 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

17 Quadriken: Ellipse, Hyperbel, Parabel

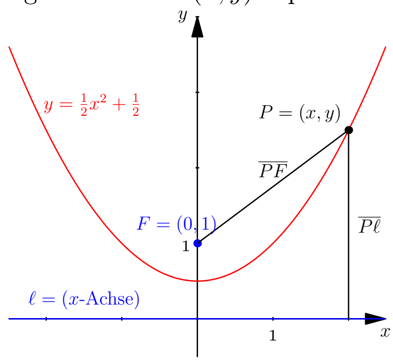
17.1 Parabeln als geometrischer Ort und algebraisch

17.1.1. Wie haben wir Parabeln definiert? Gegeben eine Leitgerade ℓ und ein Brennpunkt (= Fokus) F, ist die zugehörige Parabel die Teilmenge (= der geometrische Ort) aller Punkte P der Zeichenebene, die denselben Abstand von F wie von ℓ haben, für die also gilt

$$\overline{PF} = \overline{P\ell}$$

Wenn man ein Koordinatensystem verwendet und P durch seine beiden Koordinaten als $P = (x, y)$ beschreibt, kann man diese Bedingung als Bedingung an x und y schreiben. Wenn beispielsweise die Leitlinie ℓ die x-Achse ist und $F = (0, 1)$ der Brennpunkt, so sind die folgenden Bedingungen an $P = (x, y)$ äquivalent:

$$\begin{aligned}
& & \overline{P\ell} &= \overline{PF} \\
&\iff & |y| = \sqrt{y^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \\
&\iff & y^2 &= x^2 + (y-1)^2 \\
&\iff & y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\
&\iff & 2y &= x^2 + 1 \\
&\iff & y &= \frac{x^2+1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



Dies zeigt:

$$\begin{pmatrix}\text{Parabel mit Brennpunkt } F = (0,1) \\ \text{und Leitgerade } \ell = (x\text{-Achse})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Graph der Funktion quadratischen Funktion} \\ y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Aufgabe A1 Wer es anspruchsvoller mag, beginnt mit Teilaufgabe (c).

(a) Beschreiben Sie die Parabel zum Brennpunkt $F = (0, \frac{1}{4})$ und zur Leitgeraden $\ell : y = -\frac{1}{4}$ als Graph einer Funktion.

(b) Sei $a \neq 0$ eine reelle Zahl. Beschreiben Sie die Parabel zum Brennpunkt $F = (0, a)$ und zur Leitgeraden $\ell : y = -a$ als Graph einer Funktion. (Sie dürfen $a > 0$ annehmen und sollten dies in der ersten Skizze auch tun.)

(c) Finden Sie Brennpunkt F und Leitgerade ℓ so, dass die zugehörige Parabel der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist.

17.1.2. In Aufgabe A1 haben Sie gesehen, dass der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{4a}x^2$ die Parabel zum Brennpunkt $F = (0, a)$ und zur Leitgeraden $\ell \colon y = -a$ ist.

Umformuliert (per $b = \frac{1}{4a}$): Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = bx^2$ ist die Parabel zu $F = (0, \frac{1}{4b})$ und $\ell : y = -\frac{1}{4b}$.

Wenn man Brennpunkt und Leitlinie um den Vektor $\binom{u}{v}$ verschiebt, so verschiebt sich die zugehörige Parabel und wird durch die («zum Scheitel (u, v) verschobene») quadratische Funktion $f(x) = b(x-u)^2 + v$ beschrieben. Daraus folgt:

Satz 17.1.3

Der Graph jeder quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) ist eine Parabel.

Genauer: Zu jeder quadratischen Funktion gibt es genau eine horizontale Leitgerade und einen nicht auf dieser liegenden Brennpunkt, so dass der Graph der quadratischen Funktion die zugehörige Parabel ist.

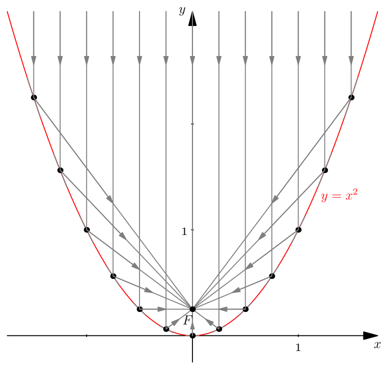
17.1.4. Dieser Satz rechtfertigt, dass wir die Graphen quadratischer Funktionen Parabeln genannt haben.

17.2 Brennpunkteigenschaft der Parabel

17.2.1. Der folgende Satz erklärt, warum der Brennpunkt einer Parabel so heisst. Reflexionsgesetz erklären.

Satz 17.2.2 Brennpunkteigenschaft der Parabel

Alle Lichtstrahlen, die parallel zur Symmetrieachse einer Parabel einfallen, werden von der Parabel auf den Brennpunkt reflektiert.

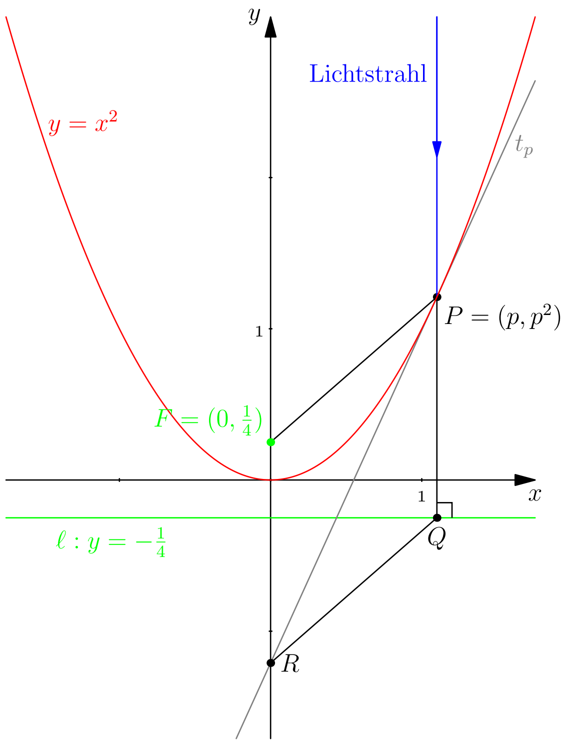


In der Abbildung ist dies für die Normalparabel $y = f(x) = x^2$ mit Brennpunkt $F = (0, \frac{1}{4})$ illustriert.

Parabolantennen («Satellitenschüsseln») benutzen diese Eigenschaft. Sie werden beispielsweise zur Kommunikation mit erdnahen Satelliten verwendet. Man kann im Brennpunkt Signale aus einer ganz bestimmten Richtung empfangen. Man kann vom Brennpunkt aus aber auch in eine ganz bestimmte Richtung senden (vgl. Parabolscheinwerfer).

Beweis. Wir zeigen dies nur für die Normalparabel $f(x) = x^2$, die in der Abbildung rot dargestellt ist.

Sei $P = (p, p^2)$ ein beliebiger Punkt der Normalparabel. Zu zeigen ist, dass der eingezeichnete Lichtstrahl im Punkt P auf den Brennpunkt $F = (0, \frac{1}{4})$ reflektiert wird.
Die Reflexion an der Parabel stimmt mit der Reflexion an der Tangente t_p überein.



Nach dem Reflexionsgesetz genügt es zu zeigen, dass ✎

$$\alpha \overset{?}{=} \beta = \beta'$$

Dabei gilt $\alpha = \sphericalangle(FPR)$ und β ist der Winkel von der Tangente zum Lichtstrahl. Zeichne eventuell schon jetzt $\beta' = \sphericalangle(PRF)$ ein, den Stufenwinkel zu β. Es genügt also zu zeigen, dass PFR gleichschenklig ist.

Der Punkt R ist definiert als Schnittpunkt der y-Achse mit der Tangente

$$t_p(x) = 2p \cdot x - p^2$$

Es folgt

$$R = (0, t_p(0)) = (0, -p^2)$$

und somit

$$\overline{RF} = \frac{1}{4} + p^2 \overset{\text{erkläre } Q = (p, -\frac{1}{4})}{=} \overline{PQ} \overset{\text{Parabel als geom. Ort}}{=} \overline{PF}$$

Also ist das Dreieck RPF gleichschenklig, es gilt also

$$\alpha = \beta' = \beta$$ □

17.2.3. Direkt aus dem Beweis ersichtlich:

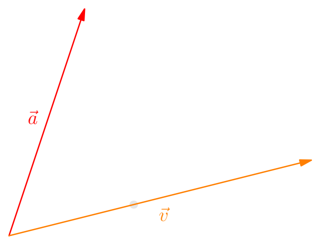
- Das Viereck $RQPF$ ist eine Raute. Da $\overline{RF} = \overline{PQ} = \overline{PF}$ und RF parallel zu PQ.
- Die Tangente t_p ist die Mittelsenkrechte von F und Q. Diagonale in Raute = Mittelsenkrechte der «anderen» Eckpunkte.
  Diese Beobachtung erlaubt ein einfaches Konstruieren der Tangente an einen Punkt P einer Parabel, wenn Brennpunkt und Leitgerade bekannt sind: Lot auf Leitgerade fällen und Mittelsenkrechte einzeichnen.
- Sofort klar aus der Gleichung von t_p: Die Tangente t_p ist die Gerade durch $R = (0, -p^2)$ und $P = (p, p^2)$.

Definition 17.2.4 Orthogonale (= rechtwinklige) Zerlegung eines Vektors entlang/längs eines Vektors

Seien $\vec{a}$ und $\vec{v} \neq 0$ zwei Vektoren.
Die **orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ entlang/längs $\vec{v}$** ist die Darstellung von $\vec{a}$ als Summe

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{w}}_{\text{Vielfaches von } \vec{v}} + \underbrace{\vec{u}}_{\text{senkrecht auf } \vec{v}}$$

zweier Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{u}$, so dass $\vec{w}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ist und $\vec{u}$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht.



17.2.5. Die orthogonalen Zerlegung hilft beim Lösen vieler Probleme. Einige Beispiele:

- Reflexion eines Lichtstrahls an einer Geraden (in der Ebene) oder an einer (Spiegel-)Ebene (im Raum).
- Zerlegung der Gewichtskraft einer Masse auf einer schiefen Ebene in Hangabtriebskraft und Normalkomponente. Genauer sind all diese Kräfte Vektoren.
- Abstand eines Punktes von einer Geraden (in der Ebene oder im Raum).

Algorithmus 17.2.6 zur orthogonalen Zerlegung eines Vektors entlang eines Vektors

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v} \neq 0$.
Gesucht ist die orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ entlang $\vec{v}$.

(1) Den Vektor $\vec{v}$ normieren: Definiere $\vec{n}$ als die normierte Version von $\vec{v}$:

$$\vec{n} := \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

(2) Bilde das Skalarprodukt von $\vec{n}$ und $\vec{a}$ und nenne es x:

$$x := \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$$

(3) Setze

$$\vec{w} := x\vec{n}$$

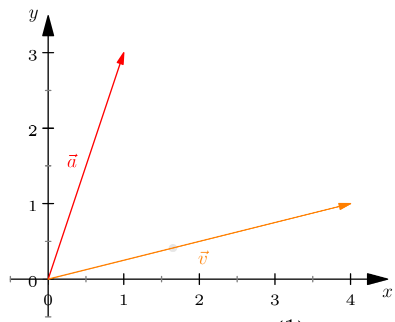
Die gesuchte orthogonale Zerlegung ist

$$\vec{a} = \vec{w} + \underbrace{(\vec{a} - \vec{w})}_{\vec{u}}$$

Beispiel 17.2.7 (Graphisches Verfahren)**.** Wir bestimmen die orthogonale Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in der Skizze entlang des Vektors $\vec{v}$ näherungsweise.

Es gelten $\vec{a} = \binom{1}{3}$ und $\vec{v} = \binom{4}{1}$. Lot von der Spitze von $\vec{a}$ auf $\vec{v}$ fällen (Geodreieck). Dies liefert die gesuchte orthogonale Zerlegung. Komponenten der Vektoren ablesen. Ungefähre orthogonale Zerlegung:

$$\vec{a} = \binom{1}{3} \approx ✎ \underbrace{\begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}}_{\text{(etwa) Vielfaches von } \vec{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -0.6 \\ 2.6 \end{pmatrix}}_{\text{fast senkrecht auf } \vec{v}}$$



Beispiel 17.2.8 (Rechnerisches Verfahren)**.** Nun bestimmen wir die orthogonale Zerlegung von $\vec{a} = \binom{1}{3}$ entlang $\vec{v} = \binom{4}{1}$ rechnerisch mit Hilfe des Algorithmus 17.2.6.

(a) Normiere $\vec{v}$:

$$\vec{n} := \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = ✎ \frac{1}{\sqrt{16+1}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

(b) Skalarprodukt von $\vec{n}$ und $\vec{a}$:

$$x := \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = ✎ \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 3 = \frac{7}{\sqrt{17}}$$

(c) Setze

$$\vec{w} := x\vec{n} = ✎ \frac{7}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix}$$

Antwort: Die gesuchte orthogonale Zerlegung ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = ✎ \vec{w} + (\vec{a} - \vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-11}{17} \\ \frac{44}{17} \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

Erste Probe (Vergleich mit zeichnerischer Lösung): Vektoren auf ein paar Nachkommastellen genau ausrechnen (Taschenrechner) und mit den abgelesenen Vektoren (siehe Beispiel 17.2.7) vergleichen.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix} \approx ✎ \begin{pmatrix} 1.65 \\ 0.41 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{17} \\ \frac{44}{17} \end{pmatrix} \approx ✎ \begin{pmatrix} -0.65 \\ 2.59 \end{pmatrix}$$

Zweite Probe (rechnerisch):

(a) $\vec{a}$ ist die Summe der beiden Vektoren: ✎Ja, das stimmt.

(b) $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} \\ \frac{7}{17} \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: ✎Ja, Faktor $\frac{7}{17}$.

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{17} \\ \frac{44}{17} \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: ✎Es reicht zu zeigen, dass $\begin{pmatrix} -11 \\ 44 \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht. Nachweis per Skalarprodukt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -11 \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -11 \cdot 4 + 44 \cdot 1 = -44 + 44 = 0$$

Aufgabe A2 Löse jede der folgenden Teilaufgaben zuerst (näherungsweise) graphisch und dann exakt rechnerisch. Führe zwei Proben durch: (1) Vergleich mit der graphischen Lösung; (2) Prüfen, dass die drei Bedingungen einer orthogonalen Zerlegung längs eines Vektors erfüllt sind.

(a) Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) (a') Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal entlang des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) altes (b): Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) altes (c): Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) altes (d): Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} p \\ p^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ orthogonal entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2p \end{pmatrix}$ Graphische Lösung nicht nötig; wer mag, nimmt $p = 2$.

Beweis der Korrektheit des Algorithmus 17.2.6. Seien $\vec{n}$, x, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ wie nach Ablauf des Algorithmus. Drei Sachverhalte sind zu zeigen:

(a) $\vec{a}$ ist die Summe von $\vec{w}$ und $\vec{u}$: Klar, denn wir haben $\vec{u}$ so definiert, dass dies gilt:

$$\vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{a} - \vec{w}) = \vec{w} + \vec{a} - \vec{w} = \vec{a}$$

(b) $\vec{w}$ ist ein Vielfaches von $\vec{v}$:

$$\vec{w} = x\vec{n} = x \cdot \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

(c) $\vec{u}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$: Da $\vec{n} \neq 0$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\vec{n}$ senkrecht auf $\boxed{\vec{u}}$ steht (falsch war $\vec{v}$), dass also das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ist:

$$\text{(fälschlicherweise stand hier } \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle\text{, korrigiert zu)} \quad \boxed{\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{a} - \vec{w} \rangle} = \langle \vec{n}, \vec{a} - x\vec{n} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{n}, x\vec{n} \rangle = \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle}_{=x} - x \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}_{=|\vec{n}|^2=1} = x - x = 0 \qquad \square$$

17.2.9. Wenn man das Endergebnis des Algorithmus als eine Formel hinschreibt, ergibt sich $\vec{a} = \underbrace{\frac{\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle}{|\vec{v}|^2}\vec{v}}_{\vec{w}} + \underbrace{\left(\vec{a} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle}{|\vec{v}|^2}\vec{v} \right)}_{\vec{u}}$

Satz 17.2.10 Orthogonale Zerlegung eines Vektors längs eines Vektors

Die orthogonale Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ längs eines Vektors $\vec{v}$ (in der Ebene oder im Raum) ist wie folgt gegeben.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\|} + a_{\perp} = \underbrace{\frac{\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\,\vec{v}}_{\text{zu } \vec{v} \text{ paralleler Anteil } a_{\|}} + \underbrace{\left(\vec{a} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\,\vec{v}\right)}_{\text{auf } \vec{v} \text{ senkrechter Anteil } a_{\perp}}$$

Explizit:
- Der **zu $\vec{v}$ parallele Anteil von** $\vec{a}$ ist $\vec{a}_{\|} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$.

Wegen $\vec{a} = \vec{a}_{\|} + \vec{a}_{\perp}$ muss dann gelten (subtrahiere $\vec{a}_{\|}$):
- Der **auf $\vec{v}$ senkrechte Anteil von** $\vec{a}$ ist $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\|}$.

Reflexion eines Lichtstrahls an einer Geraden (mit Hilfe einer orthogonalen Zerlegung)

Aufgabe A3 Von der Sonne S kommt ein Lichtstrahl mit Richtungsvektor $\vec{s}$. Er wird an der Spiegelgeraden ℓ mit Richtungsvektor $\vec{v}$ reflektiert (siehe Zeichnung).

(a) Konstruiere den Richtungsvektor $\vec{r}$ des reflektierten Lichtstrahls. Dieser Richtungsvektor soll im Reflexionspunkt starten und dieselbe Länge wie $\vec{s}$ haben. (Geodreieck erlaubt)

(b) Lies die Komponenten von $\vec{r}$ möglichst genau ab und schreibe $\vec{r}$ auf.

(c) Überlege dir theoretisch, wie man $\vec{r}$ aus $\vec{s}$ und $\vec{v}$ berechnen kann. (orthogonale Zerlegung)

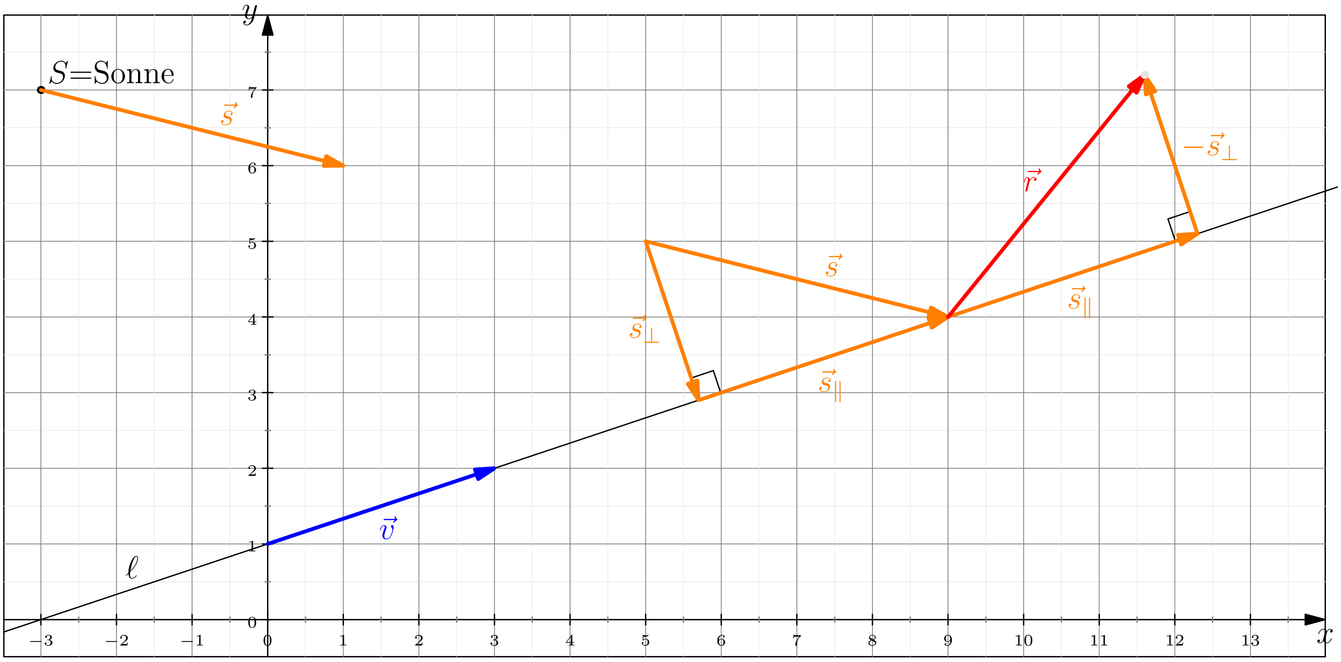
(d) In der Skizze gelten $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{r}$ mit deiner Methode.

(e) Vergleiche dein rechnerisches Resultat mit deinem abgelesenen Resultat.

(f) Ein «Lichtteilchen» ist in Parameterdarstellung beschrieben durch

$$s(t) = \overrightarrow{S} + t \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zur Zeit $t = 0$ startet es in der Sonne S. Gib das reflektierte Lichtteilchen in derselben Weise an (idealerweise so, dass es zur Reflexionszeit im Reflexionspunkt startet).



Aufgabe A4 Stelle dir selbst eine Aufgabe im Stil von Aufgabe A3: Zeichne in einem Koordinatensystem eine Strahlenquelle S mit Richtungsvektor $\vec{s}$ des Strahls ein und eine Spiegelgerade ℓ mit Richtungsvektor $\vec{v}$.

Löse dann alle Teilaufgaben von Aufgabe A3 in diesem Setting, d. h. zuerst die Lösung graphisch bestimmen, dann rechnerisch, dann vergleichen.

Merke 17.2.11 Reflexion eines Vektors an einer durch einen Richtungsvektor gegebenen Geraden

Setting wie in Aufgabe A3: Wenn eine Gerade/ein Strahl mit Richtungsvektor $\vec{s}$ an einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{v}$ gespiegelt wird, so hat der gespiegelte Strahl den Richtungsvektor

$$\vec{r} = \vec{s}_{\|} - \vec{s}_{\perp}$$

Hierbei sind $\vec{s}_{\|}$ der zu $\vec{v}$ parallele Anteil von $\vec{s}$ und $\vec{s}_{\perp}$ der zu $\vec{v}$ senkrechte Anteil von $\vec{s}$ (in der orthogonalen Zerlegung von $\vec{s}$ längs $\vec{v}$).

Aufgabe A5 Zeige die Brennpunkteigenschaft der Parabel (siehe Satz 17.2.2) wie folgt.

Verwende die Skizze aus dem Beweis des zitierten Satzes. Zeige, dass der Strahl aus dem Fokus F in Richtung des Punktes (p, p^2) von der Tangente in einen vertikalen Strahl reflektiert wird.

Hinweis: Den Richtungsvektor des Strahls hast du möglicherweise bereits in Aufgabe A2 orthogonal längs der Tangentenrichtung zerlegt.

Aufgabe A6 Ein Strahl mit Richtungsvektor $\vec{s}$ im Raum trifft auf eine Ebene $ax + by + cz = d$ und wird dort reflektiert. Überlege dir, wie man den Richtungsvektor des reflektierten Strahls $\vec{r}$ (derselben Länge wie $\vec{s}$) aus $\vec{v}$, a, b und c berechnen kann mit Hilfe einer geeigneten orthogonalen Zerlegung.

Abstand eines Punkt von einer Geraden (mit Hilfe einer orthogonalen Zerlegung)

Aufgabe A7 In der Zeichung sind ein Punkt P und eine Gerade ℓ dargestellt.

(a) Mit dem Geodreieck: Fälle das Lot von P auf die Gerade ℓ und lies den Abstand von P zu ℓ ab.

(b) Wähle einen beliebigen Punkt Q auf ℓ, dessen Koordinaten du gut ablesen kannst (bitte keinen Punkt mit x-Koordinate zwischen 2 und 4 wählen).

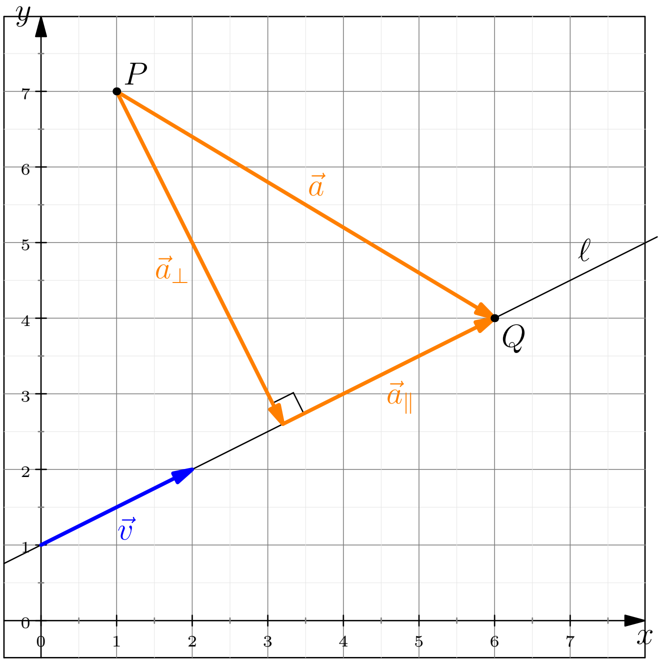
(c) Trage den Verbindungsvektor $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ ein.

(d) Überlege dir theoretisch, wie man den Abstand von P zu ℓ aus $\vec{b}$ und einem geeigneten anderen Vektor mit Hilfe einer orthogonalen Zerlegung berechnen kann.

(e) Berechne Abstand(P, ℓ) mit deiner Methode.

(f) Vergleiche dein rechnerisches Resultat mit deinem abgelesenen Resultat.

(g) Wie kannst du den Punkt auf ℓ bestimmen, der am nächsten bei P liegt?
Berechne ihn und vergleiche das Resultat mit deiner Zeichnung.



Aufgabe A8 Stelle dir selbst eine Aufgabe im Stil von Aufgabe A7: Zeichne in einem Koordinatensystem eine Gerade ℓ und einen Punkt P, der nicht auf ℓ liegt, ein.

Löse dann alle Teilaufgaben von Aufgabe A7 in diesem Setting, d. h. zuerst die Lösung graphisch bestimmen, dann rechnerisch, dann vergleichen.

Aufgabe A9 Gegeben sind eine Ebene $E\colon ax + by + cz = d$ im Raum und ein Punkt P. Überlege dir, wie man den Abstand Abstand(E, P) mit Hilfe einer geeigneten orthogonalen Zerlegung bestimmen kann.

17.3 Ellipsen als deformierte Kreise, algebraisch und als geometrischer Ort

Definition 17.3.1 Ellipse (als deformierter/gestreckter Kreis)

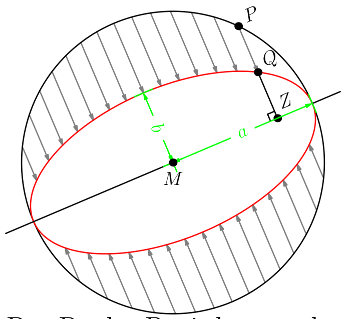
Seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Eine **Ellipse** mit **Halbachsen** a und b ist eine Kurve, die wie folgt entsteht.

(1) Starte mit einem Kreis mit Radius a.

(2) Wähle einen beliebigen Durchmesser des Kreises.

(3) Strecke den Kreis senkrecht zu dem gewählten Durchmesser mit dem Streckfaktor $\frac{b}{a}$.

(4) Das Bild des Kreises unter dieser Streckung ist per Definition eine Ellipse.



In der Zeichnung liegt der gewählte Durchmesser auf der Geraden durch M. Der Punkt P wird unter der Streckung senkrecht zu dieser Geraden auf den Punkt Q abgebildet. Die Streckung mit Streckfaktor $\frac{b}{a}$ bedeutet, dass gilt

$$\overline{QZ} = \frac{b}{a} \cdot \overline{PZ}$$

17.3.2. Offensichtlich hat jede Ellipse zwei Symmetrieachsen, die senkrecht aufeinander stehen. Der Schnittpunkt der beiden Symmetrieachsen ist der **Mittelpunkt** der Ellipse.

Die beiden Halbachsen sind die «beiden Radien der Ellipse». (Ein besserer Begriff als *Halbachse* wäre «Halbdurchmesser».)

Ein Kreis ist dasselbe wie eine Ellipse mit gleich langen Halbachsen $a = b$.

Ein Kreis ist also ein Spezialfall einer Ellipse bzw. eine Ellipse ist eine Verallgemeinerung eines Kreises.

Satz 17.3.3

Die Fläche A einer Ellipse mit Halbachsen a und b ist ✎

$$A = A_{\text{Ellipse}} = \pi ab$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass unsere Ellipse wie in der Definition beschrieben aus einem Kreis mit Radius a entsteht.

Beim Strecken senkrecht zu einer «zentralen Geraden» mit Streckfaktor λ ändern sich Flächeninhalte mit dem Faktor λ: Man betrachte etwa Rechtecke, deren eine Seite parallel zur «zentralen Geraden» ist, oder Dreiecke, die eine Seite parallel zur «zentralen Geraden» haben. Jede Fläche lässt sich annähern durch solche Rechtecke und Dreiecke.

Weil unsere Ellipse aus dem Kreis mit Radius a durch eine solche «senkrechte Streckung» mit Streckfaktor $\lambda = \frac{b}{a}$ entsteht, folgt

$$A_{\text{Ellipse}} = ✎ \lambda \cdot A_{\text{Kreis}} = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi \frac{a^2 b}{a} = \pi ab$$

□

17.3.4. Im Gegensatz zur Fläche ist die Berechnung des Umfangs einer Ellipse nicht so leicht, siehe etwa Wikipedia: Ellipse, Umfang.

Man kann nicht so einfach mit der Streckung argumentieren wie bei der Fläche, denn Längen von Kurven werden bei einer solchen Streckung nicht einfach mit einem Faktor multiplizert. Das sieht man bereits bei Geradenstücken, die verschiedene Winkel zur «zentralen Geraden» haben (etwa senkrecht oder parallel).

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

17.3.5. Jede Ellipse in einem Koordinatensystem lässt sich, ähnlich wie ein Kreis, algebraisch beschreiben. Besonders einfach ist dies für Ellipsen, deren Symmetrieachsen mit den Koordinatenachsen übereinstimmen.

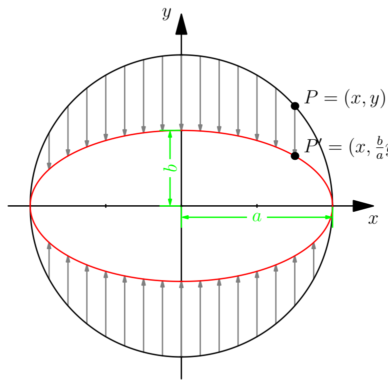
Satz 17.3.6 Ellipsengleichung (Ursprung als Mittelpunkt, Koordinatenachsen als Symmetrieachsen)

Seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei positive reelle Zahlen und sei ein Koordinatensystem in der Zeichenebene fixiert. Die Ellipse mit horizontaler Halbachse a, vertikaler Halbachse b und Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$ ist die Menge aller Punkte (x, y) der Zeichenebene, deren Koordinaten die folgende Gleichung erfüllen: ✎

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Beweis. Unsere Ellipse entsteht aus dem Kreis mit Radius a um den Ursprung durch eine vertikale Streckung mit Streckfaktor $\frac{b}{a}$, siehe Skizze.

Diese vertikale Streckung bildet einen beliebigen Punkt $P = (x, y)$ auf den Punkt $P' = (x, \frac{b}{a}y)$ ab, d. h. die x-Koordinate bleibt gleich, die y-Koordinate wird mit $\frac{b}{a}$ multipliziert.



Der Kreis mit Radius a ist algebraisch beschrieben durch die Gleichung ✎

$$x^2 + y^2 = a^2 \iff y^2 = a^2 - x^2$$
$$\iff y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Zwischenbemerkungen:

- Die letzte Gleichung zeigt, wie man zu jeder x-Koordinate $x \in [-a, a]$ die y-Koordinate der beiden zugehörigen Punkte auf dem Kreis berechnen kann. Mit anderen Worten:
- Der obere Halbkreis ist der Graph der Funktion $k_+(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ mit Definitionsbereich $[-a, a]$.
- Der untere Halbkreis ist der Graph der Funktion $k_-(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$ mit Definitionsbereich $[-a, a]$.

Beim Strecken wird die y-Koordinate mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ multipliziert. Die Punkte der Ellipse erfüllen also die Gleichung ✎

$$y = \frac{b}{a} \cdot \left(\pm\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \iff y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$
$$\iff \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)$$
$$\iff \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \square$$

17.3.7. Im Fall $a = b$ lautet die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, was per Multiplikation mit a^2 zur Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$ äquivalent ist.

Aufgabe A10 Wie lautet die Ellipsengleichung der Ellipse mit horizontaler Halbachse $a = 2$ und vertikaler Halbachse $b = 5$? Gib die Funktion $f(x)$ an, deren Graph die obere Hälfte dieser Ellipse ist. Gib die Funktion $g(x)$ an, deren Graph die unter Hälfte dieser Ellipse ist. Für welche x-Werte sind diese Funktionen definiert? Welche Punkte dieser Ellipse haben die x-Koordinate 1? Welche Punkte dieser Ellipse haben die y-Koordinate 1?

Aufgabe A11 Für jede der unten angegebenen Gleichungen von Ellipsen (mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen und (somit) dem Ursprung als Mittelpunkt):

- Geben Sie die beiden Halbachsen an und skizzieren Sie die Ellipse in einem Koordinatensystem.
  Wie viele Punkte der Ellipse haben schätzungsweise wenigstens eine ganzzahlige Koordinate?
- Berechnen Sie **alle** Punkte $P = (x, y)$ der Ellipse, für die mindestens eine der beiden Koordinaten eine ganze Zahl ist. Die Koordinaten der Punkte sind exakt anzugeben und auf eine Nachkommastelle gerundet.
  Zeichnen Sie die berechneten Punkte in Ihre Skizze ein.
  Passen die berechneten Punkte zu Ihrer Skizze?

a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

17.3.8. Wie kann man zeigen, dass die Gleichung $2x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$ eine Ellipse beschreibt (mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen)? Ausserdem sind ihre Halbachsen anzugeben.

Wir zeigen dazu, dass die gegebene Gleichung zu einer Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ äquivalent ist, für geeignete positive reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$.

Lösungsweg 1: Dies geht wie folgt:

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1 \qquad &\iff \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \\ &\iff \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

Die rechte Gleichung ist die Standardgleichung einer Ellipse (mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen). Man kann von ihr sofort die Halbachsen ablesen:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lösungsweg 2: Wenn man vermutet/weiss, dass es sich um eine Ellipse mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen handelt, kann man auch die Halbachsen über die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ausrechnen:

- Schnittpunkt mit der x-Achse (die durch $y = 0$ definiert ist): Setze $y = 0$ in der gegebenen Gleichung $2x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$:

  $$2x^2 + \frac{4}{3} \cdot 0 = 1 \qquad \iff \qquad x^2 = \frac{1}{2} \qquad \iff \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Also sind die Schnittpunkte mit der x-Achse $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Die gesuchte Halbachse ist also (vermutlich) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse (die durch $x = 0$ definiert ist): Setze $x = 0$ in der gegebenen Gleichung:

  $$2 \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot y^2 = 1 \qquad \iff \qquad y^2 = \frac{3}{4} \qquad \iff \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Also sind die Schnittpunkte mit der y-Achse $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Die gesuchte Halbachse ist also (vermutlich) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Um wirklich sicherzugehen, dass dies die Halbachsen der Ellipse sind, rechnet man wie folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 2x^2 + \frac{4}{3}y^2$$

Die gegebene Gleichung $2x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$ ist also gleichbedeutend zur Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den berechneten Werten von a und b.

Aufgabe A12 Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen Ellipsen beschreiben (deren Symmetrieachsen die Koordinatenachsen sind).

Hinweis: Empfohlenes Vorgehen wie in 17.3.8.

(a) $2x^2 + y^2 = 1$
(b) $\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{100}y^2 = 1$
(c) $25x^2 + 12y^2 = 3$ Hinweis: Gleichung zuerst durch ... teilen, damit rechts eine 1 steht.
(d) $-x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ Hinweis: Subtrahiere zuerst auf beiden Seiten 4, dividiere dann durch ....

Merke 17.3.9

Betrachte eine beliebige Gleichung der Form

$$Ax^2 + By^2 = C$$

für reelle Zahlen A, B und $C \in \mathbb{R}$.

Wenn die drei Zahlen A, B und C dasselbe Vorzeichen haben (also entweder alle drei Zahlen positiv oder alle drei Zahlen negativ sind), so beschreibt diese Gleichung eine Ellipse mit Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen (und dann automatisch dem Ursprung als Mittelpunkt).

Beweis. Man dividiere die Gleichung durch $C \neq 0$. Dann hat die Gleichung die Gestalt $A'x^2 + B'y^2 = 1$ mit $A' = \frac{A}{C} > 0$ und $B' = \frac{B}{C} > 0$. Setzt man $a := \frac{1}{\sqrt{A'}}$ und $b := \frac{1}{\sqrt{B'}}$ (erlaubt wegen $A' > 0$ und $B' > 0$), so gelten

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{\frac{1}{A'}} = A'x^2$$

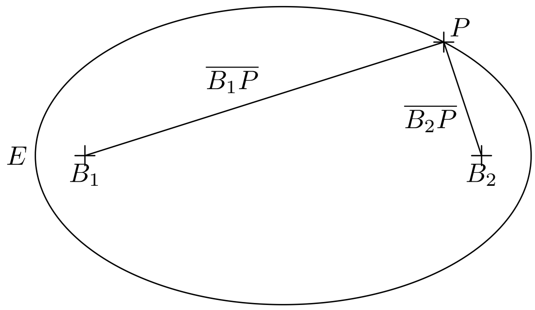
und analog $\frac{y^2}{b^2} = B'y^2$. Also ist $A'x^2 + B'y^2 = 1$ gleichbedeutend zur Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ einer Ellipse mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen. □

Ellipse als geometrischer Ort

17.3.10. Ich erinnere an die Gärtnerkonstruktion einer Ellipse: Zwei Holzpflöcke, ein Seil, ein «Stift» zum markieren der Ellipse.

17.3.11. Ursprünglich hatten wir Ellipsen wie folgt definiert:

Gegeben:
- zwei Punkte B_1 und B_2, die sogenannten **Brennpunkte**;
- eine Entfernung $d > \overline{B_1B_2}$.



Dann ist die zugehörige **Ellipse** E die Menge (= der geometrische Ort) aller Punkte P in der Zeichenebene, für die die Summe der beiden Abstände zu den Brennpunkten d beträgt («konstante Abstandssumme»).

$$E = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$$

17.3.12. Wir übersetzen die Bedingung «konstante Abstandssumme» nun in eine algebraische Bedingung (zumindest für schöne Lagen der Brennpunkte). Wie bei der Parabel legen wir dafür zunächst ein Koordinatensystem fest, so dass wir die algebraische Bedingung als Gleichung für die Koordinaten eines Punktes $P = (x, y)$ schreiben können.

17.3.13. Wir werden dadurch sehen, dass die obige «neue» Definition einer Ellipse als «deformierter/gestreckter Kreis» mit der «alten» Definition als geometrischer Ort übereinstimmt.

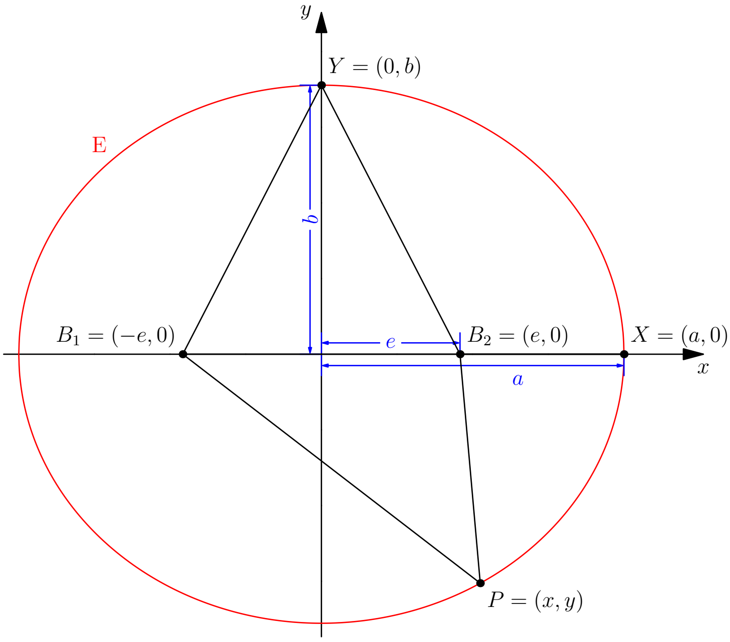
Genaugenommen hätten wir die gestreckten Kreise zunächst als Ellipsen' oder ähnlich bezeichnen sollen.

17.3.14. Für beliebiges $e \geq 0$ betrachten wir die beiden Brennpunkte✎

$$B_1 = (-e, 0) \qquad B_2 = (e, 0)$$

siehe Zeichnung. Ausserdem fixieren wir eine reelle Zahl $d > 2e$ als «Abstandssumme» und betrachten die (rot gezeichnete) Ellipse✎g

$$E = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$$



Man nennt e die **(lineare) Exzentrizität** der Ellipse. Sie gibt an, wie weit die Brennpunkte vom Zentrum/Mittelpunkt der Ellipse entfernt liegen.
Sei X der Schnittpunkt der Ellipse mit der positiven x-Achse und sei a seine x-Koordinate. Analog sei Y der Schnittpunkt der Ellipse mit der positiven y-Achse und sei b seine y-Koordinate. Dann gelten✎

$$X = (a, 0) \qquad\qquad Y = (0, b)$$

Die Zahl a ist die längere Halbachse, die Zahl b die kürzere Halbachse der Ellipse.

Satz 17.3.15 Ellipse als geometrischer Ort = Ellipse als gestreckter Kreis

Unter den obigen Voraussetzungen gilt für jeden beliebigen Punkt $P = (x, y)$ der Zeichenebene:

$$\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dies bedeutet, dass die als geometrischer Ort definierte Ellipse E mit der als «gestreckter Kreis» definierten Ellipse übereinstimmt.

Beweis. Wir überlegen uns zuerst, wie die beiden Parameter Abstandssumme d und Exzentrizität e mit den beiden Halbachsen a und b zusammenhängen.

Da der Punkt $X = (a, 0)$ auf der Ellipse E liegt, gilt ✎

$$d = \overline{XB_1} + \overline{XB_2} = a + e + a - e = 2a \qquad \text{also} \qquad d = 2a$$

Da der Punkt $Y = (0, b)$ auf der Ellipse E liegt und gleich weit von beiden Brennpunkte entfernt ist, gilt ✎

$$d = \overline{YB_1} + \overline{YB_2} = 2\overline{YB_1} = 2\overline{YB_2} \qquad \text{also} \qquad \overline{YB_1} = \overline{YB_2} = \frac{d}{2} = a$$

Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus Ursprung, B_2 und Y hat also die Länge a und Pythagoras liefert ✎

$$a^2 = b^2 + e^2 \qquad \text{oder äquivalent} \qquad e^2 = a^2 - b^2$$

Wir zeigen nun (durch eine leider relativ lange Rechnung), dass aus der Gleichung $\overline{PB_1}+\overline{PB_2}=d$ die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ folgt. ✎

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \overline{PB_1}+\overline{PB_2} &=& d & \\
\iff & \sqrt{(x-(-e))^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2} &=& 2a & \\
\iff & \sqrt{(x+e)^2+y^2} &=& 2a-\sqrt{(x-e)^2+y^2} & \text{quadriere} \\
\boxed{\implies} & (x+e)^2+y^2 &=& \left(2a-\sqrt{(x-e)^2+y^2}\right)^2 & \\
\iff & (x+e)^2+y^2 &=& 4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2 & \\
\iff & x^2+2ex+e^2+y^2 &=& 4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+x^2-2ex+e^2+y^2 & \\
\iff & 2ex &=& 4a^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}-2ex & \\
\iff & 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &=& 4a^2-4ex & \\
\iff & a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &=& a^2-ex & \text{quadriere} \\
\boxed{\implies} & a^2\cdot\left((x-e)^2+y^2\right) &=& \left(a^2-ex\right)^2 & \\
\iff & a^2\cdot\left((x-e)^2+y^2\right) &=& a^4-2a^2ex+e^2x^2 & \\
\iff & a^2\cdot(x^2-2ex+e^2+y^2) &=& a^4-2a^2ex+e^2x^2 & \\
\iff & a^2x^2-2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2 &=& a^4-2a^2ex+e^2x^2 & \\
\iff & a^2x^2+a^2e^2+a^2y^2 &=& a^4+e^2x^2 & \text{ersetze } e^2=a^2-b^2 \\
\iff & a^2x^2+a^2(a^2-b^2)+a^2y^2 &=& a^4+(a^2-b^2)x^2 & \\
\iff & a^2x^2+a^4-a^2b^2+a^2y^2 &=& a^4+a^2x^2-b^2x^2 & \\
\iff & -a^2b^2+a^2y^2 &=& -b^2x^2 & \\
\iff & b^2x^2+a^2y^2 &=& a^2b^2 & \\
\iff & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &=& 1 &
\end{array}
$$

Umgekehrt muss man zeigen, dass aus $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (was wir ab jetzt annehmen) die Gleichung $\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2}=d$ folgt.
Auflösen von $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nach y^2 liefert $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Auflösen von $e^2=a^2-b^2$ nach e liefert $e=\sqrt{a^2-b^2}$. Damit können wir die beiden Ausdrücke unter den Wurzelzeichen umschreiben.

$$
\begin{aligned}
(x\pm e)^2+y^2 &= \left(x\pm\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) && = x^2\pm 2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} \\
&= x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\pm 2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2 && = \frac{x^2}{a^2}(a^2-b^2)\pm 2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2 \\
&= \left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\pm a\right)^2 && = \left(\underbrace{a\pm\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}}_{\text{Wir behaupten, dass dies} \geq 0 \text{ ist.}}\right)^2
\end{aligned}
$$

Aus $\frac{x^2}{a^2}\leq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ folgt $-1\leq\frac{x}{a}\leq 1$. Multiplikation mit $\sqrt{a^2-b^2}\geq 0$ liefert die beiden folgenden mittleren Ungleichungen, die beiden Ungleichungen links und rechts sind offensichtlich.

$$-a\leq-\sqrt{a^2-b^2}\leq\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\leq\sqrt{a^2-b^2}\leq a$$

Davon sind für uns wichtig

$$-a\leq\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\quad\text{und}\quad\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\leq a\qquad\text{bzw. gleichbedeutend}\qquad 0\leq a+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\quad\text{und}\quad 0\leq a-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

Dies zeigt die oben durch Unterklammerung angedeutete Behauptung. Nun können wir die gewünschte Gleichheit zeigen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= \sqrt{\left(a+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)^2} \\
\text{(da beide quadrierten Ausdrücke} \geq 0 \text{ sind, siehe oben)}\quad &= a+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+a-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2} \\
&= 2a=d
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe A13

(a) Welche Exzentrizität e und welche Abstandssumme d hat die Ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$? Wo liegen ihre Brennpunkte? Skizzieren Sie die Ellipse und überzeugen Sie sich, dass die von Ihnen berechneten Werte für e und d plausibel sind.
Hinweis: Folgerung 17.3.16

(b) Welche Exzentrizität e und welche Abstandssumme d hat die Ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$? Wo liegen ihre Brennpunkte?

(c) Betrachten Sie die Ellipse mit den beiden Brennpunkten $(-4,0)$ und $(4,0)$, die durch den Punkt $(0,3)$ geht. Geben Sie diese Ellipse in der Form $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ an.

(d) Betrachten Sie die Ellipse mit den beiden Brennpunkten $B_1=(-3,0)$ und $B_2=(3,0)$, die durch den Punkt $P=(3,\frac{32}{10})=(3,3.2)$ geht. Geben Sie diese Ellipse in der Form $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ an. (Skizze empfohlen)

Folgerung 17.3.16

Für jede Ellipse mit längerer Halbachse a, kürzerer Halbachse b, Exzentrizität e und Abstandssumme d gilt:

$$d = 2a$$
$$a^2 = b^2 + e^2$$

(Es gelten $a \geq b > 0$ und $d > 2e \geq 0$.)

Beweis. Diese Formeln wurden am Anfang des Beweises von Satz 17.3.15 gezeigt. □

17.4 Hyperbeln als geometrischer Ort und algebraisch

17.4.1. Die folgenden Aufgaben führen Hyperbeln in Beispielen ein und sind nebenbei sinnvolle Aufgaben zum Umformen von Gleichungen. Die abstrakte Definition einer Hyperbel folgt danach.

Aufgabe A14 Betrachten Sie die beiden Brennpunkte $B_1=(-5,0)$ und $B_2=(5,0)$ und die «Abstandsdifferenz» 8. Sei $P=(x,y)$ ein Punkt der Zeichenebene, für den

$$\overline{PB_1}-\overline{PB_2}=8$$

gilt. Folgern Sie, dass die beiden Koordinaten x und y von P die **Hyperbel-Gleichung**

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$

erfüllen. (Man beachte das Minuszeichen. Das ist der einzige Unterschied zur Ellipsengleichung.)

Hinweis: Erstellen Sie eine Skizze, um die beiden Abstände $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ mit Hilfe der Koordinaten x und y auszudrücken. Formen Sie die Gleichung $\overline{PB_1}-\overline{PB_2}=8$ dann schrittweise um und orientieren Sie sich dabei an den Umformungen im Beweis von Satz 17.3.15. Es sind einige Umformungsschritte (wohl mindestenz zehn, in der Musterlösung etwa 16) vorzunehmen.

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Hyperbel zu den angegebenen Brennpunkten und zur Abstandsdifferenz $d=8$ eine Teilmenge der durch die Hyperbelgleichung definierten Menge ist. In Wirklichkeit sind diese beiden Mengen gleich.

Aufgabe A15 (Diese Aufgabe setzt Aufgabe A14 fort, kann aber unabhängig davon bearbeitet werden.)

Betrachten Sie die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$

(a) Lösen Sie die Gleichung nach y auf.

(b) Welche x-Werte darf man in den Ausdruck für y einsetzen? (Definitionsmenge)

(c) Zeichnen Sie die Hyperbel für x-Werte im Intervall $[-10, 10]$ (oder in einem grösseren Intervall).

(d) Zeichen Sie von Hand Geraden ein, denen sich die Hyperbel (vermutlich) beliebig nahe nähert, wenn x sehr gross oder sehr klein wird. Solche Geraden heissen **Asymptoten**.

(e) Welche Steigungen haben Ihre Asymptoten? Wie kann man sie in der Form $y = mx + q$ beschreiben?

(f) Finden Sie ein möglichst überzeugendes Argument dafür, dass die beiden Geraden $y = \frac{3}{4}x$ und $y = -\frac{3}{4}x$ Asymptoten der Hyperbel sind, d. h. dass sich die Hyperbel diesen beiden Geraden für x gegen $\pm\infty$ (= plus oder minus Unendlich) beliebig nahe nähert.

Aufgabe A16 Betrachten Sie die beiden Brennpunkte $B_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $B_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und die Abstandsdifferenz $2\sqrt{2}$. Sei $P = (x, y)$ ein Punkt der Zeichenebene, für den

besser allgemeine Brennpunkte $(-e, -e)$ und (e, e) und allgemeines d?

$$\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = 2\sqrt{2}$$

gilt. Folgern Sie, dass die beiden Koordinaten x und y von P die Gleichung

$$xy = 1 \qquad \text{oder äquivalent} \qquad y = \frac{1}{x}$$

erfüllen.

Hinweis: Vorgehen ähnlich wie bei Aufgabe A14.

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Hyperbel zu den angegebenen Brennpunkten und zur Abstandsdifferenz $d = 2\sqrt{2}$ eine Teilmenge der durch $xy = 1$ definierten Menge ist. In Wirklichkeit sind diese beiden Mengen gleich.

Deswegen wird der Graph der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ bisweilen als Hyperbel bezeichnet.

Definition 17.4.2 Hyperbel als geometrischer Ort

Seien B_1 und B_2 zwei beliebige, aber verschiedene Punkte der Zeichenebene (genannt **Brennpunkte**) und sei d eine relle Zahl mit $0 < d < \overline{B_1B_2}$ (genannt **Abstandsdifferenz**). Dann ist die zugehörige **Hyperbel** H die Menge aller Punkte P der Zeichenebene, deren Abstandsdifferenz $\overline{PB_1} - \overline{PB_2}$ zu den beiden Brennpunkten d oder $-d$ ist:

$$\begin{aligned} H &= \{P \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \pm d\} \\ &= \{P \mid \left|\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\right| = d\} \end{aligned}$$

Die Hyperbel H besteht aus zwei **Hyperbel-Ästen**: Die Punkte P mit $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ bilden den einen Ast, die Punkte P mit $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = -d$ den anderen.
Genau dann nennt man eine Teilmenge der Ebene Hyperbel, wenn sie auf die soeben beschriebene Weise entsteht.

Satz 17.4.3 Hyperbelgleichung

Sei $e > 0$ eine positive reelle Zahl (genannt **Exzentrizität**) und sei d eine relle Zahl mit $0 < d < 2e$.
Dann ist die Hyperbel zu den beiden Brennpunkten $B_1 = (-e, 0)$ und $B_2 = (e, 0)$ mit Abstandsdifferenz d genau die Menge aller Punkte $P = (x, y)$ der Zeichenebene, die die **Hyperbel-Gleichung**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(man beachte das Minuszeichen)}$$

erfüllen, wobei a und b fixierte positive reelle Zahlen sind, die sich wie folgt aus e und d berechnen lassen:

$$a = \frac{d}{2} \qquad a \text{ heisst } \textbf{Haupt-Halbachse} \text{ (semi major axis)}$$

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} \qquad b \text{ heisst } \textbf{Neben-Halbachse} \text{ (semi minor axis)}$$

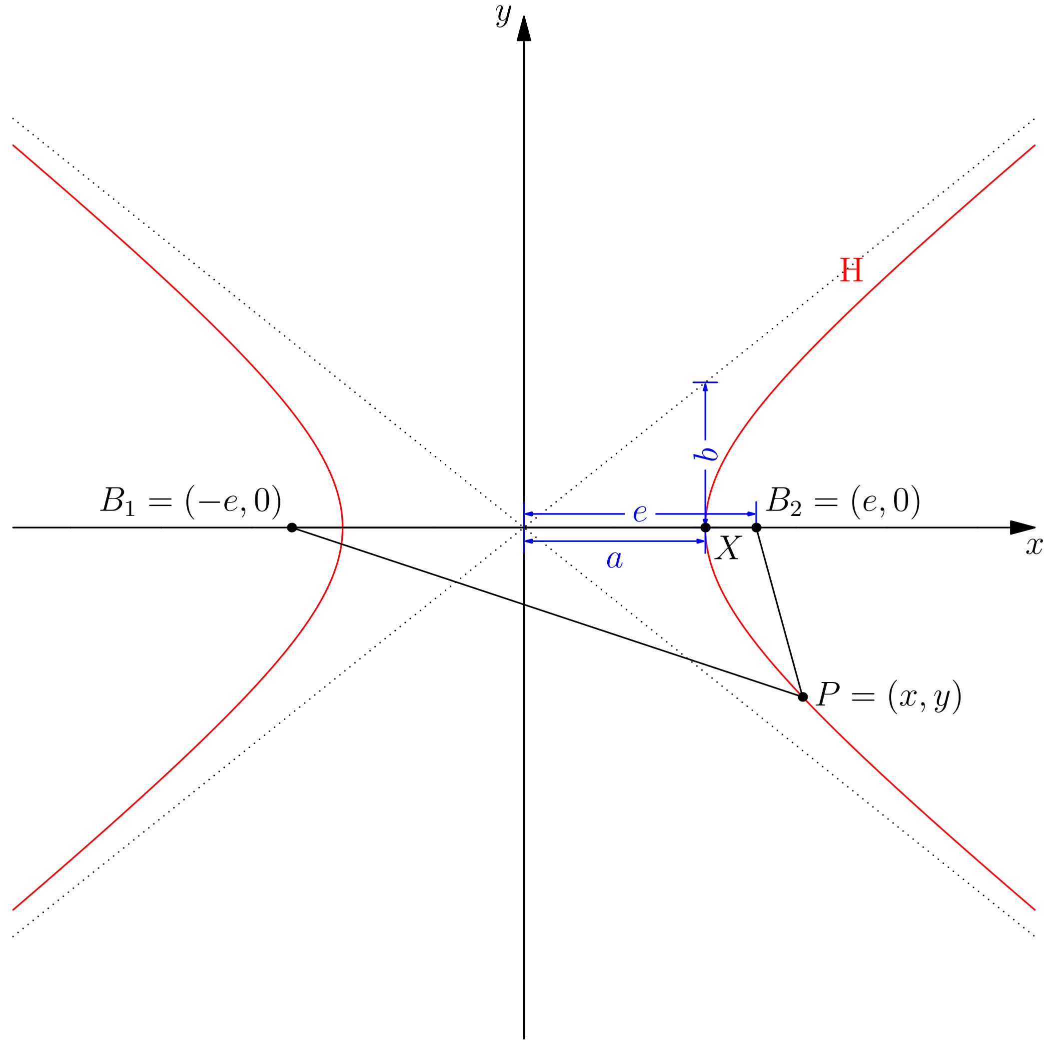
Bei der Ellipse ist stets diejenige Halbachse die längere, auf der die beiden Brennpunkte liegen. Bei der Hyperbel ist dies nicht der Fall: a kann grösser, kleiner oder genauso gross wie b sein.

Beweis. Der Beweis ist fast identisch mit dem Beweis von Satz 17.3.15 und wird dem interessierten Leser überlassen. □

17.4.4. Gärtnerkonstruktion der Hyperbel erklären: Die Enden eines langen Seils an den Brennpunkten befestigen. Seilschlaufe durch Schlüsselring ziehen, einen Punkt der Schlaufe markieren. An markiertem Punkt das Seil spannen, Schlüsselring läuft auf Hyperbel.
17.4.5. Die in der Zeichnung gepunktet gezeichneten Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$ sind Asymptoten an die Hyperbel (vgl. Aufgabe A15).

Die Zahl a ist geometrisch leicht zu interpretieren: Sie ist der Abstand vom Zentrum der Hyperbel (= dem Ursprung des Koordinatensystems) zu den beiden «nächsten Punkten» auf der Hyperbel (= den Schnittpunkten der Hyperbel mit der Geraden durch die beiden Brennpunkte), also eine Art Halbachse wie bei der Ellipse. (Warum ist $2a = d$ die Abstandsdifferenz?)

Die Zahl b taucht geometrisch nicht so offensichtlich auf: Die Asymptoten an die Hyperbel haben die Steigung $\frac{b}{a}$ und $-\frac{b}{a}$, vgl. Zeichnung.



17.5 Einschub: Transformieren von Graphen/Kurven/Nullstellenmengen

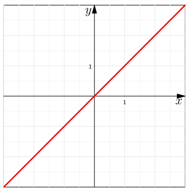
17.5.1. Es kommt häufig vor, dass man eine algebraisch beschriebene Teilmenge der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ in einer der folgenden Arten transformieren (= umwandeln, umgestalten) möchte:

- verschieben;
- in einer Koordinatenrichtung strecken;
- zentrisch strecken;
- spiegeln (an einer Achse oder einem Punkt);
- drehen.

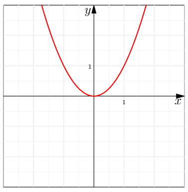
Zum Beispiel kennen Sie die Gleichung einer Ellipse mit Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems und könnten sich fragen, wie man daraus die Gleichung der um einen gewissen Vektor verschobenen Ellipse erhält.

Ziel der folgenden Aufgabe ist, dass sie selbst herausfinden, wie das geht.

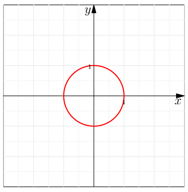
Aufgabe A17



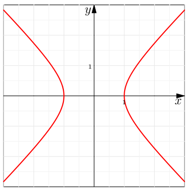
Ursprungsgerade der Steigung 1 $y = x$



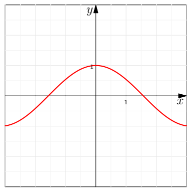
Standardparabel $y = x^2$



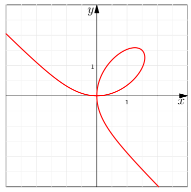
Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$



Standardhyperbel $x^2 - y^2 = 1$



Graph der Kosinusfunktion $y = \cos(x)$



Folium (= Blatt) von Descartes, Kartesisches Blatt $x^3 + y^3 = 3xy$

Die sechs Abbildungen zeigen jeweils eine durch Gleichungen definierte Teilmenge der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$. Beispielsweise besteht das Blatt von Descartes ganz rechts aus allen Punkten $P = (x, y)$ der Koordinatenebene, die die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ erfüllen.

Ermitteln Sie den Inhalt aller Boxen. Hinweise zum Vorgehen:

- Die Teilaufgaben sind durch Nachdenken zu lösen oder experimentell mit Geogebra: GeoGebra zeichnet jede der obigen Mengen, wenn man die entsprechende Gleichung eingibt (beispielsweise zeichnet $x^3+y^3 = 3xy$ das kartesische Blatt).
- Auch wenn eine Teilaufgabe durch Nachdenken gelöst wurde: Testen Sie Ihr Resultat am Blatt von Descartes mit GeoGebra (einerseits ein guter Test, andererseits werden Sie mit GeoGebra vertraut).

(a) Man kann jede der obigen Figuren (und jede in ähnlicher Weise definierte Menge) um 3 Einheiten nach rechts (= in x-Richtung) verschieben, indem man in der definierenden Gleichung
  - x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$ ersetzt.

(b) Verschiebung um 2 Einheiten in y-Richtung: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(c) Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(d) Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(e) «axiale Streckung» mit dem Faktor 2 in x-Richtung (mit y-Achse als Zentrum): Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(f) «axiale Streckung» mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung (mit y-Achse als Zentrum): Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(g) «axiale Streckung» mit dem Faktor 3 in y-Richtung (mit x-Achse als Zentrum): Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(h) Streckung mit Faktor 2 in x-Richtung und Faktor 3 in y-Richtung: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(i) zentrische Streckung mit Streckfaktor λ und dem Ursprung als Streckzentrum: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(j) Spiegelung an der x-Achse: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(k) Spiegelung an der y-Achse: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(l) Punktspiegelung am Ursprung: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(m) Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(n) Drehung um den Ursprung um $90°$: Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

(o) Drehung um den Ursprung um einen beliebigen Winkel α (Hinweis: Sinus und Kosinus verwenden): Ersetze x durch $\boxed{}$ und y durch $\boxed{}$.

Merke 17.5.2 Änderung der definierenden Gleichung bei gewissen Transformationen

Wir betrachten eine Teilmenge der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$, die durch eine Gleichung in den Variablen x und y gegeben ist.
Die folgende Übersicht gibt an, wie man die Variabeln x und y in der gegebenen Gleichung ersetzen muss, um die Teilmenge wie angegeben zu transformieren.

(Es genügt, sich die beiden durch Boxen hervorgehobenen Zeilen zu merken, denn alle anderen Zeilen sind Spezialfälle davon (abgesehen von den mit ⚙ und ⛯ markierten Zeilen ganz unten).)

- Verschiebungen der Teilmenge: ✎

  Verschiebung um c Einheiten in x-Richtung: $x \rightsquigarrow x-c$ $\quad y \rightsquigarrow y$

  Verschiebung um d Einheiten in y-Richtung: $x \rightsquigarrow x$ $\quad y \rightsquigarrow y-d$

  $\boxed{\text{Verschiebung um den Vektor } \binom{c}{d}\text{:}}$ $x \rightsquigarrow x-c$ $\quad y \rightsquigarrow y-d$

- einige Streckungen der Teilmenge: ✎

  axiale Streckung um den Faktor $a \neq 0$ in x-Richtung (mit y-Achse als Streckzentrum): $x \rightsquigarrow \frac{x}{a}$ $\quad y \rightsquigarrow y$

  axiale Streckung um den Faktor $b \neq 0$ in y-Richtung (mit x-Achse als Streckzentrum): $x \rightsquigarrow x$ $\quad y \rightsquigarrow \frac{y}{b}$

  $\boxed{\text{Streckung mit Faktor } a \neq 0 \text{ in } x\text{-Richtung und Faktor } b \neq 0 \text{ in } y\text{-Richtung:}}$ $x \rightsquigarrow \frac{x}{a}$ $\quad y \rightsquigarrow \frac{y}{b}$

  zentrische Streckung mit Streckfaktor λ (und Ursprung als Streckzentrum): $x \rightsquigarrow \frac{x}{\lambda}$ $\quad y \rightsquigarrow \frac{y}{\lambda}$

- einige Spiegelungen der Teilmenge: ✎

  Spiegelung an der x-Achse: $x \rightsquigarrow \frac{x}{1} = x$ $\quad y \rightsquigarrow \frac{y}{-1} = -y$

  Spiegelung an der y-Achse: $x \rightsquigarrow \frac{x}{-1} = -x$ $\quad y \rightsquigarrow y$

  Punktspiegelung am Ursprung: $x \rightsquigarrow \frac{x}{-1} = -x$ $\quad y \rightsquigarrow \frac{y}{-1} - y$

  ⚙ Spiegelung an der ersten Winkelhalbierende: $x \rightsquigarrow y$ $\quad y \rightsquigarrow x$

- einige Drehungen der Teilmenge:

  ⛯ Drehung um den Ursprung um 90°: $x \rightsquigarrow y$ $\quad y \rightsquigarrow -x$

  ⛯ Drehung um den Ursprung um einen Winkel α: $x \rightsquigarrow \cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y$ $\quad y \rightsquigarrow \sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y$

17.5.3. Mit einer **axialen Streckung** ist die Streckung von einer *Achse* aus in die dazu senkrechte Richtung gemeint (mit einem festen Streckfaktor). Jede Gerade kann als Achse einer axialen Streckung verwendet werden.

Bei uns ist die Achse meist eine der Koordinatenachsen.

Wenn man von einer axialen Streckung in x-Richtung spricht, so meint man eine axiale Streckung von der y-Achse aus. Wenn der Streckfaktor beispielsweise 3 beträgt, so wird die x-Koordinate jedes Punktes mit 3 multipliziert, die y-Koordinate bleibt unverändert.

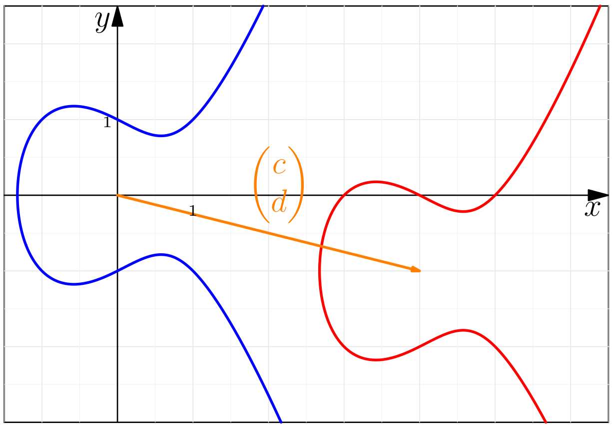
Beweis durch aussagekräftige Beispiele. Die blaue Menge in der Zeichnung ist definiert durch die Gleichung

$$y^2 = x^3 - x + 1$$

Dies bedeutet, dass sie genau aus denjenigen Punkten (x, y) besteht, für die diese Gleichung stimmt.

Verschiebung um einen Vektor: Während Erklärung Punkt $(5.7, 1)$ einzeichnen als (x, y) auf roter Kurve, $(x - c, y - d)$ auf blauer Kurve.

Die rote Menge ist die Verschiebung der blauen Menge um den Vektor $\binom{c}{d} = \binom{4}{-1}$. Wir möchten sie ebenfalls durch eine Gleichung beschreiben.



Sei (x, y) ein beliebiger Punkt der Koordinatenebene.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent: ✎

- $(x, y) \in$ rote Menge (rot schreiben)
- $(x - c, y - d) = (x - 4, y + 1) \in$ blaue Menge
- $(x - 4, y + 1)$ erfüllt die definierende Gleichung der blauen Menge, d. h. es gilt

$$(y + 1)^2 = (x - 4)^3 - (x - 4) + 1$$

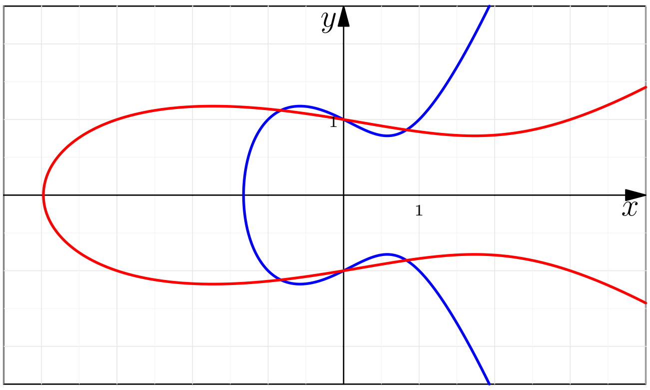
Also definiert diese Gleichung die rote Menge.

Sie entsteht aus der Gleichung der blauen Menge durch die Ersetzungen

$$x \rightsquigarrow x - c = x - 4 \quad \text{und} \quad y \rightsquigarrow y - d = y - (-1) = y + 1$$

Axiale Streckung an einer Koordinatenachse:

Wir betrachten dieselbe blaue Menge wie oben. Die rote Menge ist nun deren axiale Streckung in x-Richtung mit Streckfaktor $a = 3$.



Sei (x, y) ein beliebiger Punkt der Koordinatenebene.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent: ✎

- $(x, y) \in$ rote Menge (rot schreiben)
- $(\frac{1}{a}x, y) = (\frac{1}{3}x, y) \in$ blaue Menge
- $(\frac{1}{3}x, y)$ erfüllt die definierende Gleichung der blauen Menge, d. h. es gilt

$$y^2 = \left(\frac{1}{3}x - 4\right)^3 - \left(\frac{1}{3}x - 4\right) + 1$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der roten Menge.

Sie entsteht aus der Gleichung der blauen Menge durch die Ersetzungen

$$x \rightsquigarrow \frac{1}{a}x = \frac{1}{3}x \quad \text{und} \quad y \rightsquigarrow y$$

□

Anwendungen von Merke 17.5.2

Beispiel 17.5.4 (Von der Normalparabel über Transformationen zur Scheitelform)**.** Wir starten mit der Normalparabel $y = x^2$.

Wenn man sie um den Faktor a in y-Richtung streckt, so ist die erhaltene Menge beschrieben durch ✎

$$\frac{y}{a} = x^2 \qquad \text{oder äquivalent} \qquad y = ax^2$$

Verschiebt man diese Menge um den Vektor (c, d), so wird die verschobene Menge beschrieben durch ✎

$$\frac{y-d}{a} = (x-c)^2 \quad \text{oder} \quad y - d = a(x-c)^2 \quad \text{oder} \quad y = a(x-c)^2 + d$$

Ganz rechts steht die wohlbekannte Scheitelform einer Parabel mit Scheitel $S = (c, d)$ und Öffnungsfaktor a.

17.5.5 (Achtung: Beim Transformieren kommt es im Allgemeinen auf die Reihenfolge an)**.** Hätten wir im vorigen Beispiel 17.5.4 die Normalparabel zuerst verschoben und dann in y-Richtung gestreckt, so hätten wir zuerst die Gleichung $y - d = (x-c)^2$ erhalten und daraus $\frac{y}{a} - d = (x-c)^2$, was äquivalent ist zu

$$y = a(x-c)^2 + ad$$

17.5.6. Der Inhalt der beiden folgenden Merkeboxen steht in vielen Formelsammlungen. Wenn man versteht, wie die angegebenen Geradengleichungen entstehen, muss man solche Trivialitäten nicht mehr nachschauen und hat hoffentlich Zeit für Wichtigeres. Dies zu verstehen, ist der Sinn der beiden folgenden Aufgaben.

⚒ Aufgabe A18

(a) Starte mit der Gleichung $y = x$ der ersten Winkelhalbierenden (= Ursprungsgerade mit Steigung 1). Bastle daraus mit Hilfe zweier Transformationen die Gleichung der Geraden durch den Punkt $(3, -2)$ mit Steigung $\frac{1}{5}$. Dabei ist Merke 17.5.2 zu verwenden.
Welche Gleichung könnte man alternativ lösen, um auf dasselbe Resultat zu kommen?

(b) Verallgemeinere deine Bastelei und erkläre allgemein, wie man ausgehend von der Gleichung $y = x$ auf die Aussage von Merke 17.5.7 kommt.

Merke 17.5.7 Gerade durch Punkt mit Steigung

Die Gerade durch den Punkt $P = (x_P, y_P)$ mit Steigung m ist beschrieben durch die Gleichung

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

⚒ Aufgabe A19

(a) Starte mit der Gleichung $y = x$ der ersten Winkelhalbierenden (= Ursprungsgerade mit Steigung 1). Bastle daraus mit Hilfe zweier Transformationen die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $P = (-1, 1)$ und $Q = (3, -2)$. Dabei ist Merke 17.5.2 zu verwenden.
Welches Gleichungssystem könnte man alternativ lösen, um auf dasselbe Resultat zu kommen?

(b) Verallgemeinere deine Bastelei und erkläre allgemein, wie man ausgehend von der Gleichung $y = x$ auf die Aussage von Merke 17.5.8 kommt.

Merke 17.5.8 Gerade durch zwei Punkte mit Steigung

Die Gerade durch die beiden Punkte $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ ist beschrieben durch die Gleichung

$$y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P) + y_P$$

Dabei ist $x_P \neq x_Q$ vorausgesetzt.

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man auch als $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_Q) + y_Q$ oder als $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P) + y_P$ oder als $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_Q) + y_Q$ schreiben. All diese vier Ausdrücke stimmen überein.

Beispiel 17.5.9 (Von der Gleichung des Einheitskreises über Transformationen zur allgemeinen Ellipsengleichung)**.** Der Einheitskreis (= Kreis mit Radius 1) ist gegeben durch die Gleichung
✎

$$x^2 + y^2 = 1$$

Strecken wir ihn in x-Richtung mit dem Faktor $a > 0$ und in y-Richtung mit dem Faktor $b > 0$, so erhalten wir als neue Menge die Ellipse mit horizontaler Halbachse a und vertikaler Halbachse b und dem Ursprung als Symmetriezentrum. Sie ist durch die folgende Gleichung beschrieben.
✎

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Anfangs des Kapitels mussten wir für diese Ellipsengleichung deutlich mehr arbeiten (siehe Beweis von Satz 17.3.6).

Nun ist es auch leicht, eine Verschiebung dieser Ellipse algebraisch zu beschreiben. Wenn man den Punkt $Z = (x_Z, y_Z)$ als Symmetriezentrum möchte, ersetze man in der obigen Gleichung
✎

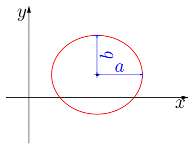
$$x \text{ durch } x - x_Z \qquad \text{und} \qquad y \text{ durch } y - y_Z.$$

Das Ergebnis notieren wir als Satz 17.5.10.

Satz 17.5.10 Ellipsengleichung (beliebiger Mittelpunkt, Symmetrieachsen horizontal und vertikal)

Seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei positive reelle Zahlen und sei $Z = (x_Z, y_Z)$ ein Punkt.

Dann wird die Ellipse mit horizontaler Halbachse a, vertikaler Halbachse b und Z als Mittelpunkt (Symmetriezentrum) durch die folgende Gleichung beschrieben. ✎



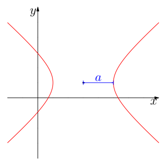
$$\frac{(x - x_Z)^2}{a^2} + \frac{(y - y_Z)^2}{b^2} = 1$$

17.5.11. Die Hyperbelgleichung für beliebiges Zentrum erhält man ähnlich aus der bekannten Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Die Hyperbel mit Ästen oben und unten erhält man, wenn man die Rollen von x und y vertauscht.

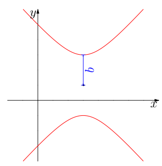
Satz 17.5.12 Hyperbelgleichung

Seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei positive reelle Zahlen und sei $Z = (x_Z, y_Z)$ ein Punkt.
Dann wird die «Hyperbel mit rechtem und linkem Ast» und Halbachsen a und b und Zentrum Z durch die folgende Gleichung beschrieben. Hier ist a ist die horizontale Haupt-Halbachse, auf der die Brennpunkte liegen. ✎



$$\frac{(x - x_Z)^2}{a^2} - \frac{(y - y_Z)^2}{b^2} = 1$$

Die «Hyperbel mit oberem und unterem linkem Ast» und Halbachsen a und b und Zentrum Z wird durch die folgende Gleichung beschrieben. Hier ist b die vertikale Haupt-Halbachse, auf der die Brennpunkte liegen. ✎



$$-\frac{(x - x_Z)^2}{a^2} + \frac{(y - y_Z)^2}{b^2} = 1$$

Beispiel 17.5.13. Wir betrachten die Hyperbel mit rechtem und linkem Ast (= nach links und rechts offene Hyperbel) mit Zentrum $Z = (4, -1)$ und horizontaler Haupt-Halbachse $a = 3$ und vertikaler Halbachse $b = 2$. Nach Satz 17.5.12 ist diese Hyperbel durch die folgende Gleichung beschrieben, die wir durch Äquivalenzumformungen auf «polynomiale Standardform» bringen. ✎

$$\begin{aligned}
& & \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-(-1))^2}{4} &= 1 & & \\
&\iff & \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} &= 1 & &\mid \cdot 9 \cdot 4 \text{ (Brüche beseitigen)} \\
&\iff & 4(x-4)^2 - 9(y+1)^2 &= 36 & &\mid \text{binomische Formel} \\
&\iff & 4(x^2-8x+16) - 9(y^2+2y+1) &= 36 & &\mid \text{ausmultiplizieren} \\
&\iff & 4x^2 - 32x + 64 - 9y^2 - 18y - 9 &= 36 & &\mid \text{alles auf linke Seite, ordnen} \\
&\iff & 4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 19 &= 0 & &
\end{aligned}$$

Dieser letzten Gleichung sieht man vermutlich nicht sofort an, dass sie eine Hyperbel definiert (ein Indikator ist, dass die Koeffizienten bei x^2 und bei y^2 verschiedene Vorzeichen haben).

⚒ Aufgabe A20

(a) Betrachten Sie die (nach oben offene) Parabel mit Scheitel $(3, 2)$ und Öffnungsfaktor $\frac{1}{2}$.
- Wie lautet die zugehörige Parabelgleichung (gesucht ist hier die Scheitelform).
- Zeigen Sie, dass Ihre Parabelgleichung zur folgenden Gleichung äquivalent ist.

$$x^2 - 6x - 2y + 13 = 0$$

(b) Betrachten Sie die Ellipse mit Zentrum $(-3, 2)$, horizontaler Halbachse 5 und vertikaler Halbachse 1.
- Wie lautet die zugehörige Ellipsengleichung?
- Zeigen Sie, dass Ihre Ellipsengleichung zur folgenden Gleichung äquivalent ist.

$$x^2 + 25y^2 + 6x - 100y + 84 = 0$$

Definition 17.5.14

Eine **Quadrik** (oder Kurve zweiter Ordnung) ist jede Teilmenge der Ebene, die durch eine quadratische Gleichung in zwei Variablen der folgenden Form definiert ist

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

für reelle Zahlen a, b, c, d, e, f, wobei $\boxed{\text{mindestens eine der drei Zahlen } a, b, c \text{ von Null verschieden ist}}$. Genauer handelt es sich hierbei um «ebene Quadriken», also Quadriken in der Ebene.

17.5.15. Wir haben in konkreten Beispielen gesehen, dass Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln Quadriken sind (siehe Beispiel 17.5.13 und Aufgabe A20).

In unseren Beispielen taucht der Term xy nicht auf. Dies liegt daran, dass die Symmetrie-Achsen unserer Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln horizontal und vertikal liegen (also parallel zu den Koordinatenachsen).
17.5.16. Ein wichtiges mathematisches Resultat sagt nun umgekehrt, dass jede Quadrik eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist (oder eine Ausartung davon).

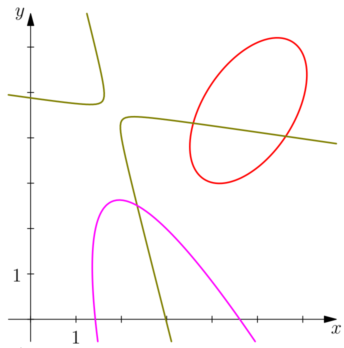
Beispiele in GeoGebra:
- $3x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 17y - 10 = 0$
- $3x^2 - 2xy - y^2 + 5x - 17y - 10 = 0$
- $3x^2 - 0xy + 0y^2 + 5x - 17y - 10 = 0$

Satz 17.5.17 Klassifikation von Quadriken

Jede Quadrik (definiert durch $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$) ist genau eine der folgenden Figuren:

- eine Ellipse dann $ac - \frac{1}{4}b^2 > 0$
  (Kreis, wenn $a = c$ und $b = 0$)
- eine Hyperbel dann $ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$
- eine Parabel dann $ac - \frac{1}{4}b^2 = 0$
- eine der folgenden Ausartungen/Sonderfälle: die leere Menge; ein Punkt; zwei sich schneidende Geraden; zwei parallele Geraden; eine Gerade.

Übrigens ist $ac - \frac{1}{4}b^2$ die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$.



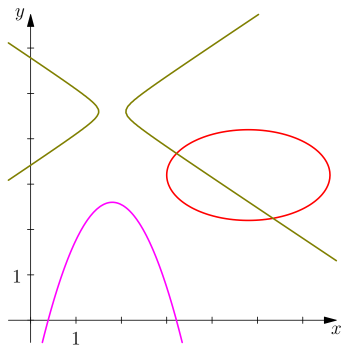
Wie in der Zeichnung oben rechts sichtbar, sind die Symmetrie-Achsen im Allgemeinen nicht notwendig horizontal oder vertikal (die beiden Symmetrieachsen von Ellipse oder Hyperbel stehen aber stets senkrecht aufeinander).

Es gilt aber:

Im Fall $b = 0$, wenn also unsere Quadrik durch eine Gleichung der Form

$$ax^2 + \cancel{bxy} + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

definiert ist, so hat unsere Quadrik eine horizontale Symmetrie-Achse oder eine vertikale Symmetrie-Achse (siehe Zeichnung rechts).



Nette Bilder auf Wikipedia: Quadrik, Klassifikation
Eventuell Satz durch GeoGebra experimentell bestätigen.

17.5.18. Der Beweis dieses Satzes findet sich in Anhang A.

Wir «beweisen» diesen Satz im Fall $b = 0$ durch aussagekräftige Beispiele. Das wesentliche Hilfsmittel dabei ist quadratisches Ergänzen.

Aus Zeitgründen behandeln wir den Fall $b \neq 0$ voraussichtlich nicht im Unterricht. Man kann diesen Fall aber durch eine geeignete Drehung («Hauptachsentransformation») auf den Fall $b = 0$ zurückführen (für Details siehe Schritt 1 des Beweises im Anhang).

Merke 17.5.19 Erinnerung: Quadratisches Ergänzen

Quadratische Ergänzung bezeichnet den «Trick», einen Ausdruck der Form $x^2 + dx$ wie folgt auf clevere Weise als Differenz zweier Quadrate zu schreiben.

$$x^2 + d\,x \overset{\text{Null addieren}}{=} x^2 + d\,x + \underbrace{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}_{=0} \overset{\text{erste binomische Formel}}{=} \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Beispiel 17.5.20. Wir betrachten die durch die folgende Gleichung definierte Quadrik (kein Term xy, d. h. $b = 0$).

$$x^2 - 9y^2 - 10x - 18y + 7 = 0$$

Wie findet man heraus, ob es sich um eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel (oder um eine Ausartung) handelt?

Experimentell per Taschenrechner oder mit Geogebra.

Der Trick besteht darin, ✎die beiden Summanden mit x quadratisch zu ergänzen und dasselbe mit den beiden Summanden mit y zu tun. Danach formt man die Gleichung so um, dass man die Standardgleichung einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel erhält (wenn möglich).

$$\begin{aligned}
x^2 - 9y^2 - 10x - 18y + 7 &= 0 \\
x^2 - 10x - 9y^2 - 18y &= -7 \\
x^2 - 10x - 9(y^2 + 2y) &= -7 \\
x^2 - 10x + 25 - 25 - 9(y^2 + 2y + 1 - 1) &= -7 \\
(x-5)^2 - 25 - 9((y+1)^2 - 1) &= -7 \\
(x-5)^2 - 25 - 9(y+1)^2 + 9 &= -7 \\
(x-5)^2 - 9(y+1)^2 &= 9 \\
\frac{(x-5)^2}{9} - (y+1)^2 &= 1 \\
\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-(-1))^2}{1} &= 1
\end{aligned}$$

Dies ist die Standardgleichung

$$\frac{(x-x_Z)^2}{a^2} - \frac{(y-y_Z)^2}{b^2} = 1$$

einer links-rechts-offenen Hyperbel (also mit linkem und rechtem Hyperbelast). Daher: Unsere Quadrik ist eine solche Hyperbel mit

- horizontaler Haupt-Halbachse $a = \sqrt{9} = 3$,
- vertikaler Neben-Halbachse $b = \sqrt{1} = 1$,
- Zentrum $Z = (x_Z, y_Z) = (5, -1)$. Zeige mit Geogebra, dass das Ergebnis stimmt.

Aufgabe A21

(a) Welche Parabel definiert die folgende Gleichung? Anzugeben sind Scheitel und Öffnungsfaktor und in welche Richtung die Parabel offen ist.

$$0 = 2x^2 - 28x - 3y + 83$$

(b) Welche Parabel definiert die folgende Gleichung? In welche Richtung ist sie offen?
Hinweis: Vergleiche mit der vorherigen Teilaufgabe.

$$0 = -3x + 2y^2 - 28y + 83$$

(c) Welche Ellipse definiert die folgende Gleichung? Anzugeben sind Zentrum, horizontale und vertikale Halbachse.

$$16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$$

(d) Welche Hyperbel definiert die folgende Gleichung? Anzugeben sind Zentrum, horizontale und vertikale Halbachse. Liegen die Hyperbeläste rechts und links oder oben und unten?

$$4x^2 - y^2 + 80x + 2y + 395 = 0$$

(e) Beschreibt die folgende Gleichung eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel? Zusätzlich sind Scheitel/Zentrum und Öffnungsfaktor/Halbachsen anzugeben.

$$4x^2 + 9y^2 + 18y - 27 = 0$$

(f) Beschreibt die folgende Gleichung eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel? Zusätzlich sind Scheitel/Zentrum und Öffnungsfaktor/Halbachsen anzugeben.

$$x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 36 = 0$$

Aufgabe A22 Kreieren Sie selbst Aufgaben vom Typ A21: Wählen Sie eine Ellipsen-, Hyperbel- oder Parabelgleichung Ihrer Wahl. Multiplizieren Sie diese aus und formen Sie sie auf die «Quadrik-Form» $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ um. Stellen Sie Ihrer Nachbarin/Ihrem Nachbarn die Aufgabe zu erkennen, um welche Figur es sich handelt; ausserdem sind Zentrum/Scheitel und Öffnungsfaktor/Halbachsen zu bestimmen.

Aufgabe A23 Im Klassifikationssatz 17.5.17 wird angenommen, dass $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, der Fall $a = b = c = 0$ wird also nicht betrachtet.

Was passiert im Fall $a = b = c = 0$? Mit anderen Worten: Welche Figur definiert eine Gleichung der Form $dx + ey + f = 0$?

Unterscheiden Sie die folgenden Fälle: (1) $d \neq 0$ oder $e \neq 0$; (2) $d = e = 0$ und $f \neq 0$; (3) $d = e = f = 0$.

Aufgabe A24 In dieser Aufgabe geht es um die «Ausartungen» im Klassifikationsresultat 17.5.17.

(a) Im folgenden sind einige quadratische Gleichungen angegeben. Jede dieser Gleichungen definiert eine der folgenden fünf Mengen.
- die leere Menge;
- einen Punkt (bzw. genauer: eine einpunktige Menge);
- eine Gerade;
- zwei parallele Geraden;
- zwei sich schneidende Geraden.

Finden Sie heraus, welche Gleichung was definiert; geben Sie ausserdem möglichst genau an, welcher Punkte bzw. welche Gerade bzw. welche Geraden definiert werden.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= -1 \\ x^2 &= 0 \\ xy &= 0 \\ y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Und etwas schwieriger (noch schwieriger wäre es, wenn alles ausmultipliziert wäre – dann sollte man wohl zuerst quadratisch ergänzen):

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y-1)^2 &= 0 \\ (x-1)(x+3) &= 0 \\ (x-1)(y+3) &= 0 \\ (x-2)^2 - y^2 &= 0 \\ (x-2)^2 - (y+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
- Welche quadratische Gleichung definiert den Punkt $(3, -1)$.
- Welche quadratische Gleichung definiert die Gerade $x = -2$?
- Welche quadratische Gleichung definiert die beiden Geraden $x = 1$ und $x = 5$?
- Welche quadratische Gleichung definiert die beiden Geraden $x = 2$ und $y = 3$?

Aufgabe A25

(a) Gegeben sind die Gerade $\ell : x = 1$ und der Punkt $F = (-2, 0)$.
Wir betrachten die Menge M aller Punkte $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Abstand von P zu F dividiert durch den Abstand von P zu ℓ konstant 1 beträgt:

$$M = \left\{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = 1 \right\}$$

(i) Beschreiben Sie die Menge M möglichst genau (durch Begriffe wie Parabel, Hyperbel, Ellipse, Zentrum, Scheitel, Halbachse, . . . ; Koordinaten bzw. Werte sind genau anzugeben).
(ii) Skizzieren Sie die Menge M in einem Koordinatensystem.

(b) Gegeben sind die Gerade $\ell : x = -2$ und der Punkt $F = (1, 0)$.
Ähnlich wie oben betrachten wir die Menge M aller Punkte $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = \frac{1}{2}$$

Beschreiben und skizzieren Sie M möglichst genau.

(c) Gegeben sind die Gerade $\ell : x = 0$ und der Punkt $F = (8, 0)$.
Ähnlich wie oben betrachten wir die Menge M aller Punkte $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = 3$$

Beschreiben und skizzieren Sie M möglichst genau.

(d) Allgemeiner Fall (im dem Sinne allgemein, dass der Quotient $\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}}$ eine beliebige Konstante $\varepsilon > 0$ ist):
Betrachten Sie die vertikale Gerade (Leitgerade/Leitlinie) $\ell : x = -1$ und den Punkt $F = (0, 0)$.
Sei $\varepsilon > 0$ eine fixierte positive reelle Zahl. Beschreiben Sie die Menge M aller Punkte P mit

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = \varepsilon$$

Hinweis: Die Antwort hängt von ε ab (Fallunterscheidung).

Merke 17.5.21 Leitgeradeneigenschaft: Beschreibung gewisser Ellipsen/Parabeln/Hyperbeln durch Leitgerade und Punkt

(Allgemeine Information, nicht relevant für die Prüfung)
Seien ℓ eine Gerade (Leitgerade) und F ein Punkt in der Ebene, mit $F \notin \ell$.
Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Dann ist die Menge aller Punkte P mit

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = \varepsilon$$

- im Fall $0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipse;
- im Fall $\varepsilon = 1$ eine Parabel;
- im Fall $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

17.5.22. Der Fall $\varepsilon = 1$ bedeutet, dass $\overline{PF} = \overline{P\ell}$. Diese Bedingung ist die definierende Bedingung für die Parabel als geometrischer Ort.

Beweis. Man wähle das Koordinatensystem so, dass $\ell : x = -1$ und $F = (0, 0)$ gelten und verwende (die Lösung der) Teilaufgabe (d) von Aufgabe A25. □

A Beweis des Klassifikationssatzes von Quadriken

Beweis von Satz 17.5.17. Gegeben ist eine beliebige quadratische Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

wobei mindestens eine der drei Zahlen a, b, c von Null verschieden ist.

Schritt 1: (Nur durchzuführen, wenn der Koeffizient b bei xy von Null verschieden ist.)

Wir zeigen in diesem Schritt, dass man mit einer geeigneten Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung erreichen kann, dass der Koeffizient bei xy Null wird.

Wir drehen unsere Quadrik um den Winkel α (mit dem Ursprung als Drehzentrum). Nach Merke 17.5.2 sind dafür die folgenden Ersetzungen vorzunehmen.

$$x \rightsquigarrow \cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y \qquad\qquad y \rightsquigarrow \sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y$$

Die gedrehte Quadrik ist also durch die folgende Gleichung (die wir der Übersichtlichkeit halber auf sechs Zeilen verteilt haben) definiert.

$$\begin{aligned}
&a(\cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y)^2 \\
&+b(\cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y)(\sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y) \\
&+c(\sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y)^2 \\
&+d(\cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y) \\
&+e(\sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y) \\
&+f = 0 \\
\iff \quad &a(\cos^2(-\alpha)x^2 \boxed{-2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)xy} + \sin^2(-\alpha)y^2) \\
&+b(\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)x^2 + \boxed{\cos^2(-\alpha)xy}\boxed{-\sin^2(-\alpha)xy} + \sin(-\alpha)\cos(-\alpha)y^2) \\
&+c(\sin^2(-\alpha)x^2 + \boxed{2\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)xy} + \cos^2(-\alpha)y^2) \\
&+d(\cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y) \\
&+e(\sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y) \\
&+f = 0
\end{aligned}$$

Durch Boxen hervorgehoben sind alle «Terme mit xy» (Faktoren vor den Klammern kommen dazu). Der Koeffizient bei xy ist also (ignoriere den roten Teil)

$$-2a\cos(-\alpha)\sin(-\alpha) + b\cos^2(-\alpha) - b\sin^2(-\alpha) + 2c\sin(-\alpha)\cos(-\alpha) = 0$$

Wir möchten gerne, dass dieser Koeffizient Null wird (für einen geeigneten, noch zu bestimmenden Winkel α), was wir oben bereits in Rot andeuten.

Im Fall $\cos(-\alpha) = 0$ gilt $\sin(-\alpha) = \pm 1$ und unser Koeffizient ist $\mp b \neq 0$. Dies bedeutet, dass ein Drehwinkel α mit $\cos(-\alpha) = 0$ uns nie zu unserem Ziel führt (solche Drehwinkel sind $\alpha = \pm 90°$ (plus Vielfache von 360°). Wir nehmen deswegen im Folgenden $\cos(-\alpha) \neq 0$ an.

Wir teilen unsere Gleichung durch $\cos^2(-\alpha)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
-2a\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} + b - b\left(\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}\right)^2 + 2c\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} &= 0 \\
-2a\tan(-\alpha) + b - b\tan^2(-\alpha) + 2c\tan(\alpha) &= 0 \\
-b\tan^2(-\alpha) + (-2a + 2c)\tan(-\alpha) + b &= 0 \\
b\tan^2(-\alpha) + 2(a-c)\tan(-\alpha) - b &= 0 \\
\tan(\alpha)_{1,2} &= \frac{-2(a-c) \pm \sqrt{4(a-c)^2 + 4b^2}}{2b} \\
&= \frac{2(c-a) \pm 2\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2b} \\
&= \frac{c-a \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{b}
\end{aligned}$$

(Man beachte, dass die Diskriminante als Summe zweier Quadrate und wegen $b \neq 0$ echt positiv ist, es also zwei Lösungen gibt.) Definiere α_1 und α_2 so, dass $\tan(\alpha_1) = \tan(\alpha)_1$ und $\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha)_2$ gelten.

Fazit von Schritt 1: Wenn wir unsere Quadrik um einen der beiden Winkel α_1 oder α_2 drehen, so ist die gedrehte Quadrik durch einen Ausdruck der Form

$$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

definiert. (Die beiden Winkel α_1 und α_2 unterscheiden sich übrigens um $\pm 90°$, siehe Erklärung in dieser[1] Fussnote; dies ist geometrisch erwartbar, wenn man an den zu beweisenden Satz glaubt.)

Wir behaupten, dass $a' \neq 0$ oder $c' \neq 0$ gilt. Sonst, also im Fall $a' = b' = 0$, wäre unsere Gleichung linear in x und y (und würde eine Gerade oder einen Punkt oder die leere Menge definieren). Wenn wir die Drehung rückgängig machen, erhalten wir algebraisch wieder eine lineare Gleichung in x und y, die natürlich mit unserer Ausgangsgleichung übereinstimmen muss. Diese war aber laut Annahme nicht linear.

Schritt 2: Nach dem ersten Schritt genügt es, Quadriken zu verstehen, die durch quadratische Gleichunge der Form

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

gegeben sind. Dabei ist mindestens eine der beiden reellen Zahlen a, b von Null verschieden.

- Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$:
  Wir können unsere Gleichung durch quadratisches Ergänzen umschreiben zu

  $$a(x - x_Z)^2 + c(y - y_Z)^2 + w = 0$$

  Die um $\begin{pmatrix} -x_Z \\ -y_Z \end{pmatrix}$ verschobene Quadrik ist dann beschrieben durch die Gleichung

  $$ax^2 + by^2 + w = 0$$

  (a) Fall $w \neq 0$: Bringe w auf die andere Seite und dividiere durch $-w$ und erhalte eine Gleichung der Form $a'x^2 + b'y^2 = 1$.
  Wenn a' und b' beide positiv sind, erhält man eine Ellipse.
  Wenn a' und b' beide negativ sind, erhält man die leere Menge.
  Wenn a' und b' verschiedene Vorzeichen haben, erhält man eine Hyperbel (Ost-West- oder Nord-Süd-Ausrichtung).

  (b) Fall $w = 0$:
  Dividiere durch a und erhalte $x^2 + b''y^2 = 0$ (mit $b'' \neq 0$).
  Wenn b' positiv ist, erhält man den Ursprung.
  Wenn b' negativ ist, erhält man $(x - \sqrt{-b''}y)(x + \sqrt{-b''}y) = 0$, also zwei sich im Ursprung schneidende Geraden, deren Steigungen das Negative voneinander sind.

- Fall $a \neq 0$ und $b = 0$:
  Wir können unsere Gleichung durch quadratisches Ergänzen umschreiben zu

  $$a(x - x_Z)^2 + vy + w = 0$$

[1] Um Schreibarbeit zu sparen, setzen wir $q = \frac{b}{a-c}$. Dann gilt

$$\tan(\alpha_{1,2}) = \tan(\alpha)_{1,2} = \frac{c - a \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{b} = \frac{\frac{c-a}{a-c} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2+b^2}{(a-c)^2}}}{\frac{b}{a-c}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+q^2}}{q}$$

Diese zwei Zahlen sind die Steigungen der Geraden zu den beiden Winkeln α_1 und α_2. Um zu zeigen, dass sich α_1 und α_2 um $\pm 90°$ unterscheiden, genügt es zu zeigen, dass diese beiden Steigungen das negative Reziproke voneinander sind (denn dreht man eine Gerade mit Steigung m um $90°$, so hat die gedrehte Gerade die Steigung $-\frac{1}{m}$) ein. Dies zeigt die folgende Rechnung.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\frac{-1 \pm \sqrt{1+q^2}}{q}} &= \frac{-q}{-1 \pm \sqrt{1+q^2}} = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+q^2} - 1} = \frac{-q(\pm\sqrt{1+q^2}+1)}{(\pm\sqrt{1+q^2}-1)(\pm\sqrt{1+q^2}+1)} = \frac{-q(\pm\sqrt{1+q^2}+1)}{1+q^2-1} \\ &= \frac{-q(\pm\sqrt{1+q^2}+1)}{q^2} = \frac{\mp\sqrt{1+q^2} - 1}{q} = \frac{-1 \mp \sqrt{1+q^2}}{q} \end{aligned}$$

Die um $\begin{pmatrix} -x_Z \\ 0 \end{pmatrix}$ verschobene Quadrik ist dann beschrieben durch die Gleichung

$$ax^2 + vy + w = 0$$

(a) Fall $v \neq 0$:
Auflösen nach y liefert $y = -\frac{a}{v}x^2 + \frac{w}{a}$, unsere Gleichung beschreibt also eine Parabel (beachte $a \neq 0$).

(b) Fall $v = 0$:
Unsere Gleichung lautet dann $ax^2 + w = 0$. Division durch $a \neq 0$ liefert $x^2 = w'$ mit $w' := -\frac{w}{a}$.
Im Fall $w' > 0$ ist das ein Paar von vertikalen (und somit parallelen) Geraden $x = \sqrt{w'}$ und $x = -\sqrt{w'}$.
Im Fall $w' = 0$ ist das die vertikale Gerade $x = 0$.
Im Fall $w' < 0$ ist das die leere Menge.

- Fall $a = 0$ und $b \neq 0$:
  Vorgehen analog wie im vorherigen Fall (in einem der Unterfälle komme eine nach links oder rechts offene Parabel heraus).

Fazit: Wir haben gesehen, dass unsere Quadrik nach einer Drehung (um den Ursprung) und einer geeigneten Verschiebung zu einer Ellipse, einer Hyperbel, einer Parabel, der leeren Menge, einem Punkt, einer Geraden, zwei parallelen oder sich schneidenden Geraden wird.

Wenn man die obigen Fälle noch einmal durchgeht, sieht man: All diese Figuren ausser der Parabel haben sowohl die x- als auch die y-Achse als Symmetrie-Achse (leere Menge, Punkt und parallele Geraden haben noch unendlich viele weitere Symmetrie-Achsen). Die Parabel hat entweder die x-Achse oder die y-Achse als Symmetrie-Achse.

Damit ist der Satz bewiesen. □

A.1 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you'll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

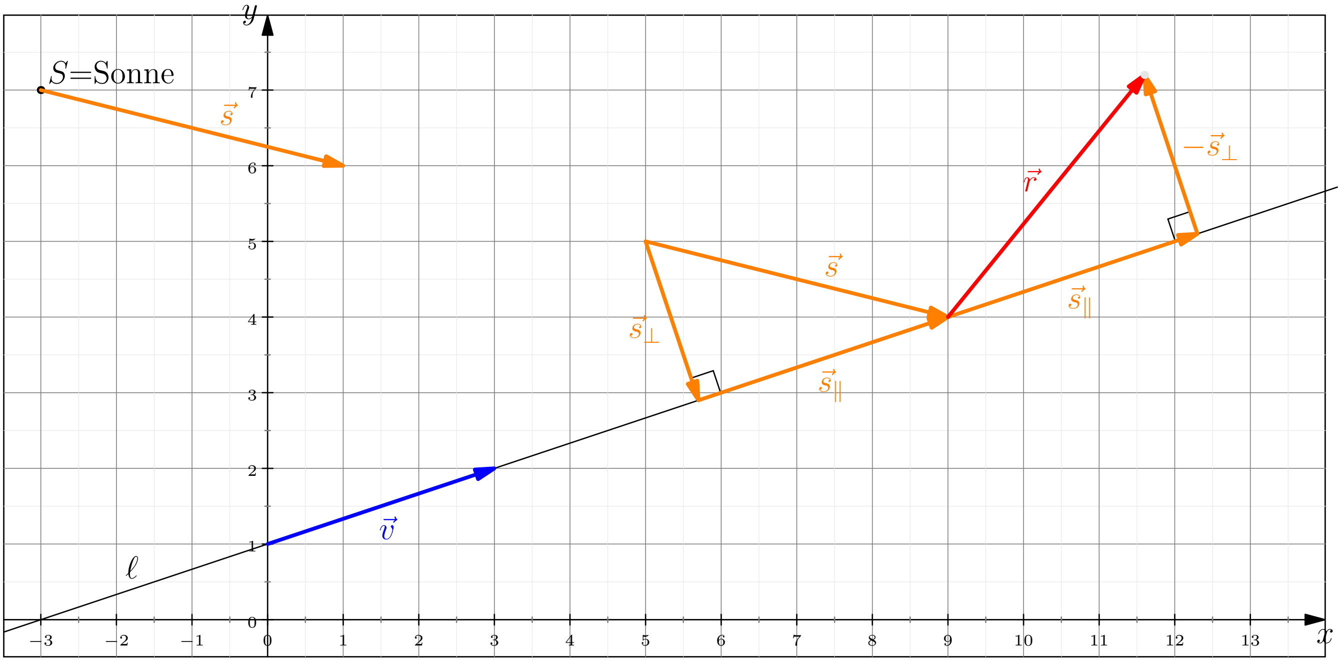
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-parabel-vom-geometrischen-ort-zum-funktionsgraph

Lösung zu A2 ex-vektoren-orthogonal-zerlegen

Lösung zu A3 ex-strahl-an-gerade-spiegeln

(a)



(b) selbst

(c) Laut Zeichnung muss gelten

$$\vec{r} = \vec{s}_\parallel - \vec{s}_\perp$$

(d) Wir berechnen zuerst die orthogonale Zerlegung von $\vec{s}$ längs $\vec{v}$, also

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{s}_\parallel + s_\perp$$

Berechnung des zu $\vec{v}$ parallelen Anteils von $\vec{s}$.

$$\begin{aligned}
\vec{s}_{\|} &= \frac{\langle \vec{v}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} \\
&= \frac{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{12-1}{9+1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{11}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{33}{10} \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der auf $\vec{v}$ senkrechte Anteil von $\vec{s}$ ist

$$\begin{aligned}
\vec{s}_{\perp} &= \vec{s} - \vec{s}_{\|} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{33}{10} \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 - \frac{33}{10} \\ -1 - \frac{11}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{40-33}{10} \\ \frac{-10-11}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-21}{10} \end{pmatrix} \\
&= \frac{7}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun können wir den gesuchten Vektor (= Richtungsvektor des reflektieren Strahles, selbe Länge wie $\vec{s}$) ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{s}_{\|} - \vec{s}_{\perp} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{33}{10} \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-21}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{33-7}{10} \\ \frac{11+21}{10} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{26}{10} \\ \frac{32}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(e) selbst

(f) Der Reflexionspunkt ist offensichtlicherweise $R = (9, 4)$ und wird zur Zeit $t = 3$ erreicht.
Man kann ihn aber auch berechnen: Die Spiegelgerade ist $y = \frac{1}{3}x + 1$.
Der «Lichtpunkt» ist zur Zeit t an der Stelle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4t \\ 7-t \end{pmatrix}$$

Für welches t trifft der Lichtpunkt die Gerade? Für dasjenige t, für das die beiden Komponenten/Koordinaten des Lichtpunkts die Gleichung der Spiegelgerade erfüllen, also

$$\begin{aligned}
7 - t &= \frac{1}{3}(-3 + 4t) + 1 \\
21 - 3t &= -3 + 4t + 3 \\
g21 &= 7t \\
3 &= t
\end{aligned}$$

Der reflektierte Strahl hat somit die Parameterdarstellung

$$r(t) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + (t-3) \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

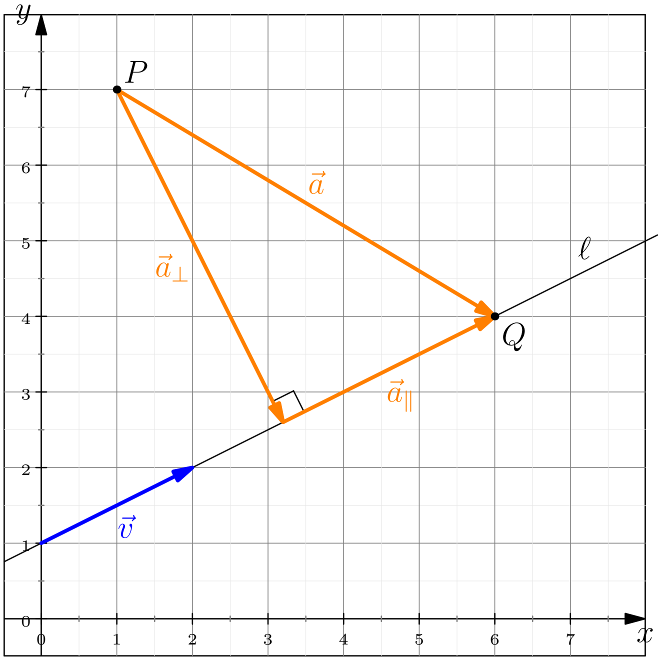
Lösung zu A4 ex-strahl-an-gerade-spiegeln-selbst

Selbst zu erledigen.

Lösung zu A5 ex-brennpunkteigenschaft-parabel-per-vektorgeometrie-reflexion

Lösung zu A6 ex-reflexion-eines-strahls-an-ebene-im-raum

Lösung zu A7 ex-abstand-punkt-gerade-per-orthogonaler-zerlegung



Lösung zu A8 ex-abstand-punkt-gerade-per-orthogonaler-zerlegung-selbst

Selbst zu erledigen.

Lösung zu A9 ex-abstand-punkt-ebene-im-raum

Lösung zu A10 ex-ellipsenhaelften-als-graph

Die gesuchten Gleichungen finden sich im Beweis des Satzes:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wer mag, kann aber auch die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ nach y auflösen.

Obere Halbellipse:

$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2^2 - x^2} = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{4 - x^2} = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (4 - x^2)} = 5 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Untere Halbellipse:

$$g(x) = -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2^2 - x^2} = -5 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{4 - x^2} = -5 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (4 - x^2)} = -5 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Lösung zu A11 ex-ellipse-ganzzahlige-punkte-und-skizzieren

Lösung zu A12 ex-ellipsen-um-ursprung-erkennen

Lösung zu A13 ex-ellipse-halbachsen-vs-abstandssumme-und-exzentrizitaet

(a) Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Halbachsen 3 und 2, also längere Halbachse $a = 3$, kürzere Halbachse $b = 2$.
Also $d = 2a = 6$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ (nach Folgerung 17.3.16).
Brennpunkte $B_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ und $B_2 = (\sqrt{5}, 0)$.

(b) Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Halbachsen 2 und 3, also längere Halbachse $a = 3$ (diese liegt vertikal), kürzere Halbachse $b = 2$ (horizontal).
Also $d = 2a = 6$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.
Brennpunkte $B_1 = (0, -\sqrt{5})$ und $B_2 = (0, \sqrt{5})$.
Beachte: Die beiden Brennpunkte liegen stets auf der «längeren Achse» (= die zur längeren Halbachse gehörende Symmetrie-Achse).
Die in dieser Teilaufgabe betrachtet Ellipse ist die um 90° gedrehte Ellipse aus der vorigen Aufgabe.

(c) Ellipse mit den beiden Brennpunkten $(-4, 0)$ und $(4, 0)$ durch den Punkt $(0, 3)$.
Es gelten $e = 4$ une $b = 3$, also $a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ (nach Folgerung 17.3.16).
Die gesuchte Gleichung ist also $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$.

(d) Ellipse mit den beiden Brennpunkten $B_1 = (-3, 0)$ und $B_2 = (3, 0)$ durch den Punkt $P = (3, \frac{32}{10})$.
Es gilt $e = 3$. Die Abstandssumme ist

$$d = \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{32}{10}\right)} + \frac{32}{10} = \sqrt{36 + \frac{1024}{100}} + \frac{32}{10} = \sqrt{\frac{4624}{100}} + \frac{32}{10} = \frac{68}{10} + \frac{32}{10} = 10$$

Also längere Halbachse $a = \frac{d}{2} = 5$ und kürzere Halbachse $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.
Die gesuchte Gleichung ist also $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$.

Lösung zu A14 ex-hyperbelgleichung-fuer-brennpunkte-auf-x-achse

$$
\begin{array}{rrcll}
& \overline{PB_1} - \overline{PB_2} &=& 8 & \\
\iff & \sqrt{(x-(-5))^2+y^2} - \sqrt{(x-5)^2+y^2} &=& 8 & \\
\iff & \sqrt{(x+5)^2+y^2} - \sqrt{(x-5)^2+y^2} &=& 8 & \\
\iff & \sqrt{(x+5)^2+y^2} &=& 8 + \sqrt{(x-5)^2+y^2} & \mid \text{quadriere} \\
\implies & (x+5)^2+y^2 &=& 64 + 16\sqrt{(x-5)^2+y^2} + (x-5)^2 + y^2 & \\
\iff & x^2+10x+25+y^2 &=& 64 + 16\sqrt{(x-5)^2+y^2} + x^2 - 10x + 25 + y^2 & \\
\iff & 10x &=& 64 + 16\sqrt{(x-5)^2+y^2} - 10x & \\
\iff & 20x &=& 64 + 16\sqrt{(x-5)^2+y^2} & \mid \text{dividiere durch } 4 \\
\iff & 5x &=& 16 + 4\sqrt{(x-5)^2+y^2} & \mid \text{minus } 16 \\
\iff & 5x - 16 &=& 4\sqrt{(x-5)^2+y^2} & \mid \text{quadriere} \\
\implies & 25x^2 - 160x + 256 &=& 16 \cdot ((x-5)^2 + y^2) & \\
\iff & 25x^2 - 160x + 256 &=& 16 \cdot (x^2 - 10x + 25 + y^2) & \\
\iff & 25x^2 - 160x + 256 &=& 16x^2 - 160x + 400 + 16y^2 & \\
\iff & 9x^2 + 256 &=& 400 + 16y^2 & \\
\iff & 9x^2 - 16y^2 &=& 144 & \mid \text{dividiere durch } 9 \cdot 16 = 144 \\
\iff & \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} &=& 1 & \\
\iff & \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} &=& 1 &
\end{array}
$$

Lösung zu A15 ex-hyperbelgleichung-asymptoten-bestimmen

(a) Auflösen nach y:

$$
\begin{array}{rrcll}
& \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} &=& 1 & \\
\iff & -\frac{y^2}{3^2} &=& -\frac{x^2}{4^2} + 1 & \mid \text{mal } -1 \\
\iff & \frac{y^2}{3^2} &=& \frac{x^2}{4^2} - 1 & \mid \text{Wurzel ziehen} \\
\iff & \frac{y}{3} &=& \pm\sqrt{\frac{x^2}{4^2} - 1} & \\
\iff & y &=& \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{4^2} - 1} = \pm 3\sqrt{\frac{x^2-16}{16}} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} &
\end{array}
$$

(b) Man darf alle reellen Zahlen x einsetzen, für die der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht negativ ist, für die also gilt

$$x^2 - 16 \geq 0$$

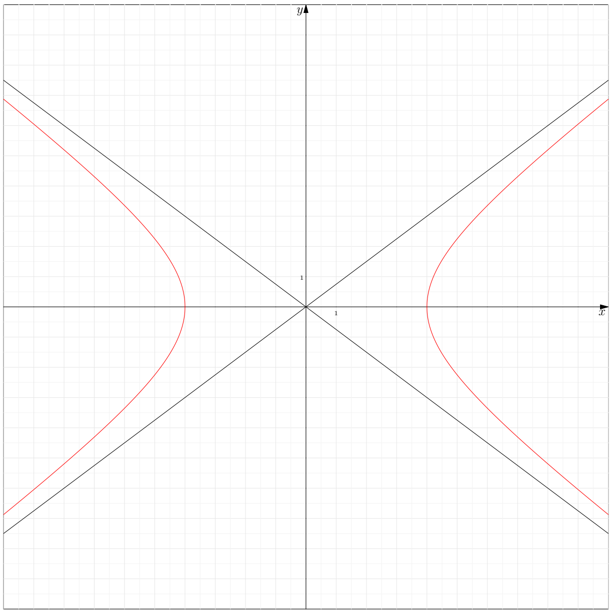
Äquivalent ist $x^2 \geq 16$ und wegen der Geometrie der Normalparabel $y = x^2$ (eine Skizze des Graphen mag helfen) ist dies genau dann der Fall, wenn

$$x \leq -4 \quad \text{oder} \quad x \geq 4$$

Die Definitionsmenge ist also

$$\mathbb{D} = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$$

(c) Die Hyperbel ist rot, die Asymptoten sind schwarz dargestellt.



(d) siehe voriger Punkt

(e) $y = \frac{3}{4}x$ und $y = -\frac{3}{4}x$

(f) Wir zeigen bzw. versuchen zumindest, plausibel zu machen, dass sich der «obere Teil des rechten Hyperbelastes» $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$ für grosses x beliebig nahe der Geraden

$$y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\sqrt{x^2}$$

annähert, und zwar von unten.
Der Unterschied zwischen x^2 und $x^2 - 16$ ist stets 16, jedoch sind die Wurzeln dieser beiden Ausdrücke für grosses x sehr nahe beieinander. Beispiele:

- Für $x = \sqrt{x^2} = 10$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 9.16515139$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.83484861$.
- Für $x = \sqrt{x^2} = 100$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 99.91996797$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.08003203$.
- Für $x = \sqrt{x^2} = 1000$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 999.99199997$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.00800003$.
- Für $x = \sqrt{x^2} = 10000$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 9999.99920000$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.00080000$.
- Für $x = \sqrt{x^2} = 100000$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 99999.99992000$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.00008000$.
- Für $x = \sqrt{x^2} = 1000000$ gilt $\sqrt{x^2-16} = 999999.99999200$, die Differenz ist also $x - \sqrt{x^2-16} = 0.00000800$.

Aktuell genüge dies als Plausibilitätsargument. (Man kann auch genau ausrechnen, ab welcher Zahl diese Differenz kleiner als eine gegebene Zahl ist.)
In ähnlicher Weise zeigt man, dass sich die anderen drei Hyperbelastteile den angegebenen Geraden nähern.

Lösung zu A16 ex-hyperbelgleichung-xy-gleich-1-aus-geometrischer-ort-definition

$$
\begin{aligned}
&& \overline{PB_1} - \overline{PB_2} &= 2\sqrt{2} \\
\iff && \sqrt{(x-(-\sqrt{2}))^2 + (y-(-\sqrt{2}))^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} &= 2\sqrt{2} \\
\iff && \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} &= 2\sqrt{2} \\
\iff && \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} &= 2\sqrt{2} + \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} \\
\implies && (x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} + (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \\
\iff && x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 &= 8 + 4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} + x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 \\
\iff && 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y &= 8 + 4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y \\
\iff && 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 8 &= 4\sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} \\
\iff && \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 &= \sqrt{2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} \\
\implies && (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2)^2 &= 2\cdot\left((x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2\right) \\
\iff && 2x^2 + 4xy - 4\sqrt{2}x + 2y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 &= 2\cdot(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2) \\
\iff && 2x^2 + 4xy - 4\sqrt{2}x + 2y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 &= 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 + 2y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 \\
\iff && x^2 + 2xy - 2\sqrt{2}x + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 \\
\iff && 2xy &= 2 \\
\iff && xy &= 1
\end{aligned}
$$

Lösung zu A17 ex-algebraisch-beschriebene-mengen-transformieren

Ausprobieren in GeoGebra oder Merke 17.5.2 in der Lehrerversion verwenden.

Lösung zu A18 ex-gerade-durch-punkt-mit-steigung-per-trafos

(a)
- erste Winkelhalbierende $y = x$
- Streckung um Faktor den $\frac{1}{5}$ in y-Richtung liefert daraus:
  Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{1}{5}$, Gleichung $\frac{y}{\frac{1}{5}} = x$ oder äquivalent $y = \frac{1}{5}x$.
- Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ liefert daraus:
  Gesuchte Gerade, Gleichung $y - (-2) = \frac{1}{5}(x-3)$ oder äquivalent $y = \frac{1}{5}(x-3) - 2$.

Probe: Sofort sieht man, dass die Steigung stimmt und dass der Punkt $(3, -2)$ die Gleichung erfüllt.
Alternativ kann man die allgemeine Gleichung $y = \frac{1}{5}x + q$ einer Geraden mit Steigung $\frac{1}{5}$ betrachten. Da $(x, y) = (3, -2)$ auf der Gerade liegen soll, muss $-2 = \frac{1}{5}\cdot 3 + q$ gelten, was auf $q = -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$ führt. Man erhält die Gleichung $y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$. Das ist dieselbe Gleichung wie $y = \frac{1}{5}(x-3) - 2$ ausmultipliziert.

(b)
- erste Winkelhalbierende $y = x$
- Streckung um den Faktor m in y-Richtung liefert daraus:
  Ursprungsgerade mit Steigung m, Gleichung $\frac{y}{m} = x$ oder äquivalent $y = mx$. (Man kann auch das Argument hier starten.)
- Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ liefert daraus:
  Gesuchte Gerade, Gleichung $y - y_P = m(x - x_P)$ oder äquivalent $y = m(x - x_P) + y_P$.

Lösung zu A19 ex-gerade-durch-zwei-punkte-per-trafos

(a)
- erste Winkelhalbierende $y = x$
- Streckung um den Faktor $\frac{1-(-2)}{-1-3} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ in y-Richtung liefert daraus:
  Ursprungsgerade mit Steigung $-\frac{3}{4}$, Gleichung $\frac{y}{-\frac{3}{4}} = x$ oder äquivalent $y = -\frac{3}{4}x$.
- Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert daraus:
  Gesuchte Gerade, Gleichung $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - (-1))$ oder äquivalent $y = -\frac{3}{4}(x+1) + 1$.

Probe: Sofort sieht man, dass die beiden Punkte $P = (-1, 1)$ und $Q = (3, -2)$ diese Gleichung erfüllen.
Alternativ startet man mit dem allgemeinen Ansatz $y = mx + q$ für eine Geradengleichung. Dass die

beiden angegebenen Punkte auf der Geraden liegen, bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= m \cdot (-1) + q \\ -2 &= m \cdot 3 + q \end{aligned}$$

gelten muss. Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, so folgt

$$3 = -m - 3m$$

also $m = -\frac{3}{4}$. Daraus folgt $q = 1 + m = \frac{1}{4}$, die gesuchte Gleichung ist also $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$. Das ist dieselbe Gleichung wie $y = -\frac{3}{4}(x+1) + 1$ ausmultipliziert.

(b)
- erste Winkelhalbierende $y = x$
- Streckung um den Faktor $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ in y-Richtung liefert daraus:
  Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$, Gleichung $\frac{y}{\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}} = x$ oder äquivalent $y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} x$.
  (Man kann auch das Argument hier starten.)
- Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{P} = \binom{x_P}{y_P}$ liefert daraus:
  Gesuchte Gerade, Gleichung $y - y_P = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P)$ oder äquivalent $y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P) + y_P$.

Lösung zu A20 ex-ellipsen-und-parabel-gleichung-ausmultiplizieren

(a)
- Die Scheitelform ist
  $$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$
  Auch akzeptiert wird die äquivalente Gleichung (der man den Scheitel vielleicht noch besser ansieht)
  $$y - 2 = \frac{1}{2}(x-3)^2$$
- Daraus erhält man durch Äquivalenzumformungen:
  $$\begin{aligned} && y &= \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 && \mid \cdot 2 \\ \iff && 2y &= (x-3)^2 + 4 \\ \iff && 2y &= x^2 - 6x + 9 + 4 \\ \iff && 0 &= x^2 - 6x - 2y + 13 \\ \iff && x^2 - 6x - 2y + 13 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
- Die Ellipsengleichung ist
  $$\frac{(x-(-3))^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$
  oder einfacher
  $$\frac{(x+3)^2}{25} + (y-2)^2 = 1$$
- Daraus erhält man durch Äquivalenzumformungen:
  $$\begin{aligned} && \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{1} &= 1 && \mid \cdot 25 \\ \iff && (x+3)^2 + 25(y-2)^2 &= 25 \\ \iff && x^2 + 6x + 9 + 25(y^2 - 4y + 4) &= 25 \\ \iff && x^2 + 6x + 9 + 25y^2 - 100y + 100 &= 25 \\ \iff && x^2 + 25y^2 + 6x - 100y + 84 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung zu A21 ex-ellipsen-parabeln-hyperbeln-erkennen

(a)

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^2 - 28x - 3y + 83 \\
0 &= 2(x^2 - 14x + 49 - 49) - 3y + 83 \\
0 &= 2((x-7)^2 - 49) - 3y + 83 \\
0 &= 2(x-7)^2 - 98 - 3y + 83 \\
0 &= 2(x-7)^2 - 3y - 15 \\
3y + 15 &= 2(x-7)^2 \\
y + 5 &= \frac{2}{3}(x-7)^2
\end{aligned}$$

Zentrum ist $(7, -5)$, Öffnungsfaktor ist $\frac{2}{3}$. Die Parabel ist nach oben offen.

(b)

$$0 = -3x + 2y^2 - 28y + 83$$

Die Gleichung entsteht aus der Gleichung der vorherigen Teilaufgabe durch Vertauschen von x und y, was einer Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden entspricht. Also ist es eine nach rechts offene Parabel mit Zentrum bei $(-5, 7)$ und Öffnungsfaktor $\frac{2}{3}$.

(c)

$$\begin{aligned}
16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 &= 0 \\
16x^2 - 64x + 9y^2 - 54y &= -1 \\
16(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) &= -1 \\
16(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) &= -1 \\
16((x-2)^2 - 4) + 9((y-3)^2 - 9) &= -1 \\
16(x-2)^2 - 64 + 9(y-3)^2 - 81 &= -1 \\
16(x-2)^2 + 9(y-3)^2 &= 144 \\
\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} &= 1
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Ellipse mit Zentrum $(2, 3)$ und horizontaler Halbachse 3 und vertikaler Halbachse 4.

(d) horizontale und vertikale Halbachse. Liegen die Hyperbeläste rechts und links oder oben und unten?

$$\begin{aligned}
4x^2 - y^2 + 80x + 2y + 395 &= 0 \\
4x^2 + 80x - y^2 + 2y + 395 &= 0 \\
4(x^2 + 20x) - (y^2 - 2y) + 395 &= 0 \\
4(x^2 + 20x + 100 - 100) - (y^2 - 2y + 1 - 1) + 395 &= 0 \\
4((x+10)^2 - 100) - ((y-1)^2 - 1) + 395 &= 0 \\
4(x+10)^2 - 400 - (y-1)^2 + 1 + 395 &= 0 \\
4(x+10)^2 - (y-1)^2 &= 4 \\
\frac{(x+10)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Hyperbel mit Ästen rechts und links. Ihr Zentrum ist $(-10, 1)$, die horizontale Halbachse ist 1, die vertiale Halbachse ist 2.

(e)

$$\begin{aligned}
4x^2+9y^2+18y-27&=0\\
4x^2+9(y^2+2y)-27&=0\\
4x^2+9(y^2+2y+1-1)-27&=0\\
4x^2+9((y+1)^2-1)-27&=0\\
4x^2+9(y+1)^2-9-27&=0\\
4x^2+9(y+1)^2-36&=0\\
4x^2+9(y+1)^2&=36\\
\frac{x^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}&=1
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Ellipse mit Zentrum $(0,-1)$, horizontaler Halbachse 3 und vertikaler Halbachse 2.

(f)

$$\begin{aligned}
x^2-4y^2+8x+24y-36&=0\\
x^2+8x-4y^2+24y-36&=0\\
x^2+8x+16-16-4(y^2-6y)-36&=0\\
x^2+8x+16-16-4(y^2-6y+9-9)-36&=0\\
(x+4)^2-16-4((y-3)^2-9)-36&=0\\
(x+4)^2-16-4(y-3)^2+36-36&=0\\
(x+4)^2-4(y-3)^2&=16\\
\frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{4}&=1
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Hyperbel mit rechtem und linkem Ast, Zentrum $(-4,3)$, horizontaler Halbachse 4 und vertikaler Halbachse 2.

Lösung zu A22 ex-erkennungsaufgabe-selbst-stellen

Der Nachbar/die Nachbarin hat die Lösung (falls keine Rechenfehler gemacht wurden).

Lösung zu A23 ex-quadriken-ohne-quadratischen-term

Wir betrachten die allgemeine Gleichung der Form

$$dx+ey+f=0$$

- Fall $d\neq 0$ oder $e\neq 0$.
  Es handelt sich um eine Gerade. Wer mag, kann die Gleichung im Fall $e\neq 0$ nach y auflösen und im Fall $d\neq 0$ nach x.
- Fall $d=e=0$ und $f\neq 0$.
  Die Gleichung lautet dann $0x+0y=f$ oder kurz $0=f$. Wegen f hat diese Gleichung keine Lösung, die gesuchte Figur ist die leere Menge.
- Fall $d=e=f=0$.
  Dann lautet die Gleichung $0x+0y+0=0$ oder kurz $0=0$. Jeder Punkt $P=(x,y)$ ist eine Lösung, die gesuchte Figur ist die gesamte Koordinatenebene.

Lösung zu A24 ex-beispiele-fuer-ausartungen

(a)
- $x^2+y^2=0$
  Für alle x gilt $x^2\geq 0$ und genau dann gilt $x^2=0$, wenn $x=0$.
  Analoges gilt für y.

Ausserdem ist die Summe zweier nicht-negativer reeller Zahlen stets nicht-negativ und nur dann Null, wenn beide Summanden Null sind.
Unsere Gleichung gilt also nur für $x = 0$ und $y = 0$, d. h. die definierte Menge ist die einpunktige Menge bestehend aus dem Ursprung $(0, 0)$.

- $x^2 + y^2 = -1$
  Wie oben sieht man, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 + y^2 \geq 0$. Die Gleichung hat also keine Lösung, definiert also die leere Menge.
- $x^2 = 0$
  Dies ist gleichbedeutend zu $x = 0$, was eine vertikale Gerade ist und genauer die y-Achse.
- $xy = 0$
  Dies ist gleichbedeutend zu $x = 0$ oder $y = 0$ (ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist). Diese Gleichungen definieren y-Achse bzw. x-Achse. Die durch $xy = 0$ definierte Menge ist also die Vereinigung von x- und y-Achse.
- $y^2 = 1$
  Dies ist gleichbedeutend zu $x = 1$ oder $x = -1$. Die definierte Menge ist also die Vereinigung der beiden vertikalen Geraden $x = 1$ und $x = -1$.
- $x^2 - y^2 = 0$
  Lösungsweg A: Gleichbedeutend ist $x^2 = y^2$, also $x = y$ oder $x = -y$. Die definierte Menge ist also die Vereinigung der beiden Geraden $x = y$ und $x = -y$ (erste und zweite Winkelhalbierende).
  Lösungsweg B: Gleichbedeutend ist $(x + y)(x - y) = 0$, also $x + y = 0$ oder $x - y = 0$, was zu $x = -y$ oder $x = y$ führt. Rest der Lösung wie in Lösungsweg A.

Etwa schwieriger:

- $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$
  Beide quadrierten Terme müssen Null sein, d. h. $x + 3 = 0$ oder $y - 1 = 0$. Die gesuchte Menge ist die Vereinigung der vertikalen Geraden $x = -3$ und der horizontalen Geraden $y = 1$.
- $(x - 1)(x + 3) = 0$
  Beide Faktoren müssen Null sein, d. h. $x - 1 = 0$ oder $x + 3 = 0$. Die gesuchte Menge ist die Vereinigung der beiden vertikalen Geraden $x = 1$ und $x = -3$.
- $(x - 1)(y + 3) = 0$
  Beide Faktoren Null, also Vereinigung der Geraden $x = 1$ und der Geraden $y = -3$.
- $(x - 2)^2 - y^2 = 0$
  Lösungsweg A: Gleichbedeutend ist $(x - 2)^2 = y^2$, also $x - 2 = y$ oder $x - 2 = -y$. Die definierte Menge ist also die Vereinigung der beiden Geraden $y = x - 2$ und $y = -x + 2$.
  Lösungsweg B: Gleichbedeutend ist $(x - 2 + y)(x - 2 - y) = 0$ (dritte binomische Formel), also $x - 2 + y = 0$ oder $x - 2 - y = 0$, was zu demselben Ergebnis wie in Lösungsweg A führt.
- $(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = 0$
  Analog zwei Lösungswege, die gesuchte Menge ist die Vereinigung der beiden Geraden $x - 2 = y + 1$ und $x - 2 = -(y + 1)$, also der beiden Geraden $y = x - 3$ und $y = -x + 1$.

(b)

- Welche quadratische Gleichung definiert den Punkt $(3, -1)$.
  $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 0$
- Welche quadratische Gleichung definiert die Gerade $x = -2$?
  $(x + 2)^2 = 0$
- Welche quadratische Gleichung definiert die beiden Geraden $x = 1$ und $x = 5$?
  $(x - 1)(x - 5) = 0$
- Welche quadratische Gleichung definiert die beiden Geraden $x = 2$ und $y = 3$?
  $(x - 2)(y - 3) = 0$

Lösung zu A25 ex-kegelschnitte-per-leitlinie

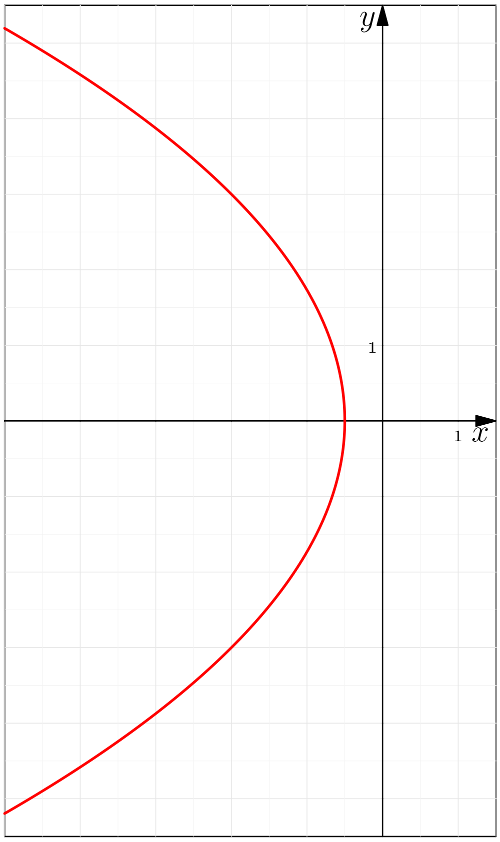
(a) Vorbemerkung: Die Gleichung $\frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} = 1$ ist gleichbedeutend zu $\overline{PF} = \overline{P\ell}$. Wer dies sieht und sich an die Definition der Parabel als geomtrischer Ort erinnert, weiss sofort, dass M eine Parabel ist. Ihre genaue Lage geht aus der folgenden Rechnung hervor.

$$\begin{aligned}
& & \frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} &= 1 \\
&\iff & \frac{\sqrt{(x-(-2))^2+y^2}}{|x-1|} &= 1 \\
&\iff & \sqrt{(x+2)^2+y^2} &= |x-1| \\
&\iff & (x+2)^2+y^2 &= (x-1)^2 \\
&\iff & x^2+4x+4+y^2 &= x^2-2x+1 \\
&\iff & 6x+3 &= -y^2 \\
&\iff & x+\frac{1}{2} &= -\frac{1}{6}y^2
\end{aligned}$$

oder in Standard-Scheitelform

$$\iff \qquad x = -\frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{2}$$

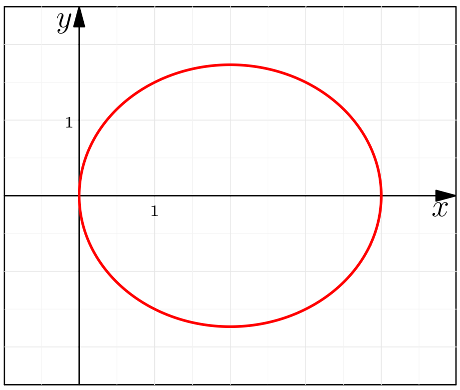
Antwort: Die Menge M ist eine nach links offene Parabel mit Scheitel $S = (-\frac{1}{2}, 0)$ und Öffnungsfaktor $-\frac{1}{6}$.



(b)

$$
\begin{aligned}
&& \frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} &= \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-(-2)|} &= \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow & \sqrt{(x-1)^2+y^2} &= \frac{1}{2}|x+2| \\
&\Longleftrightarrow & (x-1)^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x+2)^2 \\
&\Longleftrightarrow & 4(x-1)^2+4y^2 &= (x+2)^2 \\
&\Longleftrightarrow & 4(x^2-2x+1)+4y^2 &= x^2+4x+4 \\
&\Longleftrightarrow & 4x^2-8x+4+4y^2 &= x^2+4x+4 \\
&\Longleftrightarrow & 3x^2-12x+4y^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 3(x^2-4x)+4y^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 3(x^2-4x+4-4)+4y^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 3(x^2-4x+4)-12+4y^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 3(x-2)^2+4y^2 &= 12 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3} &= 1
\end{aligned}
$$

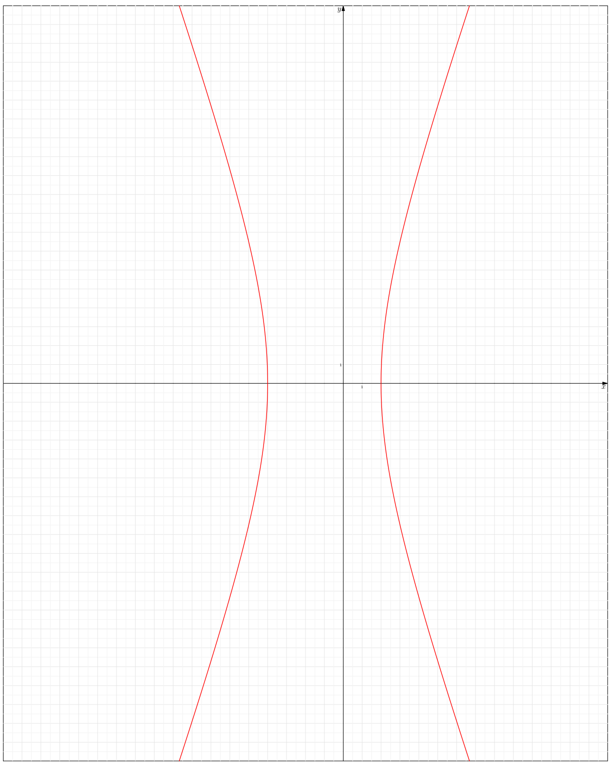
Antwort: Die Menge M ist eine Ellipse mit Zentrum $Z=(2,0)$ mit horizontaler Halbachse $\sqrt{4}=2$ und vertikaler Halbachse $\sqrt{3}$.



(c) Lösung:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} &= 3 \\
&\iff & \frac{\sqrt{(x-8)^2+y^2}}{|x-0|} &= 3 \\
&\iff & \frac{(x-8)^2+y^2}{x^2} &= 9 \\
&\iff & (x-8)^2+y^2 &= 9x^2 \\
&\iff & x^2-16x+64+y^2 &= 9x^2 \\
&\iff & 64 &= 8x^2+16x-y^2 \\
&\iff & 8 &= x^2+2x-\frac{y^2}{8} \\
&\iff & 8 &= x^2+2x+1-1-\frac{y^2}{8} \\
&\iff & 8 &= (x+1)^2-1-\frac{y^2}{8} \\
&\iff & 9 &= (x+1)^2-\frac{y^2}{8} \\
&\iff & 1 &= \frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{72}
\end{aligned}
$$

Antwort: Die Menge M ist eine nach links und rechts offene Hyperbel mit Zentrum $Z=(-1,0)$ (also mit Hyperbelästen links und rechts) mit horizontaler Halbachse $\sqrt{9}=3$ und vertikaler Halbachse $\sqrt{72}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.



Beachten Sie, dass die dritte Umformung wegen $\varepsilon > 0$ eine Äquivalenzumformung ist.

$$\begin{aligned}
&& \frac{\overline{PF}}{\overline{P\ell}} &= \varepsilon \\
\iff && \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x+1|} &= \varepsilon \\
\iff && \sqrt{x^2+y^2} &= \varepsilon \cdot |x+1| \\
\iff && x^2+y^2 &= \varepsilon^2(x+1)^2 \\
\iff && x^2+y^2 &= \varepsilon^2(x^2+2x+1) \\
\iff && x^2+y^2 &= \varepsilon^2x^2+2\varepsilon^2x+\varepsilon^2 \\
\iff && (1-\varepsilon^2)x^2-2\varepsilon^2x+y^2 &= \varepsilon^2 \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\left(x^2-2\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}x\right)+y^2 &= \varepsilon^2 \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\left(x^2-2\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}x+\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}\right)+y^2 &= \varepsilon^2 \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2-\frac{\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2}+y^2 &= \varepsilon^2 \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2+y^2 &= \varepsilon^2+\frac{\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2+y^2 &= \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \\
\iff && (1-\varepsilon^2)\frac{\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}+\frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} &= 1 \\
\iff && \frac{\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} &= 1
\end{aligned}$$

Der Koeffizient $\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2}$ bei $\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2$ ist stets positiv.

Wir untersuchen nun, wann der Koeffizient $\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ bei y^2 positiv/negativ/Null ist.

(d)
- positiv, d. h. $1-\varepsilon^2 > 0$, d. h. $1 > \varepsilon^2$, d. h. $-1 < \varepsilon < 1$ bzw. genauer $0 < \varepsilon < 1$ wegen der Annahme $\varepsilon > 0$.
  Antwort: M ist eine Ellipse mit Zentrum $\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, 0\right)$, horizontaler Halbachse $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ und vertikaler Halbachse $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.
- Null, d. h. $1 = \varepsilon^2$, d. h. $\varepsilon = 1$ (wegen $\varepsilon > 0$).
  Genauer wird in diesem Fall in der letzten Gleichung durch Null geteilt und auch schon davor, man sollte also die letzte gültige Gleichung betrachten und dort $\varepsilon = 1$ setzen, nämlich

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon^2)x^2-2\varepsilon^2x+y^2 &= \varepsilon^2 \\
-2x+y^2 &= 1 \\
y^2-1 &= 2x \\
\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2} &= x
\end{aligned}$$

  Antwort: M ist eine nach rechts offene Parabel, Scheitel $(-\frac{1}{2}, 0)$ und Öffnungsfaktor $\frac{1}{2}$.
- negativ, d. h. $\varepsilon > 1$:

Unsere Gleichung hat dann die Gestalt

$$\frac{\left(x-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}-\frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}}=1$$

(Beachten Sie das Minuszeichen vor dem Term mit y^2 und den Term ε^2-1.)
Antwort: M ist eine Hyperbel mit Zentrum $\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2},0\right)$, horizontaler Halbachse $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ und vertikaler Halbachse $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$ (man beachte, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist).