) $a - 3 < b - 3$

Merke 11.0.2 Umformen/Lösen von Ungleichungen

Beim Umformen/Lösen von Ungleichungen darf man ohne weitere Vorsichtsmassnahmen

- addieren;
- subtrahieren;
- ✎mit einer **positiven** Zahl multiplizieren;
- ✎durch eine **positive** Zahl dividieren.

Grund: Diese Operationen entsprechen auf der reellen Zahlengeraden Verschiebungen bzw. Streckungen mit **positivem** Strekfaktor. Solche Abbildungen sind «ordnungserhaltend»: Für je zwei Zahlen/Punkte auf dem Zahlenstrahl gilt: Der vorher kleinere Punkt ist auch nachher kleiner.

⚠ Beim Multiplizieren mit einer und beim Dividieren durch eine
✎**negative** Zahl muss das Vergleichszeichen umgedreht werden:

- $<$ wird zu $>$ und umgekehrt;
- $\leq$ wird zu $\geq$ und umgekehrt.

Grund: Diese Operationen entsprechen auf der reellen Zahlengeraden Streckungen mit **negativem** Strekfaktor (Beispiel: Multiplikation mit -1 ist die Spiegelung am Nullpunkt des Zahlenstrahls). Solche Abbildungen sind «ordnungsumkehrend»: Für je zwei Zahlen/Punkte auf dem Zahlenstrahl gilt: Der vorher kleinere Punkt ist nachher grösser und umgekehrt.

Alle in dieser Merkebox genannten Umformungen sind Äquivalenzumformungen (denn sie können leicht rückgängig gemacht werden).

Aufgabe A2 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen. Geben Sie die Lösungsmenge jeweils als Intervall an.

Hinweis: Es handelt sich um «lineare» Ungleichungen. Beim Lösen geht man genauso vor wie beim Lösen von linearen Gleichungen.

a) $2x - 4 > 2$ b) $3x + 8 < 2$ c) $5x + 2 \leq 3x$ d) $2x - 3 \geq x + 1$

Aufgabe A3 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge jeweils als Intervall an. Überprüfen Sie Ihre Resultate durch Einsetzen einiger Zahlen der Lösungsmenge.

a) $-5x > 5$ b) $-\frac{x}{2} \leq -6$ c) $-x < 2$

Aufgabe A4 Lösen Sie die folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition und Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation.

$$-x > 4$$

11.1 Etwas kompliziertere Ungleichungen

Beispiel 11.1.1. Zu lösen ist die folgende Ungleichung («Bruch-Ungleichung»).

$$\frac{x+3}{x-1} \leq 2 \qquad \text{✎will gerne} \cdot (x-1)$$

Definitionsmenge (= Grundmenge) der Ungleichung (welche reellen Zahlen darf man für x einsetzen?):

$$✎\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Beachte: ✎Der Faktor $x - 1$ ist nicht Null.
Er kann aber positiv oder negativ sein.
Ist er negativ, muss man das Vergleichszeichen umdrehen!
Es müssen also zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1, $(x-1) > 0$, d.h. $\boxed{x > 1}$ ✎

$$\begin{aligned} x+3 &\leq 2(x-1) & \\ x+3 &\leq 2x-2 & \quad | -x+2 \\ 5 &\leq x & \quad \text{und } x > 1 \\ \mathbb{L}_1 &= [5, \infty) & \end{aligned}$$

Fall 2, $(x-1) < 0$, d.h. $\boxed{x < 1}$ ✎

$$\begin{aligned} x+3 &\geq 2(x-1) & \\ x+3 &\geq 2x-2 & \quad | -x+2 \\ 5 &\geq x & \quad \text{und } x < 1 \\ \mathbb{L}_2 &= (-\infty, 1) & \end{aligned}$$

✎Beachte: Rechnung rechts bis auf Vergleichszeichen dieselbe wie links. Zusammengefasst: Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$$

Aufgabe A5 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen nach x auf. Bestimmen Sie dabei zuerst die Definitionsmenge.

a) $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 2$ b) $\dfrac{x+2}{3+4x} < 5$ c) $\dfrac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2$

d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} \geq 2$

Empfohlener Lösungsweg: Vier Fälle betrachten: $x+1$ positiv/negativ und $x-1$ positiv/negativ.

Einer dieser Fälle tritt nie ein, es sind also nur drei Fälle zu betrachten. Welche?

Vorzeichen von Produkten und Quotienten

Beispiel 11.1.2. Zu lösen ist die folgende Ungleichung.

$$\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$$

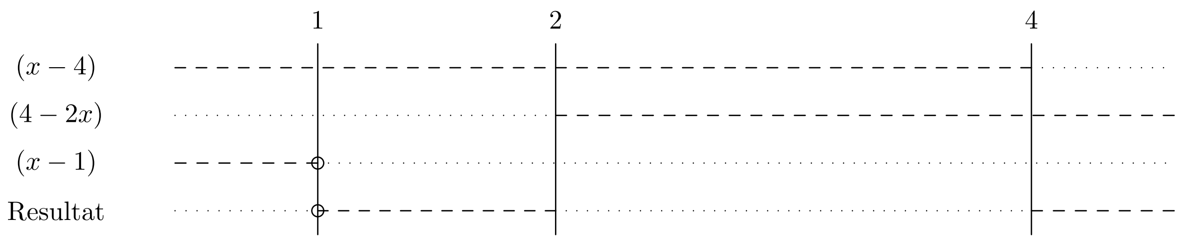
Man kann diese Ungleichung auch wie folgt schreiben.

$$\underbrace{(x-4)}_{\text{erster Faktor}} \cdot \underbrace{(4-2x)}_{\text{zweiter Faktor}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{dritter Faktor}} < 0$$

Wir untersuchen die Faktoren einzeln auf Positivität.

- erster Faktor: ✎$x-4 > 0 \iff x > 4$
- zweiter Faktor: ✎$4-2x > 0 \iff 4 > 2x \iff 2 > x \iff x < 2$
- dritter Faktor: ✎$\frac{1}{x-1} > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$

Verwende Pluszeichen statt der Punkte! Bei $(x-1)$ dazu «bzw. $\frac{1}{x-1}$»



Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist und erhalten ✎

$$\mathbb{L} = (1, 2) \cup (4, \infty)$$

Merke 11.1.3 Ungleichungen der Form «Produkt Vergleichszeichen 0»

Hat eine Ungleichung die Form

«Produkt Vergleichszeichen 0» z. B. «Produkt < 0»

so reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen (wie im soeben behandelten Beispiel 11.1.2).

Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl der Faktoren negativ ist, ist auch das Produkt negativ.

Bei der Angabe der Lösungsmenge:
- Die Zahlen, bei denen der Nenner Null ist, sind bei der Lösungsmenge **stets** wegzulassen (da Division durch Null nicht definiert ist), d.h. runde Klammer als Intervallbegrenzungssymbol verwenden.
- Alle anderen Zahlen, bei denen ein Faktor Null ist, (= Nullstellen der Faktoren) sind genau dann in der Lösungsmenge (d.h. eckige Klammer als Intervallbegrenzungssymbol verwenden), wenn das ursprüngliche Vergleichszeichen $\leq$ oder $\geq$ ist.

Aufgabe A6 Geben Sie die Lösungsmenge für die Ungleichung $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$ aus Beispiel 11.1.2 an, wenn das Vergleichszeichen geändert wird

a) zu $\leq$ b) zu $\geq$ c) zu $>$

Aufgabe A7 Geben Sie die Lösungsmengen für die folgenden Beispiele an.

Hinweis für die ersten beiden Teilaufgaben: Bringen Sie alles auf eine Seite (d.h. formen Sie so um, dass auf einer Seite Null steht).

a) $x^2 > 1$ b) $x^2 < 1$ c) $x^5 > 0$ d) $x^6 \leq 0$

Aufgabe A8 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einem Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie. Eventuell vorher etwas Rechnen mit Polynombrüchen üben.

a) $\dfrac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$ b) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$

c) $\dfrac{x+8}{x+6} + \dfrac{x}{2} < 0$ d) $\dfrac{1}{x+2} > \dfrac{4x-3}{5x+3}$

Aufgabe A9 Lösen Sie die Ungleichungen in Aufgabe A5, indem Sie die Ungleichungen auf die Form «Bruch < 0» oder «Bruch ≤ 0» bringen.

11.2 Faktorisieren (Wiederholung)

11.2.1. Oft ist es nützlich, quadratische Polynome faktorisieren zu können. Wir beschränken uns hier auf normierte quadratische Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, also auf Polynome der Form

$$x^2 + ax + b \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ziel ist es, eine Faktorisierung zu finden, falls diese existiert:

$$x^2 + ax + v \quad = \quad (x + c)(x + d) \qquad \text{mit } c,\, d \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe A10 Multiplizieren Sie das Produkt $(x + c)(x + d)$ aus und vergleichen Sie es mit dem quadratischen Polynom $x^2 + ax + b$. Wie hängen a und b von c und d ab?

Merke 11.2.2 Ganzzahliges Faktorisieren

Ist ein quadratisches Polynom der Form $x^2 + ax + b$ zu faktorisieren (mit $a, b \in \mathbb{Z}$), so sucht man zwei ganze Zahlen so, dass
✎das Produkt der Zahlen gleich b und die Summe gleich a ist.

Aufgabe A11 Faktorisieren Sie:

a) $x^2 + 18x + 72$ b) $x^2 + 24x + 135$ c) $x^2 + 27x + 180$
d) $x^2 + 22x + 120$ e) $x^2 + 17x + 72$ f) $x^2 + 16x + 60$

Aufgabe A12 Faktorisieren Sie:

a) $x^2 - 64$ b) $x^2 + x - 72$ c) $x^2 - 20x + 96$
d) $x^2 - 17x + 72$ e) $x^2 - 23x + 120$ f) $x^2 - 7x - 120$
g) $x^2 - 18x + 80$ h) $x^2 - 5x - 150$

Aufgabe A13 Faktorisieren Sie:

a) $-3x^2y^3 - 51xy^3 - 216y^3$ b) $-5w^3x^2 - 105w^3x - 450w^3$ c) $-2nx^2 + 2nx + 180n$
d) $-7ax^2 + 42ax + 945a$ e) $-2cx^2 - 8cx + 192c$ f) $-7e^2x^2 + 140e^2x - 672e^2$
g) $-2bx^2 + 200b$ h) $-5f^2x^2 - 105f^2x - 450f^2$ i) $-3a^3x^2 + 27a^3x + 270a^3$

11.3 Definitionsmenge eines Terms

Definition 11.3.1 Definitionsmenge = Definitionsbereich

Zu jedem Term in einer Variablen (meist x) gehört eine (maximale) **Definitionsmenge** (auch **Definitionsbereich** genannt). Sie besteht aus allen reellen Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden dürfen. Sie wird meist als $\mathbb{D}$ notiert.
Die Definitionsmenge eines Terms kann wie folgt beschrieben werden: zumindest bei den uns bisher bekannten Termen

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{alle Ausdrücke unter Wurzeln müssen} \geq 0 \text{ sein und} \\ \text{alle Ausdrücke unter Bruchstrichen müssen} \neq 0 \text{ sein} \end{array} \right\}$$

Man spricht auch bei Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen von der Definitionsmenge. Gemeint ist damit der Schnitt der Definitionsmengen aller beteiligten Terme.

Beispiele 11.3.2.

(a) $\frac{3}{x}$ Es darf nicht $x = 0$ gelten («schlechte x-Werte»), d.h. der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$. Erinnerung: Das Zeichen $\setminus$ bedeutet «ohne». Links und rechts davon muss eine Menge stehen.

(b) $\frac{4+x}{3+x}$ Wann ist $3 + x = 0$? Genau dann, wenn $x = -3$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

(c) $\frac{17x}{x^2-x}$ Wann ist $x^2-x = 0$? Genau dann, wenn $x(x-1) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 1$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$.

(d) $\sqrt{3-x}$ Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen muss ≥ 0 sein, d.h. es muss $3 - x \geq 0$ gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $3 \geq x$, also $\mathbb{D} = (-\infty, 3]$.

Alternativ kann man auch zuerst die «schlechten x-Werte» beschreiben. Dies sind diejenigen x, für die $3-x < 0$ gilt, d.h. $3 < x$. Die Menge der schlechten x-Werte ist also $(3, \infty)$. Die Definitionsmenge (= Menge der «guten x-Werte») ist das Komplement davon, also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (3, \infty) = (-\infty, 3]$.

(e) $\sqrt{3+x} + \frac{5}{7-x}$ Die Definitionsmenge von $\sqrt{3+x}$ ist $\mathbb{D}_1 = [-3, \infty)$ (warum?), die Definitionsmenge von $\frac{5}{7-x}$ ist $\mathbb{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Damit der gesamte Term definiert ist, muss x sowohl in $\mathbb{D}_1$ als auch in $\mathbb{D}_2$ liegen, d.h. die Definitionsmenge ist der Schnitt $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 = [-3, \infty) \setminus \{7\}$.

11.3.3. $\sqrt{3+x}+\frac{5}{7-x}$ Gemäss der Beschreibung der Definitionsmenge in Definition 11.3.1 hat dieser Term die Definitionsmenge

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 + x \geq 0 \text{ und } 7 - x \neq 0\}$$

Dies ist zwar richtig, jedoch ist diese Menge in Aufgaben «möglichst einfach» zu beschreiben («zu vereinfachen»), indem man die Ungleichungen vereinfacht. Man erhält dann $\mathbb{D} = [-3, \infty) \setminus \{7\}$ (siehe Beispiel (e) oben).

Aufgabe A14 Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich = die Definitionsmenge = die Grundmenge. Hinweis: Wann ist der Nenner Null? Faktorzerlegung des Nenners finden und nutzen.

a) $\dfrac{x^2+7}{3x-4x^2}$ b) $\dfrac{x+5}{x^2-36}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ d) $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^3+2a^2-35a}$

e) $\dfrac{1}{x^2+3}$ f) $\dfrac{1}{x^2-3}$ g) $\sqrt{10+x}+\dfrac{3}{x-3}$ h) $\sqrt{10+x}+\sqrt{10-x}$

Aufgabe A15 Finde jeweils einen Term mit dem angegebenen Definitionsbereich.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{3}\}$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{D} = \emptyset$

Finde nun einen Term mit dem angegebenen Definitionsbereich.

a) $\mathbb{D} = (0, 1]$ b) $\mathbb{D} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

12 Rechnen mit Bruchtermen

Merke 12.0.1 Bruchterm

Das Wort **Bruchterm** ist nicht ganz streng definiert. Meist ist ein Term gemeint, in dem mindestens ein Bruchstrich (= eine Division) vorkommt und eine Variable unter dem Bruchstrich (= im Nenner) auftaucht.

12.1 Kürzen und Erweitern von Bruchtermen

Beispiel 12.1.1. Kürzen: $\dfrac{17x}{x^2-x} = \dfrac{17x}{x(x-1)} = \dfrac{17}{x-1}$

Erweitern (= Kürzen „andersherum“ gelesen): $\dfrac{17}{x-1} = \dfrac{17x}{(x-1)x} = \dfrac{17x}{x^2-x}$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 12.1.2

Kürzen (bzw. Erweitern) von Brüchen: $\dfrac{P\cdot R}{Q\cdot R}=\dfrac{P}{Q}$

In Worten: Taucht derselbe Term (in der obigen Formel R) sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs *als Faktor* auf, so darf dieser Term „weggekürzt“ werden.

Wenn man einen Bruch kürzen möchte, sollte man also zunächst versuchen, Zähler und Nenner als Produkt von Faktoren zu schreiben. Taucht dabei ein Faktor sowohl oberhalb als auch unterhalb des Bruchstrichs auf, kann man ihn wegkürzen. Beachten Sie, dass die Faktoren beliebig kompliziert sein dürfen.

Beliebte Fehler

In Prüfungen zeigt sich eine erstaunliche Kreativität beim Kürzen. Beispielsweise findet man Behauptungen wie: ✎

$$\frac{3+x}{3+x^4}=\frac{\cancel{3}+x}{\cancel{3}+x^4}=\frac{1}{x^3}$$

$$\frac{x^3+7}{x^3}=\frac{\cancel{x^3}+7}{\cancel{x^3}}=7$$

$$\frac{x^2+7}{x^5}=\frac{\cancel{x^2}+7}{x^{\cancel{5}3}}=\frac{7}{x^3}$$

$$\frac{(2+x)^2+7}{(2+x)^2}=\frac{\cancel{(2+x)^2}+7}{\cancel{(2+x)^2}}=7$$

$$\frac{3x^2+5}{7+3x^2}=\frac{\cancel{3x^2}+5}{7+\cancel{3x^2}}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{3x^3+5x^6}{2x^3}=\frac{3\cancel{x^3}+5x^6}{2\cancel{x^3}}=\frac{3+5x^6}{2}$$

Gegenbeispiel:

Korrekt: $\dfrac{x^3+7}{x^3}=\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{7}{x^3}=1+\dfrac{7}{x^3}$

Korrekt: $\dfrac{x^2+7}{x^5}=\dfrac{x^2}{x^5}+\dfrac{7}{x^5}=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^5}$

Korrekt: $\dfrac{(2+x)^2}{(2+x)^2}+\dfrac{7}{(2+x)^2}=1+\dfrac{7}{(2+x)^2}$

Korrekt: $\dfrac{3x^3+5x^6}{2x^3}=\dfrac{3x^3}{2x^3}+\dfrac{5x^6}{2x^3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}x^3$

links vertikale Klammer um obige Bsp.: «Kürzen aus Summen, machen nur die Dummen»

Korrektes Kürzen

$$\frac{3x^3+5x^6}{5x^4}=\frac{\cancel{x^3}(3+5x^3)}{\cancel{x^3}\cdot 5x}=\frac{3+5x^3}{5x}$$

dasselbe in einem Schritt

$$\frac{3x^3+5x^6}{5x^4}=\frac{3\cancel{x^3}+5x^{\cancel{6}3}}{5x^{\cancel{4}}}=\frac{3+5x^3}{5x}$$

(erst dasselbe oben und unten ausklammern, so dass …

… oben und unten Produkt, dann gemeinsame Faktoren streichen)

(aber nur, wenn man weiss, was man tut:

gesamten Zähler und Nenner durch x^3 teilen! so darf man aus Summen kürzen

Aufgabe A16 Kürzen Sie soweit wie möglich, indem Sie gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner suchen, diese Ausklammern und Wegkürzen!

a) $\dfrac{az+bz}{cz}$ b) $\dfrac{a+b+y^7}{y^7+b+a}$ c) $\dfrac{b-a}{a-b}$

d) $\dfrac{-a-b}{a+b}$ e) $\dfrac{x^2-y}{y-x^2}$ f) $\dfrac{6z^2+6x}{-3x-3z^2}$

g) $\dfrac{3x^2-3x^3}{x(x^2-1)}$ h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ i) $\dfrac{v^3-3v^2+3v-1}{2v^3-v^2-1}$

12.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

Merke 12.2.1

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**. Als gemeinsamen Nenner verwende man ein möglichst kleines gemeinsames Vielfaches der auftretenden Nenner.

Aufgabe A17 Falls möglich, faktorisieren Sie erst die Nenner! Machen Sie dann gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

a) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\dfrac{4}{z-1}+\dfrac{z-9}{z^2-1}$ c) $\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{2n+1}{n-1}+\dfrac{n^2+5n}{n^2-1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{(a-b)^2}$ e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac}-\dfrac{a-b}{ac+c^2}+\dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$ f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{s+4}{2s-s^2}$

12.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Merke 12.3.1

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot S}$$

Bitte daran denken, dass man den entstandenen Bruch möglicherweise kürzen kann, bevor man (eventuell) ausmultipliziert.
Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{S}{R}=\frac{P\cdot S}{Q\cdot R}$$

In Schulbüchern steht oft $\frac{P}{Q}:\frac{R}{S}$ statt $\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}}$. Diese Doppelpunkt-Notation ist selten nützlich und ich empfehle stark, sie zu vermeiden (ausser beim Umformen von Gleichungen, da darf man $|:5$ oder Ähnliches schreiben).

Aufgabe A18 Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v}+\dfrac{v}{u-v}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{r-s}-\dfrac{1}{r+s}\right)^2$

c) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$ d) $\dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

e) $\dfrac{a^2+2+\frac{1}{a^2}}{a^2-\frac{1}{a^2}}$ f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1}\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

g) $\dfrac{\frac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12}{n^2+4}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1-n^2}{n^2+n}$

12.4 Aufgaben, die durch echte Mathematik motiviert sind

Aufgabe A19 Vereinfachen Sie jeweils die angegebenen Terme: (Bitte an das Pascalsche Dreieck/den binomischen Lehrsatz denken: $(a+b)^n = \ldots$.)

(a)
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

(b)
$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

(c)
$$\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

(d)
$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Bemerkung: Die korrekten Resultate liefern sofort die *Ableitungen* der Funktionen x^2, x^3, x^4 und $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Merke 12.4.1 Gleichheit zweier Terme zeigen

Wenn man zeigen möchte, dass zwei Terme gleich sind, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten:

- Beide Terme so lange umformen, bis man dasselbe herausbekommt.
  Es ist meist viel einfacher, von beiden Seiten her zu arbeiten, als nur einen der beiden Terme in den anderen umzuformen.
- Die gesuchte Gleichheit mit einem Fragezeichen versehen, d.h. als $\overset{\boxed{?}}{=}$ schreiben. Dann so lange *Äquivalenzumformungen* durchführen, bis eine offensichtlich wahre Gleichheit dasteht. Ist dieses Ziel erreicht, sind alle «Fragezeichen-Gleichheiten» ebenfalls korrekt.

Aufgabe A20 Hoffentlich wissen Sie noch, was ein Binomialkoeffizient ist. Die folgenden Binomialkoeffizienten benötigen Sie in dieser Aufgabe.

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$$
$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1} \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Zeigen Sie jeweils die angegebenen Behauptungen:

(a) (Beide Seiten sind Formeln für die Summe der Zahlen von 1 bis n (Gaußsche Summenformel).

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

(b) (Beide Seiten sind Formeln für die Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2.)

$$\binom{n}{1} + 3\cdot\binom{n}{2} + 2\cdot\binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) Für diejenigen mit genügend Ausdauer (die man als ernsthafter Mathematiker braucht): (Beide Seiten sind Formeln für die Summe der Kubikzahlen von 1 bis n^3.)

$$\binom{n}{1} + 7\cdot\binom{n}{2} + 12\cdot\binom{n}{3} + 6\cdot\binom{n}{4} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe A21 Zeigen Sie jeweils die angegebenen Behauptungen:

(a)
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

(b)
$$\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+2)(2n+3)}{6}$$

(c) Für diejenigen mit genügend Ausdauer (die man als ernsthafter Mathematiker braucht):
$$\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}$$

Bemerkung: Diese Gleichheiten zeigt man beim induktiven Beweis der Formeln für die Summe der ersten n Zahlen/Quadratzahlen/Kubikzahlen.

12.5 Weitere Aufgaben

Aufgabe A22 Der Kilopreis (= Kilogrammpreis = Preis pro Kilogramm) von Kaffeesorte A ist 2 Franken höher als derjenige von Sorte B. Von Sorte B erhält man für 160 Franken acht Kilogramm mehr als von Sorte A für 120 Franken. Berechnen Sie den Kilopreis von Sorte A.

Aufgabe A23 Falls ein Fehler vorhanden ist, erklären und korrigieren Sie diesen. Wenn kein Fehler vorhanden ist, erklären Sie, wie man das einfacher machen könnte.

a) $2\cdot\dfrac{ab}{a^2-b^2}=\dfrac{2ab}{2a^2-2b^2}$

b) $\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+ab-ab-b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1$

e) $\dfrac{a-b}{a^2-ab}:\dfrac{b^2-ab}{a-b}=\dfrac{\cancel{a-b}}{a^2-ab}:\dfrac{b^2-ab}{\cancel{a-b}}=\dfrac{1}{a^2-ab}:\dfrac{b^2-ab}{1}$

f) $\dfrac{1}{a^2-ab}-\dfrac{b^2-ab}{1}=\dfrac{1}{a^2-ab}-b^2-ab$

g) $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}-2\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}-\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2}=$
$\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

h) $\dfrac{a}{a^4+b^4}=\dfrac{a}{a(a^3+b^4)}=\dfrac{1}{a^3+b^4}$

i) $\dfrac{(a+b)+ab}{(a+b)-ab}=\dfrac{\cancel{(a+b)}+ab}{\cancel{(a+b)}-ab}=\dfrac{ab}{-ab}=-1$

j)
$$\begin{aligned}\frac{4x-5}{6}&=x+\frac{5}{6} &&\mid\cdot 6\\ 4x-5&=x+5\end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned}\frac{4x+7}{6}&=\frac{4+5x}{6} &&\mid -4x-4\\ \frac{3}{6}&=\frac{x}{6}\end{aligned}$$

12.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe A1 ex-motivation-ungleichungen-umformen

Lösung zu Aufgabe A2 ex-ungleichungen-einfacher-einstieg

a)

$$\begin{aligned} 2x-4 &> 2 && \mid +4 \\ 2x &> 6 && \mid :2 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (3, \infty)$.

b)

$$\begin{aligned} 3x+8 &< 2 && \mid -8 \\ 3x &< -6 && \mid :3 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-\infty, -2)$.

c)

$$\begin{aligned} 5x+2 &\leq 3x && \mid -3x-2 \\ 2x &\leq -2 && \mid :2 \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-\infty, -1]$.

d)

$$\begin{aligned} 2x-3 &\geq x+1 && \mid -x+3 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = [4, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe A3 ex-ungleichungen-aufgepasst

a)

$$\begin{aligned} -5x &> 5 && \mid :-5 \quad ⚠ \\ x &< -1 \\ \mathbb{L} &= (-\infty, -1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} &\leq -6 && \mid \cdot -2 \quad ⚠ \\ x &\geq 12 \\ \mathbb{L} &= [12, \infty) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -x &< 2 && \mid \cdot (-1) \quad ⚠ \\ x &> -2 \\ \mathbb{L} &= (-2, \infty) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe A4 ex-ungleichung-addition-oder-multiplikation

(1) Addition von $x-4$ auf beiden Seiten liefert $-4 > x$. (2) Multiplikation mit (-1) liefert $x < -4$ (Achtung, Vergleichszeichen dreht sich, vergleiche nachfolgende Merkebox). Beide Lösungswege führen also zum selben Ergebnis, die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-\infty, -4)$.

Lösung zu Aufgabe A5 ex-ungleichungen-mit-bruechen-und-diskussion

a) Definitionsmenge = Grundmenge = $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$

$\frac{2x-3}{3x-2} \geq 2 \qquad | \cdot (3x-2)$ ⚠

Fall 1 $(3x-2) > 0$, d.h. $\boxed{x > \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 2(3x-2) \\ 2x - 3 &\geq 6x - 4 && | -2x + 4 \\ 1 &\geq 4x && | : 4 \\ \frac{1}{4} &\geq x && \text{und } x > \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_1 &= \varnothing \end{aligned}$$

Fall 2 $(3x-2) < 0$, d.h. $\boxed{x < \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq 2(3x-2) \\ 2x - 3 &\leq 6x - 4 && | -2x + 4 \\ 1 &\leq 4x && | : 4 \\ \frac{1}{4} &\leq x && \text{und } x < \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_2 &= \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$

b) Definitionsmenge = Grundmenge = $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 + 4x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\}$

$\frac{x+2}{3+4x} < 5 \qquad | \cdot (3+4x)$ ⚠

Fall 1 $(3+4x) > 0$, d.h. $\boxed{x > -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x + 2 &< 5(3+4x) \\ x + 2 &< 15 + 20x && | -x - 15 \\ -13 &< 19x && | : 19 \\ -\frac{13}{19} &< x && \text{und } x > -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_1 &= \left(-\frac{13}{19}, \infty\right) \end{aligned}$$

Fall 2 $(3+4x) < 0$, d.h. $\boxed{x < -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x + 2 &> 5(3+4x) \\ x + 2 &> 15 + 20x && | -x - 15 \\ -13 &> 19x && | : 19 \\ -\frac{13}{19} &> x && \text{und } x < -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_2 &= \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{13}{19}, \infty\right)$

c) Definitionsmenge = Grundmenge = $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\frac{x^2 - 3x - 1}{x+1} \geq x - 2 \qquad | \cdot (x+1)$ ⚠

Fall 1 $x + 1 > 0$, d.h. $\boxed{x > -1}$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 1 &\geq (x-2)(x+1) \\ x^2 - 3x - 1 &\geq x^2 - x - 2 && | -x^2 + 3x + 2 \\ 1 &\geq 2x && | : 2 \\ \frac{1}{2} &\geq x && \text{und } x > -1 \\ \mathbb{L}_1 &= \left(-1, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Fall 2 $x + 1 < 0$, d.h. $\boxed{x < -1}$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 1 &\leq (x-2)(x+1) \\ x^2 - 3x - 1 &\leq x^2 - x - 2 && | -x^2 + 3x + 2 \\ 1 &\leq 2x && | : 2 \\ \frac{1}{2} &\leq x && \text{und } x < -1 \\ \mathbb{L}_2 &= \varnothing \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left(-1, \frac{1}{2}\right]$

d) Definitionsmenge = Grundmenge = $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \text{ und } x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Erster Lösungsweg (noch aufzuschreiben): Zu unterscheiden sind die folgenden Fälle:
- Fall 1, $x+1 < 0$ und $x-1 < 0$, also $x < -1$ und $x < 1$, d. h. $x < -1$.
  Multiplikation mit der **positiven** Zahl $(x+1) \cdot (x-1)$ liefert ...
- Fall 2, $x+1 > 0$ und $x-1 < 0$, also $-1 < x < 1$.
  Multiplikation mit der **negativen** Zahl $(x+1) \cdot (x-1)$ liefert ...
- Fall 3, $x+1 < 0$ und $x-1 > 0$, also $x < -1$ und $x > 1$, Fall tritt nie ein!
- Fall 4, $x+1 > 0$ und $x-1 > 0$, also $x > -1$ und $x > 1$, d. h. $x > 1$.
  Multiplikation mit der **positiven** Zahl $(x+1) \cdot (x-1)$ liefert ...

Alternativer zweiter Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} &\geq 2 \\
\frac{x(x-1) + x(x+1)}{x^2-1} &\geq 2 \\
\frac{x^2 - x + x^2 + x}{x^2-1} &\geq 2 \\
\frac{2x^2}{x^2-1} &\geq 2 && \mid :2 \\
\frac{x^2}{x^2-1} &\geq 1 && \mid \cdot (x^2-1) \quad ⚠
\end{aligned}$$

Fall 1 $x^2 - 1 > 0$, d.h. $x^2 > 1$, d.h. $\boxed{x < -1 \text{ oder } x > 1}$

$$\begin{aligned}
x^2 &\geq x^2 - 1 && \mid -x^2 \\
0 &\geq -1 \\
\mathbb{L}_1 &= (-\infty, -1) \ \cup \ (1, \infty)
\end{aligned}$$

Fall 2 $x^2 - 1 < 0$, d.h. $\boxed{-1 < x < 1}$

$$\begin{aligned}
x^2 &\leq x^2 - 1 && \mid -x^2 \\
0 &\leq -1 \\
\mathbb{L}_2 &= \varnothing
\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

⚒ Lösung zu Aufgabe A6 ex-ungleichungen-beispiel-andere-vergleichszeichen

a) $\mathbb{L} = (1, 2] \ \cup \ [4, \infty)$ b) $\mathbb{L} = (-\infty, 1) \ \cup \ [2, 4]$ c) $\mathbb{L} = (-\infty, 1) \ \cup \ (2, 4)$

⚒ Lösung zu Aufgabe A7 ex-ungleichungen-quadrat-groesser-bzw-kleiner-eins

Wir argumentieren verbal. Wer mag, kann auch mit einer Zeichnung ähnlich wie im Beispiel argumentieren.

a)

$$\begin{aligned}
x^2 &> 1 && \mid -1 \\
x^2 - 1 &> 0 \\
(x-1)(x+1) &> 0
\end{aligned}$$

Damit dies gilt, müssen beide Faktoren entweder positiv oder negativ sein:
- Beide positiv bedeutet $x - 1 > 0$ und $x + 1 > 0$, also $x > 1$ und $x > -1$, also $x > 1$.
- Beide negativ bedeutet $x - 1 < 0$ und $x + 1 < 0$, also $x < 1$ und $x < -1$, also $x < -1$.

Insgesamt ist die Lösungsmenge also $(-\infty, -1) \ \cup \ (1, \infty)$.

b) $x^2 < 1$ ist ähnlich wie oben zu $(x-1)(x+1) < 0$ äquivalent. Damit dies gilt, muss genau einer der beiden Faktoren negativ sein und der andere muss positiv sein:
- Erster Faktor positiv und zweiter Faktor negativ bedeutet $x - 1 > 0$ und $x + 1 < 0$, also $x > 1$ und $x < -1$, also keine Lösung (leere Lösungsmenge).
- Erster Faktor negativ und zweiter Faktor positiv bedeutet $x - 1 < 0$ und $x + 1 > 0$, also $x < 1$ und $x > -1$, also $-1 < x < 1$ (Lösungsmenge $(-1, 1)$).

Insgesamt ist die Lösungsmenge $(-1, 1)$.

c) Wir unterscheiden drei Fälle:
- 1. Fall, $x < 0$: Dann ist $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ negativ als Produkt von fünf negativen Zahlen.
- 2. Fall, $x = 0$: Dann $x^5 = 0$.
- 3. Fall, $x > 0$: Dann ist $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ positiv.

Lösungsmenge: $(0, \infty)$.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^6 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \geq 0$, denn x^2 ist stets ≥ 0. Dies bedeutet, dass die erwünschte Ungleichung $x^6 \leq 0$ nur dann gilt, wenn $x^6 = 0$ gilt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $x = 0$ gilt (denn ein Produkt ist dann und nur dann Null, wenn jeder der Faktoren Null ist).
Lösungsmenge: $\{0\}$.

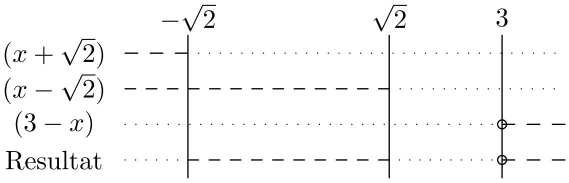
Lösung zu Aufgabe A8 ex-ungleichungen-vorzeichen

Achtung: In den Diagrammen gil: Im «gepunkteter Bereich» ist die Variable positiv, im «gestrichelten Bereich» negativ.

a)

$$\frac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$

(x^2+2) und (x^2+1) sind immer positiv (weil x^2 immer positiv oder Null ist) und können daher ignoriert werden.

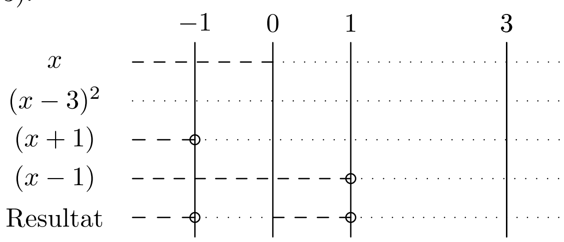


$\mathbb{L} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3)$
$x = 3$ ist nicht Teil der Lösungsmenge, weil $(x-3)$ im Nenner vorkommt.

b)

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$$
$$\frac{x(x-3)^2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$(x-3)^2$ ist zwar nie negativ wird aber 0 (für $x = 3$).



$\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup [0, 1) \cup \{3\}$
$x = 3$ ist Teil der Lösungsmenge weil $(x-3)^3$ dort 0 ist. Anstatt $\{3\}$ könnte auch $[3, 3]$ geschrieben werden.

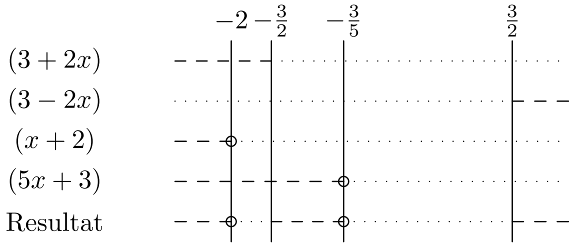
c)

$$
\begin{aligned}
\frac{x+8}{x+6}+\frac{x}{2}&<0\\
\frac{2(x+8)}{2(x+6)}+\frac{x(x+6)}{2(x+6)}&<0\\
\frac{2x+16}{2(x+6)}+\frac{x^2+6x}{2(x+6)}&<0\\
\frac{2x+16+x^2+6x}{2(x+6)}&<0\\
\frac{x^2+8x+16}{2(x+6)}&<0\\
\frac{(x+4)^2}{2(x+6)}&<0
\end{aligned}
$$

$(x+4)^2$ ist nie negativ, es reicht also $(x+6)$ zu betrachten.
$\mathbb{L}=(-\infty,-6)$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+2}&>\frac{4x-3}{5x+3} \qquad \left| -\frac{4x-3}{5x+3}\right.\\
\frac{1}{x+2}-\frac{4x-3}{5x+3}&>0\\
\frac{5x+3}{(x+2)(5x+3)}-\frac{(x+2)(4x-3)}{(x+2)(5x+3)}&>0\\
\frac{5x+3-(4x^2+5x-6)}{(x+2)(5x+3)}&>0\\
\frac{5x+3-4x^2-5x+6}{(x+2)(5x+3)}&>0\\
\frac{-4x^2+9}{(x+2)(5x+3)}&>0\\
\frac{(3+2x)(3-2x)}{(x+2)(5x+3)}&>0
\end{aligned}
$$

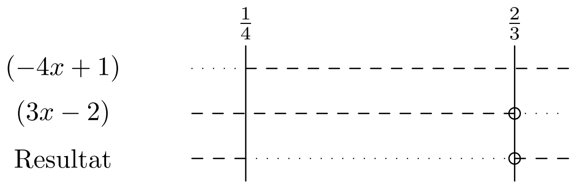


$\mathbb{L}=\left(-2,-\frac{3}{2}\right)\ \cup\ \left(-\frac{3}{5},\frac{3}{2}\right)$

Lösung zu Aufgabe A9 ex-149-ohne-diskussion

a)

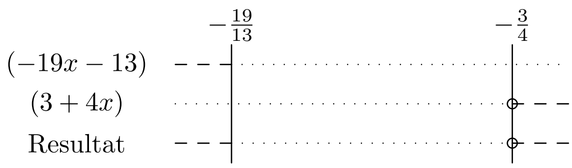
$$
\begin{aligned}
\frac{2x-3}{3x-2}&\geq 2 \qquad | -2\\
\frac{2x-3}{3x-2}-2&\geq 0\\
\frac{2x-3}{3x-2}-\frac{2(3x-2)}{3x-2}&\geq 0\\
\frac{2x-3-(6x-4)}{3x-2}&\geq 0\\
\frac{-4x+1}{3x-2}&\geq 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L}=\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$

b)

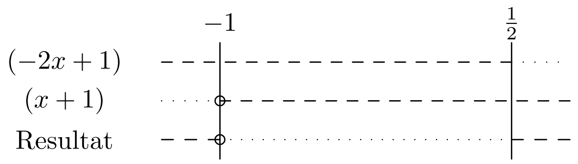
$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{3+4x}&<5 \qquad | -5\\
\frac{x+2-5(3+4x)}{3+4x}&<0\\
\frac{-19x-13}{3+4x}&<0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L}=\left(-\frac{13}{19},\infty\right)$

c)

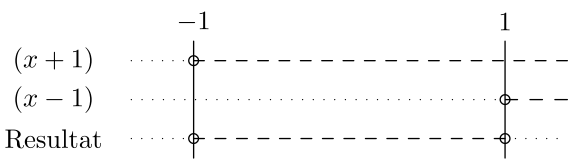
$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-3x-1}{x+1} &\geq x-2 \quad \mid -(x-2)\\
\frac{x^2-3x-1}{x+1}-\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{x^2-3x-1-(x^2-x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{-2x+1}{x+1} &\geq 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L}=\left(-1,\frac{1}{2}\right]$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1} &\geq 2 \quad \mid -2\\
\frac{x(x-1)+x(x+1)-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{x^2-x+x^2+x-(2x^2-2)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{2}{(x+1)(x-1)} &\geq 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L}=(-\infty,-1)\ \cup\ (1,\infty)$.

Lösung zu Aufgabe A10 ex-produkt-linearer-terme

Es gilt $(x+c)(x+d)=x^2+cx+dx+cd=x^2+(c+d)x+cd$ Wenn dies mit x^2+ax+b übereinstimmen soll, so müssen $a=c+d$ und $b=cd$ gelten (Koeffizientenvergleich).

Lösung zu Aufgabe A11 ex-faktorisieren-nur-positiv

a) $(x+12)\cdot(x+6)$
b) $(x+9)\cdot(x+15)$
c) $(x+12)\cdot(x+15)$
d) $(x+10)\cdot(x+12)$
e) $(x+9)\cdot(x+8)$
f) $(x+10)\cdot(x+6)$

Lösung zu Aufgabe A12 ex-faktorisieren-auch-negativ

a) $(x-8)\cdot(x+8)$
b) $(x-8)\cdot(x+9)$
c) $(x-8)\cdot(x-12)$
d) $(x-8)\cdot(x-9)$
e) $(x-15)\cdot(x-8)$
f) $(x-15)\cdot(x+8)$
g) $(x-8)\cdot(x-10)$
h) $(x-15)\cdot(x+10)$

Lösung zu Aufgabe A13 ex-faktorisieren-zusatzfaktor

a) $-3y^3\left(x^2+17x+72\right)=-3y^3\,(x+9)\cdot(x+8)$
b) $-5w^3\left(x^2+21x+90\right)=-5w^3\,(x+6)\cdot(x+15)$
c) $-2n\left(x^2-x-90\right)=-2n\,(x-10)\cdot(x+9)$
d) $-7a\left(x^2-6x-135\right)=-7a\,(x+9)\cdot(x-15)$
e) $-2c\left(x^2+4x-96\right)=-2c\,(x+12)\cdot(x-8)$
f) $-7e^2\left(x^2-20x+96\right)=-7e^2\,(x-12)\cdot(x-8)$
g) $-2b\left(x^2-100\right)=-2b\,(x+10)\cdot(x-10)$
h) $-5f^2\left(x^2+21x+90\right)=-5f^2\,(x+15)\cdot(x+6)$
i) $-3a^3\left(x^2-9x-90\right)=-3a^3\,(x-15)\cdot(x+6)$

Lösung zu Aufgabe A14 ex-polynombruch-definitionsbereich

a) Nenner Nullsetzen: $0=3x-4x^2=x(3-4x)$. Äquivalent nach Produkt-Null-Regel: $x=0$ oder $3-4x=0$, d.h. $x=0$ oder $x=\frac{3}{4}$.
Also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,\frac{3}{4}\}$.

b) Der Nenner $x^2-36=(x+6)(x-6)$ hat (nach der Produkt-Null-Regel) die Nullstellen $x=-6$ und $x=6$, also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-6,6\}$.

c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ Faktorzerlegung des Nenners: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$. Also hat der Nenner die Nullstellen -2 und 3, also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$.

d) Faktorzerlegung des Nenners: $a^3+2a^2-35a=a(a^2+2a-35)=a(a-5)(a+7)$. Also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-7,0,5\}$.

e) $\dfrac{1}{x^2+3}$
Schlecht ist $x^2+3=0$, d.h. $x^2=-3$. Dies ist aber niemals der Fall, da Quadrate reeller Zahlen stets positiv oder Null sind. Also $\mathbb{D}=\mathbb{R}$.

f) $\dfrac{1}{x^2-3}$
Schlecht ist $x^2-3=0$, d.h. $x^2=3$, d.h. $x=\pm\sqrt{4}$. Also $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$

g) $\sqrt{10+x}+\dfrac{3}{x-3}$
Es müssen sowohl $10+x\geq 0$ gelten als auch $x-3\neq 0$, d.h. $x\geq -10$ und $x\neq 3$. Also $\mathbb{D}=[-10,\infty)\setminus\{3\}$.

h) $\sqrt{10+x}+\sqrt{10-x}$
Es müssen sowohl $10+x\geq 0$ gelten als auch $10-x\geq 0$, d.h. $x\geq -10$ und $10\geq x$. Also $\mathbb{D}=[-10,10]$.

Lösung zu Aufgabe A15 ex-polynombruch-finde-polynombruch

Statt 1 tun es auch andere Zähler.

a) $\frac{1}{(x+2)(x-1)}$

b) $\frac{1}{x(x+\frac{1}{3})}$

c) $\frac{1}{1}$

d) Es gibt keinen solchen Polynombruch:

Zu Teilaufgabe (d): Vielleicht hat jemand $\frac{1}{0}$ oder $\frac{1}{x-x}$ als Lösung angegeben. Genaugenommen ist das aber nicht erlaubt, denn in einem Polynombruch darf der Nenner nicht Null (= das Nullpolynom) sein.
Da jedes von Null verschieden Polynom aber höchstens endlich viele Nullstellen hat (denn sonst könnte man unendlich oft Polynomdivision durch (x − Nullstelle) durchführen), gibt es keinen Polynombruch mit Definitionsmenge $\emptyset$.

Finde nun einen Term mit dem angegebenen Definitionsbereich.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{x}$
(Die Summe der beiden Wurzeln hat den Definitionsbereich $[0,1]$. Um die 0 zu beseitigen, wurde $\frac{1}{x}$ addiert.)

b) $\mathbb{D}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ $\sqrt{1-x^2}$
Es muss $1-x^2\geq 0$ gelten, d.h. $(1+x)(1-x)\geq 0$. Dies ist der Fall, wenn entweder $1+x\geq 0$ und $1-x\geq 0$ gilt oder $1+x\leq 0$ und $1-x\leq 0$. Ersteres ist äquivalent zu $x\geq -1$ und $1\geq x$, d.h. $x\in[-1,1]$. Zweiteres ist äquivalent xu $x\leq -1$ und $1\leq x$, was niemals gilt.

Lösung zu Aufgabe A16 ex-bruchterme-kuerzen

a) $\dfrac{az+bz}{cz}=\dfrac{(a+b)\cdot z}{c\cdot z}=\dfrac{a+b}{c}$

b) $\dfrac{a+b+y^7}{y^7+b+a}=\dfrac{a+b+y^7}{a+b+y^7}=\dfrac{1\cdot(a+b+y^7)}{1\cdot(a+b+y^7)}=\dfrac{1}{1}=1$

c) $\dfrac{b-a}{a-b}=\dfrac{b-a}{-b+a}=\dfrac{b-a}{-(b-a)}=\dfrac{1\cdot(b-a)}{(-1)\cdot(b-a)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

d) $\dfrac{-a-b}{a+b}=\dfrac{-(a+b)}{a+b}=\dfrac{(-1)\cdot(a+b)}{a+b}=\dfrac{-1}{1}=-1$

e) $\dfrac{x^2-y}{y-x^2}=\dfrac{x^2-y}{-(x^2-y)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

f) $\dfrac{6z^2+6x}{-3x-3z^2}=\dfrac{6(z^2+x)}{-3(x+z^2)}=\dfrac{6}{-3}=\dfrac{(-2)\cdot(-3)}{(-3)\cdot 1}=\dfrac{-2}{1}=-2$

g) $\dfrac{3x^2-3x^3}{x(x^2-1)} = \dfrac{3x^2(1-x)}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(-3x)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3x}{x+1}$

h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4} = \dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

i) $\dfrac{v^3-3v^2+3v-1}{2v^3-v^2-1} = \dfrac{(v-1)^3}{2v^3-v^2-1} = \dfrac{(v-1)^3}{(v-1)(2v^2+v+1)} = \dfrac{(v-1)^2}{(2v^2+v+1)}$

Erläuterungen dazu:

- Zur ersten Umformung: Allgemein gilt $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (Ausrechnen oder Pascalsches Dreieck).
- Da im Zähler nur $(v-1)$ als Faktor auftritt, kann man eventuell damit kürzen. Um dies zu testen, macht man eine Polynomdivision des Nenners durch $(v-1)$ und erhält $2v^3-v^2-1 = (v-1)(2v^2+v+1)$ (alternativ kann man dies auch erraten).
- Wenn man den „neuen“ Nenner $(2v^2+v+1)$ durch $(v-1)$ teilt, verbleibt ein Rest. (Alternative: Setze 1 ein; dabei kommt 4 heraus (und nicht Null); also ist $(v-1)$ kein Teiler.). Also kann man nicht weiter kürzen.

Lösung zu Aufgabe A17 ex-bruchterme-addition

a) $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{4xy}{(x+y)(x-y)}$

b) $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z-9}{z^2-1} = \dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z-9}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{4(z+1)+z-9}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{4z+4+z-9}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{5z-5}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{5(z-1)}{(z+1)(z-1)} = \dfrac{5}{z+1}$

c) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n+1}{n-1} + \dfrac{n^2+5n}{n^2-1} = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n+1}{n-1} + \dfrac{n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{n(n-1)-(2n+1)(n+1)+(n^2+5n)}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{n^2-n-(2n^2+3n+1)+n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{n^2-n-2n^2-3n-1+n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{n+1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a-b)^2} = \dfrac{a}{(a+b)(a-b)} + \dfrac{b}{(a-b)^2} = \dfrac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)^2} + \dfrac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \dfrac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2} = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$

e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} = \dfrac{b-c}{a(a+c)} - \dfrac{a-b}{c(a+c)} + \dfrac{a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{c(b-c)-a(a-b)+(a^2+c^2)}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-c^2-(a^2-ab)+a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-a^2+ab+a^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb+ab}{ac(a+c)} = \dfrac{b(c+a)}{ac(a+c)} = \dfrac{b}{ac}$

f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{s(2-s)} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} - \dfrac{s+4}{s(s-2)} = \dfrac{3s^2-2(s-2)^2-(s+4)(s-2)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-2(4-4s+s^2)-(s^2+2s-8)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-(8-8s+2s^2)-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-8+8s-2s^2-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{6s}{s(s-2)^2} = \dfrac{6}{(s-2)^2}$

Hinweis: Anstatt Vorzeichenakrobatik $(2-s) = -(2-s)$, könnte man auch einfach $(2-s)^2 = (-(s-2))^2 = (s-2)^2$ verwenden.

Lösung zu Aufgabe A18 ex-bruchterme-querbeet

Hier wird noch die teilweise die Doppelpunktnotation beim Dividieren verwendet, auch wenn ich sie eigentlich aus dem Skript beseitigen will.

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v}+\dfrac{v}{u-v}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u(u-v)}{(u+v)(u-v)}+\dfrac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u^2-uv+uv+v^2}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{u^2+v^2}{(u+v)(u-v)} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{r-s}-\dfrac{1}{r+s}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s}{(r-s)(r+s)}-\dfrac{r-s}{(r+s)(r-s)}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s-(r-s)}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \left(\dfrac{2s}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \dfrac{4s^2}{(r-s)^2(r+s)^2}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ad-bc}{bd}:\dfrac{ad+cb}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}\cdot\dfrac{bd}{ad+cb} = \dfrac{ad-bc}{ad+cb}$

d) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right):\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2-1}{n^2}:\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n-1}{n}$

e) $\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right):\left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2:\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right):\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a^2+1}{a}:\dfrac{a^2-1}{a} = \dfrac{a^2+1}{a}\cdot\dfrac{a}{a^2-1} = \dfrac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}$

f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1}\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{n^2+n+n^2+3n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2n^2+4n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2(n^2+2n+1)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 = 1$

g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12\right):(n^2+4)-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1-n^2}{n^2+n} = \left(3n^2-\dfrac{2n(n^2+4)}{n+1}+12\right):(n^2+4)-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{(1+n)(1-n)}{n(n+1)} = \dfrac{3n^2}{n^2+4}-\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{12}{n^2+4}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3n^2+12}{n^2+4}-\dfrac{2n+2}{n+1}+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3(n^2+4)}{n^2+4}-\dfrac{2(n+1)}{n+1}+\dfrac{1-n}{n} = 3-2+\dfrac{1-n}{n} = 1+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n}{n}+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n+1-n}{n} = \dfrac{1}{n}$

Lösung zu Aufgabe A19 ex-ableitung-potenzen

(a)
$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x+h$$

(b)
$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

(c)
$$\frac{(x+h)^4-x^4}{h} = 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$$

(d)
$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{\frac{h}{1}} = \frac{x-x-h}{(x+h)\cdot x}\cdot\frac{1}{h} = \frac{-h}{(x+h)\cdot x\cdot h} = \frac{-1}{(x+h)\cdot x} = -\frac{1}{(x+h)\cdot x}$$

Lösung zu Aufgabe A20 ex-summe-von-potenzen-faulhaber-vs-binomial

Lösung zu Aufgabe A21 ex-summe-von-potenzen-induktiv

Lösung zu Aufgabe A22 ex-polynombruch-gleichung-textaufgabe-kaffee

Variable x: Kilopreis von Sorte A in Franken.

Gewicht des Kaffees von Sorte A, den man für 120 Franken erhält: $\frac{120}{x}$

Kilopreis von Sorte B in Franken: $x-2$

Gewicht des Kaffees von Sorte B, den man für 160 Franken erhält: $\frac{160}{x-2}$

Die Informationen in der Aufgabenstellung führen somit zur folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{120}{x} + 8 &= \frac{160}{x-2} && \mid \cdot x \cdot (x-2) \\
120(x-2) + 8x(x-2) &= 160x \\
120x - 240 + 8x^2 - 16x &= 160x \\
8x^2 - 56x - 240 &= 0 && \mid : 8 \\
x^2 - 7x - 30 &= 0 && \mid \text{Faktorzerlegung} \\
(x+3)(x-10) &= 0
\end{aligned}$$

Also $x=-3$ oder $x=10$. Da der Preis (in aller Regel) positiv ist:
Antwort: Ein Kilogramm von Sorte A kostet 10 Franken.

Probe (freiwillig): Kilogramm Sorte A für 120 CHF: $\frac{120}{10} = 12$. Kilopreis Sorte B: 8 Franken. Kilogramm Sorte B für 160 CHF: $\frac{160}{8} = 20$. Differenz: $20-12=8$ wie in Aufgabenstellung gewünscht!

Lösung zu Aufgabe A23 ex-bruch-verbrechen

a) Falsch. Richtig: $2 \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2}{1}\dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

b) Richtig, aber unnötig kompliziert. Erweitern ist unnötig beim Multiplizieren (nur zum Addieren muss erst gleichnamig gemacht werden). Es kann nachher wieder gekürzt werden. $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{ab}{a^2-b^2}$

c) Falsch. Richtig wäre $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{(a^2-b^2)^2} = \dfrac{ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2} = \dfrac{ab}{a^2-b^2}$. Alternativ hätte man auch vor der Multiplikation beide Brüche kürzen können: $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{ab}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{ab}{a^2+b^2}$

d) Falsch. Schutzklammer setzen: $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+ab-\left(ab-b^2\right)}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

e) Falsch. Gekürzt werden kann nur aus Produkten von Brüchen. Richtig ist: $\dfrac{a-b}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{a-b} = \dfrac{a-b}{a(a-b)} : \dfrac{b(b-a)}{a-b} = \dfrac{1}{a} : \dfrac{b\cdot(-1)}{1} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{-b} = -\dfrac{1}{ab}$

f) Falsch. Schutzklammer setzen: $\dfrac{1}{a^2-ab} - \dfrac{b^2-ab}{1} = \dfrac{1}{a^2-ab} - (b^2-ab) = \dfrac{1}{a^2-ab} - b^2 + ab$

g) Erste Umformung richtig, aber unnötig. Zweite Umformung falsch: Punkt vor Strich! Richtig ist:
$\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} - 2\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - 2\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2a^2}{a^2-b^2}$
$= \dfrac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2-2a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{2b^2}{a^2-b^2}$

h) Erste Umformung falsch: a kann nicht ausgeklammert werden. Richtig wäre, nichts zu verändern. Zweite Umformung korrekt.

i) Falsch: Aus Differenzen und Summen darf nicht gekürzt werden. (Letzte Umformung korrekt.) Richtig wäre, nichts zu verändern...

j) Falsch. Auch x muss mit 6 multipliziert werden. Die Operationen werden immer auf die **gesamte** linke und rechte Seite angewandt; wer unsicher ist, setze Klammern um beide Seiten und multipliziere dann aus (und kürze dabei):

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 6 \cdot \left(\frac{4x-5}{6} \right) &= 6 \cdot \left(x + \frac{5}{6} \right) && \mid \cdot 6 \\ 4x - 5 &= 6x + 5 \end{aligned}$$

k) Falsch. Die neue Gleichung hat zwar die gleichen Lösungen, es wurde aber nicht $4x$ sondern $\frac{4x}{6}$ subtahiert. Richtig:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -\frac{4x}{6} - \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

l) Wenn $ab < 0$, muss eine Zahl positiv und die andere negativ sein. D.h. entweder ($a < 0$ und $b > 0$) oder ($a > 0$ und $b < 0$).

m) Nichts, jede Kombination ist möglich (man nehme z.B. alle möglichen Zweier-Kombinationen von $+1$ und -1).