Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

18 Trigonometrie

18.0.1. In der Trigonometrie («Dreiecksmessung») beschäftigt man sich mit der Beziehung zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks. Wir werden beispielsweise sehen, wie man mit Hilfe der **trigonometrischen Funktionen** Sinus, Kosinus (Cosinus) und Tangens aus

- drei Seiten(-längen) eines Dreiecks die drei Winkel berechnen kann;
- aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die restlichen Seiten und Winkel berechnen kann; Zwei Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel legen das Dreieck im Allgemeinen nicht eindeutig fest. Man kann aber immerhin die beiden Kandidatendreiecke berechnen.
- aus einer Seite eines Dreiecks und zwei Winkeln die restlichen Seiten und Winkel berechnen kann.

18.1 Trigonometrische Funktionen

18.1.1. Der **Einheitskreis** ist der Kreis um den Ursprung mit Radius 1 Einheit. Winkel werden in mathematisch positivem Sinn (= Gegenuhrzeigersinn) gemessen.

Definition 18.1.2 trigonometrische Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens

Sei ein Winkel α fixiert.
Sei P_α der Punkt auf dem Einheitskreis, für den der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl $\ell_\alpha = OP_\alpha$ genau α ist. Dann sind die reellen Zahlen $\cos(\alpha)$ («Kosinus α»), $\sin(\alpha)$ («Sinus α») und $\tan(\alpha)$ («Tangens α») wie folgt definiert:

- $\cos(\alpha) :=$ ✎(x-Koordinate von P_α)
- $\sin(\alpha) :=$ ✎(y-Koordinate von P_α) also $P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$
- $\tan(\alpha) :=$ ✎(Steigung von ℓ_α) $= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

  $\tan(\alpha)$ ist nur definiert, falls ℓ_α nicht vertikal ist.

Satz 18.1.3 Pythagoras trigonometrisch

Für alle Winkel α gilt

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$

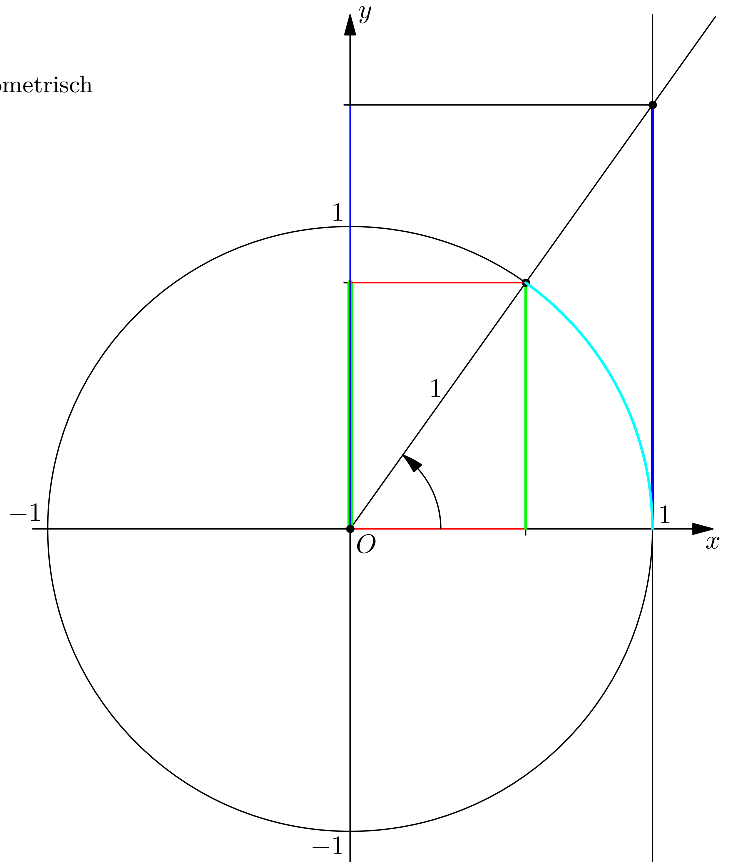
Meist wird dies kurz wie folgt notiert:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

oder noch kürzer:

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

Beweis. Wenden Sie den Satz von Pythagoras auf das offensichtliche rechtwinklige Dreieck an. □



Aufgabe A46 einbauen zwischen den folgenden vier Aufgaben. Da das Vorzeichen unklar ist: Für Winkel zwischen $0°$ und $260°$: Gib «viertelweise» an bzw. bestimme, welche Vorzeichen Kosinus, Sinus und Tangens haben. Dann mit Zusatzwissen über α, etwa $90° \leq \alpha \leq 180°$ beispielsweise Tangens und Sinus aus Kosinus bestimmen.

Aufgabe A1 Zeichnen Sie einen Einheitskreis mit Durchmesser 8 cm. Stellen Sie Ihren Taschenrechner auf Gradmass: Drücken Sie dazu «Home», «5», «2» und stellen dann die Option «Winkel» auf Grad. Speichern Sie die Einstellungen als Standard.

(a) Zeichnen Sie die Punkte $P_{55°}$, $P_{290°}$, $P_{-190°}$ und $P_{380°}$ ein. Bestimmen Sie dann durch Messen die Kosinus- und Sinuswerte dieser Winkel. *Achtung: Es muss in Einheiten, nicht in cm gemessen werden!*

(b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Kosinus- und Sinuswerte der Winkel aus Teilaufgabe (a). *Achtung: Der Taschenrechner muss im Gradmass (DEG) rechnen und nicht im Bogenmass (RAD).*

(c) Bestimmen Sie, ebenfalls durch Messen, die Tangenswerte der Winkel aus Teilaufgabe (a) und überprüfen Sie Ihre Messungen mit dem Taschenrechner.

(d) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\sin(\alpha) = 0.8$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (es gibt unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

(e) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -0.2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (es gibt unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

(f) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\tan(\alpha) = -2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

(g) Für welche Winkel α gilt $\sin(\alpha) = 4.2$?

(h) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -2$?

Aufgabe A2 Bestimmen Sie die **exakten** Cosinus-, Sinus- und Tangenswerte der Winkel $30°$ und $45°$ (ohne Taschenrechner). Machen Sie dazu eine Skizze im Einheitskreis und suchen Sie spezielle rechtwinklige Dreiecke (welcher Satz ist wohl zu verwenden?).

Erstellen Sie dann eine Tabelle mit den **exakten** trigonometrischen Funktionswerten aller Vielfachen von $30°$ und aller Vielfachen von $45°$ zwischen $0°$ und $360°$.

Aufgabe A3

(a) Geben Sie die Eckpunkte eines regelmässigen Fünfecks $ABCDE$ an, dessen Eckpunkte auf dem Einheitskreis liegen. Die Eckpunkte sind exakt anzugeben mit Hilfe des Kosinus bzw. Sinus geeigneter Winkel.
Hinweis: Wählen Sie $A = (1, 0) = (\cos(0°), \sin(0°))$.

(b) Geben Sie die Eckpunkte eines regelmässigen Fünfecks $ABCDE$ exakt an, dessen Eckpunkte auf dem Kreis mit Radius 4 cm um den Ursprung liegen. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte mit dem Taschenrechner (zwei Nachkommastellen).
Als Probe: Zeichnen Sie die von Ihnen berechneten Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie diese zu einem Fünfeck. (Python-Programm in Musterlösung)

(c) Welche Eckpunkte hat das regelmässige n-Eck mit Umkreisradius r? Eckpunkt $(r, 0)$, Zentrum $(0, 0)$

Aufgabe A4

(a) Für jeden Winkel α sind jeweils zwei der folgenden Werte gleich.

$$\begin{array}{cccc} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & -\sin(-\alpha) & -\cos(-\alpha) \end{array}$$

Finden Sie heraus, welche und warum. Als Begründung genügt eine aussagekräftige Skizze.
Hinweis: Wählen Sie einen «beliebigen» Winkel α und tragen Sie in Ihrer Skizze $-\alpha$, $\pm(\sin \pm\alpha)$, $\pm\cos(\pm\alpha)$ geeignet ein (wie in der Skizze zur Definition der trigonometrischen Funktionen).

(b) Für jeden Winkel α sind jeweils vier der folgenden Werte gleich.

$$\begin{array}{cccc} \sin(\alpha) & \sin(\alpha + 90°) & -\sin(\alpha + 180°) & \sin(\alpha + 360°) \\ \cos(\alpha) & -\cos(\alpha + 90°) & -\cos(\alpha + 180°) & \cos(\alpha + 360°) \end{array}$$

Finden Sie heraus, welche, und begründen Sie mit einer Skizze.

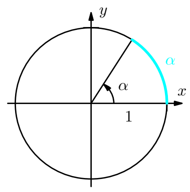
(c) Welche der folgenden Werte sind gleich und warum? $\tan(\alpha)$, $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$, 1, $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

18.1.4. Winkel werden traditionell in Grad gemessen. Eine natürlichere[1] Definition ist die folgende.

Definition 18.1.5 Bogenmass

Das **Bogenmass** eines Winkels α ist die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis als Zahl (ohne Einheit), der von α ausgeschnitten wird. Beispiele:

- $360° = 2\pi$, da der Einheitskreis den Umfang 2π hat.
- $180° = \pi$, da der halbe Umfang des Einheitskreises π ist.
- Der türkise Bogen in der Zeichnung hat die Länge 1, d. h. der Winkel in der Zeichnung ist $\alpha = 1$ im Bogenmass.



Die SI-Einheit des Bogenmasses ist Radiant, abgekürzt «rad», z.B. $360° = 2\pi$ rad. Es handelt sich um eine Einheit der Dimension Zahl, d. h. 1 rad = 1. Sie wird in der Mathematik fast nie dazugeschrieben.
Die Bezeichnung *Radiant* kommt daher, dass die Länge des Kreisbogens in Vielfachen des *Radius* angegeben wird.
(«SI» bedeutet «Système international d'unités», vgl. Wikipedia: Internationales Einheitensystem)

18.1.6. Bei Taschenrechnern kann man oft einstellen, ob sie Winkel im Bogenmass (RAD für Radiant) oder im Gradmass (DEG für «degree», Grad) angeben.

Man kann dies leicht herausfinden, indem man etwa $\sin(90)$ ausrechnet. Wenn 1 herauskommt, ist der Taschenrechner auf Gradmass eingestellt. Wenn $0.89\ldots$ herauskommt, ist er auf Bogenmass eingestellt.

In Programmiersprachen (etwa Python) werden Winkel praktisch immer im Bogenmass gemessen.

Aufgabe A5

(a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle mit den exakten Werten.

Winkel in Grad	$0°$	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$30°$	$-90°$	$45°$	$1°$	$\frac{180°}{\pi}$
Winkel in Radiant	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{180}$	1

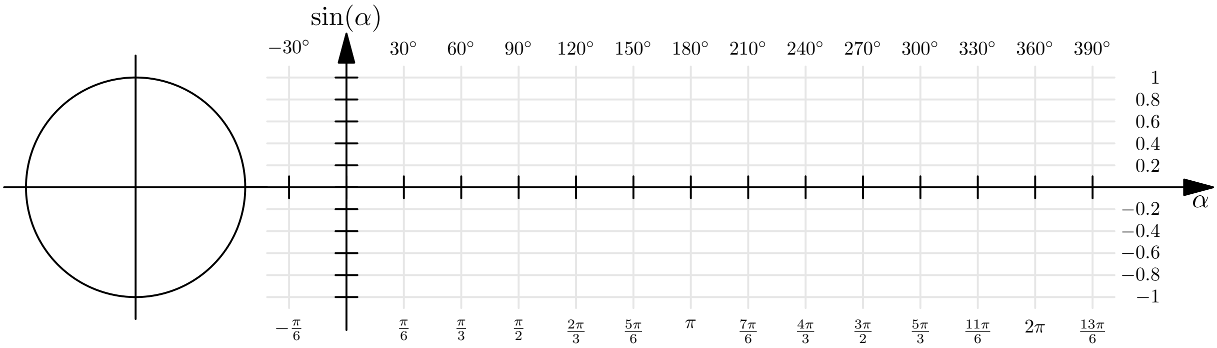
(b) Bestimmen Sie die beiden Umrechnungsfunktionen $g(r)$ von Radiant in Grad und $r(g)$ von Grad in Radiant. Es sollen zum Beispiel $g(\pi) = 180°$ und $r(180°) = \pi$ gelten.

$$g(r) = \qquad\qquad r(g) =$$

Aufgabe A6

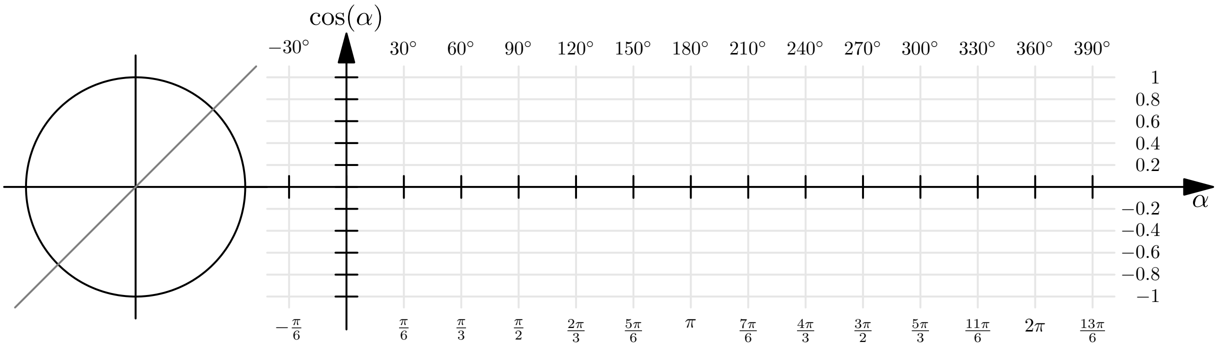
Ziel dieser Aufgabe ist, die Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion in die vorgegebenen Koordinatensysteme einzuzeichnen. Die Aufgabe ist nur mit dem Geodreieck zu lösen (ohne Taschenrechner).

a) Graph der Sinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $30°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie jeweils eine horizontale Linie, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Sinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.

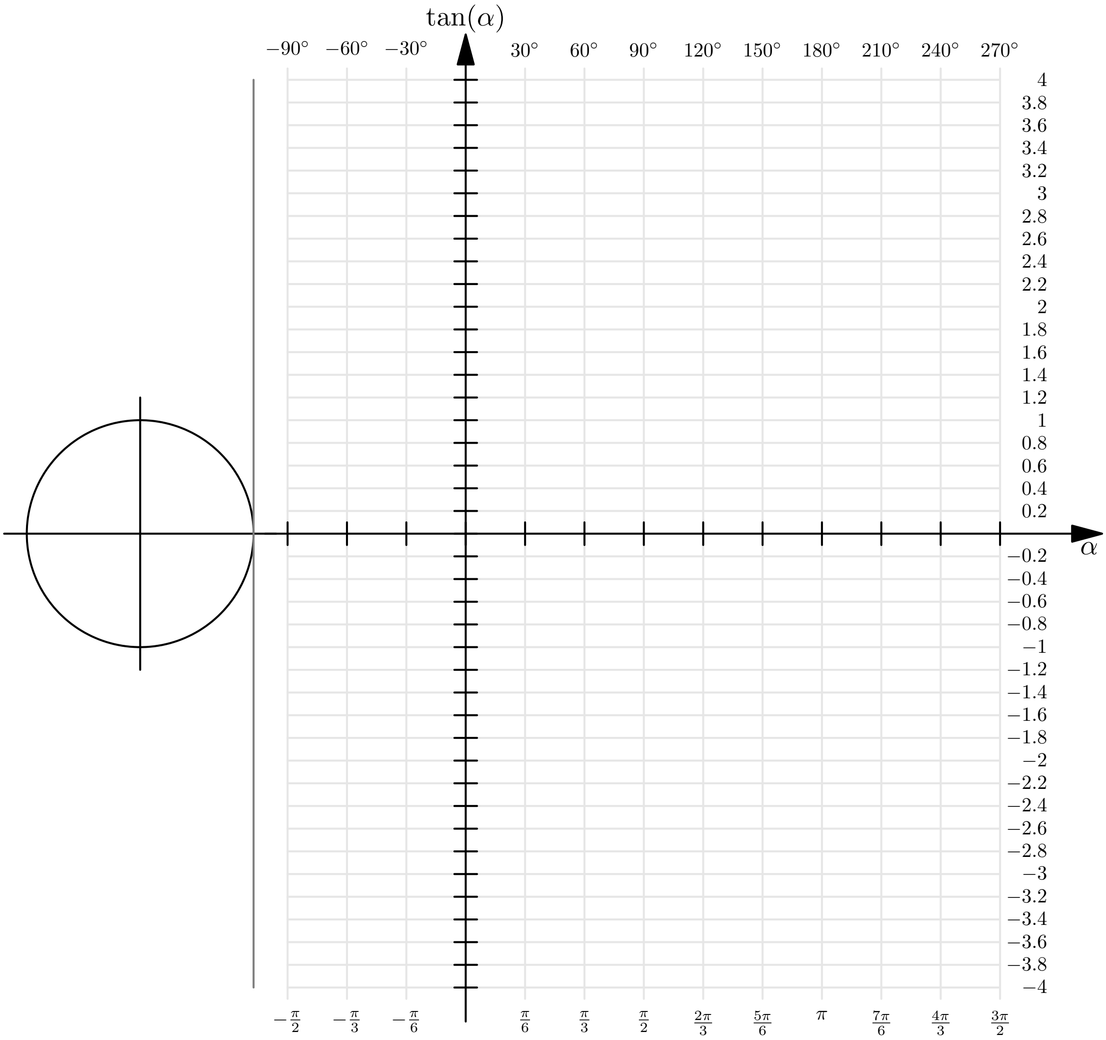


[1] Warum sollte der Vollwinkel 360° sein und nicht 5040 oder 1 oder 42? Das Bogenmass kann statt wie in Definition 18.1.5 erklärt auch ohne Bezug auf den Einheitskreis (und eine fest gewählte Einheit) wie folgt mit Hilfe eines beliebigen Kreises definiert werden: Dividiere die Länge des vom Winkel ausgeschnittenen Kreisbogens durch den Radius des Kreises. Diese Definition hat auch den Vorteil, dass der Winkel schlicht eine Zahl ist und keine Länge (also «dimensionslos», ohne Längeneinheit).
Ein Vorteil der Zahl 360 ist übrigens, dass sie viele Teiler hat: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Deswegen sind viele Winkel im Gradmass ganzzahlig.

b) Graph der Kosinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $30°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie die hellgraue erste Winkelhalbierende, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Kosinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.



c) Skizzieren Sie den Graphen der Tangensfunktion! Vorgehen: Zeichnen Sie für alle Winkel α zwischen $-90°$ und $270°$, die Vielfache von $30°$ sind, den Strahl ℓ_α. Wo taucht $\tan(\alpha)$ auf? Zeichnen Sie den entsprechenden Punkt des Graphen im Koordinatensystem.



18.1.7. Wie rechnet eigentlich ein Computer oder Taschenrechner die trigonometrischen Funktionen aus, etwa den Sinus? Es ist wohl kaum anzunehmen, dass der Taschenrechner Messungen am Einheitskreis durchführt.

Bemerkenswerterweise gilt, wenn x einen Winkel im Bogenmass bezeichnet,

$$\sin(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Dies ist die Darstellung des Sinus als «Potenzreihe»; man muss begründen, warum die unendliche Summe sinnvoll ist. Wer mag, kann die ersten Teilsummen für einen beliebig gewählten Winkel x (etwa $x = \frac{\pi}{3} = 60°$) ausrechnen und sehen, wie diese Teilsummen sich dem wahren Wert $\sin(x)$ nähern; den wahren Wert mag man mit dem Taschenrechner (näherungsweise) berechnen.

Diese Darstellung ist ein Grund, warum das Bogenmass natürlicher ist als das Gradmass.

Auch die Kosinusfunktion kann man als Potenzreihe darstellen:

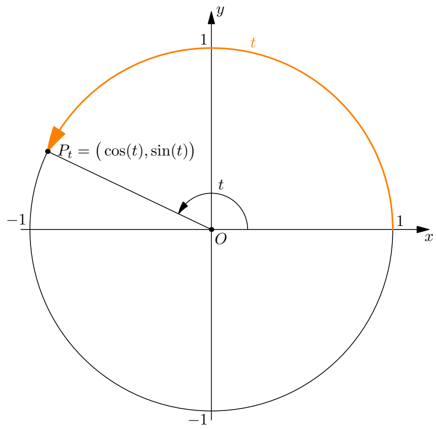
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

18.1.8. Man beachte, dass in den Koordinatensystemen in Aufgabe A6 eine «vertikale Einheit» genauso lang ist wie eine «horizontale Einheit» (letztere ist in Radiant/Bogenmass gemessen). Eine horizontale Einheit beträgt also $1 = 1 \text{ rad} = \frac{360°}{\pi} \approx 57.2958^2$. Dies ist die übliche Konvention beim Zeichnen der Graphen der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.

Merke 18.1.9 Koordinaten eines rotierenden Punktes

Wenn ein Punkt zur Zeit $t = 0$ am Punkt $(1, 0)$ startet und sich mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{1 \text{ Einheit}}{\text{Sekunde}}$ auf dem Einheitskreis bewegt (in positivem Drehsinn), so hat er zur Zeit t die Position

$$P_t = (\cos(t), \sin(t)).$$



Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung der Definitionen. Man kann wie folgt argumentieren.

Zur Zeit t (in Sekunden) hat der Punkt einen Kreisbogen der Länge t (in Einheiten) durchlaufen (weil die Geschwindigkeit $\frac{1 \text{ Einheit}}{\text{Sekunde}}$ beträgt).

Da der Kreisbogen den Radius 1 hat, ist t der Winkel des Kreisbogens (im Bogenmass = in Radiant).

Der Punkt auf dem Einheitskreis zum Winkel t hat aber nach Definition von Kosinus und Sinus die Koordinaten $(\cos(t), \sin(t))$. □

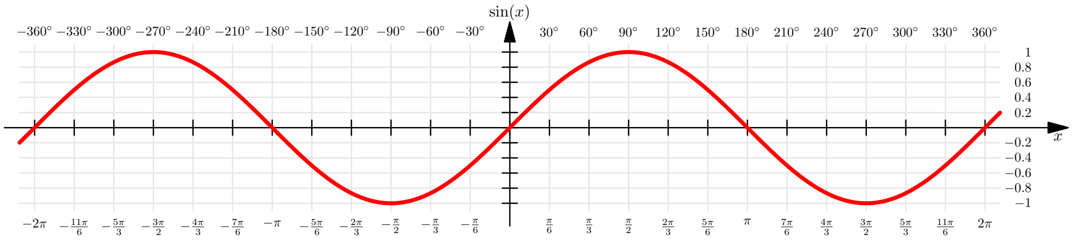
Merke 18.1.10

Die Sinuswerte der 0°, 30°, 45°, 60°, 90° kann man sich mit Hilfe der folgenden Tabelle leicht merken. (Sie haben diese Sinuswerte in Aufgabe A2 berechnet.)

Winkel α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Die untere Zeile kann man sich leicht merken, die Folge der Winkel 0°, 30°, 45°, 60°, 90° in der oberen Zeile muss man sich einprägen.
Die Zahlen in der unteren Zeile sind $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$, $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, in der Darstellung in der Tabelle kann man sich diese Zahlen aber leichter merken.

Merke 18.1.11 Eigenschaften der Sinusfunktion



- Die Sinusfunktion nimmt jedes Element des Intervalls $[-1, 1]$ als Wert an, aber keine Zahlen ausserhalb dieses Intervalls. Kurz: Das Bild der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$.
- Die Sinusfunktion ist periodisch mit **Periodenlänge** 2π:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Die Nullstellen der Sinusfunktion sind genau die Vielfachen von π:

$$\sin(x) = 0 \qquad \iff \qquad x = n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}$$

- Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zu jeder ihrer Nullstellen. Zum Beispiel bedeutet Punktsymmetrie zur Nullstelle 0 Punktsymmetrie zum Ursprung, in Formeln

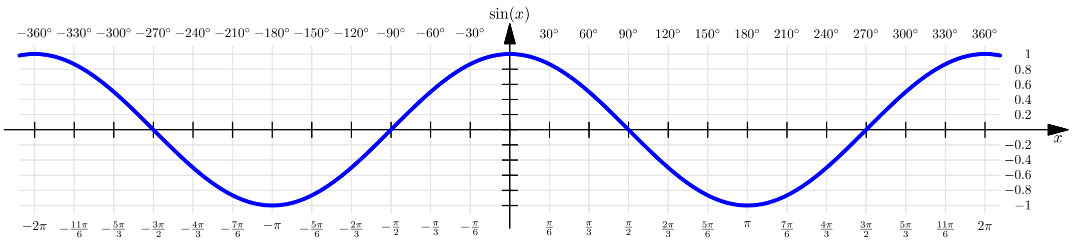
$$\sin(x) = -\sin(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Die Maximalstellen sind $\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$.
- Die Minimalstellen sind $-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$.
- Die Sinusfunktion ist achsensymmetrisch zu allen vertikalen Geraden durch ihre Maximalstellen/Hochpunkte und Minimalstellen/Tiefpunkte. Zum Beispiel ist sie achsensymmetrisch zur vertikalen Geraden $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

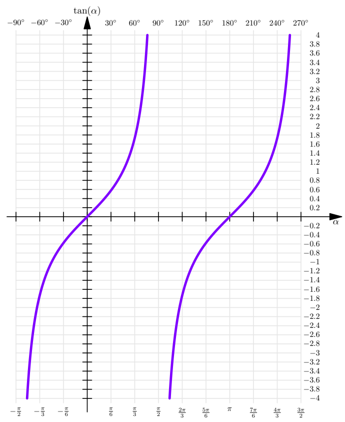
Man könnte noch einige weitere «offensichtliche» Eigenschaften aufführen (etwa, dass die Sinusfunktion zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ streng monoton wächst).
Wer die entsprechenden Eigenschaften im Gradmass lesen will, verwende $\pi = 180°$. Periodizität wird so zum Beispiel zu $\sin(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 360°)$.

Merke 18.1.12 Eigenschaften der Kosinusfunktion



Die Kosinusfunktion hat ganz ähnliche Eigenschaften wie die Sinusfunktion. Sie sind direkt aus dem Graphen der Funktion ersichtlich oder folgen aus $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 90°)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (was bedeutet, dass der Graph der Kosinusfunktion aus dem Graphen der Sinusfunktion durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links entsteht).

Merke 18.1.13 Eigenschaften der Tangensfunktion



- Die Tangensfunktion $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist definiert für alle reellen Zahlen x, die nicht Nullstelle der Kosinusfunktion sind. Die «Definitionslücken» sind also diejenigen reellen Zahlen, die sich von $\frac{\pi}{2} = 90°$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi = 180°$ unterscheiden.
- Die Tangensfunktion ist periodisch mit **Periodenlänge** π:

$$\tan(x) = \tan(x + \pi) \qquad \text{für alle } x \text{ in der Definitionsmenge}$$

- Nullstellen des Tangens = Nullstellen des Sinus
- Der Tangens ist Punktsymmetrie zu jeder Nullstelle. Zum Beispiel bedeutet Punktsymmetrie zur Nullstelle 0 Punktesymmetrie zum Ursprung, in Formeln

$$\tan(x) = -\tan(-x)$$

18.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

18.2.1. Es sei daran erinnert, dass der Begriff *Trigonometrie Dreiecksvermessung* bedeutet. Wir betrachten zunächst beliebige rechtwinklige Dreiecke.

Aufgabe A7 In dieser Aufgabe sind zwei Zeichnungen nebeneinander zu erstellen: Zum einen ist ein Dreieck zu zeichnen, zum anderen ein Einheitskreis.

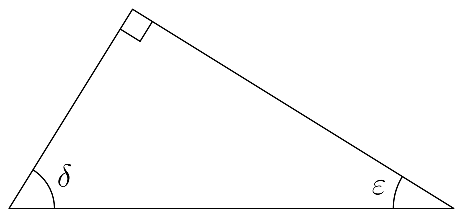
- Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle GHA$ mit Winkel $\delta \approx 25°$ bei G und rechtem Winkel bei H. Beschriften Sie den Winkel δ und die Seiten g, h, und a.
- Zeichnen Sie daneben einen Einheitskreis mit dem Punkt P_δ (gleicher Winkel δ wie in Ihrem Dreieck).
- Zeichnen Sie das Stützdreieck unter der Strecke OP_δ.
- Begründen Sie, warum das Stützdreieck und Ihr Dreieck $\triangle GHA$ ähnlich sind.
- Beschriften Sie die Längen der Stützdreiecksseiten.
- Geben Sie mit Hilfe des Stützdreiecks die drei Seitenverhältnisse $\frac{g}{h}$, $\frac{a}{h}$ und $\frac{g}{a}$ an.
- Versuchen Sie, den Inhalt von Satz 18.2.3 herauszufinden. Dabei sind die Begriffe «Ankathete» und «Gegenkathete» aus der folgenden Definition zu verwenden.

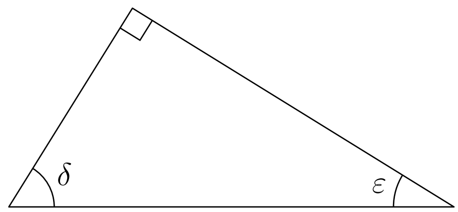
Definition 18.2.2 Ankathete, Gegenkathete

In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck betrachte man einen der beiden Winkel, die nicht 90° betragen.

- Die an diesem Winkel **an**liegende Kathete heisst **Ankathete** zu dem betrachteten Winkel.
- Die diesem Winkel **gegen**überliegende Kathete heisst **Gegenkathete** zu dem betrachteten Winkel.

✎In den beiden Zeichnungen beschriften:
oben: Hypotenuse, Ankathete zu δ, Gegenkathete zu δ;
unten dasselbe mit ε





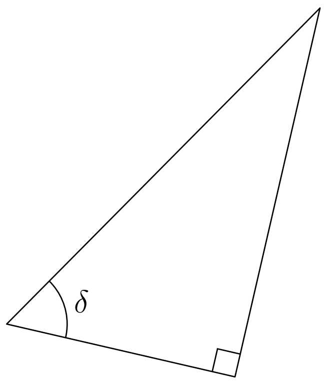
Satz 18.2.3 Sinus und Kosinus als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken

In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck sei $\delta \neq 90°$ einer der beiden nicht rechten Winkel. Dann gelten

$$\sin(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \delta}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Opposite of } \delta}{\text{Hypotenuse}} \quad SOH$$

$$\cos(\delta) = \frac{\text{Ankathete zu } \delta}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Adjacent to } \delta}{\text{Hypotenuse}} \quad CAH$$

$$\tan(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \delta}{\text{Ankathete zu } \delta} = \frac{\text{Opposite of } \delta}{\text{Adjacent to } \delta} \quad TOA$$



18.2.4. Zum Merken dieser drei Formeln gibt es die folgenden Eselsbrücken:

- **«GAGA HühnerHof AG»** alias die folgende Tabelle:

sin	cos	tan	cot
G	A	G	A
H	H	A	G

  Zum Beispiel ist der Kosinus der Quotient **A**nkathete durch **H**ypotenuse.
  Die Funktion cot ist der **Cotangens**, $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, also fast immer der Kehrwert von $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
  Der Nachteil dieser Eselsbrücke ist, dass man sich die Reihenfolge der vier Funktionen sin, cos, tan, cot in der ersten Zeile merken muss.
- englische Variante: **SOH-CAH-TOA** (klingt ähnlich wie englisch Krakatoa, deutsch Krakatau, ein bekannter Vulkan).
  - SOH: Sine = Opposite ÷ Hypotenuse
  - CAH: Cosine = Adjacent ÷ Hypotenuse
  - TOA: Tangent = Opposite ÷ Adjacent

  Opposite = Gegenkathete, Adjacent = Ankathete

Aufgabe A8 Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind in den folgenden Teilaufgaben jeweils ein Winkel und eine Seite bekannt. Berechnen Sie die fehlenden Seiten mit dem TR. Geben Sie die Resultate auf 4 signifikante Stellen gerundet an (d.h. egal, wo das Komma ist, es stehen vier Stellen da (führende Nullen nicht mitgezählt)). Überprüfen Sie Ihre Resultate mit einer kleinen Handskizze auf ihre Plausibilität.

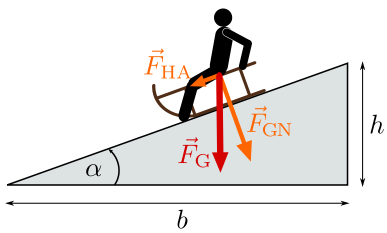
a) $\alpha = 20°$, $a = 4$ b) $\beta = 50°$, $c = 3$ c) $\alpha = 35°$, $b = 5$ d) $\beta = 55°$, $a = 2$

Aufgabe A9

a) Aktuelle Gleitschirme haben einen Gleitwinkel von etwa 7° (Winkel zwischen Flugrichtung und der Horizontalen). Normalerweise wird aber die Gleitzahl angegeben, das ist die horizontale Distanz in m, die pro Höhenmeter zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Gleitzahl. Welcher trigonometrischen Funktion des Gleitwinkels entspricht die Gleitzahl?

b) Sie stehen in der Wüste von Dubai und der 830 m hohe Burj Khalifa erscheint unter einem Winkel von 20°. Wie weit vom Turm sind Sie entfernt?

c) In der Skizze rechts ist $\vec{F}_G$ die Gewichtskraft, die auf die Person inklusive Schlitten wirkt. Mit den beiden anderen Kräften $\vec{F}_{GN}$ (Komponente der Gewichtskraft senkrecht (normal) zum Boden) und $\vec{F}_{HA}$ (Hangabtriebskraft, beschleunigt Schlitten samt Person parallel zum Hang) kann ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden.
Für eine Hangneigung von $\alpha = 10°$: Mit wie viel Prozent der Gewichtskraft wird die Person mit Schlitten den Hang hinunter gezogen?



Grafik: Creative Commons Lizenz Version 3.0, by-nc-sa, Copyright by Bernhard Grotz
http://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/kraftwandler-und-getriebe/schiefe-ebene.html

Aufgabe A10 In dieser Aufgabe wird die Erde idealisiert als Kugel betrachtet.

(a) Berechnen Sie die Länge des Breitenkreises, auf dem St. Gallen liegt.
Hinweise und Werte:
- Zeichnen Sie einen Querschnitt der Erde durch die beiden Pole und St. Gallen.
- St. Gallen hat die Koordinaten $47°25'27''$ N, $9°22'15''$ E (laut Wikipedia: St. Gallen). Rechnen Sie gerundet mit den Koordinaten $47°$ N, $9°$ E.
- Rechnen Sie mit einem Erdumfang von $U = 40\,000\,\text{km}$.
- Breitenkreis = «Kreis parallel zum Äquator»; der Äquator ist der $0°$-Breitenkreis.

(b) Geben Sie die Länge des Breitenkreises zum Winkel α (nördlicher oder südlicher Breite) in Abhängigkeit vom Erdumfang U an.

Aufgabe A11 Zeichnen Sie ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck (bitte nicht gleichschenklig) mit Eckpunkten A, B, C (im mathematisch positivem Drehsinn, rechter Winkel bei C). Die Seiten bzw. Winkel werden wie üblich mit a, b, c bzw. α, β (und $\gamma = 90°$) bezeichnet.

(a) Messen Sie alle Seiten und Winkel und schreiben Sie Ihre Werte auf.

(b) Ziel der Teilaufgabe ist, dass Sie sehen, dass man in jedem rechtwinkligen Dreieck aus jeder Seite und jedem Nicht-90°-Grad-Winkel die anderen Seiten mit einer einfachen Formel berechnen kann.
Finden Sie Formeln, wie man
- (Fall 1: Kathete a und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)
  - b und c aus a und α berechnen kann;
  - b und c aus a und β berechnen kann (möglichst nicht per $\beta = 90° - \alpha$ auf den vorherigen Fall zurückführen);
- (Fall 2: andere Kathete b und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)
  - a und c aus b und α berechnen kann;
  - a und c aus b und β berechnen kann;
- (Fall 3: Hypotenuse c und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)
  - a und b aus c und α berechnen kann;
  - a und b aus c und β berechnen kann.

(c) Testen Sie mit dem Taschenrechner, ob Ihre Formeln für das von Ihnen gezeichnete Dreieck stimmen.

(d) Wenn zwei beliebige der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben sind, wie können Sie die dritte berechnen?

(e) Wenn die beiden Nicht-90°-Winkel α und β eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben sind: Können Sie die drei Seiten a, b und c berechnen?

Bemerkung: In all den obigen Fällen, in denen die Berechnung möglich ist, ist das rechtwinklige Dreieck durch die angegebenen Grössen eindeutig bestimmt. Man mag sich überlegen, wie man das entsprechende Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (Winkel entweder als gegeben vorausgesetzen oder per Geodreieck einzeichnen).

18.3 Trigonometrische Flächenformel

18.3.1. Wir betrachten nun allgemeine (nicht notwendig rechtwinklige) Dreiecke.

Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den dazwischenliegenden Winkel eindeutig bestimmt (Kongruenzsatz sws = Seite-Winkel-Seite). Man sollte also aus diesen Daten beispielsweise die Fläche berechnen können.

Aufgabe A12

(a) Berechne die Fläche eines (allgemeinen, nicht notwendig rechtwinkligen) Dreiecks mit $c = 9$, $b = 6$ und $\alpha = 37°$.
Hinweis: Berechne zuerst die Höhe h_c mit Hilfe von SOH-CAH-TOA und dann daraus die Fläche.

(b) Berechne die Fläche eines Dreiecks mit $a = 5$, $b = 6$ und $\gamma = 77°$.

(c) Kannst du den Inhalt von Satz 18.3.2 erraten?
Kannst du ihn beweisen? Funktioniert dein Beweis auch für $\alpha > 90°$?

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Satz 18.3.2 Trigonometrische Flächenformel

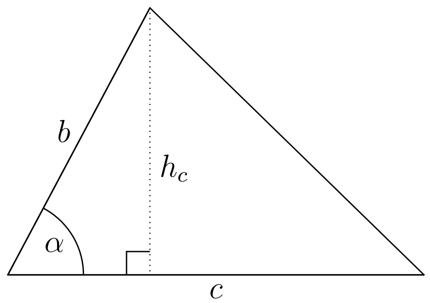
Der Flächeninhalt F eines beliebigen Dreiecks ABC lässt sich aus je zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel wie folgt berechnen: ✎

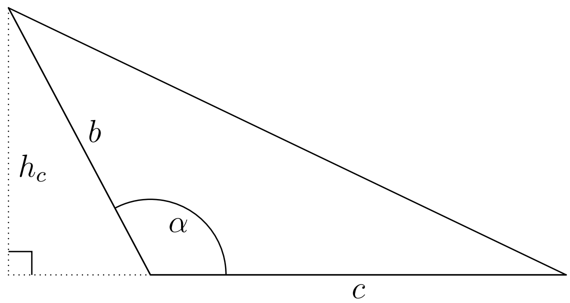
$$F = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$$

In Worten: ✎

Dreiecksfläche $= \frac{1}{2}$ mal Seite mal Seite mal Sinus des Zwischenwinkels

Beweis.





✎Fall 1: α spitzer Winkel

Wegen SOH-CAH-TOA bzw. SOH gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad h_c = b \cdot \sin(a)$$

Fall 2: α stumpfer Winkel

Wegen SOH-CAH-TOA bzw. SOH gilt

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_c}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad h_c = b \cdot \sin(180^\circ - a) = b \cdot \sin(\alpha)$$

- geometrisch $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ per Definition am Einheitskreis
- aus Bekanntem: $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin(-(180^\circ - \alpha)) = -\sin(\alpha - 180^\circ) = \sin(\alpha - 180^\circ + 180^\circ) = \sin(\alpha)$

In beiden Fällen:

$$F = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}cb\sin(a) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

Die anderen Formeln zeigt man durch zyklische Umbenennung der Dreiecksgrössen (oder sieht, dass sie alle das gleiche aussagen).

An die Eckpunkten eines gleichseitigen (nicht gezeichneten) Dreiecks A, B, C (oder a, b, c) hinschreiben, dann drei «leicht gebogene Pfeile» dazwischen ergänzen, die einen Kreis/Zykel bilden. □

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

18.4 Arcus-Funktionen

18.4.1. Die trigonometrischen Funktionen ordnen Winkeln (im Gradmass oder in Radiant) reelle Zahlen zu.

Umgekehrt kann man sich fragen, welche(r) Winkel zu einer gegebenen reellen Zahl gehört:

- Welcher Winkel α erfüllt $\sin(\alpha) = -0.3$?
- Welcher Winkel α erfüllt $\cos(\alpha) = 1$?
- Welcher Winkel α erfüllt $\tan(\alpha) = 42$?

Bisher haben wir solche Fragen graphisch am Einheitskreis oder mit dem Taschenrechner gelöst, etwa per `solve(sin(a)=-0.3, a)`. Dabei sieht man, dass es meist unendlich viele Winkel gibt (oder auch gar keinen), die eine solche Frage beantworten. Beispielsweise sind die Lösungen der Gleichung $\cos(\alpha) = 1$ alle ganzzahligen Vielfachen von $2\pi = 360°$.

Die sogenannten **Arcus-Funktionen** wählen aus diesen unendlich vielen Lösungen eine «besonders einfache» Lösung aus, was konkret bedeutet, dass die Lösung möglichst nahe bei $0 = 0°$ liegt und im Zweifelsfall positiv ist.

Definition 18.4.2

Definition des Arcus-Kosinus: ✎

$$\begin{aligned}\arccos\colon [-1,1] &\to [0,\pi]\\ x &\mapsto \arccos(x) = (\text{der eindeutige Winkel } \alpha \in [0,\pi] \text{ mit } \cos(\alpha) = x)\end{aligned}$$

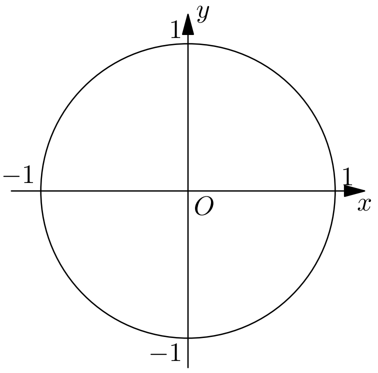
Definition des Arcus-Sinus: ✎

$$\begin{aligned}\arcsin\colon [-1,1] &\to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\\ x &\mapsto \arcsin(x) = (\text{der eindeutige Winkel } \alpha \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \text{ mit } \sin(\alpha) = x)\end{aligned}$$

Definition des Arcus-Tangens: ✎

$$\begin{aligned}\arctan\colon \mathbb{R} &\to (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\\ x &\mapsto \arctan(x) = (\text{der eindeutige Winkel } \alpha \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \text{ mit } \tan(\alpha) = x)\end{aligned}$$

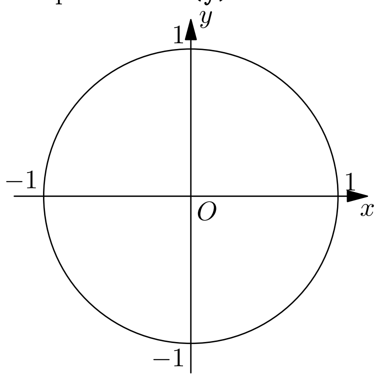
Arcus-Cosinus
$x \in [-1,1]$
Mathe: $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$
Computer: `acos(x)`



Liefert Winkel im Intervall:

$[0°, 180°] = [0, \pi]$
(Halbkreis schraffieren)

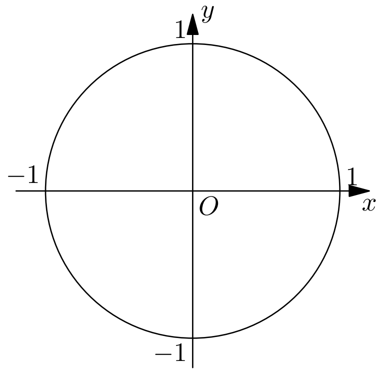
Arcus-Sinus
$y \in [-1,1]$
Mathe: $\arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$
Computer: `asin(y)`



Liefert Winkel im Intervall:

$[-90°, 90°] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Arcus-Tangens
$m \in \mathbb{R}$
Mathe: $\arctan(m) = \tan^{-1}(m)$
Computer: `atan(m)`



Liefert Winkel im Intervall:

$(-90°, 90°) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(Tangente als m-Achse)

18.4.3. Der Name *Arcus-Funktionen* kommt daher, dass diese Funktionen (in Radiant gemessen) *Bogen*längen liefern (lat. *arcus* für *Bogen*, oder auch englisch oder französisch *arc*).

Die Arcus-Funktionen sind **Umkehrfunktionen** der trigonometrischen Funktionen bzw. genauer von geeigneten Einschränkungen dieser Funktionen, denn sie «kehren» die Richtung dieser Funktionen «um»: Statt aus Winkeln Zahlen zu berechnen, liefern sie umgekehrt zu Zahlen Winkel.

Der Begriff *Umkehrfunktion* wird später in allgemeinem Kontext erklärt.

18.4.4. Sind Winkel zwischen 0° und 180° gesucht (also eventuell stumpfe Winkel), so empfiehlt es sich, falls möglich, arccos anstatt arcsin zu benutzen. So muss der Winkel am Schluss nicht noch umgerechnet werden.

Aufgabe A13 Bestimmen Sie mit Hilfe einer Skizze des Einheitskreises durch geometrische Überlegungen, aber ohne TR und ohne Abmessen:

a) $\arcsin(0)$ b) $\arccos(0)$ c) $\arctan(0)$ d) $\arcsin(1)$
e) $\arccos(1)$ f) $\arctan(1)$ g) $\arcsin(-1)$ h) $\arccos(-1)$
i) $\arctan(-1)$ j) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ k) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ l) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Aufgabe A14 Zeichnen Sie (auf Papier) die Funktionsgraphen der Arcusfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$.

Wählen Sie als Einheitslänge 5 cm (in beiden Richtungen). Die Winkel auf der vertikalen α-Achse werden in Radiant gemessen.

Aufgabe A15

a) Moderne Segelflieger haben eine Gleitzahl (siehe Aufgabe A9 a)) von ca. 50. Berechnen Sie den entsprechenden Gleitwinkel. *Zusatzaufgabe: Wenn so ein Segelflieger das Matterhorn knapp überfliegt, könnte dieser ohne weitere Auf- und Abwinde im Aargau in Birrfeld landen?*
b) Ein 8 m hoher senkrechter Strommast wirft einen 4 m langen Schatten. Wie gross ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen? *Zusatzaufgabe: Zu welcher Jahres- und Tageszeit steht die Sonne in St. Gallen so hoch?*
c) Am Anfang einer Passstrasse steht ein Schild mit der Aufschrift «20% Steigung». Was ist also der Winkel dieser Strasse gegenüber der Horizontalen (wenn man annimmt, dass die Steigung überall genau 20 % beträgt)?
d) Eine Downhill-Mountainbikerin zeichnet ihre Talfahrt vom Maschgenkamm nach Quarten am Walensee sowohl mit ihrem Tachometer als auch mit ihrem GPS auf. Nach 8.271 km auf dem Tachometer zeigt das GPS nur 8.115 km an. Sie setzt beide Geräte wieder auf Null und radelt nach Sargans. Dort zeigen beide Geräte bis auf 2 m die gleiche Distanz (19.2 km) an.
Was hat das GPS gemessen und wie steil (Angabe als Winkel und in %) war die Abfahrt im Durchschnitt?

Aufgabe A16 Bestimmen Sie die folgenden Werte. Die Verwendung eines Taschenrechners ist nicht erlaubt (bzw. nur zur Kontrolle erlaubt). Verwenden Sie die Definition 18.4.2 der Arcus-Funktionen und einen Einheitskreis (Handskizze, bitte nicht abmessen).

Ab Teilaufgabe d) sind alle Winkel in Radiant anzugeben.

a) $\arccos(\cos(27°))$ b) $\arccos(\cos(-27°))$ c) $\arccos(\cos(207°))$
d) $\arccos(\cos(1))$ e) $\arccos(\cos(-1))$ f) $\arccos(\cos(4))$
g) $\arcsin(\sin(1))$ h) $\arcsin(\sin(-1))$ i) $\arcsin(\sin(4))$
j) $\arctan(\tan(1))$ k) $\arctan(\tan(-1))$ l) $\arctan(\tan(4))$

Und umgekehrt:

m) $\cos(\arccos(0.4))$ n) $\sin(\arcsin(0.4))$ o) $\tan(\arctan(0.4))$

Und noch etwas zum Denken (hierbei sind die reellen Zahlen $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig):

p) $\arccos(\sin(\alpha))$ q) $\cos(\arcsin(s))$ r) $\tan(\arcsin(s))$ s) $\sin(\arctan(t))$

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 18.4.5

Jede trigonometrische Funktion macht die zugehörige Arcus-Funktionen rückgängig:

$$
\begin{aligned}
\cos(\arccos(x)) &= x && \text{für alle } x \in [-1,1] \text{ (sonst nicht definiert)}\\
\sin(\arcsin(x)) &= x && \text{für alle } x \in [-1,1] \text{ (sonst nicht definiert)}\\
\tan(\arctan(x)) &= x && \text{für alle } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

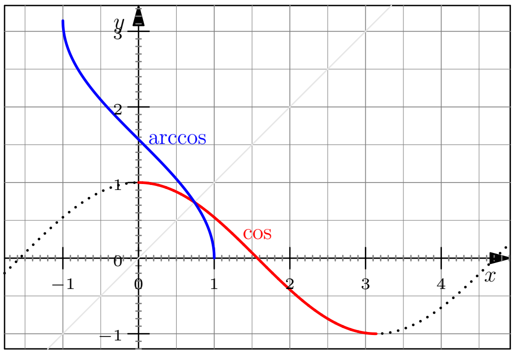
Jede Arcus-Funktion macht die zugehörige trigonometrische Funktion rückgängig, **falls der Winkel x im «richtigen» Intervall liegt**:

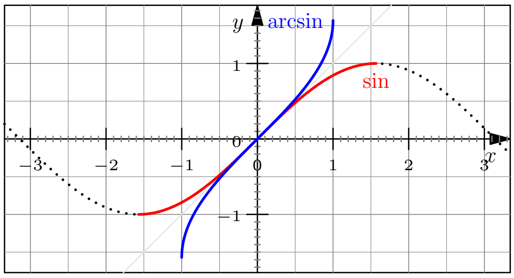
$$
\begin{aligned}
\arccos(\cos(x)) &= x && \text{für alle } x \in [0,\pi] = [0^\circ, 180^\circ]\\
\arcsin(\sin(x)) &= x && \text{für alle } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] = [-90^\circ, 90^\circ]\\
\arctan(\tan(x)) &= x && \text{für alle } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = (-90^\circ, 90^\circ)
\end{aligned}
$$

Liegt der Winkel nicht im «richtigen» Intervall, so muss man etwas nachdenken: Beispielsweise gelten $\arccos(\cos(330^\circ)) = \arccos(\cos(-30^\circ)) = \arccos(\cos(30^\circ)) = 30^\circ$ oder $\arcsin(\sin(123^\circ)) = \arcsin(\sin(90^\circ + 33^\circ)) = \arcsin(\sin(90^\circ - 33^\circ)) = \arcsin(\sin(57^\circ)) = 57^\circ$.

18.4.6 (Graphen der Arcus-Funktionen)**.**

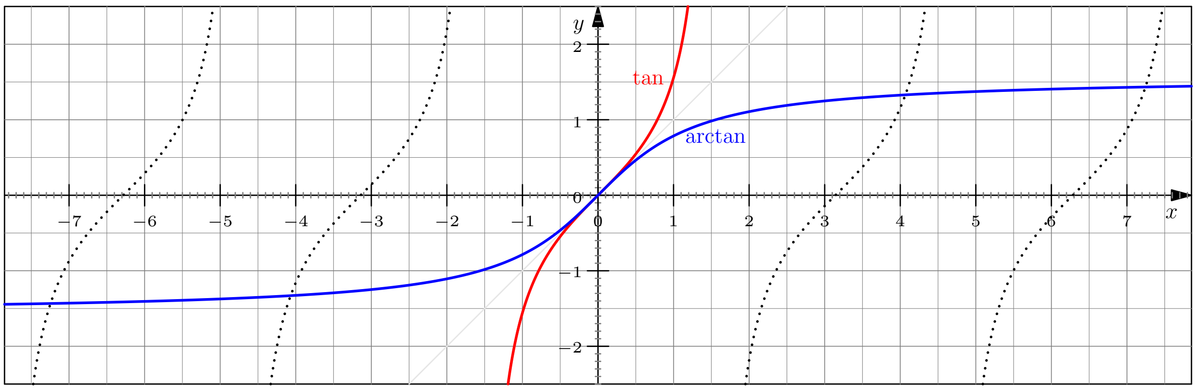
Wenn man die gepunktet gezeichnete Kosinusfunktion nur auf dem Intervall $[0,\pi]$ betrachtet (roter Graph), so wird jeder Wert zwischen -1 und 1 **genau einmal** angenommen. Diese Tatsache wird in der Definition der Umkehrfunktion arccos entscheidend verwendet.
Der Graph der Umkehrfunktion arccos ist in blau eingezeichnet. Er entsteht aus dem roten Graphen durch Spiegelung an der hellgrau eingezeichneten ersten Winkelhalbierenden $x = y$.





Wenn man die gepunktet gezeichnete Sinusfunktion nur auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ betrachtet (roter Graph), so wird jeder Wert zwischen -1 und 1 **genau einmal** angenommen. Diese Tatsache wird in der Definition der Umkehrfunktion arcsin entscheidend verwendet.
Der Graph der Umkehrfunktion arcsin ist in blau eingezeichnet. Er entsteht aus dem roten Graphen durch Spiegelung an der hellgrauen ersten Winkelhalbierenden.

Ähnlich nimmt die Tangensfunktion tan auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jede reelle Zahl **genau einmal** als Wert an. Ihre Umkehrfunktion arctan ist in blau eingezeichnet und entsteht aus dem roten Graphen durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

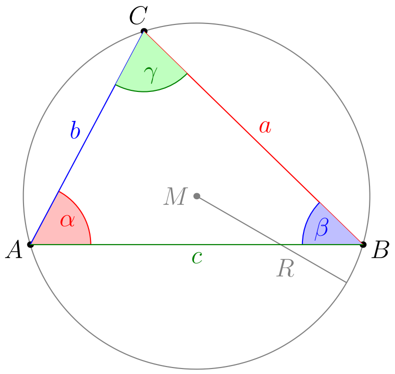


18.5 Sinussatz

Satz 18.5.1 Sinussatz

In jedem Dreieck ABC mit Umkreisradius R und Fläche F gilt ✎

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R = \frac{abc}{2F}$$



In Worten ist also das Verhältnis jeder Dreiecksseite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels konstant und stimmt mit dem Durchmesser des Umkreises überein. (letzte Gleichung nicht in Worten erklärt)

Beweis. Abgesehen von der Aussage über den Umkreisradius folgt alles aus der trigonometrischen Flächenformel (Satz 18.3.2):✎ könnte auch nur $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{abc}{2F}$ zeigen oder zuerst nur das; damit kann man auch das Kehrwert-Nehmen vermeiden

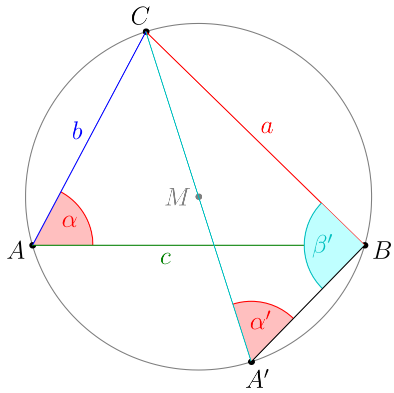
$$F = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma) \quad | \text{ Multiplikation mit } \frac{2}{abc}$$

$$\frac{2F}{abc} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad | \text{ Kehrwerte nehmen}$$

$$\frac{abc}{2F} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Nun zu der Behauptung über den Umkreisradius. Dazu verschiebe man einen Dreieckspunkt auf «seinem Umkreisbogen» so, dass eine Seite des neu entstehenden Dreiecks durch den Mittelpunkt M des Umkreises verläuft (dies ist stets möglich; warum?). In der Skizze wurde der Punkt A auf den Punkt A' verschoben. Wir erklären den Rest des Beweises in diesem Fall (sonst Punkte umbenennen).

Nach dem bereits bewiesenen Teil des Sinussatzes, angewandt auf des Dreieck $A'BC$, gilt ✎



$$\frac{a}{\sin(\alpha')} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\beta')}$$

Beachte

$\alpha' = \alpha$ nach dem Peripheriewinkelsatz (über der Kreissehne a)

$\beta' = 90°$ nach dem Satz von Thales (oder dem Zentriwinkelsatz)

$\overline{CA'} = 2R$ nach Wahl von A'

Wir folgern

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\alpha')} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\beta')} = \frac{2R}{\sin(90°)} = \frac{2R}{1} = 2R$$

Kürzer(?): Wegen Thales gilt $\beta' = 90°$. Damit ist SOH im rechtwinligen Dreieck $A'BC$ anwendbar und liefert $\sin(\alpha') = \frac{a}{\overline{CA'}}$. Wegen $\alpha' = \alpha$ (Peripheriewinkelsatz) und $\overline{CA'} = 2R$ folgt daraus $\sin(\alpha) = \frac{a}{2R}$ oder umgeschrieben $\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$.

□

18.5.2. (Sollte man mal sagen ...:) Wir betrachten nur nicht-entartete Dreiecke, also solche Dreiecke, deren drei Seiten positive Länge haben und deren drei Winkel im Intervall $(0°, 180°)$ liegen. Für solche Dreiecke ist der Sinus jedes Winkels positiv (und von Null verschieden), was übrigens bereits im Sinussatz implizit vorausgesetzt ist.

Dreiecksberechnungen mit dem Sinussatz

Beispiel 18.5.3. Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks ABC mit $a = 37.2$, $\beta = 72.2°$, $\gamma = 40.4°$. Bonus: Umkreisradius und Fläche berechnen.

Typ der Dreiecksberechnung: ✎wsw = Winkel-Seite-Winkel (d. h. zwei (und damit drei) Winkel bekannt und eine Seite

✎Skizze anfertigen.

- Winkelsumme im Dreieck: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 72.2° - 40.4° = 67.4°$
- Sinussatz: (Beim Ausrechnen des konkreten Wertes erklären, wie man mit dem Taschenrechner Variablen Werte zuweist definiert.)

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \implies b = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\beta) = \frac{37.2}{\sin(67.4°)} \cdot \sin(72.2°) \approx 38.4$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \implies c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma) = \frac{37.2}{\sin(67.4°)} \cdot \sin(40.4°) \approx 26.1$$

- Bonus: Was ist der Umkreisradius? $R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \approx 20.1$
- Bonus: Was ist die Fläche?
  - Sinussatz: $F = \frac{abc}{4R} \approx 462.5$.
  - Heronsche-Formel: $s = \frac{1}{2}(a + b + c) \approx 50.8$
    $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \approx 462.5$
  - trigonometrische Flächenformel: $F = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) \approx 462.5$

18.5.4. Die folgende Aussage ist wohl jedem intuitiv klar. Aus Platzgründen ist sie bereist hier aufgeschrieben, damit das nächste Beispiel auf eine Seite passt.

Folgerung 18.5.5

Sind a und b zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks mit gegenüberliegenden Winkeln α und β, so gilt

$$a < b \iff \alpha < \beta$$

Dies bedeutet: In jedem Dreieck liegt die längste/mittlere/kürzeste Seite gegenüber des grössten/mittleren/kleinsten Winkels.

18.5.6. Beweis nicht in Lektion erklärt, aber der Vollständigkeit halber aufgeschrieben. Man kann die Aussage auch elementar beweisen; dann wohl am einfachsten $\alpha < \beta \implies a < b$ zeigen, was alles andere impliziert.

Beweis. Die Teilaussage $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ des Sinussatzes ist äquivalent zu $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$.
Daraus folgt

$$a < b \iff \frac{a}{b} < 1 \iff \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} < 1 \iff \sin(\alpha) < \sin(\beta)$$

Behauptung 1: Aus $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$ folgt $\alpha < \beta$.
Gelte $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$.

- Fall 1: $0 < \alpha \leq 90°$ (also α spitzer oder rechter Winkel).
  Aus der Definition des Sinus am Einheitskreis folgt $\alpha < \beta$ wie gewünscht (und auch $\beta \leq 180° - \alpha$).
- Fall 2: $90° < \alpha < 180°$ (also α stumpf).
  Aus der Definition des Sinus am Einheitskreis folgt $180° - \alpha < \beta$ (und auch $\beta \leq \alpha$). Addiert man auf beiden Seiten α, so gilt $180° < \alpha + \beta$. Aber $\alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck), also Widerspruch $180° < \alpha + \beta < 180°$. Der Fall 2 tritt also nie ein (falls $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$).

Behauptung 2: Aus $\alpha < \beta$ folgt $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$.
Wir nehmen an, dass $\alpha < \beta$ gilt. Wenn $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$ nicht gilt, also $\sin(\beta) \leq \sin(\alpha)$ gilt, folgt aus der bereits bewiesenen Behauptung 1, dass $\beta \leq \alpha$ gilt. Dies widerspricht unserer Annahme $\alpha < \beta$. Also muss $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$ gelten. □

Beispiel 18.5.7. Berechnen Sie alle fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks ABC mit $\alpha = 25°$, $a = 4$, $b = 6$.

Typ der Dreiecksberechnung: ✎ssw = Seite-Seite-Winkel (d. h. zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel bekannt)

✎Skizze anfertigen.

- Sinussatz:
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a}$$
Also $\beta_1 = \arcsin\left(\frac{b\sin(\alpha)}{a}\right) \approx 39.3$ oder $\beta_2 = 180° - \arcsin\left(\frac{b\sin(\alpha)}{a}\right) \approx 140.7$.
Also $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 115.7$ oder $\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 14.3$.
Nochmal Sinussatz:
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma)$$
Also $c_1 = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma_1) \approx 8.5$ oder Also $c_2 = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma_2) \approx 2.34$
- Konstruktion:

Zusatz: Diskussion der Lösbarkeit in Abhängigkeit von a (bei fixiertem α und b wie oben):✎

- Ist $a < b\sin(\alpha)$, so keine Lösung/kein Dreieck
- Ist $a = b\sin(\alpha)$, so genau eine Lösung
- Ist $b\sin(\alpha) < a < b$, so genau zwei Lösungen
- Ist $a = b$, so genau eine Lösung (oder zwei, wenn entartetes Dreieck mitgezählt)
- Ist $b < a$, so genau eine Lösung

Aufgabe A17 Berechnen Sie jeweils die fehlenden Winkel und Seitenlängen des Dreiecks ABC aus den angegebenen Werten.

(a) $b = 5.33$, $\alpha = 68.4°$, $\gamma = 35.3°$
(b) $b = 23.2$, $c = 36.7$, $\beta = 36.4°$
(c) $a = 7$, $b = 1$, $\beta = 10°$
(d) ~~$a = 4$, $b = 3$, $\beta = 30°$ (Kommentar?)~~
$a = 4$, $b = 2$, $\beta = 30°$ (Kommentar?)

18.5.8. Noch offen ist die Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel (sws) bzs. aus drei Seiten (sss). Diese geht am einfachsten mit dem Kosinussatz.

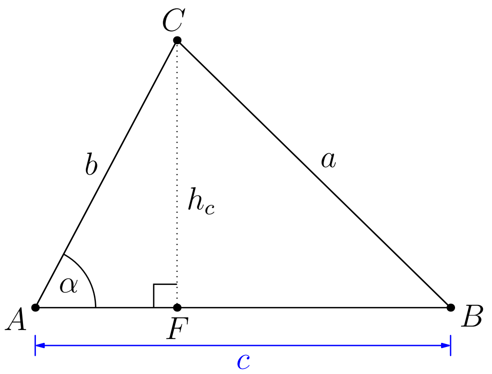
Satz 18.5.9 Kosinussatz

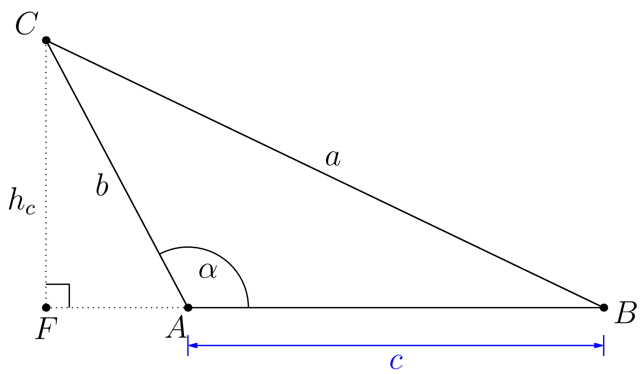
In jedem Dreieck ABC gelten ✎

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)\\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)
\end{aligned}
$$

18.5.10. Der Kosinussatz gilt für allgemeine Dreiecke. Im Spezialfall, dass das Dreieck rechtwinklig ist, spezialisiert diejenige der drei Gleichungen, in denen $\cos(90°) = 0$ vorkommt, zum Satz des Pythagoras. Mit anderen Worten: Der Kosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras.

Beweis. Wir zeigen die erste der drei Identitäten; die anderen beiden folgen dann per Umbenennung der Seiten und Winkel. Sei h_c die Höhe über c mit Fusspunkt F. Wir müssen im Beweis kurzzeitig zwischen den beiden Fällen unterscheiden, dass der Winkel α spitz oder stumpf ist.





Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck FBC liefert ✎

$$a^2 = h_c^2 + \overline{BF}^2$$

Wir berechnen zunächst h_c und $\overline{BF}$.

$\boxed{\text{Fall 1: } 0° \leq \alpha \leq 90°\text{:}}$

SOH und CAH im rechtwinkligen Dreieck AFC liefern ✎

$$
\begin{aligned}
h_c &= b\sin(\alpha)\\
\overline{BF} &= c - \overline{AF}\\
&= c - b\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Fall 2: } 90° \leq \alpha \leq 180°\text{:}}$

SOH und CAH im rechtwinkligen Dreieck ACF und trigonometrische Identitäten liefern ✎

$$
\begin{aligned}
h_c &= b\sin(180° - \alpha) = b\sin(\alpha)\\
\overline{BF} &= c + \overline{AF} = c + b\cos(180° - \alpha)\\
&= c - b\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

✎In beiden Fällen erhält man **denselben Ausdruck** für h_c bzw. $\overline{BF}$.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + \overline{BF}^2\\
&= (b\sin(\alpha))^2 + (c - b\cos(\alpha))^2\\
&= b^2\sin^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha)\\
&= b^2(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$
□

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Beispiel 18.5.11. Berechnen Sie alle fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks ABC mit $a = 4$, $b = 5$, $c = 7.5$. Typ: ✎SSS

✎Alle Seiten bekannt. Alle Winkel zu berechnen. (Skizze wohl unnötig).

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
\implies \quad 2bc\cos(\alpha) &= b^2 + c^2 - a^2 \\
\implies \quad \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
\implies \quad \alpha &= \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx 29.541°
\end{aligned}
$$

Analog (oder Schüler machen lassen):

$$
\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx 38.048°
$$

$$
\gamma = 180° - \alpha - \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \approx 112.411°
$$

18.5.12. Der Arcus-Kosinus arccos liefert Winkel im Intervall $[0°, 180°]$.

Dies ist vorteilhaft bei Dreiecksberechnungen, denn Winkel von Dreiecken liegen stets in diesem Intervall.

(Beim Sinussatz-Beispiel 18.5.7 mussten wir den zweiten Winkel «von Hand» finden, denn der Arcus-Sinus liefert Winkel im Intervall $[-90°, 90°]$.)

Beispiel 18.5.13. Berechnen Sie alle fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks ABC mit $a = 6$, $b = 8$, $\gamma = 70°$. Typ: ✎SWS

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \\
\implies \quad c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)} \approx 8.19549 \\
\beta &= \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx 66.531° \\
\alpha &= 180° - \beta - \gamma \approx 43.469°
\end{aligned}
$$

Zusatz: Diskussion der Länge von c in Abhängigkeit von γ (für fixiertes a und b):✎Skizze:

- Ist $\gamma = 90°$, so $\cos(\gamma) = 0$ und somit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, rechtwinkliges Dreieck
- Ist $\gamma < 90°$, so $\cos(\gamma) > 0$ und somit $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)} < \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Ist $\gamma > 90°$, so $\cos(\gamma) < 0$ und somit $c > \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aufgabe A18 Berechnen Sie jeweils die fehlenden Winkel und Seitenlängen des Dreiecks ABC aus den angegebenen Werten.

(a) $a = 67.4$, $b = 49.8$, $c = 77.6$
(b) $b = 169$, $c = 409$, $\alpha = 117.7°$,

Aufgabe A19 Beweisen Sie: In jedem Parallelogramm stimmt die Summe der Quadrate der vier Seiten mit der Summe der Quadrate der Diagonalen überein.

Hinweise: Skizze des Parallelogramms inklusive Diagonalen erstellen. Welche Gleichung ist zu zeigen?

Statt mit dem Kosinussatz kann man dies auch mit Vektorgeometrie und dem Skalarprodukt zeigen.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Sinus- und Kosinussatz gelten für **beliebige** Dreiecke.
Der Sinussatz eignet sich besonders gut zur Berechnung der Seiten eines Dreiecks, wenn zwei (und damit drei) Winkel und eine Seite bekannt sind.
Der Kosinussatz eignet sich besonders gut zur Berechnung der Seiten eines Dreiecks, wenn mindestens zwei Seiten bekannt sind (und die dritte Seite oder ein Winkel).
Gute Empfehlung (?): Falls nur ein Winkel bekannt, so Kosinussatz! (Beachte: Arcuskosinus liefert automatisch den richtigen Wert.)

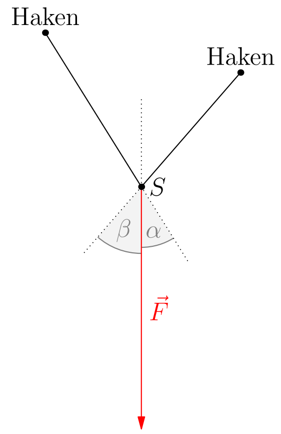
18.6 Anwendungen von Sinus- und Kosinussatz

Aufgabe A20

(Vektordiagramm; Kräfte bei einem Sturz beim Klettern)

Bei einer *Ausgleichsverankerung* im Fels wird die Sturzkraft auf den Sicherungspunkt S auf zwei Felshaken verteilt.
Welche Kräfte F_1 und F_2 erfahren die beiden Felshaken bei einem Sturz mit $F = 8\,\text{kN}$ (maximal möglicher Fangstoss) in der abgebildeten Sitation mit $\alpha = 32°$ und $\beta = 41°$?

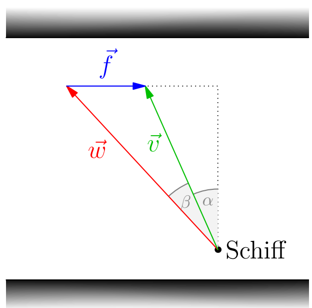
Bemerkung: Die Kraft $\vec{F}$ ist ein Vektor (hat also eine Länge und Richtung). Die Länge $|\vec{F}|$ dieses Vektors schreibt man üblicherweise als F.



Aufgabe A21

(Vektordiagramm)

Eine Fähre möchte einen Fluss mit der Geschwindigkeit $v = 8\,\text{m/s}$ (bezüglich des Ufers) und einem Kurswinkel $\alpha = 20°$ überqueren. Der Fluss hat die Strömungsgeschwindigkeit $f = 3\,\text{m/s}$.
Welche Geschwindigkeit w (bezüglich des Wassers) und welchen Vorhaltewinkel β (bezüglich der gewünschten Fahrtrichtung) muss der Steuermann wählen?
(Man nehme hierbei vereinfacht an, dass der Fluss über die ganze Breite mit derselben Geschwindigkeit fliesst. Die gestrichelten Linien im Bild sind parallel bzw. senkrecht zum Flussufer.)

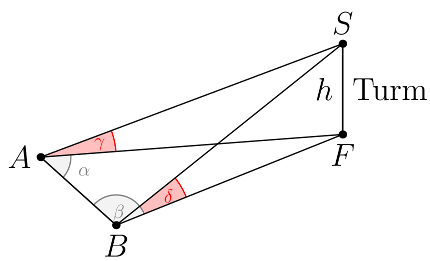


Bemerkung: Ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe bezeichnet v die Länge $|\vec{v}|$ des Vektors $\vec{v}$, und analog für die anderen Geschwindigkeit(svektor)en.

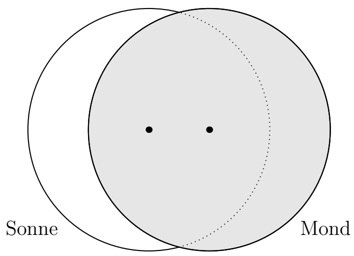
Aufgabe A22

Höhenmessung aus der Ferne

Von einer horizontalen Linie AB der Länge $\overline{AB} = 35\,\text{m}$ werden die Winkel $\alpha = 85°$ und $\beta = 64°$ zum Fusspunkt F eines Turms bzw. die Höhenwinkel $\gamma = 42°$ und $\delta = 39.1°$ (zur Kontrolle) zur Spitze S eines Turms gemessen. Das Dreieck ABF ist horizontal und senkrecht zur Turmhöhe $h = \overline{FS}$.
Berechnen Sie die Höhe h des Turms.



Aufgabe A23 Partielle Sonnenfinsternis

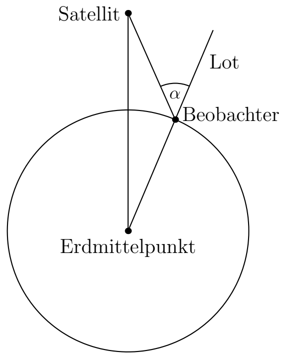


Von der Erde aus erscheinen Sonnen- und Mond als gleich grosse Scheibe.
Bei einer Sonnenfinsternis bedeckt die Mondscheibe die Sonnenscheibe so, dass 75% des horizontalen Sonnendurchmessers von der Mondscheibe verdeckt sind, vgl. Skizze. Die Mittelpunkte der Scheiben sind eingezeichnet.
Welcher Prozentsatz der Sonnenscheibenfläche wird von der Mondscheibe bedeckt?

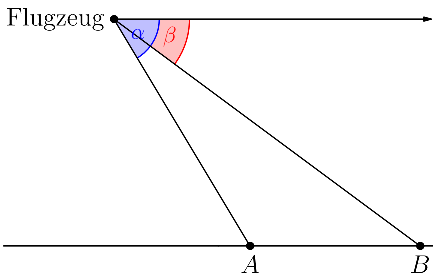
18.7 Übungen zu Sinus- und Kosinussatz

Aufgabe A24

Ein Satellit, der sich 10^6m über der Erdoberfläche befindet, wird von einem Beobachter aus unter einem Zenitwinkel von $\alpha = 55°$ gesehen (Zenitwinkel = Winkel zwischen dem Lot und der Verbindungsstrecke Satellit-Beobachter, siehe Abbildung).
Wie weit ist er zu dieser Zeit vom Beobachter entfernt? (Erdradius $R = 6.37 \cdot 10^6$m)



Aufgabe A25



Aus einem in konstanter Höhe fliegenden Flugzeug erblickt man die gleich hoch gelegenen Orte A und B in derselben Richtung unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 43.1°$ und $\beta = 27.6°$ (siehe Zeichnung). Der Abstand der beiden Orte beträgt $\overline{AB} = 1350\,\text{m}$.
Wie hoch über A und B fliegt das Flugzeug? (Angabe als Formel in α, β und $\overline{AB}$ und als Zahl)

Aufgabe A26

Von einem Dreieck ABC sind $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$ bekannt.

In welchem Verhältnis wird seine Fläche durch die Winkelhalbierende w_γ geteilt?

Aufgabe A27

Berechnen Sie jeweils den Umkreisradius und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC aus den gegebenen Daten.

(a) $a = 5.5\,\text{cm}$, $\beta = 56°$, $\gamma = 52°$
(b) $a = b = 13\,\text{cm}$, $\gamma = 37°$

Aufgabe A28

In Beispiel 18.5.7 haben wir die folgende Aufgabe mit dem Sinussatz gelöst:

Berechnen Sie alle fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks ABC mit $\alpha = 25°$, $a = 4$, $b = 6$.

Lösen Sie dieselbe Aufgabe nun mit dem Kosinussatz (und ohne den Sinussatz).

Hinweis: Wenn Sie eine quadratische Gleichung lösen müssen, sind Sie vermutlich auf dem richtigen Weg. Wenn Sie nur die Lösung sehen wollen, aber nicht den Lösungsweg: siehe Beispiel 18.5.7.

Wie kann man die allgemeine «Diskussion der Lösbarkeit» am Ende von Beispiel 18.5.7 mit Kosinussatz und Mitternachtsformel erklären? Nehmen Sie dabei einfachheitshalber an, dass $0° < \alpha < 90°$ gilt.

Aufgabe A29

In einem Kreis mit Radius R ist eine Sehne der Länge s eingezeichnet. Wie gross sind die Peripheriewinkel über dieser Sehne?

Aufgabe A30

Wie folgt CAH (= «cosine equals adjacent divided by hypotenuse») aus dem Kosinussatz? Betrachten Sie (beispielsweise) ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 90°$.

Aufgabe A31

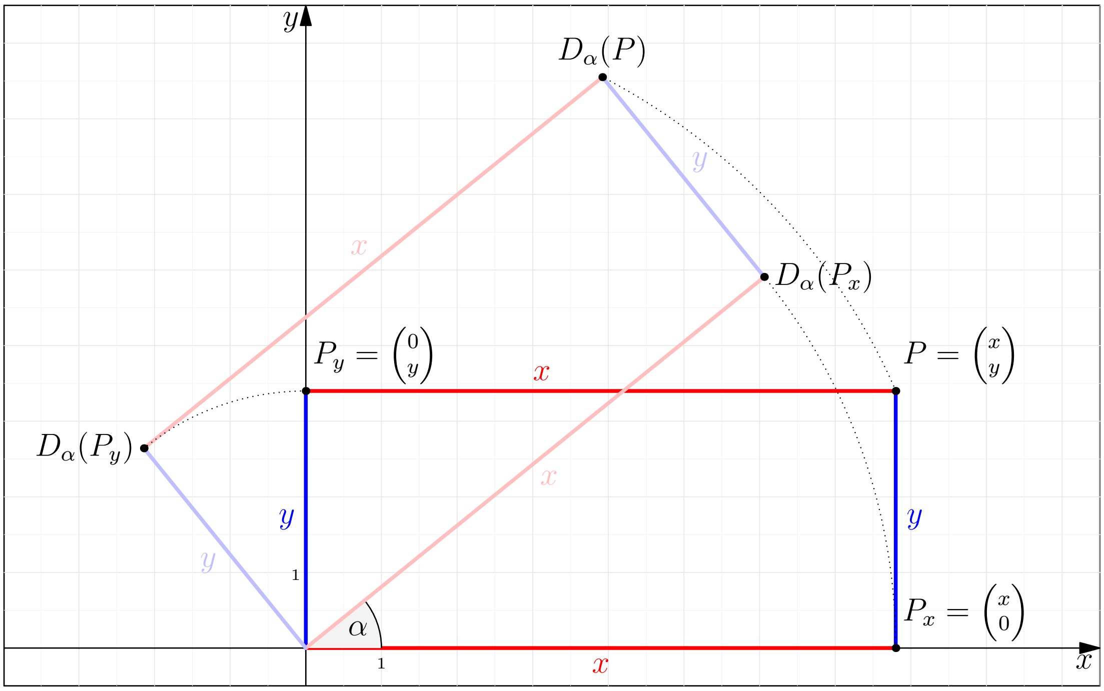
Der Sinussatz gilt für allgemeine Dreiecke. Welche (wohlbekannten) Aussagen liefert er, wenn das Dreieck rechtwinklig ist? Betrachten Sie den Fall, dass $\alpha = 90°$ gilt. (Skizze erstellen!)

(Einschub wegen des Themas «Transformationen von Kurven» im Schwerpunktfach.)

Aufgabe A32 Ermitteln Sie den Inhalt des nachfolgenden Merke 18.7.1 mit Hilfe der Zeichnung.

Hinweise:

- Die Koordinaten des gedrehten Punkte $D_\alpha(P)$ können durch x, y, $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ (und elementare Rechenoperationen) ausgedrückt werden.
- Überlegen Sie sich zunächst, welche Koordinaten $D_\alpha(P_x)$ und $D_\alpha(P_y)$ haben.



Wir schreiben hier etwas nachlässig Punkte als Vektoren.

Merke 18.7.1 Drehung eines Punktes um den Ursprung um einen Winkel

Sei α ein beliebiger Winkel. Wir bezeichnen mit D_α die Drehung um den Ursprung des Koordinatensystems um den Winkel α. Die Drehung eines Punktes Q wird als $D_\alpha(Q)$ geschrieben.
Die Drehung eines beliebigen Punktes $P = \binom{x}{y}$ um α hat die folgenden Koordinaten:

$$D_\alpha(P) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix zu } \alpha} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

18.7.2. Die Formel für den gedrehten Punkt kann ich nicht direkt auswendig. Was man aber langfristig auswendig können sollte (insbesondere als Physiker), ist die **Drehmatrix zu** α und die Definition der **Matrix-Vektor-Multiplikation** (oder allgemeiner der Multiplikation von Matrizen).

Definition 18.7.3 Matrix-Vektor-Multiplikation

Die Multiplikation einer 2×2-Matrix mit einem 2-Vektor ist wie folgt definiert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\text{eventuell} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Merkhilfe: «erste Zeile mal Vektor», «zweite Zeile mal Vektor»:

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & & y \\ a & b & ax+by \\ c & d & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & x \\ & & y \\ a & b & \\ c & d & cx+dy \end{array}$$

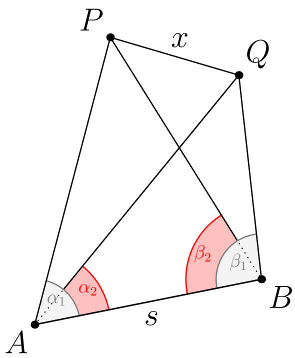
Aufgabe A33

Die Winkelhalbierende eines Dreiecks ist 4.8 cm lang. Sie teilt die dem geteilten Winkel gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte der Längen 6 cm und 4 cm.

Bestimmen Sie die Längen der beiden übrigen Seiten.

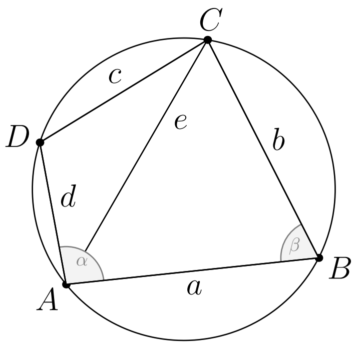
Aufgabe A34

Im ebenen Gelände wurde $s = \overline{AB} = 92\,\mathrm{m}$ vermessen (siehe Zeichnung). Die Punkte P und Q sind unzugänglich, so dass $x = \overline{PQ}$ nicht direkt gemessen werden kann. Um x zu bestimmen, wurden die Winkel $\alpha_1 = 61°$, $\alpha_2 = 36°$, $\beta_1 = 94.4°$ und $\beta_2 = 65.5°$ gemessen.
Bestimmen Sie x.



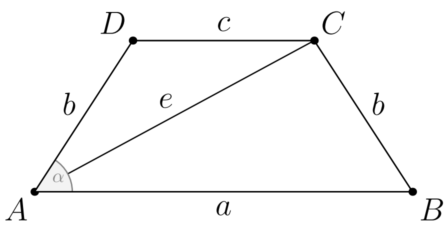
Aufgabe A35

Beschriftung d in Zeichnung war falsch. Ausserdem den Winkel β in Zeichnung ergänzt.
Ein Sehnenviereck $ABCD$ hat die Seiten $a = \overline{AB} = 5$ und $c = \overline{CD} = 4.3$, die Diagonale $e = \overline{AC} = 5.4$ und den Winkel $\beta = 94°$ bei B.
Berechnen Sie die Seiten $b = \overline{BC}$ und $d = \overline{AD}$ und den Winkel α bei A.



Aufgabe A36

In einem gleichschenkligen Trapez sind die Parallelseiten $a = 5$, $c = 3.25$ und die Diagonale $e = 4.5$ gegeben.
Berechnen Sie den Schenkel b und den Winkel α formal und numerisch.



Aufgabe A37

Ein Flugzeug überfliegt die Schweiz mit 600 km/h Eigengeschwindigkeit (in Bezug auf die umgebende Luft) in exakter Ostrichtung. In seiner Flughöhe weht ein starker Wind von genau 150 km/h aus Südwest.

Bestimmen Sie den Kurs, den der Pilot für den 350 km langen Überflug wählen muss, und die Zeit, die das Flugzeug für den Überflug benötigt.

Aufgabe A38

(a) Überzeugen Sie sich, dass die Kreissegmentflächenformel in Merke 18.7.4 für die Winkel $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$ und allgemeines r die richtigen Ergebnisse liefert (Handskizzen).

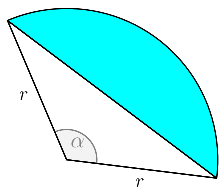
(b) Beweisen Sie Kreissegmentflächenformel. (Sie dürfen sich auf den Fall $0 \leq \alpha \leq \pi$ beschränken.)
Hinweis: Die Fläche für den Kreissektor sollten Sie kennen. Verwenden Sie die trigonometrische Flächenformel 18.3.2.

Merke 18.7.4 Kreissegmentflächenformel

Ein **Kreissegment** ist diejenige Teilfläche eines Kreises, die von einer Sehne und einem (der beiden) Kreisbögen über dieser Sehne begrenzt wird.
Die Fläche F des Kreissegments zum **Zentriwinkel** α in einem Kreis mit Radius r beträgt

$$F_{\text{Kreissegment}} = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

Der Winkel α ist hier in Radiant einzusetzen.

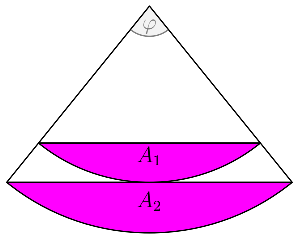


Aufgabe A39

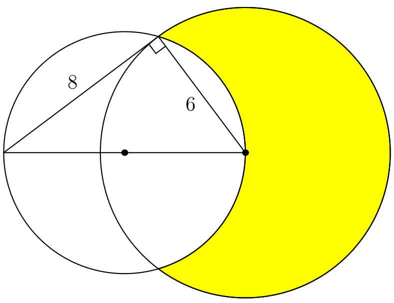
Gegeben ist ein Kreissektor mit Zentriwinkel φ (siehe Zeichnung).
Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{A_1}{A_2}$ der beiden Segmentflächen für allgemeines φ auf zwei Arten:

(a) mit Hilfe der Segmentflächenformel;

(b) mit Hilfe von Ähnlichkeit.

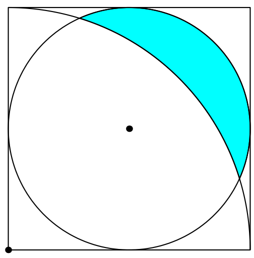


Aufgabe A40



(a) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des gelben Gebiets in der linken Zeichnung.

(b) In der rechten Zeichnung ist ein Quadrat der Seitenlänge 1 dargestellt. Diesem ist ein Kreis einbeschrieben. Ausserdem ist ein Viertelkreis um die linke untere Quadratecke mit Radius 1 eingezeichnet.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des türkisen Gebiets.



18.8 Polarkoordinaten

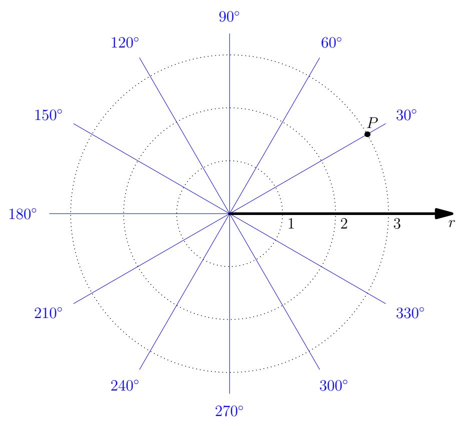
Definition 18.8.1 Polarkoordinaten

Ein **Polarkoordinatensystem** der Ebene besteht aus einem Punkt, dem sogenannten **Pol**, einem von diesem Pol ausgehenden Strahl, der sogenannten **Polarachse**, und der Festlegung einer Strecke der Länge 1 (meist gegeben durch entsprechende Markierungen auf der Polarachse).

Die **Polarkoordinaten** eines Punktes P sind dann wie folgt definiert.

- Die **radiale Koordinate** r_P von P ist der Abstand von P zum Pol.
- Die **Winkelkoordinate** φ_P von P ist der Winkel zwischen der Polarachse und dem Strahl vom Pol durch P.

  Meist wählt man φ_P so, dass $0° \leq \varphi_P < 360°$ gilt. Eine Ebenso gute Wahl ist $-180° < \varphi_P \leq 180°$.
  Die Winkelkoordinate des Pols wird meist als $0°$ definiert.



Schreibweise:

$$P = (r_P, \varphi_P) = (r, \varphi)$$

Statt *radialer Koordinate* sagt man auch **Radialkoordinate** oder **Radius** oder **r-Koordinate**.
Statt *Winkelkoordinate* sagt man auch **Winkel** oder **Argument** oder **φ-Koordinate**.
Statt von *Polarkoordinaten* spricht man auch von **Kreiskoordinaten**.

Beispiel 18.8.2. Der Punkt P in der Zeichnung hat die Polarkoordinaten $P = (r_P, \varphi_P) = (3, 30°) = (3, \frac{\pi}{6})$.

Beispiel/Motivation: In einer Stadt mit «quadratischem Stadtplan» wie Mannheim sind kartesische Koordinaten, in einer Stadt mit «strahlen- und kreisförmigem Stadtplan» wie Karlsruhe sind Kreiskoordinaten = Polarkoordinaten die naheliegende Wahl.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

18.8.3. Jedes Paar (r, φ) aus einer reellen Zahl $r \geq 0$ und einem Winkel φ legt einen Punkt der Zeichenebene fest.

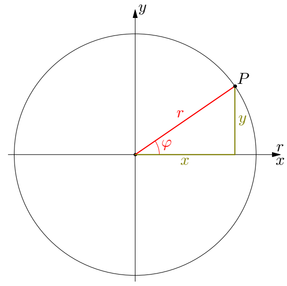
Wenn man sich darauf einigt, dass die Winkelkoordinate φ im Intervall $[0°, 360°)$ (oder im Intervall $(-180°, 180°]$) liegen muss und dass die Winkelkoordinate des Pols $0°$ ist, so hat jeder Punkt der Zeichenebene eindeutige Darstellung durch Polarkoordinaten.

Wenn man beliebige Winkel (negative Winkel, Winkel grösser als $360°$) zulässt, ist die Winkelkoordinate eines Punktes nur bis auf ein Vielfaches von $360° = 2\pi$ eindeutig.

18.8.4. Werden sowohl ein kartesisches Koordinatensystem als auch ein Polarkoordinatensystem verwendet, so dient in der Regel der Ursprung als Pol und die positive x-Achse als Polarachse (siehe Zeichnung).

Dann gelten für die kartesischen Koordinaten (x, y) bzw. die Polarkoordinaten (r, φ) eines beliebigen Punktes P die folgenden beiden Gleichungen.

$$\cos(\varphi) = ✎\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r} \qquad \sin(\varphi) = ✎\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r}$$



Aufgabe A41 (ohne Taschenrechner)

(a) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der folgenden, durch Polarkoordinaten gegebenen Punkte.

$$A = (1, 30°) \qquad B = (2, -30°) \qquad C = (3, 150°) \qquad D = (4, 1080°)$$

(b) Was ist in Merke 18.8.5 einzutragen? (Bleistift verwenden)
Testen Sie Ihre Formel mit den obigen vier Punkten.

Aufgabe A42 (ohne Taschenrechner)

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der folgenden, durch kartesische Koordinaten gegebenen Punkte.

$$P = (1, \sqrt{3}) \qquad Q = (-1, \sqrt{3}) \qquad R = (1, -\sqrt{3}) \qquad S = (-1, -\sqrt{3})$$

(b) Was ist in Merke 18.8.6 einzutragen? (Bleistift verwenden)
Testen Sie Ihre Formel mit den obigen vier Punkten.

Merke 18.8.5 Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesischen Koordinaten

Sind r und φ die Polarkoordinaten eines Punktes, so sind seine kartesischen Koordinaten

$$x = ✎ r\cos(\varphi) \qquad y = ✎ r\sin(\varphi)$$

Merke 18.8.6 Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

Sind x und y die kartesischen Koordinaten eines Punktes, so sind seine Polarkoordinaten

$$r = ✎\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = ✎\begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{wenn } y \geq 0 \text{ und } r > 0; \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & \text{wenn } y < 0; \\ 0° & \text{wenn } r = 0. \end{cases}$$

Damit die rechte Formel anwendbar ist, ist zuerst r mit der linken Formel zu berechnen. Im mittleren Fall ist φ negativ. Wer einen Winkel $\geq 0°$ bevorzugt, addiert $360° = 2\pi$.

Aufgabe A43 Gegeben sind zwei Punkte $A = (2, 20°)$ und $B = (3, 35°)$ in Polarkoordinaten. Berechne den Abstand $\overline{AB}$ auf zwei Arten: (1) durch Umrechnung in kartesische Koordinaten; (2) direkt mit dem Kosinussatz.

Aufgabe A44 Gegeben sind zwei Punkte $A = (2, 3)$ und $B = (3, 5)$ in kartesischen Koordinaten. Berechne den Winkel $\sphericalangle AOB$ auf zwei Arten: (1) durch Umrechnung in Polarkoordinaten; (2) mit dem Kosinussatz.

Aufgabe A45 Ein Punkt P hat die kartesischen Koordinaten (x, y) und die Polarkoordinaten (r, φ). Begründe, warum $\tan(\frac{\varphi}{2}) = \frac{y}{r+x}$ gilt. Hinweis: Zentriwinkelsatz.

18.9 Nachtrag: Kosinus, Sinus, Tangens: Einer von dreien bekannt, restliche berechnen

Aufgabe A46 Die folgenden beiden Formeln sind hoffentlich wohlbekannt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \text{trigonometrischer Pythagoras}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

(a) Wenn $\cos(\alpha)$ bekannt ist: Wie kann man $\sin(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ ausrechnen (eventuell bis auf Vorzeichen)? Gesucht sind also
- ein Ausdruck für $\sin(\alpha)$ in Abhängigkeit von $\cos(\alpha)$;
- ein Ausdruck für $\tan(\alpha)$ in Abhängigkeit von $\cos(\alpha)$;

(b) Wenn $\sin(\alpha)$ bekannt ist: Wie kann man $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ ausrechnen (eventuell bis auf Vorzeichen)?

(c) Wenn $\tan(\alpha)$ bekannt ist: Wie kann man $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ ausrechnen (eventuell bis auf Vorzeichen)?

18.10 Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Satz 18.10.1 Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Für alle Winkel α und β gelten:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Aufgabe A47 Plausibitätstest: Kann das obige Theorem stimmen?

Hoffentlich kennst du die Werte der Sinus- und Kosinusfunktion für 30° und 45° und 60° und 120°.

Prüfe ohne Taschenrechner, ob die beiden Formeln in Satz 18.10.1 in den folgenden Fällen gelten:

(a) $\alpha = 45°$ und $\beta = 45°$; vorrechnen

(b) $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$;

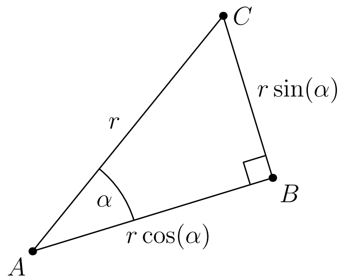
(c) $\alpha = 60°$ und $\beta = 60°$.

(d) $\alpha = 30°$ und $\beta = -60°$;

18.10.2. Der Inhalt des folgenden Merke 18.10.3 ist allgemein nützlich und wird insbesondere im Beweis der Additionsformeln mehrfach verwendet.

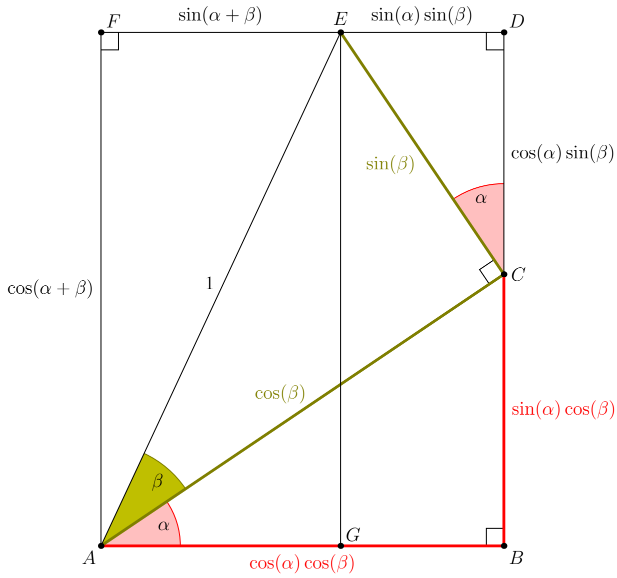
Merke 18.10.3

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse r und ein anliegender Winkel α bekannt, so haben die Katheten die aus der Skizze hervorgehenden Längen.



Der Grund ist sehr einfach: Entweder SOH-CAH(-TOA) oder: Das gezeichnete Dreieck geht aus dem ähnlichen Dreieck mit Hypotenuse 1 durch eine Streckung mit Streckfaktor r hervor. Letzteres hat laut Definition von Sinus und Kosinus die Kathetenlängen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$.

Beweis. Wir betrachten die folgende Zeichnung. Dabei ist es wichtig zu verstehen, wie diese Zeichnung entstanden ist:



(1) Zeichne zuerst das rechtwinklige Dreieck AGE mit Hypotenuse $[AE]$ der Länge 1 und Winkel $\alpha+\beta$ bei A.
(2) Zeichne dann das rechtwinklige Dreieck ACE mit Winkel β bei A (Thaleskreis über $[AE]$, Winkel β abtragen).
(3) Zeichne dann das rechtwinklige Dreieck ABC mit Winkel α bei A (Thaleskreis über $[AC]$, Winkel α verwenden).
(4) Ergänze die beiden (rechtwinkligen) Dreiecke CDE und AEF in offensichtlicher Weise (Katheten parallel zu $[AG]$ bzw. $[GE]$).

Wir können alle Strecken in der Skizze aus α und β berechnen:

- rechtwinkliges Dreieck AGE (und Rechtecke): ✎

$$\overline{AF} = \overline{GE} = \sin(\alpha+\beta)$$
$$\overline{EF} = \overline{AG} = \cos(\alpha+\beta)$$

- rechtwinkliges Dreieck ACE: ✎

$$\overline{CE} = \sin(\beta)$$
$$\overline{AC} = \cos(\beta)$$

- rechtwinkliges Dreieck ABC: ✎

$$\overline{BC} = \cos(\beta)\sin(\alpha)$$
$$\overline{AB} = \cos(\beta)\cos(\alpha)$$

- rechtwinkliges Dreieck CDE: ✎

$$\overline{DE} = \sin(\beta)\sin(\alpha)$$
$$\overline{CD} = \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Daraus folgen ✎

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{GE} = \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{AG} = \overline{AB} - \overline{BG} = \overline{AB} - \overline{DE} = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

Dieser Beweis zeigt strenggenommen nur den Fall, dass $\alpha \geq 0°$ und $\beta \geq 0°$ und $\alpha+\beta \leq 90°$ gelten. Die anderen Fälle könnte man sicherlich mit weiteren ähnlichen Bildern beweisen. Wir verzichten darauf aus zwei Gründen: (1) In Aufgabe A49 wird ein allgemeingültiger Beweis erklärt, der mit Drehungen arbeitet. (2) Der Identitätssatz über holomorphe Funktionen aus der Funktionentheorie zeigt, dass die allgemeine Aussage bereits aus der soeben bewiesenen Aussage folgt. □

⚒ **Aufgabe A48** Anwendungen der Additionstheoreme/Additionsformeln

(a) Hoffentlich kennst du die genauen Sinus- und Kosinuswerte von 30° und 45°.
Zeige mit Hilfe der Additionsformeln, dass

$$\sin(75°) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$\cos(75°) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

(b) Folgere, dass

$$\tan(75°) = 2+\sqrt{3}$$

Hinweis: Wie kann man den Tangens aus Sinus und Kosinus berechnen?

(c) Folgere aus den Additionsformeln die «Subtraktionsformeln»

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Hinweis: Verwende $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ und $\cos(-\beta) = \ldots$ und $\sin(-\beta) = \ldots$.

(d) Folgere aus den Additionsformeln die «Doppelwinkelformeln»

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Hinweis: $2\alpha = \alpha + \alpha$

(e) Erkläre, warum sich die Doppelwinkelformel für den Kosinus auch wie folgt schreiben lässt. (Hinweis: Trigonometrischer Pythagoras)

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

Folgere daraus mit der Substitution (= Ersetzung) $\alpha = \frac{1}{2}x$ die Halbwinkelformel für den Kosinus

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

Bemerkung: Damit könnte man beispielsweise aus $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sukzessive $\cos(15°)$, $\cos(7.5°)$, $\cos(3.75°)$ etc. berechnen.

(f) Erkläre, warum sich die Doppelwinkelformel für den Kosinus auch wie folgt schreiben lässt.

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

Folgere daraus mit einer geeigneten Substitution die Halbwinkelformel für den Sinus

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

(g) ⚙ Folgere aus den Additionsformeln für Sinus und Kosinus die folgende Additionsformel für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Hinweis: Verwende zuerst $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, dann die Additionsformeln für Sinus und Kosinus, erweitere den Bruch mit $\frac{1}{\cos(x)\cos(y)}$ und verwende dann wieder $\frac{\sin}{\cos} = \tan$.

Bemerkung: Es gibt noch viele weitere ähnliche Formeln, siehe etwa Wikipedia: Formelsammlung Trigonometrie.

Aufgabe A49 Alternativbeweis der Additionsformeln mit Hilfe von Drehungen

(a) Zeichne in einer Handskizze ein
- den Punkt P_α mit Polarkoordinaten $(1, \alpha)$;
- den Punkt $P_{\alpha+\beta}$ mit Polarkoordinaten $(1, \alpha + \beta)$.

(b) Welche kartesischen Koordinaten hat P_α?

(c) Welche kartesischen Koordinaten hat $P_{\alpha+\beta}$?

(d) Wenn D_β die Drehung um den Ursprung um den Winkel β ist, warum gilt

$$D_\beta(P_\alpha) = P_{\alpha+\beta}$$

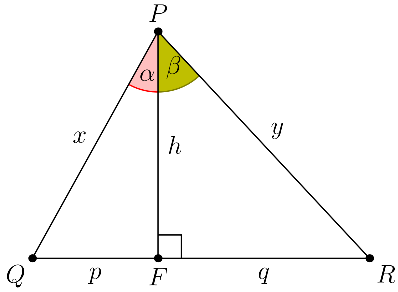
(e) Folgere aus dieser Gleichung mit Hilfe der Drehmatrix $D_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ die Additionstheoreme.

Hinweis: Merke 18.7.1 oder Definition 18.7.3 auf Seite 21.

Bemerkung: Dieser Beweis hat den Vorteil, dass er für **alle** Winkel α und β funktioniert.

Aufgabe A50 Alternativbeweis der Additionsformeln

Seien zwei Winkel α und β gegeben. Über einer (vertikal gezeichneten) Strecke $h = [PF]$ als Kathete errichte man links ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel α (bei P) und rechts ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel β (bei P), siehe Zeichnung.



(a) Beweise das Additionstheorem für die Sinusfunktion ausgehend von der offensichtlichen Gleichheit von Dreiecksflächen

$$A_{\triangle PQR} = A_{\triangle PQF} + A_{\triangle PFR}$$

Vorgehen:

- Alle Flächen durch die trigonometrische Flächenformel berechnen.
- Nun h einmal durch y und β ausdrücken, einmal durch x und α.
- Durch xy teilen.

(b) Beweise das Additionstheorem für die Kosinusfunktion mit Hilfe derselben Zeichnung.
Mögliches Vorgehen:

- Schreibe den Kosinussatz für das grosse Dreieck auf und Pythagoras für die beiden kleinen **rechtwinkligen** Dreiecke.

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= \dots \\ x^2 &= \dots \\ y^2 &= \dots\end{aligned}$$

- Ersetze in der ersten Gleichung x^2 und y^2 durch die rechten Seiten der beiden unteren Gleichungen. Löse die erhaltene Gleichung nach $\cos(\alpha+\beta)$ auf. Das Ergebnis sollte wie folgt lauten.

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{h}{x}\cdot\frac{h}{y} - \frac{p}{x}\cdot\frac{q}{y}$$

- Schreibe die vier Quotienten mit Hilfe von SOH-CAH(-TOA) um. Das Ergebnis ist das Additionstheorem des Kosinus.

Aufgabe A51 Summe zweier Sinusfunktionen, Summe zweier Kosinusfunktionen («Summen-Produkt-Formeln»)

Für alle Winkel α und β gelten die folgenden Identitäten (Summen-Produkt-Formeln):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)+\sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos(\alpha)+\cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Bemerkung: Mit dieser Formel kann man sogenannte Schwebungen in der Musik erklären (siehe hoffentlich später).

(a) Führe einen Plausibilitätscheck durch, ob die Identitäten stimmen können:

- Stimmen die Identitäten im Fall $\beta = \alpha$?
- Stimmen die Identitäten im Fall $\beta = -\alpha$?

(b) Beweise die erste Identität durch den folgenden Trick:

- Zeige zuerst, dass die folgenden beiden linken Gleichungen äquivalent zu den beiden rechten Gleichungen sind.

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad\qquad \alpha = x+y$$

$$y = \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad\qquad \beta = x-y$$

Hinweis: Gleichungen addieren bzw. subtrahieren.

- Beweise nun die erste Identität wie folgt:
  - Starte mit der linken Seite $\sin(\alpha)+\sin(\beta)$.
  - Ersetze $\alpha = x+y$ und $\beta = x-y$.
  - Verwende Additions- und Subtraktionsformel für den Sinus.
  - Ersetze zurück $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

(c) Beweise die zweite Identität in analoger Weise.

(d) Zeige, dass die beiden Identitäten im Fall $\beta = 0$ zu den Doppelwinkelformeln (A48.(d)) spezialisieren.

18.11 Wiederholung: Beseitigung von Quadratwurzeln im Nenner von Brüchen

Aufgabe A52

(Aufgabe eingefügt, da einige mit A48.(b) Probleme hatten bzw. recht lange gebraucht haben.)

Beseitige alle Quadratwurzeln im Nenner (durch Erweitern mit der dritten binomischen Formel). Beispiel:

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}+2}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}+2}{9-2} = \frac{3\sqrt{2}+2}{7} = \frac{2}{7}+\frac{3}{7}\sqrt{2}$$

Bemerkung: Statt die Musterlösung anzuschauen, kann man auch per Taschenrechner prüfen, ob auf beiden Seiten dasselbe Resultat herauskommt.

(a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3+5\sqrt{2}}$

(c) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$
Hinweis: Klammere $\sqrt{3}$ im Nenner aus und beseitige $\sqrt{3}$ aus dem Nenner.

(e) Für tapfere Umformer: $\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}}$
Hinweis: Erst $\sqrt{3}$ ausklammern und aus dem Nenner beseitigen. Dann $\sqrt{2}$ ausklammern und aus dem Nenner beseitigen.

18.12 Harmonische Schwingungen

Motivation: Mathematische Beschreibung eines Federpendels

18.12.1. Gesucht ist eine mathematische Beschreibung eines Federpendels (https://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel) bzw. genauer ein Ausdruck

$$y(t) = \dots$$

für die Höhe (= y-Koordinate) des Massestücks in Abhängigkeit von der Zeit t.

Video: https://www.youtube.com/watch?v=ZZiE8KbkTuw, zuerst nur das Federpendel beachten.

Definition 18.12.2 Schwingung, Periode, Frequenz

- Eine **Schwingung** (oder **Oszillation**) ist die wiederholte zeitliche Schwankung eines Systems.
- **Periode** T einer Schwingung (auch **Periodendauer** oder **Schwingungsdauer**): ✎

$$\begin{aligned} T = \text{Periode} &= \text{kleinste positive Zeit, nach der sich die Schwingung wiederholt} \\ &= \text{Länge einer «Einzelschwingung»} \end{aligned}$$

- **Frequenz** f einer Schwingung: ✎

$$f = \text{Frequenz} = \text{Anzahl der «Einzelschwingungen» pro Sekunde}$$

Frequenzen werden meist in der Einheit *Hertz* angegeben: ✎ $1\ \mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$

Beispiel 18.12.3. Der Kammerton a hat 440 Hz. Konkret bedeutet dies, dass die Saite einer Geige oder die Membran eines Lautsprechers beim Spielen dieses Tons 440 Mal pro Sekunde schwingt.
18.12.4. Messwerte im Federpendelvideo: Erste Schätzung ✎ $T = 8\,\mathrm{s}$

Genauer: Beobachte das System über längere Zeit:

$$T = \frac{\text{Beobachtungszeit}}{\text{Anzahl der «Einzelschwingungen» während der Beobachtungszeit}} = ✎ \frac{45\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}}{4} = \frac{40\,\mathrm{s}}{4} = 10\,\mathrm{s}$$

$$f = \frac{\text{Anzahl der «Einzelschwingungen» während der Beobachtungszeit}}{\text{Beobachtungszeit}} = ✎ \frac{4}{40\,\mathrm{s}} = \frac{1}{10\,\mathrm{s}} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{1}{10}\,\mathrm{Hz}$$

Merke 18.12.5

Periode und Frequenz sind Kehrwerte voneinander (= multiplikative Inverse voneinander): ✎

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{bzw. gleichbedeutend} \qquad T = \frac{1}{f}$$

18.12.6 (Vom Federpendel zur Kreisbewegung)**.** Was zeigt das Video?

- Die Höhe $y(t)$ des Massestücks stimmt stets mit der Höhe des markierten Punktes auf der gleichmässig rotierenden Scheibe überein.

(Im Video ist die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage genau der Radius der Scheibe. Die konstante Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe wurde vor der Aufnahme des Videos geeignet gewählt.)

Mit anderen Worten: $y(t)$ ist die y-Koordinate eines sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit auf einem Kreis bewegenden Punktes.

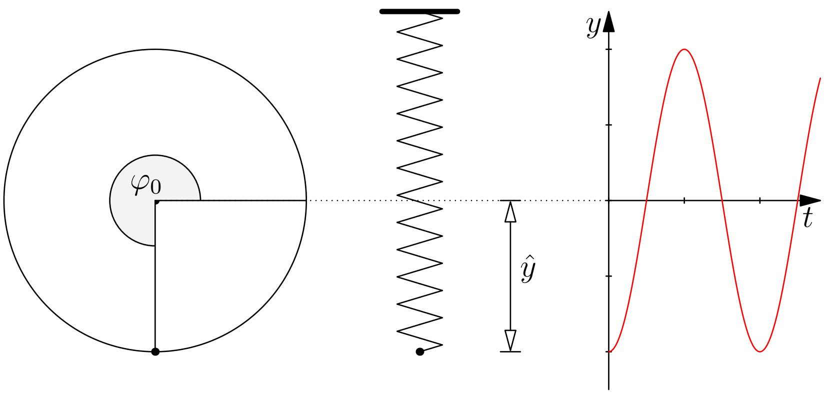
Folgerung: ✎Die Höhe $y(t)$ kann durch eine Sinusfunktion beschrieben werden.

Man sagt: Die Schwingung des Federpendels ist eine ✎
Sinusschwingung = harmonische Schwingung.

Eventuell 1:51 in https://www.youtube.com/watch?v=GqkND_7Kcc8 (evtl. als Vorbereitung zur nachfolgenden Skizze auch 4:36).

Definition 18.12.7 Amplitude, Phase

- Die **Amplitude** $\hat{y}$ einer harmonischen Schwingung ist die Höhe der Ausschläge über der Mittellinie nach oben und unten (= Radius des Kreises).
- Die **Phase** φ_0 einer harmonischen Schwingung ist die Verschiebung in der Zeit (= Startposition im Kreis als Winkel zur Zeit $t = 0$).
  Statt Phase sagt man auch **Nullphase**.



18.12.8 (Herleitung der Formel für $y(t)$)**.**

Hoffentlich ist mittlerweile klar, das die Höhe $y(t)$ zur Zeit t des Massenstücks am Federpendel durch eine Funktion der folgenden Form beschrieben wird. ✎

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin \left(\underbrace{\text{Winkel in Abhängigkeit von der Zeit } t}_{\varphi(t)} \right)$$

Da sich die Kreisscheibe mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit $\frac{360°}{T} = \frac{2\pi}{T}$ dreht und zur Zeit $t = 0$ den Wert φ_0 hat, ist ✎$\varphi(t)$ eine Gerade mit (zuerst rechts den Graphen von φ einzeichnen in t-φ-Koordinatensystem mit φ_0 auf der φ-Achse und T-$2\pi = 360°$-Steigungsdreieck)

- φ-Achsenabschnitt φ_0 und
- Steigung = Rotationsgeschwindigkeit = $\frac{2\pi}{T}$,

d. h.

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t + \varphi_0 = 2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0$$

Folglich ist die gesuchte Höhenfunktion ✎

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\varphi(t)) = \hat{y} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0)$$

Bis jetzt haben wir angenommen, dass unser Massepunkt um seine Ruhelage $y = 0$ schwingt. Wenn man die y-Achse anders wählt, muss man noch einen sogenannten **Offset** q addieren und erhält

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0) + q$$

18.12.9 (Test unserer Formel gegen das Video)**.** Frequenz $f = \frac{1}{10}$ Hz, Phase $\varphi_0 = 270° = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$, Amplitude (geschätzt) $\hat{y} = 8$ cm. Es ergibt sich also die Formel

$$y(t) = 8 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{10} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$$

Man zeichne diesen Graphen zur Kontrolle beispielsweise mit GeoGebra Classic (oder per https://www.geogebra.org/classic/u89nmhhm).

18.12.10. Wir haben hier ein idealisiertes Federpendel beschrieben, das unendlich lange mit derselben Amplitude und Frequenz schwingt.

In der Realität ist die Schwingung eines Federpendels gedämpft durch Reibungskräfte (Luftwiderstand, «innere Reibung» der Feder). Dass Massestück pendelt sich mit der Zeit bei der Ruhelage in der Mitte ein.

18.12.11. Viele andere periodische Prozesse sind harmonische Schwingungen und lassen sich durch ähnliche (gestreckte und verschobene) Sinusfunktionen beschreiben. Sie werden solche Prozesse in den Aufgaben und in der Physik kennenlernen.

Harmonische Schwingungen allgemein

Merke 18.12.12 Harmonische Schwingung

Eine harmonische Schwingung hängt von vier Parametern ab:

- **Frequenz** f
- **Amplitude** $\hat{y}$
- **(Null-)Phase** φ_0 und
- **Offset** q.

Sie wird durch die Funktion

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0) + q$$

beschrieben, wobei t die Zeit ist (hier ist φ_0 in Radiant anzugeben).
Wer lieber das Gradmass statt des Bogenmasses (Einheit Radiant) verwendet, schreibt dies wie folgt:

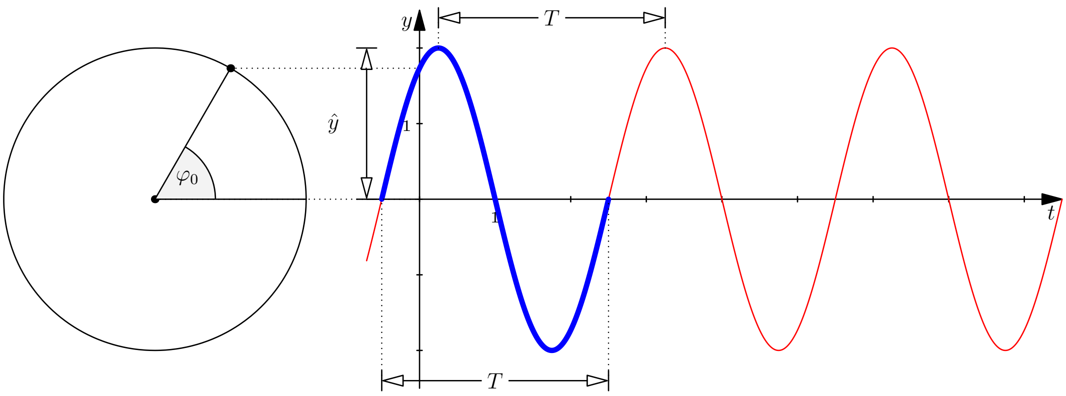
$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(360° \cdot f \cdot t + \varphi_0) + q$$

Wer mag, kann statt der Frequenz f die **Periode** $T = \frac{1}{f}$ verwenden und in den obigen Formeln f durch $f = \frac{1}{T}$ ersetzen.

Merke 18.12.13 Bestimmung von Amplitude, Periode und Phasen

Bei harmonischen Schwingungen ist es stets zu empfehlen, an einen auf einem Kreis rotierenden Punkt zu denken, an dessen y-Koordinate man schlussendlich interessiert ist.

Dies ist insbesondere beim Bestimmen der Phase zu empfehlen, wenn der Graph gegeben ist.



Das Bild zeigt den Graphen von

$$y(t) = 2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(der Offset ist 0, da die Mittellage die t-Achse ist). Blau hervorgehoben ist eine Einzelschwingung (nahe bei $t = 0$). Wie man Amplitude und Periode aus dem Graphen abliest, ist offensichtlich.
Die Nullphase erhält man aus dem Graphen auf eine der folgenden Möglichkeiten:

(1) Zeichne links davon einen Kreis mit Mittelpunkt auf der «Mittellage» der Schwingung und Radius = Amplitude der Schwingung. Gehe vom Schnittpunkt der y-Achse mit dem Graphen horizontal nach links zu dem Kreis. Wähle denjenigen Punkt auf dem Kreis in dieser Höhe (meist gibt es zwei Kandidaten), dessen y-Koordinate den Graphen liefert, wenn er sich im mathematisch positiven Sinne auf dem Kreis bewegt. Der «Winkel dieses Punktes» ist die Phase φ_0.

(2) Schreibe an die «blaue Einzelschwingung» die «offensichtlichen Winkel 0°, 90°, 180° und ermittle den Winkel bei $t = 0$. Winkel hinschreiben.

18.12.14. Die **Winkelgeschwindigkeit** (= **Rotationsgeschwindigkeit** = **Drehgeschwindigkeit**) unseres rotierenden Punktes ist

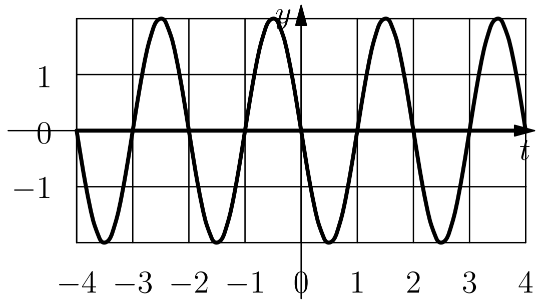
$$\omega = \frac{\text{überstrichener Winkel}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{360°}{T} = \frac{2\pi}{T} = 360° \cdot f = 2\pi \cdot f$$

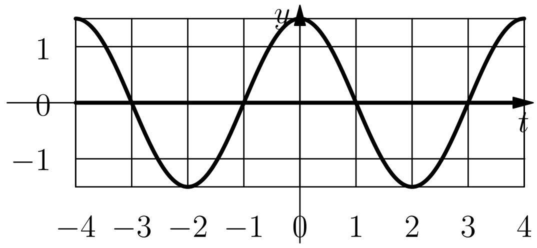
Wie angedeutet wird sie in der Physik meist mit dem Buchstaben ω (Omega) notiert. Sie wird gemessen in Radiant pro Sekunde rad/s = 1/s (oder Grad pro Sekunde °/s).

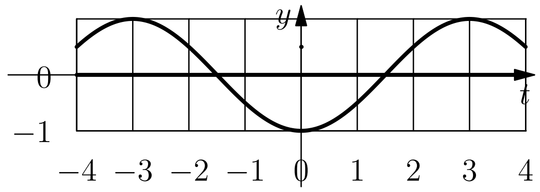
Alle obigen Formeln kann man auch mit ω statt f oder T schreiben: Der Winkel des rotierenden Punktes zur Zeit t ist $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$. Seine y-Koordinate ist $y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0) + q$.

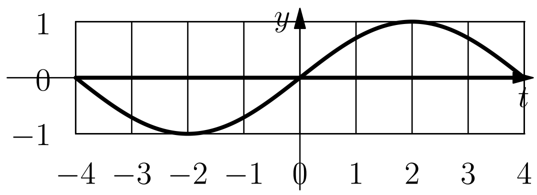
Allgemein gibt die Winkelgeschwindigkeit an, wie schnell sich der Winkel ändert, wenn sich ein Objekt um eine Achse (oder im Zweidimensionalen um einen Punkt) dreht.

Aufgabe A53 Bestimmen Sie jeweils Frequenz, Periode, Amplitude und Phase der folgenden, durch ihre Graphen gegebenen harmonischen Schwingungen (= Sinus-Schwingungen).

a)


b)


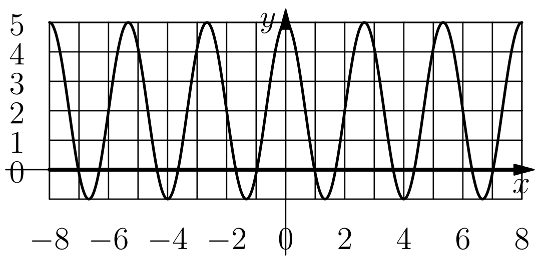
c)


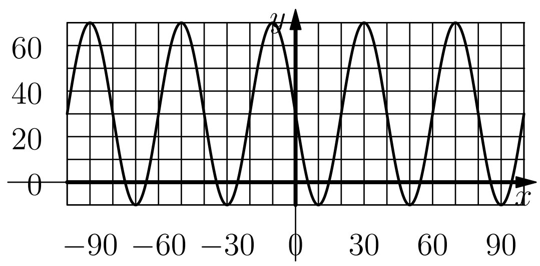
d)


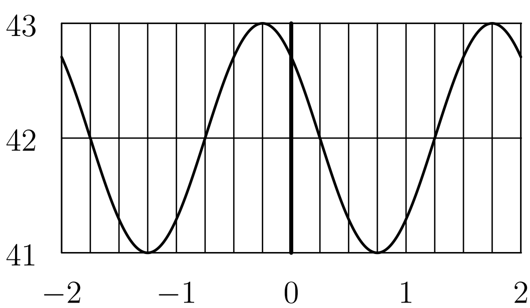
Aufgabe A54 Bestimmen Sie die Funktion(sgleichung)en der Graphen in Aufgabe A53.

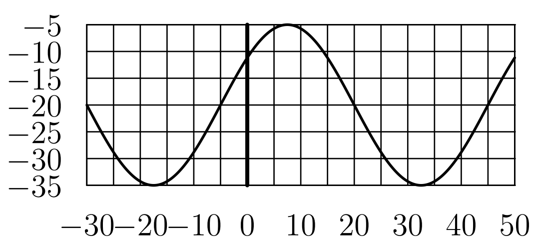
Statt die Musterlösung anzuschauen: Zeichnen Sie die Graphen Ihrer Funktionen zur Kontrolle mit GeoGebra.

Aufgabe A55 Unten sind die Graphen von harmonischen Schwingungen gegeben. Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Funktionsgleichung (Achtung, der Offset ist nicht Null). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Graphen Ihrer Funktionsgleichung mit dem Taschenrechner wie unten beschrieben zeichnen.

a)


b)


c)


d)


Graphen auf dem TI-nspire:

- HOME, B (Graph-Modus)
- Überprüfen Sie, dass der Rechner auf Grad (GRAD oder engl. DEG) eingestellt ist. Wenn nicht: Menu, 8 und Grafik-Winkel auf Grad (degrees) festlegen und als Standard speichern.
- Funktionen eingeben: Menu, 3, 1 (dann eventuell mit Pfeiltasten Funktion auswählen), Funktion mit x als Variable eingeben.
- Eventuell den Zoom anpassen mit Menu, 4, A (oder manuell).

Graphen auf dem TI-92 Plus:

- In den «y = Editor» wechseln: APPS, 2 oder ◇+W.
- Funktion eingeben: Funktionsterm mit x bei $y1$ eingeben.
- In der «Graph»-Modus wechseln: APPS, 4 oder ◇+R.
- Zoom anpassen mit F2 (und z.B. 7, oder A).

Aufgabe A56 Eine Puppe wird an einer Stahlfeder aufgehängt und in Schwingung versetzt, indem sie nach unten gezogen und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen wird. Die Puppe pendelt in 2 s auf einer Höhe von insgesamt 20 cm auf und ab. Bestimmen Sie die Funktion $y(t)$, die die Position (Höhe) der Puppe beschreibt, wenn die Puppe beim Loslassen Höhe 0 cm hat.

Finden Sie zusätzlich heraus, wie schnell sich die Puppe im obersten und untersten Punkt bewegt (in m/s).

Schwieriger: Wo ist die Geschwindigkeit maximal und wie hoch ist diese? Hinweis: Vergleich mit der Kreisbewegung.

Aufgabe A57 In guter Näherung kann angenommen werden, dass die Tageslänge (bzw. deren Abweichung vom Mittelwert) über das Jahr mit einer harmonischen Schwingung beschrieben werden kann. Die Tageslänge variiert in St. Gallen zwischen ca. 8 h 25 min am 21. Dezember und 15 h 55 min am 21. Juni.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y(t)$, die aus der Nummer t des Tages (1. Januar = Tag 1, $t = 1$) die Tageslänge berechnet.
(b) Berechnen Sie die Tageslänge an ihrem Geburtstag und vergleichen Sie Ihr Resultat mit anderen Quellen (Internet).

Aufgabe A58 St. Gallen befindet sich auf 47.42° nördlicher Breite. Die Äquatorebene ist um 23.44° gegenüber der Ekliptik (Umlaufebene der Erde um die Sonne) geneigt.

Ziel der Aufgabe ist, den höchsten Sonnenstandswinkel für jeden Tag des Jahres in St. Gallen als Funktion $y(t)$ des Tages t anzugeben (1. Januar = Tag 1, $t = 1$). Der Sonnenstandswinkel wird vom Horizont aus gemessen. In guter Näherung kann angenommen werden, dass $y(t)$ durch eine harmonische Schwingung beschrieben wird.

(a) Bestimmen Sie $y(t)$.
Hinweise:
    - Was ist der höchste Sonnenstandswinkel in St. Gallen am 21.06.? (Maximaler Wert von $y(t)$.) Skizze erstellen; man verwende: Der nördliche Wendekreis befindet sich auf 23.44° nördlicher Breite (derselbe Winkel wie zwischen Äquatorebene und Ekliptik). Über jedem Punkt dieses Wendekreises steht die Sonne am 21.06. mittags genau senkrecht über dem Beobachter, d. h. Sonnenstandswinkel 90°.
    - Was ist der höchste Sonnenstandswinkel in St. Gallen am 21.12.? (Minimaler Wert von $y(t)$.) Man verwende: Der südliche Wendekreis befindet sich auf 23.44° südlicher Breite.
(b) Ermitteln Sie, an welchen Tagen im Jahr die Sonne einen Tageshöchststand von 60° hat. (Taschenrechner erlaubt)

Aufgabe A59 In der Schweiz und Italien wird der Kammerton (a^1, eingestrichenes A) normalerweise auf 442 Hz gestimmt (442 Schwingungen pro Sekunde; Hz ist das Einheitenzeichen für *Hertz*, die Einheit der Frequenz, die als «1 durch Sekunde» definiert ist: Hz = $\frac{1}{s}$).

Um mit dem Computer einen Ton dieser Frequenz (als harmonische Schwingung) zu erzeugen, wird die Auslenkung der Membran eines Lautsprechers durch Auslenkungswerte (Sampling-Werte oder Abtast-Werte) zwischen −30′000 und 30′000 gesteuert. Pro Sekunde werden 44100 solche Auslenkungswerte berechnet (CD sampling rate). Offensichtliche Annahmen dabei: Die Auslenkung erfolgt in gleich grossen Schritten; die Auslenkungswerte werden für gleich grosse Zeitintervalle berechnet.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y_1(t)$, die aus der Zeit t in Sekunden den Auslenkungswert berechnet.
(b) Bestimmen Sie die Funktion $y_2(n)$, die aus der Nummer n des aktuellen Zeitschritts den Auslenkungswert berechnet (Zeitschritt $n = 0$ entspricht der Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$, Zeitschritt $n = 44100$ entspricht der Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$, etc.).

18.13 Überlagerung zweier Schwingungen

18.13.1. Bei vielen Phänomenen, in denen harmonische Schwingungen auftauchen, treten Überlagerungen solcher Schwingungen auf, beispielsweise wenn zwei Töne gleichzeitig erklingen oder wenn sich Wasserwellen überlagern. Auch bei «Noice cancelling»-Kopfhörern wird dies in gewisser Weise verwendet.

Überlagerungen zweier Schwingungen derselben Frequenz

Aufgabe A60 Arbeiten Sie in 2er- oder 3er-Gruppen zusammen!

a) Untersuchen Sie die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(\varphi + x)$, wobei φ je nach Gruppe ein anderes Vielfaches von 45° sein soll.
b) Fassen Sie die beiden Schwingungen als y-Koordinaten von Punkten P_f und P_g auf, die sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis bewegen. Wie hängen die beiden Kreisbewegungen zusammen (Radius, Periodenlänge, Frequenz, «Winkel dazwischen»)?
c) Anstatt nur die Summe der y-Koordinaten zu betrachten, betrachten Sie den Punkt P_h, der als Koordinaten die Summe der Koordinaten von P_g und P_h hat (Vektoraddition). Was für eine Bewegung führt der Punkt P_h aus?
d) Berechnen Sie aus φ (= der Phase von g) die Phase von h.
e) Berechnen Sie aus φ (= der Phase von g) die Amplitude von h.
f) Für welche Winkel φ ist die Amplitude von h genauso gross wie die Amplitude von f und g?

Aufgabe A61 Die Stromversorgung in Europa basiert auf Wechselstrom mit einer Frequenz von 50 Hz und einer Amplitude von ca. 310 V (daraus resultiert ein «Gleichstromäquivalent», auch «Effektivwert» genannt, von $\frac{310}{\sqrt{2}} \approx 219.20\,\mathrm{V} \approx 220\,\mathrm{V}$, das normalerweise angegeben wird, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Effektivwert#Sinusf%C3%B6rmige_Spannung).

Dieser Wechselstrom wird in 3 sogenannten «Phasen» geliefert, deren Namen von der *Phasen*verschiebung um je 120° herrührt. Normalerweise wird eine Phase und ein Nullleiter verwendet, um 220-Volt-Geräte zu betreiben (der Nullleiter ist letztlich mit der Erde verbunden). Geräte, die grössere Spannungen benötigen, wie z. B. Kochherde, werden an zwei Phasen angeschlossen. Relevant ist dann die Differenz der Spannungen dieser zwei Phasen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $U(t)$, die die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) für eine Phase beschreibt.
(b) Um welchen Faktor ist die Amplitude grösser, wenn man statt einer Phase zwei Phasen kombiniert (d.h. die Differenz bildet)?
(c) Das Gleichstromäquivalent wächst mit demselben Faktor. Auf welches «Gleichstromäquivalent» kommt man dann bei zwei Phasen?

18.14 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-trigo-werte-messen

(a) $\cos(55°) \approx 0.5736$, $\sin(55°) \approx 0.8192$, $\cos(290°) \approx 0.3420$, $\sin(290°) \approx -0.9397$, $\cos(-190°) \approx -0.9848$, $\sin(-190°) \approx 0.1736$, $\cos(380°) \approx 0.9397$, $\sin(380°) \approx 0.3420$.

(b) selbst

(c) $\tan(55°) \approx 1.4281$, $\tan(290°) \approx -2.7475$, $\tan(-190°) \approx -0.1763$, $\tan(380°) \approx 0.3640$.

(d) Es gibt zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit y-Koordinate 0.8. Die entsprechenden Winkel sind ungefähr 53° und 127°. Zu diesen Winkeln kann beliebig oft 360° addiert oder davon subrahiert werden. Die Lösungen sind also

$$\alpha = 53° + k \cdot 360° \qquad \text{oder} \qquad \alpha = 127° + k \cdot 360° \qquad \text{für beliebiges } k \in \mathbb{Z}$$

Auf dem Taschenrechner löst man `solve(sin(x)=0.8,x)` und erhält
$x = 360 \cdot (n_1 + 0.147584)$ or $x = 360 \cdot (n_1 + 0.352416)$. Ausmultipliziert erhält man das obige Resultat.

(e) $\alpha \approx 101.5° + k \cdot 360°$ oder $\alpha \approx 258.5° + k \cdot 360°$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(f) $\alpha \approx 116.6° + k \cdot 180°$. (Alle Winkel «mit Steigung» -2).

(g) Gar keine. Die Cosinus- und Sinusfunktion liefern nur Werte zwischen -1 und $+1$ (inklusive), denn dies sind die maximalen x- bzw. y-Werte eines Punktes auf dem Einheitskreis.

Lösung zu A2 ex-spezielle-winkel

Für 30° ist das Stützdreieck ein 30°-60°-90° Dreieck und damit $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Für 45° ist das Stützdreieck ein 45°-45°-90° Dreieck und damit $\sin(45°) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\tan(45°) = 1$.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

In der obigen Tabelle steht «n.d.» für «nicht definiert» (vertikale Geraden!).

Lösung zu A3 ex-fuenfeck-zeichnen

(a) Die Eckpunkte sind

$$\begin{aligned}
A &= (\cos(0°), \sin(0°)) = (1, 0) \\
B &= (\cos(72°), \sin(72°)) \\
C &= (\cos(144°), \sin(144°)) \\
D &= (\cos(216°), \sin(216°)) = (\cos(-144°), \sin(-144°)) \\
E &= (\cos(288°), \sin(288°)) = (\cos(-72°), \sin(-72°))
\end{aligned}$$

(b) Die Koordinaten aller Punkte mit 4 multiplizieren. Man erhält (Ergebnis durch untiges Python-Programm erzeugt, das auch gleich eine Zeichnung erstellt):

```
(4.00, 0.00)
(1.24, 3.80)
(-3.24, 2.35)
(-3.24, -2.35)
(1.24, -3.80)
```

(c) Die gesuchten Eckpunkte sind

$$\left(\cos\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right), \sin\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right)\right) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

```
from math import sin, cos, pi
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n = 5
r = 4
x_koordinaten = []
y_koordinaten = []
for i in range(n):
    x = r*cos(i*2*pi/n)
    y = r*sin(i*2*pi/n)
    print(f"({x:.2f}, {y:.2f})")
    x_koordinaten.append(x)
    y_koordinaten.append(y)
x_koordinaten.append(r)
y_koordinaten.append(0)

xpoints = np.array(x_koordinaten)
ypoints = np.array(y_koordinaten)

plt.gca().set_aspect('equal')
plt.plot(xpoints, ypoints)
plt.show()
```

Lösung zu A4 ex-identitaeten-neu

(a) Lösung (noch ohne Skizze):

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\
\sin(\alpha) &= -\sin(-\alpha) \\
\cos(\alpha) &= \cos(-\alpha) \\
-\cos(-\alpha) &= -\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

(b) Lösung (noch ohne Skizze):

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 90°) &= \cos(\alpha) = -\cos(\alpha + 180°) = \cos(\alpha + 360°) \\
-\cos(\alpha + 90°) &= \sin(\alpha) = -\sin(\alpha + 180°) = \sin(\alpha + 360°)
\end{aligned}$$

(c)

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad\qquad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Lösung zu A5 ex-grad-radiant

(a)

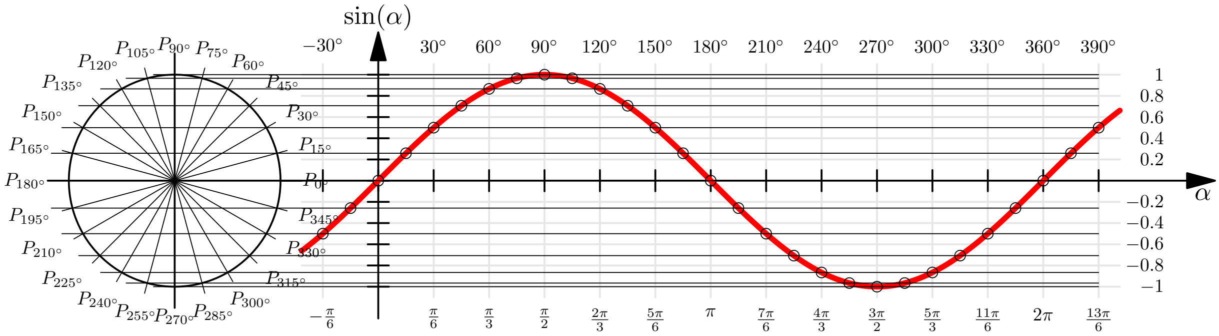
Winkel in Grad	$0°$	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$30°$	$-90°$	$45°$	$1°$	$\frac{180°}{\pi}$
Winkel in Radiant	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{180}$	1

(b)

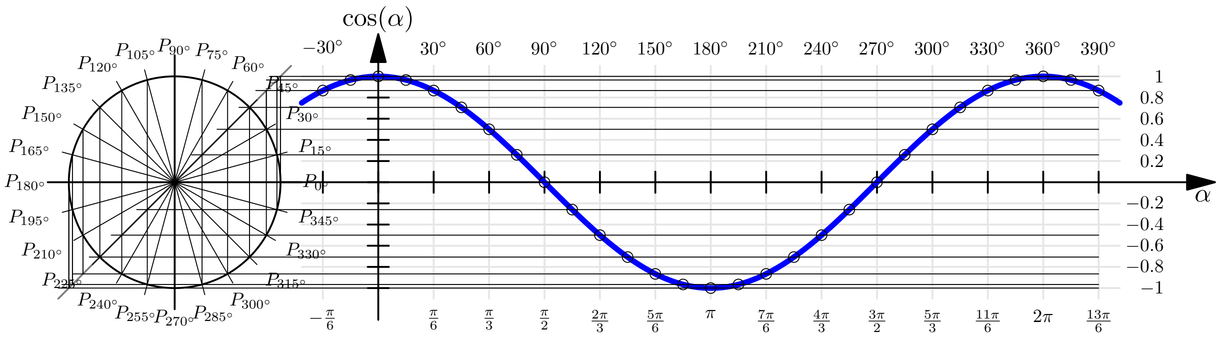
$$g(r) = r \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{r}{\pi} \cdot 180°$$
$$r(g) = g \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{g}{180°} \cdot \pi$$

Lösung zu A6 ex-graphen-sin-cos-tan

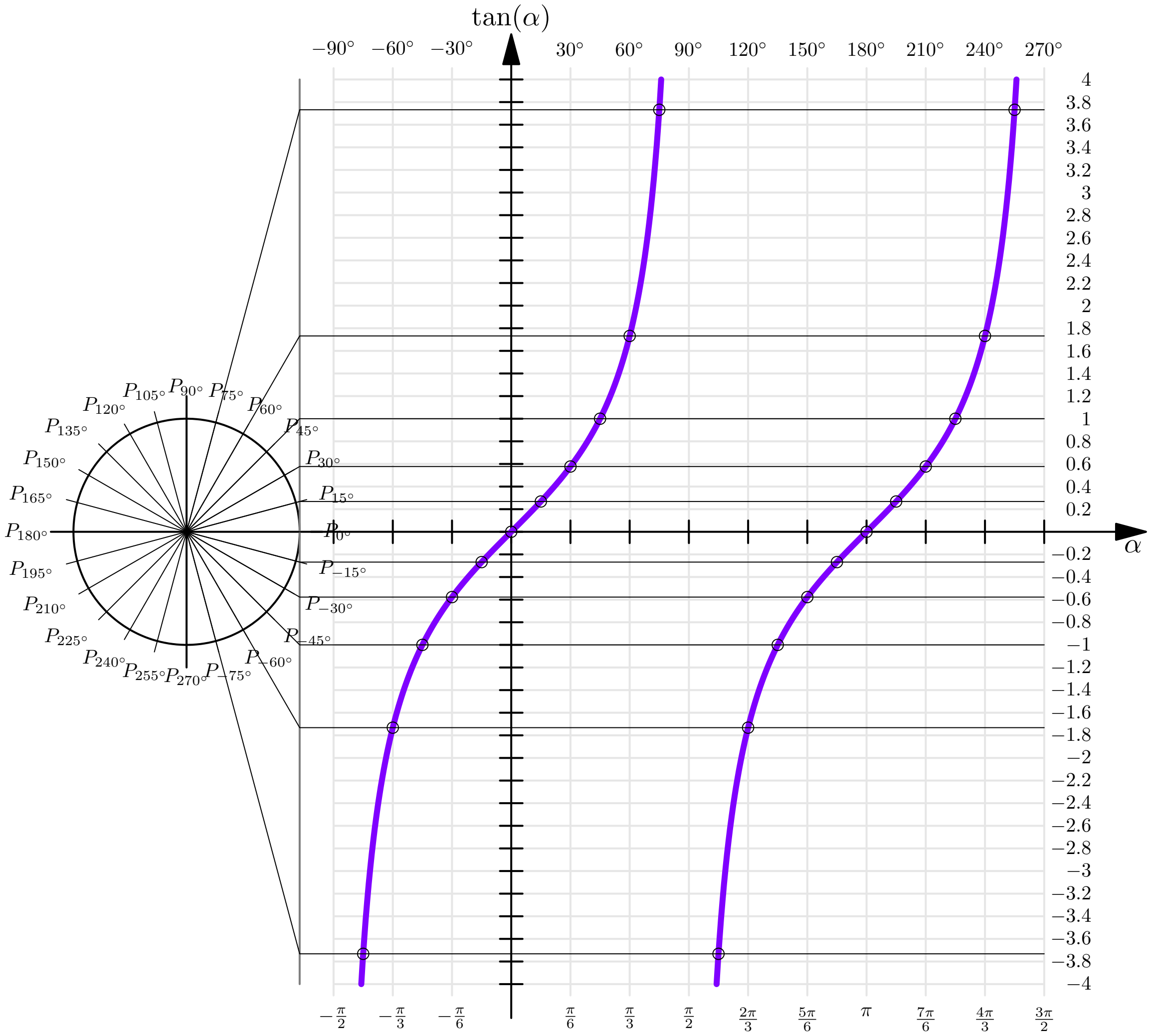
a) Sinus: Die horizontalen Linien verbinden jeweils P_α mit dem entsprechenden Punkt des Graphen.



b) Kosinus: Die hellgraue Winkelhablierende wird wie folgt genutzt: Gehe von P_α vertikal bis auf die hellgraue Winkelhablierende und dann horizontal nach rechts bis zum dem zugehörigen Punkt $(\alpha, \cos(\alpha))$ auf dem Graphen (dessen «x-Koordinate» α ist).



c) Tangens: Die hellgraue Tangente wird wie folgt genutzt: Zeichne die Gerade vom Mittelpunkt des Kreises durch P_α ein und gehe zu ihrem Schnittpunkt mit der hellgrauen Tangente. Die «y-Koordinate» dieses Schnittpunkts ist $\tan(\alpha)$ (Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$). Nun geht man horizontal nach rechts bis zum zugehörigen Punkt $(\alpha, \tan(\alpha))$ auf dem Graphen (dessen «x-Koordinate» α ist).
Beachte: $\tan(\alpha)$ ist nicht definiert für $\alpha = \ldots, -90°, 90°, 270°, \ldots$.



Lösung zu A7 ex-soh-cah-toa-entdecken

Lösung zu A8 ex-trig-im-dreieck-vorwaerts

a) a ist die Gegenkathete bezüglich des Winkels α. Also $\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$ also $c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \approx 11.69521760 \approx 11.70$. Die Seite b kann nun entweder mit dem Satz von Pythagoras oder mit dem Tangens berechnet werden (oder auch mit dem Cosinus): $\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$ also $b = \frac{a}{\tan(\alpha)} \approx 10.989909 \approx 10.99$.

b) a ist die Ankathete von β, also $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ und damit $a = c \cdot \cos(\beta) \approx 1.92836282 \approx 1.928$.
b ist die Gegenkathete von β, also $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ und damit $b = c \cdot \sin(\beta) \approx 2.298133329 \approx 2.298$.

c) b ist die Ankathete zum Winkel α, also $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ und damit $c = \frac{b}{\cos(\alpha)} \approx 6.10387294 \approx 6.104$
Achtung: Wird mit c weiter gerechnet, ist unbedingt das **ungerundete** Resultat zu verwenden! Ansonsten können Rundungsfehler auftreten!
$a = \sqrt{c^2 - b^2} \approx 3.501037 \approx 3.501$.

d) a ist die Ankathete zum Winkel β, also $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ und damit $c = \frac{a}{\cos(\beta)} \approx 3.48689359 \approx 3.487$.
$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ also $b = a \cdot \tan(\beta) \approx 2.8562960 \approx 2.856$.

Lösung zu A9 ex-trig-im-dreieck-textaufgaben-vorwaerts

a) Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck mit Hypotenuse parallel zur Flugrichtung und vertikaler (Gegen-)Kathete $a = 1$ [in m] und den ihr gegenüberliegenden Winkel 7°. Gesucht ist die Länge der horizontalen (An-)Kathete b (in Metern). Also $\tan(7°) = \frac{a}{b}$ und damit beträgt die Gleitzahl $b = \frac{a}{\tan(7°)} = \frac{1}{\tan(7°)} \approx 8.144346 \approx 8.144$.
Die Gleitzahl ist der Quotient von Ankathete durch Gegenkathete, d.h. die Cotangens-Funktion, denn

$$\text{Gleitzahl} = \frac{1}{\text{Tangens}} = \frac{1}{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \overset{\text{Definition des Cotangens}}{=} \text{Cotangens.}$$

Diese Zahl ist für Gleitschirmflieger sinnvoll, denn sie gibt an, wie weit man horizontal fliegt, wenn man einen Höhenmeter sinkt.

b) Die Höhe h des Turm ist die Gegenkathete vom Blickwinkel. Gesucht ist die horizontale Distanz, also die Ankathete d. Damit gilt $\tan(20°) = \frac{h}{d}$ d.h. $d = \frac{h}{\tan(20°)} \approx 2280.40625 \approx 2280$ m.

c) Betrachte das rechtwinklige Dreieck, dass von den Pfeilen $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_{HA}$ und der Verbindung der Spitzen dieser Pfeile gebildet wird. Leicht überlegt man sich, dass der Winkel bei der Spitze des Pfeils $\vec{F}_G$ genauso gross wie α ist. Folglich gilt $\sin(\alpha) = \frac{F_{HA}}{F_G}$, was genau dem gesuchten Verhältnis entspricht: $\frac{F_{HA}}{F_G} = \sin(10°) \approx 0.1736481776 \approx 17.36\%$.

Lösung zu A10 ex-laenge-breitenkreis

Sei r der Erdradius. Er lässt sich aus dem Erdumfang U berechnen:

$$r = \frac{U}{2\pi} = \frac{40\,000\,\text{km}}{2\pi} \approx 6366\,\text{km}$$

(a) Sei s der Radius des St. Galler Breitenkreises. Der Querschnitt der Erde durch die beiden Pole und St. Gallen zeigt

$$s = r\cos(47°) \approx 4342\,\text{km}$$

Die Länge des St. Galler Breitenkreises ist also

$$2\pi s \approx 27\,280\,\text{km}$$

(b) Die obigen Formeln liefern allgemein als Länge des α-Breitenkreises

$$2\pi s = 2\pi r\cos(\alpha) = 2\pi\frac{U}{2\pi}\cos(\alpha) = U\cos(\alpha)$$

Man kann das auch direkt so erklären: Der α-Breitenkreis ist ähnlich zum Äquatorkreis mit einem Streckfaktor (oder Ähnlichkeitsfaktor) $\cos(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{1}$. Deswegen ist seine Länge das $\cos(\alpha)$-fache der Länge des Äquatorkreises = Erdumfangs.

Lösung zu A11 ex-rechtwinkliges-dreieck-selbst

(a) selbst zu erledigen

(b) Vorüberlegung/Systematische Vorgehen: Aus SOH-CAH-TOA erhält man die folgenden Formeln:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Nun gilt es, jeweils die richtige Gleichung nach der gesuchten Variablen aufzulösen.

- (Fall 1: Kathete a und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)

- b und c aus a und α berechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{a}{\tan(\alpha)}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

- b und c aus a und β berechnen:

$$b = a\tan(\beta)$$
$$c = \frac{a}{\cos(\beta)}$$

- (Fall 2: andere Kathete b und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)
  - a und c aus b und α berechnen:

$$a = b\tan(\alpha)$$
$$c = \frac{b}{\cos(\alpha)}$$

  - a und c aus b und β berechnen:

$$a = \frac{b}{\tan(\beta)}$$
$$c = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

- (Fall 3: Hypotenuse c und ein Nicht-90°-Winkel bekannt)
  - a und b aus c und α berechnen:

$$a = c\sin(\alpha)$$
$$b = c\cos(\alpha)$$

  - a und b aus c und β berechnen:

$$a = c\cos(\beta)$$
$$b = c\sin(\beta)$$

(c) selbst zu erledigen

(d) Mit Pythagoras.

(e) (Man beachte, dass $\alpha + \beta = 90°$ gelten muss; insofern genügt es, einen der Nicht-90°-Winkel anzugeben.) Nein, denn es gibt unendlich viele rechtwinklige Dreiecke mit diesen Winkeln, die aber alle zueinander ähnlich sind.
Eines dieser Dreiecke kann man wie folgt konstruieren: Man zeichne eine beliebige Hypotenuse c und trage die beiden Winkel α und β ab; der Schnittpunkt der offensichtlichen Strahlen ist der Punkte C.

Lösung zu A12 ex-dreiecksflaeche-aus-sws

(a) Wegen SOH gilt $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$, also $h_c = b\sin(\alpha)$.
Die Fläche F ist somit

$$F = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}cb\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot 6\sin(37°) = 27\sin(37°) \approx 16.25$$

Man kann auch mit SOH $h_b = c\sin(\alpha)$ berechnen und erhält daraus dieselbe Formel $F = \frac{1}{2}bh_b = \frac{b}{c}\sin(\alpha)$.
(Man kann im Nachhinein natürlich auch direkt Satz 18.3.2 anwenden und bekommt direkt die obige Formel.)

(b) Berechne die Fläche eines Dreiecks mit $a = 5$, $b = 6$ und $\gamma = 77°$.
Wegen SOH gilt $\sin(\gamma) = \frac{h_a}{b}$, also $h_a = b\sin(\gamma)$.
Die Dreiecksfläche F ist somit

$$F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = 15\sin(77°) \approx 14.62$$

(c) selbst zu beantworten

Lösung zu A13 ex-arcusfunktionen-von-hand
Erklärungen siehe unten.

a) $0°$	b) $90°$	c) $0°$	d) $90°$
e) $0°$	f) $45°$	g) $-90°$	h) $180°$
i) $-45°$	j) $45°$	k) $120°$	l) $60°$

Teilaufgaben (a) bis (i) sollten offensichtlich sein.

Für (j) und (l) berechne man mit Pythagoras die fehlende Seite des hoffentlich offensichtlichen rechtwinkligen Dreiecks. Bei (j) erhält man ein gleichschenkliges Dreieck.

Zu (k) und (l): Bekannt ist hoffentlich, dass in jedem 30°-60°-90°-Dreieck die kürzere Kathete (= die dem 30°-Winkel gegenüberliegende Kathete) halb so lang ist wie die Hypotenuse. Die Umkehrung gilt aber auch: Ist in einem rechtwinkligen Dreieck eine der beiden Katheten halb so lang wie die Hypotenuse, so handelt es sich um ein 30°-60°-90°-Dreieck und die Kathete mit der halben Hypotenusenlänge liegt dem 30°-Winkel gegenüber. Beweis: Spiegeln des rechtwinkligen Dreiecks an der anderen Kathete liefert ein gleichseitiges (warum?) Dreieck.

Im Prinzip kann man auch alle Resultate der Tabelle in 18.14 entnehmen, auch wenn dies nicht die erhoffte Lösung ist.

Lösung zu A14 ex-arcusfunktionen-zeichnen
Siehe S. 51 im Formelbuch «Fundamentum in Mathematik und Physik». Beachten Sie, dass dort die Winkel im **Bogenmass** angegeben sind.

Lösung zu A15 ex-trig-im-dreieck-textaufgaben-rueckwaerts

a) Die Gleitzahl ist der Cotangens (bzw. der Kehrwert vom Tangens) vom Gleitwinkel. Damit gilt $\tan(\alpha) = \frac{1}{50}$ und damit $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{50}\right) \approx 1.146°$.
Zusatzaufgabe: Das Matterhorn hat eine Höhe 4478 m, Birrfeld ca. 394 m (ermittelt mit Google Earth) was einer Höhedifferenz von 4084 m entspricht. Die Luftlinie (horizontal gemessen) zwischen den beiden Punkten ist 169 km (ermittel mit Google Earth). Die nötige Gleitzahl ist also mindestens $\frac{169000}{4084} \approx 41.38$. D.h. mit Gleitzahl 50 sollte das Unterfangen klappen, auch wenn wegen Cumulus Granitus (d.h. Bergen) noch Umwege geflogen werden müssen (typischerweise müsste wohl der Gemmipass überflogen werden).

b) Machen Sie eine Skizze der Situation und beschriften Sie das entstehende rechtwinklige Dreieck. Daraus folgt $\tan(\alpha) = \frac{8}{4}$ und somit $\alpha = \arctan(2) \approx 63.43°$
Zusatzaufgabe: St. Gallen liegt auf knapp 47.5° nördlicher Breite. D.h. zur Tag und Nachtgleiche steht die Sonne nie höher als $90° - 47.5° = 42.5°$.
Die Erdachse ist um ca. 23.44° geneigt, d.h. der höchste Sonnenstand am 21. Juni ist die Summe davon, also 65.94°. Die Messung muss also im Sommer um die Mittagszeit (Sonnenhöchststand um ca. 13:20 im Sommer) gemacht worden sein.
Nimmt man vereinfacht an, dass der tägliche Sonnenhöchststand mit einer Sinusfunktion beschrieben werden kann, lautet die Gleichung $a(d) = 42.5° + 23.44° \cdot \sin\left(\frac{d-80}{365} \cdot 360°\right)$ wobei d die Anzahl Tage seit Jahrebeginn ist (die -80 kommen daher, dass der 21. März (Tag und Nachtgleiche) der 80. Tag im Jahr ist. Löst man $a(d) = 63.43°$ nach d auf, erhält man $d \approx 144.12$ und $d \approx 199.88$. D.h. die Messung fand zwischen dem 144. und 200. Tag des Jahres statt, d.h. zwischen dem 25. Mai und dem 19. Juli statt. Man könnte jetzt weiter den Sonnenstand über einen Tag vereinfacht mit einer Sinusfunktion beschreiben und die Uhrzeit ermitteln, wenn die Sonne den gesuchten Stand erreicht hat.

c) Die Steigung ist 0.2, also $\tan(\alpha) = 0.2$. Somit ist $\alpha = \arctan(0.2) \approx 11.31°$.

d) Das GPS hat offenbar nur die horizontale Distanz gemessen (das, was man auf der flachen Karte messen würde). Der Tachometer aber misst die schräge Distanz. Wenn man als Näherung annimmt, dass die Strecke ein konstantes Gefälle hatte und man ein Distanz/Höhen-Diagramm zeichnet, erhält man als Näherung ein rechtwinkliges Dreieck, mit Hypotenuse 8.271 km und Kathete 8.115 km. Für den Steigungswinkel gilt: $\cos(\alpha) = \frac{8.115}{8.271}$ und damit $\alpha \approx \arccos(0.981) \approx 11.15°$. Die Steigung ist also $\tan(\alpha) \approx 19.7\%$ (man kann diese Steigung auch per Pythagoras ohne Trigonometrie berechnen).

Lösung zu A16 ex-arcusfunktionen-umkehreigenschaft

a) $\arccos(\cos(27°)) = 27°$
b) $\arccos(\cos(-27°)) = 27°$
c) $\arccos(\cos(207°)) = 153°$
d) $\arccos(\cos(1)) = 1$
e) $\arccos(\cos(-1)) = 1$
f) $\arccos(\cos(4)) = 2\pi - 4$
g) $\arcsin(\sin(1)) = 1$
h) $\arcsin(\sin(-1)) - 1$
i) $\arcsin(\sin(4)) = \pi - 4$
j) $\arctan(\tan(1)) = 1$
k) $\arctan(\tan(-1)) - 1$
l) $\arctan(\tan(4)) = 4 - \pi$

Und umgekehrt:

m) $\cos(\arccos(0.4)) = 0.4$
n) $\sin(\arcsin(0.4)) = 0.4$
o) $\tan(\arctan(0.4)) = 0.4$

Und noch etwas zum Denken (hierbei sind die reellen Zahlen $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig):

p) $\arccos(\sin(\alpha)) = \frac{\pi}{2} - \alpha$
q) $\cos(\arcsin(s)) = \sqrt{1 - s^2}$
r) $\tan(\arcsin(s)) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$
s) $\sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Lösung zu A17 ex-sinussatz-dreiecksberechnungen

(a) $\beta = 76.3°$, $a = 5.1008$, $c = 3.1702$
(b) $\gamma_1 = 69.8389°$, $\alpha_1 = 73.7611°$, $a_1 = 37.5357$
$\gamma_2 = 110.1611°$, $\alpha_2 = 33.4389°$, $a_1 = 21.5435$
(c) Keine Lösung/Dreieck existiert nicht
(d) $\alpha = 90°$, $\gamma = 60°$, $c = 2\sqrt{3}$ (rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse a)

Lösung zu A18 ex-kosinussatz-dreiecksberechnungen

(a) $\alpha = 59.1873°$, $\beta = 39.3886°$, $\gamma = 81.4241°$
(b) $a = 510.0026$, $\beta = 17.0612°$, $\gamma = 45.2388°$

Lösung zu A19 ex-parallelogrammgleichung

Skizze dem Leser überlassen. Die beiden gleich langen, zueinander parallelen Parallelogrammseiten nennen wir a. Die anderen beiden gleich langen, zueinander parallelen Parallelogrammseiten nennen wir b. Die eine Diagonale nennen wir d, die andere e.

Wir nennen die beiden gleich grossen, der Diagonale d gegenüberliegenden Winkel δ. Wir nennen die beiden gleich grossen, der Diagonale e gegenüberliegenden Winkel ε.

Dann gilt laut Kosinussatz:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\delta)$$
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varepsilon)$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist

$$d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos(\delta) + \cos(\varepsilon))$$

Beachte: Es gilt $\delta + \varepsilon = 180°$ (Stufenwinkel). Also $\cos(\varepsilon) = \cos(180° - \delta) = -\cos(\delta)$ und somit

$$d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab\underbrace{(\cos(\delta) + \cos(\varepsilon))}_{=\cos(\delta)-\cos(\delta)=0} = 2a^2 + 2b^2$$

Man kann dies übrigens auch mit Vektorgeometrie und dem Skalarprodukt zeigen.

Lösung zu A20 ex-klettern-kraefte-bei-sturz

Wir bezeichnen mit F_1 die Kraft zum linken Haken und mit F_2 die zum rechten Haken.

Habe Dreieck mit Seiten F, F_1 und F_2, wobei F_1 gegenüber von β liegt und F_2 gegenüber von α. Der gegenüber von F liegende Winkel ist $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 107°$.

Sinussatz:

$$\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(\gamma)} = \frac{F_2}{\sin(\alpha)}$$

Die erste Gleichung liefert

$$F_1 = \frac{F}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta) \approx 5.49[\text{kN}]$$

die zweite

$$F_2 = \frac{F}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) \approx 4.43[\text{kN}]$$

Lösung zu A21 ex-faehre-flussueberquerung

Kosinussatz:

$$\begin{aligned} w^2 &= f^2 + v^2 - 2fv\cos(90° + \alpha) \\ w &= \sqrt{f^2 + v^2 - 2fv\cos(90° + \alpha)} \approx 9.456[\text{m/s}] \end{aligned}$$

Nochmals Kosinussatz:

$$\begin{aligned} f^2 &= w^2 + v^2 - 2vw\cos(\beta) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{w^2 + v^2 - f^2}{2vw}\right) \approx 17.345° \end{aligned}$$

Lösung zu A22 ex-hoehenmessung

Der Winkel bei F im Dreieck ABF beträgt $180° - \alpha - \beta = 31°$. Per Sinussatz können wir damit die restlichen Seiten berechnen:

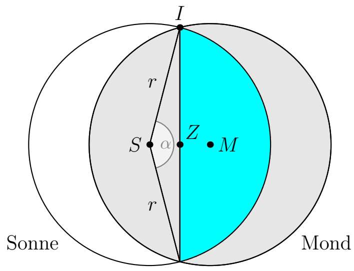
$$\begin{aligned} \overline{BF} &= \sin(\alpha) \cdot \frac{\overline{AB}}{\sin(31°)} \\ &= \sin(85°) \cdot \frac{35}{\sin(31°)} \\ &\approx 67.6975 \\ \overline{AF} &= \sin(\beta) \cdot \frac{\overline{AB}}{\sin(31°)} \\ &= \sin(64°) \cdot \frac{35}{\sin(31°)} \\ &\approx 61.6975 \end{aligned}$$

Da die Dreiecke BFS und AFS rechtwinklig sind mit rechtem Winkel bei F, kann man nun die Turmhöhe mit

TOA berechnen (der zuerst berechnete Wert und der Kontrollwert liegen sehr nahe beisammen):

$$\begin{aligned} h = \overline{FS} &= \tan(\gamma) \cdot \overline{AF} \\ &= \tan(42°) \cdot \overline{AF} \\ &\approx 54.995 \\ h = \overline{FS} &= \tan(\delta) \cdot \overline{BF} \\ &= \tan(39.1°) \cdot \overline{BF} \\ &\approx 55.016 \end{aligned}$$

Lösung zu A23 ex-partielle-sonnenfinsternis



Sei r der Radius beider Kreise, S der Mittelpunkt der Sonnenscheibe und M der Mittelpunkt der Mondscheibe.
Wir verwenden die Kreissegmentflächenformel in Merke 18.7.4.
Dazu benötigen wir den Winkel α.
Sei Z die Mitte zwischen S und M.
Im rechtwinkligen Dreieck SZI ist $\overline{SI} = r$ die Hypotenuse und $\overline{SZ} = \frac{1}{2}\overline{SM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot r = \frac{1}{4}r$ ist die Ankathete bei $\sphericalangle(ZSI) = \frac{\alpha}{2}$. Wegen CAH gilt

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{4}r}{r} = \frac{1}{4} \\ \frac{\alpha}{2} &= \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \\ \alpha &= 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\approx 151.045° \end{aligned}$$

Die türkise Fläche ist nach der Kreissegmentformel

$$F_{\text{Kreissegment}} = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

Der vom Mond verdeckte Bereich der Sonne ist doppelt so gross wie dieses Kreissegment.

Das Verhältnis dieses Bereichs zur gesamten Sonnenscheibe ist

$$\begin{aligned} \frac{2F_{\text{Kreissegment}}}{\pi r^2} &= \frac{2 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))}{\pi r^2} \\ &= \frac{(\alpha - \sin(\alpha))}{\pi} \\ &\approx 0.6850 = 68.50\% \end{aligned}$$

Lösung zu A24 ex-satellit

1551.1 km

Lösung zu A25 ex-flugzeug

$$\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)\overline{AB}}{\sin(\alpha - \beta)} = 1599.1\,\text{m}$$

Lösung zu A26 ex-verhaeltnis-flaechen-winkelhalbierende

Die trigonometrische Flächenformel liefert $F_1 = \frac{1}{2}aw_\gamma \sin(\frac{\gamma}{2})$ und $F_2 = \frac{1}{2}bw_\gamma \sin(\frac{\gamma}{2})$. Es folgt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2}aw_\gamma \sin(\frac{\gamma}{2})}{\frac{1}{2}bw_\gamma \sin(\frac{\gamma}{2})} = \frac{a}{b} \overset{\text{Sinussatz}}{=\!=} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(30°)}{\sin(45°)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bemerkung: Die Beziehung $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{b}$ folgt auch aus dem Satz über die Winkelhalbierende (statt aus der trigonometrischen Flächenformel.

Lösung zu A27 ex-umkreisradius-und-flaecheninhalt

(a) $R = 2.8915\,\text{cm},\ F = 10.3895\,\text{cm}^2$
(b) $R = 6.8542\,\text{cm},\ F = 50.8534\,\text{cm}^2$

Lösung zu A28 ex-ssw-mit-kosinussatz

Der Kosinussatz lautet allgemein

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

und liefert für unsere Werte

$$16 = 36 + c^2 - 2 \cdot 6 \cdot c \cdot \cos(25°)$$

Auf Standardform bringen, um die Mitternachtsformel anzuwenden:

$$c^2 \underbrace{-12\cos(25°)}_{\text{Koeffizient von } c} \cdot c + 20 = 0$$

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{12\cos(25°) \pm \sqrt{144\cos^2(25°) - 80}}{2} \\ &\approx \begin{cases} 8.531416985582 \\ 2.344276458858 \end{cases} \end{aligned}$$

Die anderen Kosinussatz-Identitäten können nun zur Berechnung der anderen Winkel verwendet werden (oder einen Winkel damit berechnen und den anderen per «Winkelsumme im Dreieck»:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \quad \Longrightarrow \quad \beta_{1,2} = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c_{1,2}^2}{2ac_{1,2}}\right) \approx \begin{cases} 140.659\,523\,495\,5° \\ 39.340\,476\,504\,46° \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{1,2} = \arccos\left(\frac{c_{1,2}^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) \approx \begin{cases} 115.659\,523\,495\,54° \\ 14.340\,476\,504\,46° \end{cases}$$

Wir lösen die Kosinussatz-Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

nach c auf:

$$c^2 \underbrace{-2b\cos(\alpha)}_{\text{Koeffizient von } c} \cdot c + b^2 - a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{2b\cos(\alpha) \pm \sqrt{4b^2\cos^2(\alpha) - 4(b^2 - a^2)}}{2} \\ &= \frac{2b\cos(\alpha) \pm 2\sqrt{b^2\cos^2(\alpha) - b^2 + a^2}}{2} \\ &= b\cos(\alpha) \pm \sqrt{b^2\cos^2(\alpha) - b^2 + a^2} \\ &= b\cos(\alpha) \pm \sqrt{b^2(\cos^2(\alpha) - 1) + a^2} \\ &= b\cos(\alpha) \pm \sqrt{b^2(-\sin^2(\alpha)) + a^2} \\ &= b\cos(\alpha) \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

- Der Radikand darf nicht negativ sein: $a^2 - b^2\sin^2(\alpha) \geq 0$.
  Dies ist zu $a^2 \geq b^2\sin^2(\alpha)$ äquivalent. Wegen $a > 0$, $b > 0$ und $\sin(\alpha) > 0$ ist dies äquivalent zu $a \geq b\sin(\alpha)$.
- Wir nehmen an, dass der Radikand nicht-negativ ist. (Sonst gibt es keine Lösung.)
  Da wir $0° < \alpha < 90°$ annehmen, gilt $b\cos(\alpha) > 0$.
  Damit ist sicherlich $c_1 = b\cos(\alpha) + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\alpha)}$ positiv und eine Lösung (falls der Radikant Null ist, ist dies die einzige Lösung).

Wir untersuchen nun, unter welcher Bedingung $c_2 = b\cos(\alpha) - \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\alpha)}$ positiv ist.

$$\begin{aligned}
& b\cos(\alpha) - \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\alpha)} > 0 \\
\iff & b\cos(\alpha) > \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\alpha)} && \text{laut Annahme ist die linke Seite positiv, damit Quadrieren} \\
\iff & b^2\cos^2(\alpha) > a^2 - b^2\sin^2(\alpha) \\
\iff & b^2\cos^2(\alpha) + b^2\sin^2(\alpha) > a^2 \\
\iff & b^2 > a^2 && \text{beide Seiten Quadrate positiver Zahlen} \\
\iff & b > a
\end{aligned}$$

Fazit:

- $a < b\sin(\alpha)$: Keine Lösung (da Radikand negativ)
- $a = b\sin(\alpha)$: Genau eine Lösung (da Radikand Null)
- $b\sin(\alpha) < a < b$: Genau zwei Lösungen
- $a \geq b$: Genau eine Lösung

(Könnte noch den Fall $90° \leq \alpha < 180°$ diskutieren.)

Lösung zu A29 ex-peripheriewinkel-ueber-sehne

$\arcsin\left(\frac{s}{2R}\right)$ und $180° - \arcsin\left(\frac{s}{2R}\right)$

Lösung zu A30 ex-kosinussatz-rechtwinkliges-dreieck

Im Fall $\alpha = 90°$ liefert der Kosinussatz wegen $\cos(\alpha) = \cos(90°) = 0$ die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist Pythagoras (da a die Hypotenuse ist).

Setzt man diese Gleichung in die anderen beiden Gleichungen ein und formt um, so erhält man $\cos(\beta) = \frac{c}{a}$ bzw. $\cos(\gamma) = \frac{b}{a}$, also beide Male CAH.

Lösung zu A31 ex-sinussatz-rechtwinkliges-dreieck

Wenn $\alpha = 90°$ gilt, so liefert der Sinussatz wegen $\sin(\alpha) = \sin(90°) = 1$ die folgenden Gleichheiten:

$$a = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R = \frac{abc}{2F}$$

Die Gleichheit $a = \frac{b}{\sin(\beta)}$ ist gleichbedeutend zu $\sin(\beta) = \frac{b}{a}$; das ist SOH (da a die Hypotenuse ist und b die Gegenkathete von β).

Analog ist die Gleichheit $a = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ gleichbedeutend zu $\sin(\gamma) = \frac{c}{a}$, was ebenfalls SOH ist.

Die Gleichheit $a = 2R$ bedeutet, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse der Umfang des Umkreises ist (klar nach Umkehrung des Satzes von Thales).

Die Gleichheit $a = \frac{abc}{2F}$ ist gleichbedeutend zu $F = \frac{bc}{2}$ und ist die offensichtliche Aussage, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck die Fläche die Hälfte des Produkts der Katheten ist.

Das war etwa als Lösung erwartet.

Wer noch weitere Gleichheiten diskutieren mag: $\frac{b}{\sin(\beta)} = 2R$ ist SOH, ebenso $\frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ SOH.
$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ kann ich nicht besser erklären als Kombination der beiden vorigen Gleichungen, beides berechnet die Hypotenuse $a = 2R$.
$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{abc}{2F}$ und $\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2F}$ ist beides trigonometrische Flächenformel, wenn nach F aufgelöst.
$2R = \frac{abc}{2F}$ kann ich nicht besser erklären (also unabhängig von Obigem, indem man etwa $2R = a$ ersetzt).

Lösung zu A32 ex-drehung-um-winkel
Es gilt $P = P_x + P_y$ (alle Punkte als Vektoren aufgefasst). Diese Beziehung wird beim Drehen erhalten (Drehen ist mit Summen von Vektoren verträglich), d. h. es gilt auch

$$D_\alpha(P) = D_\alpha(P_x) + D_\alpha(P_y)$$

Die beiden Summanden rechts sind recht leicht zu ermitteln.

Fällt man von $D_\alpha(P_x)$ das Lot auf die x-Achse, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse x. Somit gilt

$$D_\alpha(P_x) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x \\ \sin(\alpha)x \end{pmatrix}$$

Fällt man von $D_\alpha(P_y)$ das Lot auf die y-Achse, so erhält man ein rechtwinliges Dreieck mit Hyptenuse y. Somit gilt

$$D_\alpha(P_y) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha)y \\ \cos(\alpha)y \end{pmatrix}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} D_\alpha(P) &= D_\alpha(P_x) + D_\alpha(P_y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung zu A33 ex-winkelhalbierende-und-teillaengen
5.6 cm, 8.4 cm

Lösung zu A34 ex-laenge-entfernter-strecke
51.15 m

Lösung zu A35 ex-sehnenviereck
$b = 1.7204$, $\alpha = 71.1258°$, $d = 3.5802$

Lösung zu A36 ex-trapez
$b = \sqrt{e^2 - ac} = 2$, $\cos(\alpha) = \frac{a-c}{2b}$, also $\alpha = \arccos\left(\frac{a-c}{2b}\right) = 64.0555°$

Lösung zu A37 ex-flugzeug-schweiz-ueberquerung
100.2°, 30.1 min

Lösung zu A38 ex-kreissegmentflaechenformel

(a)

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{r^2}{2} \cdot (0 - 0) = 0 \\ F(\frac{\pi}{2}) &= \frac{r^2}{2} \cdot (\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \\ &= \text{Fläche des Viertelkreises minus Fläche des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkeln } r \\ F(\pi) &= \frac{r^2}{2} \cdot (\pi - 0) = \frac{\pi r^2}{2} = \text{Fläche des Halbkreises} \\ F(\frac{3}{2}\pi) &= \frac{r^2}{2} \cdot (\frac{3}{2}\pi - (-1)) = \frac{3}{4}\pi r^2 + \frac{r^2}{2} \\ &= \text{Fläche des Viertelkreises plus Fläche des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkeln } r \\ F(2\pi) &= \frac{r^2}{2} \cdot (2\pi - 0) = \pi r^2 = \text{Fläche des Vollkreises} \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich, dass die Kreissegmentflächenformel in Merke 18.7.4 für die Winkel $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{2}{\pi}\}$ und allgemeines r die richtigen Ergebnisse liefert.

(b) Der Kreissektor hat die Fläche

$$F_{\text{Kreissektor}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2$$

- Im Fall $0 \leq \alpha \leq \pi$ ist davon die offensichtliche Dreiecksfläche abzuziehen; diese ist nach der trigonometrischen Flächenformel

$$\frac{1}{2} r^2 \sin(\alpha)$$

- Im Fall $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ ist dazu die offensichtliche Dreiecksfläche zu addieren; diese ist nach der trigonometrischen Flächenformel

$$\frac{1}{2} r^2 \sin(2\pi - \alpha) = \frac{1}{2} r^2 \sin(-\alpha) = \frac{1}{2} r^2 (-\sin(\alpha)) = -\frac{1}{2} r^2 \sin(\alpha)$$

In beiden Fällen erhalten wir als Segmentfläche

$$\begin{aligned} F_{\text{Kreissegment}} &= \frac{\alpha}{2} \cdot r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin(\alpha) \\ &= \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Dies ist die gewünschte Formel.

Lösung zu A39 ex-kreissektoren-flaechenverhaeltnis

$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Lösung zu A40 ex-umfang-und-flaecheninhalt-bogenpolygone

$u = 39.4416,\ F = 71.5396$

$u = 2.1828,\ F = 0.1464$

Lösung zu A41 ex-polar-zu-kartesisch

(a)

$$\begin{aligned} A &= (\cos(30°), \sin(30°)) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}) \\ B &= (2\cos(-30°), 2\sin(-30°)) = (\sqrt{3}, -1) \\ C &= (3\cos(150°), 3\sin(150°)) = (-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{3}{2}) \\ D &= (4\cos(1080°), 4\sin(1080°)) = (4, 0) \end{aligned}$$

(b) siehe Lehrerversion

Lösung zu A42 ex-kartesisch-zu-polar

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der folgenden, durch kartesische Koordinaten gegebenen Punkte.

$$P = (2, 60°) \qquad Q = (2, 120°) \qquad R = (2, -60°) \qquad S = (2, -120°)$$

(b) siehe Lehrerversion

Lösung zu A43 ex-abstand-polarkoordinaten

(1) Kartesische Koordinaten der Punkte:

$$A = (2\cos(20°), 2\sin(20°)) \qquad B = (3\cos(35°), 3\sin(35°))$$

Der Abstand ist also

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\cos(20°) - 3\cos(35°)^2 + (2\sin(20°) - 3\sin(35°)^2} \approx 1.186966758$$

(2) Kosinussatz: Betrachte das Dreieck aus Ursprung O, A und B. Der Winkel bei O ist $35° - 20° = 15°$, die beiden anliegenden Seiten haben die Längen 2 und 3. Also ist nach dem Kosinussatz die Länge der dritten Seite
$$\overline{AB} = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(15°)} \approx 1.186966758$$

Lösung zu A44 ex-winkel-kartesische-koordinaten

(1) Polarkoordinaten: (Ob man den Arcustangens oder den Arcuskosinus verwendet, ist egal; man beachte, dass die Koordinaten aller Punkte positiv sind.)
$$A = (\sqrt{13}, \arctan(\tfrac{3}{2})) = (\sqrt{13}, \arccos(\tfrac{2}{\sqrt{13}})) \qquad B = (\sqrt{34}, \arctan(\tfrac{5}{3})) = (\sqrt{34}, \arccos(\tfrac{3}{\sqrt{34}}))$$
Der gesuchte Winkel ist also
$$\sphericalangle AOB = \arctan(\tfrac{5}{3}) - \arctan(\tfrac{3}{2}) = \arccos(\tfrac{3}{\sqrt{34}}) - \arccos(\tfrac{2}{\sqrt{13}}) \approx 2.726\,31°$$

(2) Kosinussatz: Das Dreieck hat die Seitenlängen $\overline{AB} = \sqrt{5}$, $\overline{AO} = \sqrt{13}$, $\overline{BO} = \sqrt{34}$. Der gesuchte Winkel $\sphericalangle AOB$ liegt gegenüber der Seite $\overline{AB}$. Somit liefert der Kosinussatz
$$\sphericalangle AOB = \arccos\left(\frac{13 + 34 - 5}{2\sqrt{13}\sqrt{34}}\right) \approx 2.726\,31°$$

Lösung zu A45 ex-beziehung-kartesische-polarkoordinaten
Betrachte die Punkte $E = (1, 0)$ und $F = (-1, 0)$ auf dem Einheitskreis. Der Ursprung sei O. Dann ist $\sphericalangle EFP$ ein Peripheriewinkel über der Sehne EP mit Zentriwinkel $\varphi = \sphericalangle EOP$. Aus dem Zentriwinkelsatz folgt $\sphericalangle EFP = \frac{\varphi}{2}$.

Setze $P_x = (x, 0)$. Dann ist das Dreieck FP_xP rechtwinklig bei P_x und nach TOA gilt
$$\tan(\tfrac{\varphi}{2}) = \frac{\overline{PP_x}}{\overline{FP_x}} = \frac{y}{r + x}$$

Lösung zu A46 ex-sinus-kosinus-tangens-zwei-aus-eins

Lösung zu A47 ex-additionstheorem-plausibilitaetstest

(a) $\alpha = 45°$ und $\beta = 45°$:
$$\begin{aligned}\sin(45° + 45°) &= \sin(90°) \\ &= 1 & \stackrel{?}{=} \sin(45°) \cdot \cos(45°) + \cos(45°) \cdot \sin(45°) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$
stimmt also
$$\begin{aligned}\cos(45° + 45°) &= \cos(90°) \\ &= 0 & \stackrel{?}{=} \cos(45°) \cdot \cos(45°) - \sin(45°) \cdot \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$
stimmt also

(b) $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 60^\circ$:

$$\begin{aligned}
\sin(30^\circ + 60^\circ) &= \sin(90^\circ) \\
&= 1 \\
&\stackrel{?}{=} \sin(30^\circ) \cdot \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \cdot \sin(60^\circ) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

stimmt also

$$\begin{aligned}
\cos(30^\circ + 60^\circ) &= \cos(90^\circ) \\
&= 0 \\
&\stackrel{?}{=} \cos(30^\circ) \cdot \cos(60^\circ) - \sin(30^\circ) \cdot \sin(60^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

stimmt also

(c) $\alpha = 60^\circ$ und $\beta = 60^\circ$:

$$\begin{aligned}
\sin(60^\circ + 60^\circ) &= \sin(120^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\stackrel{?}{=} \sin(60^\circ) \cdot \cos(60^\circ) + \cos(60^\circ) \cdot \sin(60^\circ) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

stimmt also

$$\begin{aligned}
\cos(60^\circ + 60^\circ) &= \cos(120^\circ) \\
&= -\frac{1}{2} \\
&\stackrel{?}{=} \cos(60^\circ) \cdot \cos(60^\circ) - \sin(60^\circ) \cdot \sin(60^\circ) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

stimmt also

(d) $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = -60^\circ$:

$$\begin{aligned}
\sin(30^\circ + -60^\circ) &= \sin(90^\circ) \\
&= 1 \\
&\stackrel{?}{=} \sin(30^\circ)\cdot\cos(-60^\circ) + \cos(30^\circ)\cdot\sin(-60^\circ) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

stimmt also

$$\begin{aligned}
\cos(30^\circ + -60^\circ) &= \cos(-30^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\stackrel{?}{=} \cos(30^\circ)\cdot\cos(-60^\circ) - \sin(30^\circ)\cdot\sin(-60^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

stimmt also

Lösung zu A48 ex-additionstheoreme-anwendungen

(a)

$$\begin{aligned}
\sin(75^\circ) &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin(30^\circ)\cdot\cos(45^\circ) + \cos(30^\circ)\cdot\sin(45^\circ) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\
\cos(75^\circ) &= \cos(30^\circ + 45^\circ) \\
&= \cos(30^\circ)\cdot\cos(45^\circ) - \sin(30^\circ)\cdot\sin(45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\tan(75^\circ) &= \frac{\sin(75^\circ)}{\cos(75^\circ)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\
&= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{6-2} \\
&= \frac{8+2\sqrt{12}}{4} \\
&= \frac{4+\sqrt{12}}{2} \\
&= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(c) «Subtraktionsformeln»

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) \\
&= \sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta) \\
&= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) \\
&= \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta) \\
&= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)
\end{aligned}$$

(d) «Doppelwinkelformeln»

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) \\
&= \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) \\
&= 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) \\
&= \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha) \\
&= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

(e) Aus dem trigonometrischen Pythagoras $1=\cos^2+\sin^2$ folgt $\sin^2=1-\cos^2$. Damit können wir $\sin^2$ in der Doppelwinkelformel des Kosinus durch $1-\cos^2$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \\
&= \cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha)) \\
&= \cos^2(\alpha)-1+\cos^2(\alpha) \\
&= 2\cos^2(\alpha)-1
\end{aligned}$$

Nun ersetzen wir darin $\alpha = \frac{1}{2}x$ und lösen nach $\cos(\frac{x}{2})$ auf:

$$\begin{aligned} \cos\left(2\frac{x}{2}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ \cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ 1 + \cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \frac{1+\cos(x)}{2} &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} &= \cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(f) Aus dem trigonometrischen Pythagoras $1 = \cos^2 + \sin^2$ folgt $\cos^2 = 1 - \sin^2$. Damit können wir $\cos^2$ in der Doppelwinkelformel des Kosinus durch $1 - \sin^2$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir darin $\alpha = \frac{1}{2}x$ und lösen nach $\sin(\frac{x}{2})$ auf:

$$\begin{aligned} \cos\left(2\frac{x}{2}\right) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos(x) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= 1 - \cos(x) \\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos(x)}{2} \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \cdot \frac{1}{\cos(x)\cos(y)}}{(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \cdot \frac{1}{\cos(x)\cos(y)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \end{aligned}$$

Lösung zu A49 ex-additionstheoreme-per-drehungen

Lösung zu A50 ex-additionstheoreme

(a)

$$
\begin{aligned}
A_{\triangle PQR} &= A_{\triangle PQF} + A_{\triangle PFR} \\
xy\sin(\alpha+\beta) &= x \underbrace{h}_{=y\cos(\beta)} \sin(\alpha) + y \underbrace{h}_{=x\cos(\alpha)} \sin(\beta) \\
xy\sin(\alpha+\beta) &= xy\cos(\beta)\sin(\alpha) + yx\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}
$$

(b) Kosinussatz, ausgehend vom Winkel $\alpha+\beta$:

$$
\begin{aligned}
(p+q)^2 &= x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta) && (18.1) \\
p^2+2pq+q^2 &= x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta) && (18.2)
\end{aligned}
$$

Nach Pythagoras in den beiden kleinen rechtwinkligen Dreiecke gelten

$$
\begin{aligned}
x^2 &= p^2+h^2 \\
y^2 &= q^2+h^2
\end{aligned}
$$

Ersetze x^2 und y^2 in Gleichung (18.2) durch die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen und löse die Gleichung nach $\cos(\alpha+\beta)$ auf.

$$
\begin{aligned}
p^2+2pq+q^2 &= p^2+h^2+q^2+h^2-2xy\cos(\alpha+\beta) \\
2pq &= 2h^2-2xy\cos(\alpha+\beta) \\
pq &= h^2-xy\cos(\alpha+\beta) \\
xy\cos(\alpha+\beta) &= h^2-pq \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{h^2}{xy}-\frac{pq}{xy} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{h}{x}\cdot\frac{h}{y}-\frac{p}{x}\cdot\frac{q}{y}
\end{aligned}
$$

Schreibe die vier Quotienten auf der rechten Seite mit SOH-CAH-TOA um.

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{h}{x}\cdot\frac{h}{y}-\frac{p}{x}\cdot\frac{q}{y} \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}
$$

Lösung zu A51 ex-summen-trigonometrischer-funktionen

(a) • Fall $\beta=\alpha$:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha)+\sin(\alpha) &\stackrel{?}{=} 2\sin\left(\underbrace{\frac{\alpha+\alpha}{2}}_{=\alpha}\right)\cos\left(\underbrace{\frac{\alpha-\alpha}{2}}_{=0}\right) \\
&= 2\sin(\alpha)\cdot\cos(0) \\
&= 2\sin(\alpha)\cdot 1 \\
&= 2\sin(\alpha) \\
\cos(\alpha)+\cos(\alpha) &\stackrel{?}{=} 2\cos\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}\right) \\
&= 2\cos(\alpha)\cos(0) \\
&= 2\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Beide Gleichungen stimmen offensichtlich.

- Fall $\beta = -\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) + \sin(-\alpha) &\stackrel{?}{=} 2\sin\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-(-\alpha)}{2}\right)\\
&= 2\sin(0)\cos(\alpha)\\
&= 2\cdot 0\cdot\cos(\alpha)\\
&= 0\\
\cos(\alpha) + \cos(-\alpha) &\stackrel{?}{=} 2\cos\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-(-\alpha)}{2}\right)\\
&= 2\cos(0)\cos(\alpha)\\
&= 2\cdot 1\cdot\cos(\alpha)\\
&= 2\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Beide Gleichungen stimmen offensichtlich.

(b)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\\
&= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\\
&= 2\sin(x)\cos(y)\\
&= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) + \cos(\beta) &= \cos(x+y) + \cos(x-y)\\
&= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\
&= 2\cos(x)\cos(y)\\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

(d) Fall $\beta = 0$:
Erste Identität:

$$\begin{aligned}
&& \sin(\alpha) + \sin(0) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+0}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-0}{2}\right)\\
\iff && \sin(\alpha) &= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

Das ist die Doppelwinkelformel des Sinus, wenn man $\alpha = 2x$ ersetzt.
Zweite Identität:

$$\begin{aligned}
&& \cos(\alpha) + \cos(0) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+0}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-0}{2}\right)\\
\iff && \cos(\alpha) + 1 &= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\
\iff && \cos(\alpha) &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \stackrel{\text{trigonometrischer Pythagoras}}{=} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

Das ist die Doppelwinkelformel des Kosinus, wenn man $\alpha = 2x$ ersetzt.

Lösung zu A52 ex-quadratwurzeln-im-nenner-beseitigen

(a)

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7+4\sqrt{3}$$

(b)

$$\frac{\sqrt{3}}{3+5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(3-5\sqrt{2}}{(3+5\sqrt{2})(3-5\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}-5\sqrt{2}\sqrt{3}}{9-50} = \frac{3\sqrt{3}-5\sqrt{6}}{-41} = -\frac{3}{41}\sqrt{3}+\frac{5}{41}\sqrt{6}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(4-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} &= \frac{4\sqrt{2}-2+4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2-3} \\ &= -4\sqrt{2}+2-4\sqrt{3}+\sqrt{6} = 2-4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(1-2)(1-3)} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

(für tapfere Umformer)

(e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}} &= \frac{1}{(1+2\sqrt{2})+\sqrt{3}(3+\sqrt{2})} \\ &= \frac{(1+2\sqrt{2})-\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{\left((1+2\sqrt{2})+\sqrt{3}(3+\sqrt{2})\right)\left((1+2\sqrt{2})-\sqrt{3}(3+\sqrt{2})\right)} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{(1+2\sqrt{2})^2-3(3+\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1+4\sqrt{2}+8-3(9+6\sqrt{2}+2)} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{9+4\sqrt{2}-33-18\sqrt{2}} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-24-14\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2(12+7\sqrt{2})} \\ &= \frac{(-1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6})(12-7\sqrt{2})}{2(12+7\sqrt{2})(12-7\sqrt{2})} \\ &= \frac{-12+7\sqrt{2}-24\sqrt{2}+28+36\sqrt{3}-21\sqrt{6}+12\sqrt{6}-14\sqrt{3}}{2(144-98)} \\ &= \frac{16-17\sqrt{2}+22\sqrt{3}-9\sqrt{6}}{92}\end{aligned}$$

Lösung zu A53 ex-frequenz-amplitude-phase-ablesen

a) Frequenz $\frac{1}{2}$ (Periode 2), Amplitude 2, Phase $180°$.
b) Frequenz $\frac{1}{4}$ (Periode 4), Amplitude $\frac{3}{2}$, Phase $90°$.
c) Frequenz $\frac{1}{6}$ (Periode 6), Amplitude 1, Phase $-90°$, bzw. $270°$.
d) Frequenz $\frac{1}{8}$ (Periode 8), Amplitude 1, Phase $0°$.

Lösung zu A54 ex-frequenz-amplitude-phase-funktionen-bestimmen

a) $y(t) = 2\sin(t \cdot 180° + 180°)$
b) $y(t) = \frac{3}{2}\sin(t \cdot 90° + 90°)$
c) $y(t) = \sin(t \cdot 60° + 270°)$
d) $y(t) = \sin(t \cdot 45°)$

Lösung zu A55 ex-frequenz-amplitude-phase-offset-funktionen-bestimmen

a) Mittelwert: 2, Amplitude 3, Frequenz $\frac{3}{8}$, Phase 90°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 2 + 3 \cdot \sin\left(90° + t \cdot 360° \cdot \frac{3}{8}\right)$$

b) Mittelwert: 30, Amplitude 40, Frequenz $\frac{1}{40}$, Phase 180°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 30 + 40 \cdot \sin\left(180° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{40}\right)$$

c) Mittelwert: 42, Amplitude 1, Frequenz $\frac{1}{2}$, Phase 135°. Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = 42 + 1 \cdot \sin\left(135° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{2}\right)$$

d) Mittelwert: -20, Amplitude 15, Frequenz $\frac{1}{50}$, Phase 36° (1/10 der Schwingungsdauer). Daraus ergibt sich die Funtionsgleichung

$$y(t) = -20 + 15 \cdot \sin\left(36° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{50}\right)$$

Lösung zu A56 ex-harmonische-schwingungen-puppe

Wenn man die Höhe von unten (0 cm) bis oben (20 cm) misst, dann ist der Mittelwert 10 cm. Die Amplitude ist damit 10 [cm], die Frequenz 0.5 Hz und die Phase (abhängig von der Wahl der positiven Höhe) -90°(weil zum Zeitpunkt 0 die Auslenkung voll negativ ist, bzw. die entsprechende Kreisbewegung sich am Tiefpunkt befindet). Damit die die Funktionsgleichung

$$y(t) = 10 + 10\sin\left(t \cdot 360° \cdot \frac{1}{2} - 90°\right)$$

Die Geschwindigkeit auf dem tiefsten und höchsten Punkt sind 0 (dort kehrt die Bewegung um).

In der Mitte ist die Geschwindigkeit genau so gross, wie die entsprechende Geschwindigkeit auf der Kreisbewegung (Radius 10, eine Umdrehung pro 2 Sekunden). Der Umfang U ist $10 \cdot 2 \cdot \pi$ und damit ist die Geschwindigkeit $\frac{U}{2s}$, also ≈ 0.3142 m/s.

Lösung zu A57 ex-harmonische-schwingungen-tageslaenge

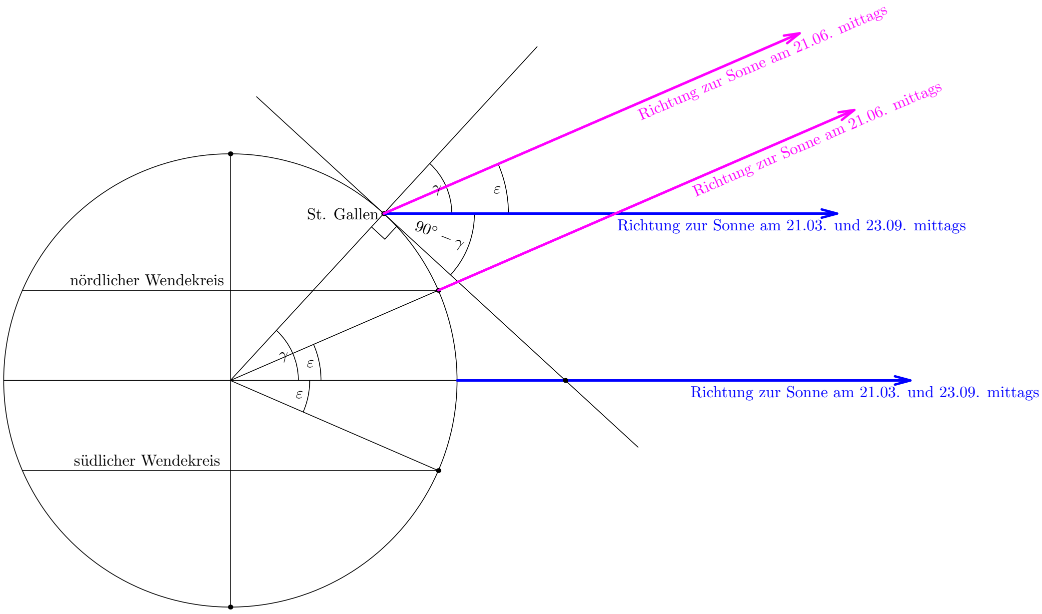
(a)
- Mittelwert: 12.17 [h]
- Amplitude: Hälfte der Differenz, also $(15:55 - 8:25)/2 = 3:45 = 3.75$ [h]
- Frequenz $\frac{1}{365}$
- Phase: Der steigende Nullpunktsdurchgang ist am 21. März (Frühlingsbeginn), d. h. am Tag $31 + 28 + 21 = 80$ [d]. Wenn man von diesem Datum zurückrechnet, erhält man als Phase $-\frac{80}{365} \cdot 360°$

Damit ergibt sich die gesuchte Funktion (Zeit t in Tagen, Resultat in Stunden):

$$y(t) = 12.17 + 3.75 \cdot \sin\left(t \cdot 360° \cdot \frac{1}{365} - \frac{80}{365} \cdot 360°\right)$$

(b) selbst

Lösung zu A58 ex-harmonische-schwingungen-sonnenstand



(a) In der Skizze gilt $\gamma = 47.42°$ und $\varepsilon = 23.44°$. Aus ihr geht hervor:

- Mittags am 21.03. und 23.09. beträgt der Blickwinkel zur Sonne in St. Gallen $90° - \gamma = 42.58°$.
- Mittags am 21.06. beträgt er $90° - \gamma + \varepsilon = 66.02°$.
- (und mit ähnlicher Skizze:) Mittags am 21.12. beträgt er $90° - \gamma - \varepsilon = 19.14°$.

Mit anderen Worten schwingt der mittägliche Blickwinkel zur Sonne um den Mittelwert $90° - \gamma$ mit der Amplitude ε.
Zeiteinheit: Tage. Frequenz: $\frac{1}{365}$, Mittelwert $90 - 47.42 = 42.58$ [°]. Amplitude 23.44 [°]. Für die Phase überlegen wir uns erst, wann der steigende Nullpunktsdurchgang ist, nämlich am 21. März (Frühlingsbeginn), d.h. am Tag $31 + 28 + 21 = 80$ [d]. Wenn man von diesem Datum zurückrechnet, muss die Phase also $-\frac{80}{365} \cdot 360°$ sein. Somit hat man die Funktionsgleichung (t in Tagen, Resultat in Grad):

$$y(t) = 42.58 + 23.44 \cdot \sin\left(-\frac{80}{365} \cdot 360° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{365}\right)$$

(b) Man sucht jetzt t so, dass $y(t) = 60$ gilt, d.h. die folgende Gleichung ist zu lösen.

$$60 = 42.58 + 23.44 \cdot \sin\left(-\frac{80}{365} \cdot 360° + t \cdot 360° \cdot \frac{1}{365}\right)$$

1. Lösungsweg mit dem Taschenrechner: Man gibt das folgende in den Taschenrechner ein.
`solve(60 = 42.58+23.44·sin(-80/365·360+t·360/365, t)`
Durch Ausmulitplizieren (und Addition von 365 zur negativen Lösung ≈ -151) erhält man die Lösungen

$$t \approx 129 + k \cdot 365 \quad \text{oder} \quad t \approx 214 + k \cdot 365 \qquad \text{für beliebiges } k \in \mathbb{Z}$$

Als Datumsangabe erhält man den 9. Mai und den 2. August.
2. Lösungsweg mit dem Taschenrechner: (Einige der folgenden Gleichheitszeichen sind genaugenommen Ungefähr-gleich-Zeichen $\approx$. So ist es aber hoffentlich besser lesbar.) Wir formen die zu lösende

Gleichung um zu

$$0.743174 = \frac{60-42.58}{23.44} = \sin\left(-\frac{80}{365}\cdot 360° + t\cdot 360° \cdot \frac{1}{365}\right)$$

Der Taschenrechner liefert $\arcsin(0.743174) = 48.0025° = 90° - 41.9975°$. Also sind die Lösungen von $\sin(x) = 0.743174$ die folgenden:

$$90° \pm 41.9975° + k\cdot 360° \text{ für beliebiges } k \in \mathbb{Z}$$

Also ist die Gleichung

$$90° \pm 41.9975° + k\cdot 360° = -\frac{80}{365}\cdot 360° + t\cdot 360° \cdot \frac{1}{365}$$

nach t aufzulösen (für ein beliebiges, fixiertes $k \in \mathbb{Z}$). Dies ergibt

$$t = \frac{365}{4} \pm 41.9975 \cdot \frac{365}{360} + k\cdot 365 + 80 = 171.25 \pm 42.5808 + k\cdot 365$$

d.h. wie oben

$$t \approx 129 + k\cdot 365 \quad \text{oder} \quad t \approx 214 + k\cdot 365 \qquad \text{für beliebiges } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung zu A59 ex-harmonische-schwingungen-lautsprechermembran

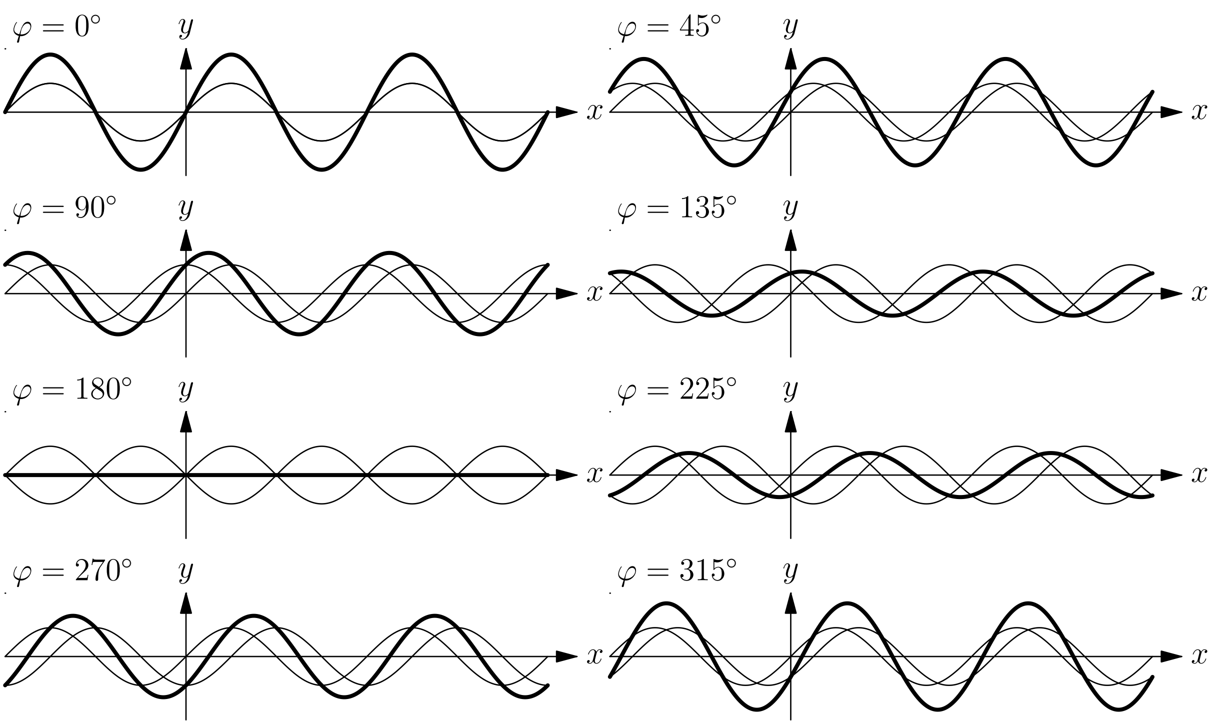
(a) Frequenz 442 Hz, Amplitude 30'000, Phase 0, Mittelwert 0. Also

$$y_1(t) = 30000 \cdot \sin(t\cdot 360° \cdot 442)$$

(b) Aus der Nummer n des Zeitschritts erhält man die zugehörige Zeit $t = \frac{n}{44100}$. Daraus folgt

$$y_2(n) = y_1\left(\frac{n}{44100}\right) = 30000 \cdot \sin\left(\frac{n}{44100}\cdot 360° \cdot 442\right)$$

Lösung zu A60 ex-schwingungen-ueberlagern

a) 

b) Gleicher Kreisradius 1, gleiche Geschwindigkeit (Periodenlänge $2\pi = 360°$, Frequenz $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{360°}$), konstanter Winkel dazwischen, nämlich φ.

c) Man hängt den Vektor (Pfeil) von O zu P_f bei P_g an. Die Spitze zeigt dann zu P_h. Dieser führt ebenfalls eine Kreisbewegung aus, mit gleicher Frequenz, aber i.A. anderer Amplitude und Phase.

d) Machen Sie eine gute Skizze, um die Beschreibung zu verstehen! Die Punkte O, P_f, P_h und P_g bilden einen Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm). Damit ist die Phase gleich dem Winkel $\angle P_f O P_h = \frac{\varphi}{2}$.

e) Machen Sie eine gute Skizze, um die Beschreibung zu verstehen! Die Punkte O, P_f, P_h und P_g bilden ein Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm). Sei E der Diagonalenschnittpunkt. Das Dreieck $\triangle OP_fE$ ist rechtwinklig mit $\angle P_f OE = \frac{\varphi}{2}$. Die Strecke OE ist Ankathete, OP_f die Hypotenuse mit Länge 1. Damit ist $\overline{OE} = |\cos(\varphi/2)|$ die Hälfte vom gesuchten Radius. Damit ist die Amplitude also

$$|2 \cdot \cos(\varphi/2)|$$

Alternativlösung: Zum Zeitpunkt $x = 0$ gilt $P_f = (1, 0)$, $P_g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und somit $P_h = (1 + \cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Die Amplitude ist der Abstand des Punktes P_h vom Ursprung $(0, 0)$, also nach Pythagoras

$$\sqrt{(1+\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2} = \sqrt{1 + 2\cos(\varphi) + (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2} = \sqrt{1 + 2\cos(\varphi) + 1} = \sqrt{2 + 2\cos(\varphi)}$$

Bemerkung: Aus der Halbwinkelformel für den Kosinus (siehe A48.(e)) folgt sofort $2+2\cos(\varphi) = 4\cos^2(\varphi/2)$. Somit liefern beide Lösungswege dasselbe Resultat.
Alternativ kann man auch sagen, dass die beiden Lösungswege einen Alternativbeweis der Halbwinkelformel liefern.

f) Das ist für 120° und 240° der Fall, wenn der Rhombus aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht.

Lösung zu A61 ex-schwingungen-ueberlagern-textaufgben

(a) Die Funktion, die die Spannung in Volt zur Zeit t in Sekunden beschreibt, ist

$$U(t) = 310 \cdot \sin(t \cdot 50 \cdot 360^\circ)$$

(b) Die Differenz zwischen dieser Funktion und einer Schwingung mit Phase 120° (also der Funktion $\tilde{U}(t) = 310 \cdot \sin(t \cdot 50 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$) ist dasselbe wie die Summe dieser Funkktion mit einer Schwingung mit Phase -60°. Im entsprechenden Rhombus erhält man die neue Amplitude $a \cdot \cos(30^\circ) \cdot 2 = a \cdot \sqrt{3}$, wobei a die ursprüngliche Amplitude ist. Aus $a = 310\,\text{V}$ erhält man also $a \cdot \sqrt{3} \approx 536.9\,\text{V}$.

(c) Wir multiplizieren das «Gleichstromäquivalent» 220 V einer angeschlossenen Phase (bei einem 220-Volt-Gerät) mit $\sqrt{3}$, um das Gleichstromäquivalent $220 \cdot \cos(30^\circ) \cdot 2 = 220 \cdot \sqrt{3} \approx 380$ [V] zweier angeschlossener Phasen (etwa bei einem Elektroherd) zu erhalten.