15 Quadratische Gleichungen und Funktionen

15.1 Quadratische Gleichungen

Aufgabe A1 (Aufgabe aus dem Altbabylonischen Reich, ca. 4000 Jahre alt[1])
Wie lang sind die Seitenlängen eines Rechtecks, bei dem die Summe von Länge und Breite 14 ergibt und dessen Fläche 48 ist?

Definition 15.1.1 Quadratische Gleichung

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung, die durch Äquivalenzumformungen auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gebracht werden kann, wobei die Koeffizienten a, b, c geeignete gewählte reelle Zahlen sind mit $a \neq 0$.

Quadratisches Ergänzen

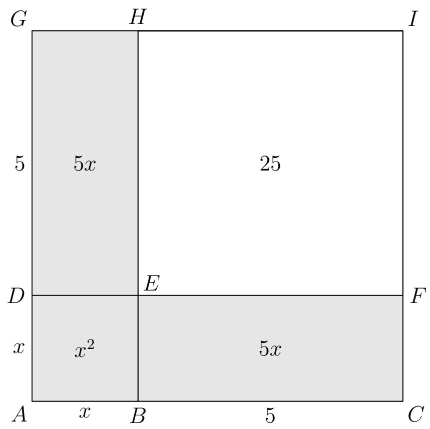
Aufgabe A2 Ziel der Aufgabe: Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen selbst entdecken.
Lösen Sie *der Reihe* nach die folgenden quadratischen Gleichungen. Es ist wichtig, dass sie der Reihe nach vorgehen, denn die Gleichungen sind so angeordnet, dass sie jeweils einen neuen Trick erlernen oder einen zuvor erlernten Trick verallgemeinern. Bitte die Gleichungen nicht durch Raten oder Faktorisieren lösen.
Beachten Sie: Die Gleichungen a) bis t) haben jeweils zwei Lösungen. Die Gleichungen u) bis x) mit reellen Parametern sind ohne Diskussion der Spezialfälle zu lösen.

a) $x^2 = 4$	b) $x^2 = 2$	c) $2x^2 = 16$	d) $2x^2 = 3$
e) $x^2 + 1 = 10$	f) $x^2 - 1 = 10$	g) $(x + 1)^2 = 4$	h) $(x + 1)^2 = 2$
i) $3(x + 1)^2 = 27$	j) $x^2 + 2x + 1 = 9$	k) $x^2 + 2x = 8$	l) $2x^2 + 4x + 2 = 8$
m) $x^2 - 2x + 1 = 16$	n) $x^2 - 4x + 4 = 9$	o) $x^2 - 4x = 5$	p) $x^2 - 6x = 16$
q) $3x^2 - 6x = 3$	r) $2x^2 - 12x + 7 = 0$	s) $-3x^2 + 18x = 12$	t) $x^2 + x - 1 = 0$
u) $ax^2 + c = 0$	v) $x^2 + bx = 0$	w) $x^2 + bx + c = 0$	x) $ax^2 + bx + c = 0$

Aufgabe A3 (Aufgabe aus dem Algebra-Buch von al-Chwarizmi, etwa 825 n. Chr.[2])
Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 10x = 39$$

und interpretiere deinen Lösungsweg mit Hilfe der Zeichnung rechts geometrisch!
Wo und wieso hast du «quadratisch ergänzt»?
Bonus: Formuliere eine Textaufgabe, zu deren Lösung man die obige Gleichung aufstellen würde!
Hinweis: Verwende das hoffentlich in Aufgabe A2 erlernte Verfahren.



[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Gleichung#Geschichte, abgerufen am 28.02.2023
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Gleichung#Geschichte, abgerufen am 28.02.2023

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 15.1.2 Quadratisches Ergänzen

Mittlerweile nach hinten kopiert, denn es passt besser zur Bestimmung der Scheitelform einer quadratischen Funktion. Hier dann zu löschen. Den folgenden Umformungstrick nennt man **quadratisches Ergänzen** (hier ist $p \in \mathbb{R}$ beliebig): ✎

$$\begin{aligned} x^2 + px &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{=0} \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Er wird insbesondere beim Lösen quadratischer Gleichungen verwendet (siehe unten).

Mitternachtsformel

15.1.3. Statt jede quadratische Gleichung einzeln durch quadratisches Ergänzen zu lösen, kann man dies auch einmal mit beliebigen Koeffizienten $a \neq 0$, b und c durchführen und so eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten, die sogenannte **Mitternachtsformel**.

✎eventuell gewisse Umformungsschritte weglassen bzw. direkt dahinterschreiben.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid : a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \mid \text{ergänze quadratisch} \\
x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 && \mid + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \mid \pm\sqrt{\cdot}, \text{ falls } b^2 - 4ac \geq 0, \\
& && \text{sonst keine reelle Lsg.} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \mid -\frac{b}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Satz 15.1.4 Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lautet

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Man beachte, dass diese Formel nur für $b^2 - 4ac \geq 0$ reelle Lösungen liefert. Beweis: siehe oben.

Aufgabe A4 Lösen Sie die Gleichungen m) bis t) aus Aufgabe A2 mit Hilfe der Mitternachtsformel.

Aufgabe A5 Wählen Sie zwei beliebige reelle Zahlen s und t (zuerst ganze Zahlen). Berechnen Sie das Produkt $(x - s)(x - t)$ durch Ausmultiplizieren. Nun stellen Sie Ihrem Nachbarn die Aufgabe, die quadratische Gleichung

$$\text{Ergebnis des Ausmultiplizierens} = 0$$

zu lösen. Wenn Sie mögen, können Sie diese Gleichung zuvor noch mit einer beliebigen reellen Zahl $\neq 0$ multiplizieren.
Wiederholen Sie dies. Wenn Sie es ihrem Partner (und sich selbst) schwer machen wollen, können Sie auch «komplizierte» Zahlen wie $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{17}}{2}$ wählen.

Aufgabe A6 Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der Mitternachtsformel. Geben Sie alle Wurzelterme in den Lösungen in Normalform an.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
b) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$
c) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
d) $2(x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x - 4)$
e) $x^2 = 4x + 16$
f) $5x(x - 65) = -4830$

Aufgabe A7 Die folgenden Aufgaben sind fast wortwörtlich aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR, übernommen. Download http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf

a) Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere. Das Produkt der beiden Zahlen ist um 50 grösser als die Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen. *Beispiel 14, S. 10*

b) Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist von einem Rasen konstanter Breite umgeben, so dass der Rasen und das Beet denselben Flächeninhalt haben. Wie breit ist der Rasen? *Beispiel 15, S. 10*

c) Ein Mensch beginnt ein Geschäft mit Fr. 2000.-. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr ist der Gewinn in Prozent genauso hoch, wodurch das Kapital auf Fr. 2645.- anwächst. Wie gross ist der jährliche Gewinn in Prozent? *Beispiel 16, S. 11*

d) Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl unter 300 liegt. *Aufgabe 23, S. 11*

e) Die Grundlinie eines Dreiecks mit Flächeninhalt 3.6 m^2 ist um 11.4 m länger als die zugehörige Höhe. Wie lang ist die Grundlinie? *Aufgabe 24, S. 11*

Merke 15.1.5 Diskriminante und Anzahl der Lösungen

Die **Diskriminante** einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ist die Zahl unter dem Wurzelzeichen in der Mitternachtsformel, also

$$D := b^2 - 4ac$$

Sie entscheidet, wie viele reelle Lösungen die Gleichung hat:

- $D > 0$: zwei reelle Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ — dies ist genau die Mitternachtsformel
- $D = 0$: eine reelle Lösung $x = \frac{-b}{2a}$ — dies ist die Mitternachtsformel im Fall $D = b^2 - 4ac = 0$
- $D < 0$: keine reelle Lösung

(lateinisch *discriminare* bedeutet *unterscheiden*)

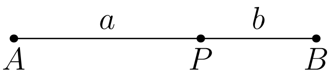
Aufgabe A8 Bestimmen Sie den Parameter t jeweils so, dass die Gleichung genau eine Lösung hat:

a) $x^2 + 2x + t = 0$
b) $tx^2 + 5x - 1 = 0$
c) $x^2 + tx + t = 0$
d) $tx^2 + 3x = 3t$
e) $x^2 + x + 1 = tx$
f) $2x^2 + tx + t^2 + 1 = 0$

15.2 Der Goldene Schnitt

Merke 15.2.1 Goldener Schnitt

Wenn ein Punkt P eine Strecke AB (im Inneren) so teilt, dass das Verhältnis der längeren Teilstrecke zur kürzeren mit dem Verhältnis der Gesamtstrecke zur längeren Teilstrecke übereinstimmt, so sagt man, dass der Punkt P *die Strecke im Goldenen Schnitt teilt.*



Man nennt dann dieses Verhältnis den **goldenen Schnitt** und notiert es mit dem griechischen Buchstaben φ («phi»=«fi»). Es gilt:

$$\varphi = ✎ \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$$

Die reelle Zahl φ ist irrational, d. h. $\varphi \notin \mathbb{Q}$.
Der goldene Schnitt taucht an vielen Stellen in der Mathematik auf, beispielsweise teilen sich die Diagonalen in einem Fünfeck im goldenen Schnitt (Aufgabe A10). Er taucht auch in der Kunst und der Natur auf.

Beweis. Die Definition von φ, die Bedingung an die Verhältnisse und Bruchrechnen liefern ✎

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Multiplikation mit φ liefert

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\iff \quad \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \qquad \text{Mitternachtsformel}$$

$$\iff \quad \varphi_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da φ als Verhältnis zweier Seitenlängen positiv ist, fällt die negative Lösung weg und es gilt

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Warum ist diese Zahl irrational? Falls nicht, so wäre auch $\sqrt{5} = 2\varphi - 1$ rational, was aber nicht der Fall ist (Beweis ähnlich wie Beweis $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Dieser Widerspruch zeigt, dass φ irrational ist. □

Aufgabe A9 Wenn eine 100 m lange Strecke im goldenen Schnitt geteilt wird, wie lang sind die beiden Teilstrecken? Testen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die beiden Verhältnisse $\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{längere Teilstrecke}}$ und $\frac{\text{längere Teilstrecke}}{\text{kürzere Teilstrecke}}$ berechnen.

Aufgabe A10 Zeigen Sie, dass in jedem regelmässigen Fünfeck gilt:

- Die Diagonalen schneiden sich im goldenen Schnitt. Hinweis: Ähnliche Dreiecke finden und verwenden.
- Nun sehr einfach: Das Verhältnis von (jeder) Diagonale zu (jeder) Seite ist der goldene Schnitt.

Aufgabe A11 Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein regelmässiges Fünfeck (ausgehend von einer Seite s). Hinweis: Es gibt elegante Konstruktionen, aber man kann auch etwas brutal damit beginnen, eine Strecke der Länge $\sqrt{5} \cdot s$ zu konstruieren (verwende Aufgabe A10 und $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

15.3 Quadratische Funktionen

Definition 15.3.1 Quadratische Funktion

Eine Funktion f heisst **quadratisch**, wenn sie in der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0$$

geschrieben werden kann. Mit anderen Worten ist eine quadratische Funktion eine Funktion, die durch ein Polynom zweiten Grades dargestellt werden.
Wie bei quadratischen Gleichungen in Standardform $ax^2 + bx + c$ nennt man die Zahl

$$D = b^2 - 4ac$$

die **Diskriminante von** f.

Beispiele 15.3.2. Hier sind einige Beispiele für quadratische Funktionen: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $h(x) = -x^2 + \sqrt{11}$, $k(x) = -10x^2 - x + 1$, $p(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3}{6}x + 7\sqrt{3}$.

Aufgabe A12 Skizzieren Sie, jeweils ausgehend von dem Graphen von $y = f(x) = x^2$, der sogenannten **Normalparabel**, die Graphen der folgenden Funktionen.

a) $g(x) = 2x^2$ b) $h(x) = (2x)^2$ c) $i(x) = -x^2$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x^2$

In 2gNP: Statt vorheriger Aufgabe die Graphen der folgenden Scheitelformen zeichnen lassen (Einheit 2 Häuschen, eventuell x- und y-Bereich vorgeben): $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, $i(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
$a(x) = (x-2)^2$, $b(x) = 2(x-2)^2$, $c(x) = (x-2)^2 + 3$, $d(x) = 2(x-2)^2 + 3$, $e(x) = -2(x-2)^2 + 3$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$
Idee: Als Vorbereitung zur Ermittlung der Scheitelform, damit man bereits weiss, wofür sie gut ist. Nächste Lektion Beispiele hinten (ca. S. 7 unc 8) vorgerechnet.

Definition 15.3.3 Standardform, Scheitelform, Nullstellenform

Quadratische Funktionen können in verschiedenen Formen dargestellt werden.

- **Standardform**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0$$

- **Scheitelform** oder **Scheitelpunktform**

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\ x_S,\ y_S \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0$$

  In diesem Fall ist $S = (x_S, y_S)$ der **Scheitel** des Graphen von f (Erklärungen folgen).

- **Nullstellenform**

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0$$

  Beachte: Die Darstellung in Nullstellenform ist nur möglich, wenn die Diskriminante nicht-negativ ist, d. h. wenn $D = b^2 - 4ac \geq 0$ gilt.

15.3.4. Ist eine quadratische Funktion in Scheitelform oder Nullstellenform gegeben, so erhält man die Standardform durch ausmultiplizieren und zusammenfassen.
Das Ermitteln der Scheitelform bzw. der Nullstellenform aus der Standardform ist etwas aufwändiger.

Zur Nullstellenform einer quadratischen Gleichung

15.3.5. Ist $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ die Nullstellenform einer quadratischen Funktion, so gelten

$$f(x_1) = a\underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) = a(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{=0} = 0$$

Dies bedeutet, dass x_1 und x_2 Nullstellen von f sind, d. h. Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$. Dies erklärt den Namen *Nullstellenform* und führt zum folgenden Algorithmus.

Algorithmus 15.3.6 Ermitteln der Nullstellenform einer quadratischen Funktion = Faktorisieren einer quadratischen Funktion

Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine quadratische Funktion (in Standardform). Man ermittle die Nullstellen von f mit der Mitternachtsformel (oder anderweitig).

- Hat f zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2, so hat f die Nullstellenform — Fall $D > 0$
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
- Hat f genau eine reelle Nullstelle x_1, so hat f die Nullstellenform — Fall $D = 0$
$$f(x) = a(x - x_1)^2$$
- Hat f keine reelle Nullstellen, so kann f nicht in Nullstellenform dargestellt werden. — Fall $D < 0$

Aufgabe A13 Ermitteln Sie die Nullstellenformen der folgenden quadratischen Funktionen. Testen Sie Ihr Ergebnis durch Ausmultiplizieren.

a) $f(x) = x^2 - 81$
b) $g(x) = 3x^2 - 24x + 48$
c) $h(x) = x^2 + 1$
d) $p(x) = 2x^2 + 8x - 42$
e) $q(x) = x^2 - x - 1$ Bitte ans Ausmultiplizieren denken!

Aufgabe A14 Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus 15.3.6. Dazu müssen Sie nachrechnen, dass für $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Hinweis: Geschicktes Rechnen (dritte binomische Formel) erspart einige Rechenarbeit.

Zur Scheitelform einer quadratischen Gleichung (quadratisches Ergänzen)

Definition 15.3.7

Mit Hilfe von analytischer Geometrie werden wir sehen, dass der Graph jeder quadratischen Funktion f eine Parabel ist, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft.
Der Schnittpunkt dieser Symmetrieachse mit der Parabel heisst der **Scheitel von** f.

Beispiel 15.3.8. Der Scheitel der sogenannten **Normalparabel** $f(x) = x^2$ ist der Nullpunkt $0 = (0, 0)$ des Koordinatensystems.

Tafelerklärung (oder eventuell auf nächster Seite): Wie man die quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + 6x + 7$ auf Scheitelform bringt und wie man damit den Graphen von f leicht zeichnen kann («Zusatzkoordinatensystem einzeichnen»; der Scheitel ist $S = (-3, -2)$). Ausserdem dabei zeigen, dass man die Nullstellen und somit die Nullstellenform sofort aus der Scheitelform erhält.
Dasselbe dann für $y = q(x) = -2x^2 + 8x - 3$ (der Scheitel ist $S = (2, 5)$).

Aufgabe A15 Schreiben Sie jede der folgenden quadratischen Funktionen in Scheitelform, d. h. in der Form $f(x) = (x - x_S)^2 + y_S$ (quadratisch ergänzen!) und geben Sie den Scheitel S der zugehörigen Parabel an. Fertigen Sie zusätzlich jeweils eine Skizze des Graphen an (Einheit 2 Häuschen).

Bestimmen Sie ausserdem jeweils direkt aus der Scheitelform die Nullstellen (ohne Mitternachtsformel) und die Nullstellenform von f.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$
b) $f(x) = x^2 + 12x - 5$
c) $f(x) = x^2 - 6x + 6$
d) $f(x) = x(x - 4)$
e) $f(x) = 3x^2 + 12x + 5$

Aufgabe A16 Seien b und c zwei beliebige reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Scheitel S der Parabel $f(x) = x^2 + bx + c$.
Hinweis: Quadratisches Ergänzen

Aufgabe A17 In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils angegeben, wo der Scheitel S einer verschobenen Normalparabel liegt. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung der verschobenen Normalparabel und geben Sie diese in Standardform $f(x) = ax^2 + bx + c$ an.

a) $S = (0, -2)$
b) $S = (2, 0)$
c) $S = (1, 1)$
d) $S = (-2, -3)$

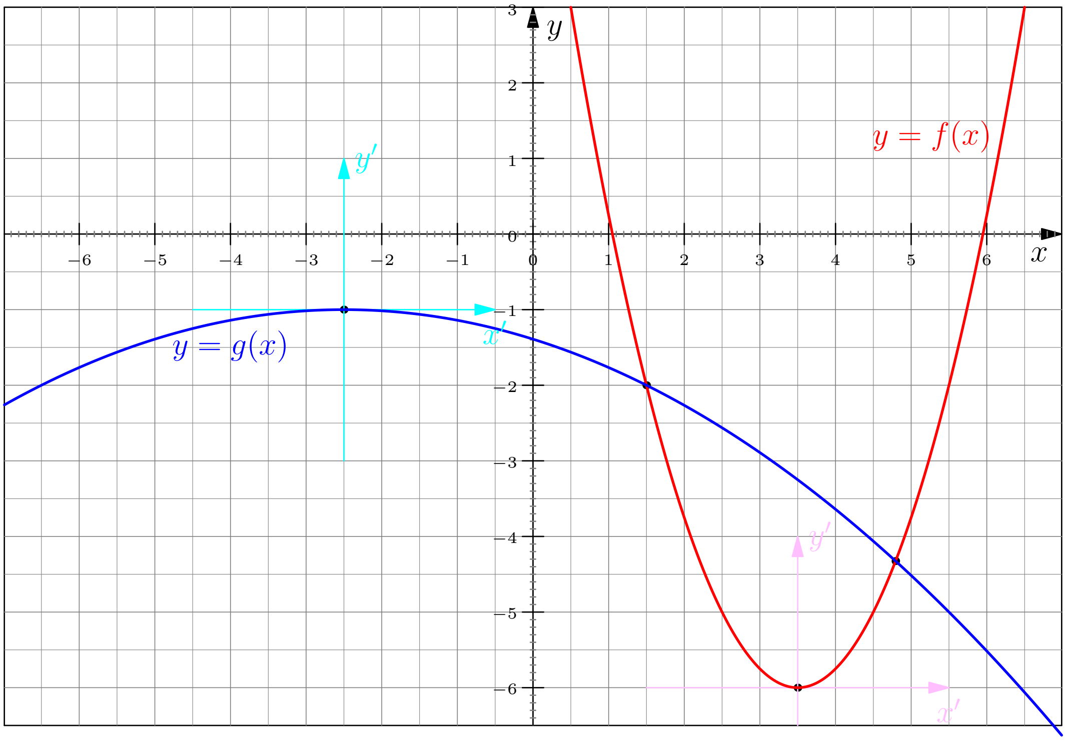
Den Begriff «Öffnungsfaktor» in Beispielen erklären. Allgemein: Der Öffnungsfaktor ist der Koeffizient bei x^2. In Definiton 15.3.3 ist es also in jeder der drei dort erklärten Formen die Variable/der Parameter a.

15.3.9. Vorteil der Scheitelform: Scheitel und Öffnungsfaktor der Parabel direkt ablesbar. Damit ist (hoffentlich) klar, wie der Graph aussieht.

Beispiel 15.3.10 (Für das Ermitteln der Scheitelform aus der Standardform per quadratischem Ergänzen)**.** Wir ermitteln die Scheitelform der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 6.25$. ✎

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 - 7x + 6.25 && \text{quadratisches Ergänzen} \\ &= x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6.25 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 6 \end{aligned}$$

Fazit: Parabel mit Scheitel $S = \left(\frac{7}{2}, 6\right)$ und Öffnungsfaktor 1. Diese ist leicht zu zeichnen (rote Parabel in Zeichnung).



15.3.11. Die oben ermittelte Gleichung $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 6$ kann man auch so schreiben:

$$y + 6 = \underbrace{y - (-6)}_{=y'} = \left(\underbrace{x - \frac{7}{2}}_{=x'}\right)^2 \qquad \Longleftrightarrow \text{✎} \qquad y' = x'^2$$

Wir führen neue Koordinaten ein (motiviert durch die unterklammerten Ausdrücke):

- x'-Koordinate, die sich aus der x-Koordinaten per $x' = x - \frac{7}{2}$ berechnet (umgekehrt $x = x' + \frac{7}{2}$)
- y'-Koordinate, die sich aus der y-Koordinaten per $y' = y + 6 = y - (-6)$ berechnet (umgekehrt $y = y' - 6$).

Der Ursprung des neuen x'-y'-Koordinatensystems hat bezüglich des alten x-y-Koordinatensystems die Koordinaten $\left(\frac{7}{2}, -6\right)$ (denn $x' = 0$ liefert $x = x' + \frac{7}{2} = 0 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ und $y' = 0$ liefert $y = y' - 6 = -6$). Dieses neue Koordinatensystem ist in der obigen Gleichung in Rosa eingezeichnet.

In den neuen «gestrichenen» Koordinaten hat unsere obige Gleichung die Gestalt $y' = x'^2$, ist also eine Normalparabel und sehr einfach zu zeichnen.

Beispiel 15.3.12 (Nullstellen (und Nullstellenform) aus Scheitelform ermitteln)**.** Aus der gerade erhaltenen Scheitelform $y = f(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 6$ ermitteln wir die Nullstellen (also $y = f(x) = 0$ lösen): ✎

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - 6 = 0 \iff \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = 6$$

$$\iff x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{6} \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{6} + \frac{7}{2} \approx \begin{cases} 5.95 \\ 1.05h \end{cases}$$

passt zur Zeichnung

Nullstellenform

$$f(x) = \left(x - \left(\sqrt{6} + \frac{7}{2}\right)\right)\left(x - \left(\sqrt{6} - \frac{7}{2}\right)\right)$$

Beispiel 15.3.13 (Ermitteln der Scheitelform, Beispiel mit Öffnungsfaktor $\neq 1$ bzw. sogar negativem Öffnungsfaktor)**.** Wir ermitteln die Scheitelform der quadratischen Funktion $g(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{16}x - \frac{89}{64}$. ✎

$$y = g(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{16}x - \frac{89}{64} \qquad | \cdot (-16) \quad \text{damit Faktor 1 bei } x^2$$

$$\begin{aligned}
-16 \cdot g(x) &= x^2 + 5x + \frac{89}{4} && \text{quadratisch ergänzen} \\
&= x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{89}{4} \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{89}{4} \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{64}{4} \\
-16 \cdot g(x) &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 16 && | \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) \text{ bzw. } : (-16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{1}{16} \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 1 \\
&= -\frac{1}{16} \cdot \left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

Fazit: Parabel mit Scheitel $S = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ und Öffnungsfaktor $-\frac{1}{16}$ (blaue Parabel in der Zeichnung auf der vorherigen Seite).

Aufgabe A18 Bestimmen Sie jeweils exakt (ohne Taschenrechner) die (Koordinaten der) Schnittpunkte der Normalparabel $y = x^2$ mit den durch die folgenden Funktionen gegebenen Geraden. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch eine Skizze.

a) $g(x) = x + \frac{3}{4}$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $i(x) = 2x - 1$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Aufgabe A19 Bestimmen Sie die x-Koordinate des Scheitels einer allgemein gegebenen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Hinweis: Imitieren Sie das Vorgehen aus dem obigen Beispiel mit Parametern.

Merke 15.3.14

Der Scheitel der allgemeinen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die x-Koordinate $-\frac{b}{2a}$.

Merkhilfe: Das ist der «erste Summand» in der Mitternachtsformel.
Die Nullstellen (falls existent) liegen symmetrisch zu $-\frac{b}{2a}$ auf der x-Achse, d. h. die Zahl $-\frac{b}{2a}$ ist ihr Durchschnitt: $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

15.4 Kreise und quadratische Gleichungen

15.4.1. Wir möchten Kreise algebraisch beschreiben, um gewisse geometrische Probleme rechnerisch lösen zu können. Beispielsweise möchten wir die Schnittpunkte zweier Kreise oder Tangenten an Kreise berechnen.

Definition 15.4.2

Wir notieren den Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ in der Zeichenebene als $K_r(M)$. Laut Definition des Kreises gilt ✎

$$K_r(M) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{PM} = r\}$$

15.4.3. Wie kann man beispielsweise den Kreis $K_7(3,5)$ mit Radius 7 und Mittelpunkt $M = (3,5)$ algebraisch beschreiben?

Sei $P = (x,y)$ ein allgemeiner Punkt der Zeichenebene. Wir schreiben die Bedingung, dass $P = (x,y)$ auf dem Kreis $K_7(3,5)$ liegt, um:✎

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in K_7(3,5) \quad &\iff \quad \overline{PM} = 7 \\ &\iff \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = 7 \\ &\iff \quad (x-3)^2 + (y-5)^2 = 7^2 \end{aligned}$$

In Worten: Der Kreis $K_7(3,5)$ ist die Menge aller Punkte $P = (x,y)$ mit

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$$

Merke 15.4.4

Sind $M = (a,b)$ ein Punkt der Zeichenebene und $r > 0$ eine reelle Zahl, so gilt ✎

$$K_r(M) = K_r(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

In Worten: Der Kreis $K_r(M)$ ist die Menge aller Punkte (x,y), für die gilt ✎

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Man nennt diese Gleichung «Kreisgleichung» und spricht etwas salopp vom

«Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$»

15.4.5. Wir formen die oben betrachtete Kreisgleichung um ✎

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 7^2 \quad &\iff \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 49 \\ &\iff \quad x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0 \end{aligned}$$

Die Punkte $P = (x,y)$ unseres Kreises $K_7(3,5)$ sind also genau die **Nullstellen** des Ausdrucks

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y - 15$$

Man sagt deswegen: Der Kreis $K_7(3,5)$ ist die **Nullstellenmenge von** $x^2 - 6x + y^2 - 10y - 15$.
Gleichbedeutend: Der Kreis $K_7(3,5)$ ist die Lösungsmenge von $x^2 - 6x + y^2 - 10y - 15 = 0$.

Definition 15.4.6

Die **Nullstellenmenge** eines Ausdrucks $f(x, y)$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = 0$.

Merke 15.4.7

Die Nullstellenmenge jedes Ausdrucks der Form

$$x^2 + y^2 + sx + ty + u$$

wobei $s, t, u \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind, ist

- ein Kreis
- oder leer oder einpunktig (= besteht aus genau einem Punkt).

Man beachte, dass die Koeffizienten bei x^2 und y^2 in dem obigen Ausdruck 1 sind und dass xy nicht vorkommt.

Dasselbe gilt, wenn man den obigen Ausdruck mit einer rellen Zahl $\neq 0$ multiplizert, denn dabei ändert sich die Nullstellenmenge nicht.

Beweis. Mit quadratischer Ergänzung separat für x und y kann man die Gleichung $x^2 + y^2 + sx + ty + u = 0$ auf die Form $(x - a)^2 + (y - b)^2 = d$ bringen. Im Fall $d > 0$ ist die Lösungsmenge ein Kreis um (a, b) mit Radius $r = \sqrt{d}$; im Fall $d = 0$ ist nur der Punkt $P = (a, b)$ eine Lösung; im Fall $d < 0$ hat die Gleichung keine Lösung. □

Aufgabe A20 Lösungen können gerne mit GeoGebra geprüft werden (zumindest graphisch); man kann dort Kreisgleichungen direkt eingeben.

(a) Die Nullstellenmengen der folgenden Ausdrücke sind Kreise bzw. die angegebenen Gleichungen definieren Kreise. Finden Sie jeweils Mittelpunkt und Radius heraus.
Hinweis: Quadratisches Ergänzen separat für x bzw. y.

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 5$ bzw. als Gleichung $x^2 + y^2 - 5 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{1}{4}$

d) $x^2+2x+1+y^2-\frac{1}{4}$ (Wie unterscheidet sich der Kreis von dem in der vorherigen Aufgabe?)

e) $x^2 + y^2 - 6x + 20y + 73$

f) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{2}y + 4$

(b) Warum definieren die folgenden Gleichungen keine Kreise bzw. was definieren sie?

a) $x^2 + y^2 + 25$

b) $x^2 + y^2$

c) $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1$

Aufgabe A21 Lösungen können gerne mit GeoGebra geprüft werden (zumindest graphisch); man kann dort Kreis- oder Geradengleichungen direkt eingeben.

(a) Zeichnen Sie die Gerade $-x + y = 1$ und den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ in ein Koordinatensystem ein und lesen Sie die beiden Schnittpunkte ab (sie haben ganzzahlige Koordinaten). Testen Sie, ob die abgelesenen Schnittpunkte sowohl die Geraden- als auch die Kreisgleichung erfüllen.
Berechnen Sie die beiden Schnittpunkt nun wie folgt:
- Lösen die die Geradengleichung nach y auf und setzen Sie das Ergebnis in die Kreisgleichung ein.
- Sie erhalten eine quadratische Gleichung für x. Lösen Sie diese.
- Berechnen Sie die y-Koordinaten der Schnittpunkte.

Bemerkung: Sie haben das (nichtlineare) Gleichungssystem aus den zwei Gleichungen $-x + y = 1$ und $\mathrm{d}x^2 + y^2 = 25$ gelöst.

(b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 1$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 25$.
Vorgehen: Die Schnittpunkte sind die Lösungen des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses wieder, indem sie eine Gleichung (welche wohl?) nach ein Variablen auflösen und das Ergebnis in die andere einsetzen usw.

(c) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Kreises um $(-2, 1)$ mit Radius 4 mit der Geraden durch den Kreismittelpunkt mit Steigung $\frac{3}{2}$.

Tangenten an Parabeln

Die ersten Aufgaben in diesem Abschnitt wurden an der Tafel gestellt

15.4.8. Wir werden später allgemein definieren, was eine **Tangente** (= Berührgerade) an eine (hinreichend glatte) Kurve in einem Punkt (= dem Berührpunkt) ist.

Ist die betrachtete Kurve eine Parabel (= der Graph einer quadratischen Funktion), so ist eine Gerade genau dann eine Tangente, wenn sie die Kurve **genau einmal** schneidet/berührt (Beweis später sehr einfach). Wir machen das zur ad-hoc-Definition.

Definition 15.4.9 Tangente an eine Parabel/an den Graphen einer quadratischen Funktion

Ist $f = f(x)$ eine quadratische Funktion, so heisst jede Gerade, die den Graphen von f in genau einem Punkt schneidet, **Tangente an** f bzw. ausführhrlich **Tangente an den Graphen von** f.
Man spricht von der **Tangenten an** f **im Punkte** P, wenn P der Schnittpunkt/Berührpunkt von Tangente und Graph ist.

Aufgabe A22

(a) Bestimmen Sie die Gleichung $t(x) = mx + q$ der Tangenten an $f(x) = x^2$ im Punkt $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(b) Wir betrachten nun einen allgemeinen Punkt $P = (p, f(p)) = (p, p^2)$ der Normalparabel $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie die Gleichung $t(x) = mx + q$ der Tangenten an f im Punkt P.

Empfehlung: Prüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Geogebra oder anderer Software graphisch.

Satz 15.4.10

Die Tangente $t = t_p$ an die Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt (p, p^2) hat die Funktionsgleichung

$$t(x) = t_p(x) = 2p \cdot x - p^2$$

Die Tangente hat also als Steigung das Doppelte $2p$ der x-Koordinate und als y-Achsenabschnitt das Negative $-p^2$ der y-Koordinate des Punktes.

Mit Geogebra Normalparabel $f(x) = x^2$ zeichnen lassen und die Tangenten daran in den Punkten $A = (-2, 4)$ (nenne die Tangente $a(x)$), $B = (3, 9)$, $C = (1, 1)$, $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $E = (-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $O = (0, 0)$.
Danach Schiebregler p erklären und sowohl den Punkt $P = (p, p)$ als auch die Tangente $t(x) = 2px - p^2$ animieren.

Beweis. Siehe Lösung von Aufgabe A22, Teilaufgabe (b). Dort werden drei Lösungswege erklärt (einmal mit Diskriminante, zweimal ohne). □

Aufgabe A23

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Tangenten an die Normalparabel $f(x) = x^2$, die durch den Punkt $A = (1, -3)$ gehen, auf zwei Weisen.

1. Weg: Mit Hilfe von Satz 15.4.10.

2. Weg: Direkt wie folgt: Starte mit der allgemeinen Geradengleichung $y = t(x) = mx + q$. Zur Bestimmung von m und q:
   - Verwende, dass A auf der Tangenten liegt.
   - Verwende eine Diskriminante, um sicherzustellen, dass sich t und f in genau einem Punkt schneiden (bzw. berühren).

Hast du beide Male dieselbe Lösung erhalten?

(b) Gib die Berührpunkte an, in denen deine (beiden) Tangenten die Normalparabel berühren.

(c) Prüfe deine Lösung auf Papier: Zeichne $f(x) = x^2$, beide Tangenten und beide Berührpunkte.

(d) Prüfe deine Lösung mit GeoGebra.

Aufgabe A24

(a) Bestimmen Sie alle Tangenten an die Parabel $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1$, die durch den Punkt $P = (-2, -1)$ gehen. Hinweis: Vorgehen wie beim 2. Weg in Teilaufgabe A23.(a).

(b) Bestimmen Sie jeweils den Berührpunkt.

(c) Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Zeichnung (Scheitelform nutzen).

Aufgabe A25 Bestimmen Sie die Tangente an die Parabel $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1$ im Punkt $A = (-1, f(-1))$.

15.5 Optimierung quadratischer Funktionen: Extramalprobleme

Aufgabe A26 Mit einem Zaun der Länge 10 m soll eine rechteckige Weidefläche (in der Ebene) von möglichst grossem Flächeninhalt eingezäunt werden. Wie lang sind die Rechtecksseiten zu wählen? Wie gross ist die grösstmögliche Weidefläche?

Definition 15.5.1 Maximum, Maximalstelle, Minimum, Minimalstelle

Nimmt eine Funktion $f = f(x)$ oder präziser

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

an einer Stelle (= einem Element) $x_0 \in D$ der Definitionsmenge einen grössten bzw. kleinsten Wert $f(x_0)$ an, so heisst dieser Wert $f(x_0)$ **Maximum** bzw. **Minimum** von f auf D und x_0 heisst **Maximalstelle** bzw. **Minimalstelle** von f auf D.

Beispiel 15.5.2. In Aufgabe A26 haben wir gezeigt, dass die Funktion $f(x) = x(5-x)$ oder präziser

$$\begin{aligned} f\colon [0,5] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x(5-x) \end{aligned}$$

die Maximalstelle $x_0 = \frac{5}{2}$ hat. Das zugehörige Maximum ist $f(x_0) = f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \cdot (5 - \frac{5}{2}) = \frac{25}{4} = 6.25$.

15.5.3. Ein **Extremalproblem** ist ein Problem, bei dem man wissen möchte, für welche Werte eine Funktion extrem wird, also möglichst gross oder möglichst klein. Diese Werte heissen **Extremstellen** der Funktion (Extremstelle = Extremalstelle = Maximal- oder Minimalstelle). Meist ist man auch an den zugehörigen Funktionswerten interessiert, den **Extrema** (= Extremwerten = Maxima oder Minima).

Man spricht auch von **Optimierung** oder **Optimierungsproblemen**. Sie spielen eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen: Materialverbrauch minimieren, Kosten minimieren, CO_2-Ausstoss minimieren, Luftwiderstand minimieren, Gewinn maximieren, Abstand minimieren, Wissen maximieren, Lebensalter maximieren etc.

Merke 15.5.4 Extremstellen einer quadratischen Funktion

Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat genau eine Extremstelle, nämlich die x-Koordinate des Scheitels $S = (x_S, y_S)$, also

$$x_S = \frac{-b}{2a}$$

Merkhilfe: Das ist der «erste Teil» der Mitternachtsformel $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ohne den «Plus-Minus-Summanden». Die Nullstellen liegen symmetrisch zu x_S.
Der Öffnungsfaktor $a \neq 0$ entscheidet über den Typ der Extremstelle.

- Im Fall $a > 0$ ist x_S eine Minimalstelle von $f(x)$, das zugehörige Minimum ist die y-Koordinate des Scheitels $y_S = f(x_S)$.
- Im Fall $a < 0$ ist x_S eine Maximalstelle von $f(x)$, das zugehörige Maximum ist $y_S = f(x_S)$.

Beweis per quadratischer Ergänzung: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \dots = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \dots$ und Scheitelform.

Beispiel 15.5.5. In Aufgabe A26 haben wir die quadratische Funktion $f(x) = x(5-x) = -x^2 + 5x$ betrachtet. Ihre Extremstelle ist

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Sie ist wegen $a = -1 < 0$ eine Minimalstelle, das zugehörige Minimum ist $f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$.

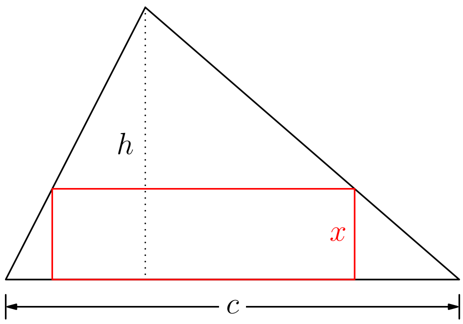
15.5.6. Aufgabe A26 zeigt, dass bei festgelegtem Umfang unter allen Rechtecken das Quadrat dasjenige mit maximaler Fläche ist. Dies ist das **isoperimetrisches Problem** für Rechtecke (iso perimeter = derselbe Umfang). Wenn man statt Rechtecken beliebige geschlossene Begrenzungskurven in der Ebene zulässt, wird der Beweis deutlich schwieriger. Die Lösung ist aber die erwartete, nämlich der Kreis.

Im dreidimensionalen fragt das isoperimetrische Problem bei fixierter Oberfläche nach der geschlossenen Fläche mit dem grössten Volumen. Die Lösung ist die Sphäre (= Kugeloberfläche).

Aufgabe A27 Ein Stück Draht der Länge 10 cm wird in zwei Teile zerschnitten, aus denen je ein Quadrat geformt wird. Wo muss man den Draht zerschneiden, damit die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate extremal wird? Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum? Wir gross ist die zugehörige Fläche?

Aufgabe A28

Von einem Dreieck sind die Seitenlänge c und die zugehörige Höhe h gegeben.
Berechnen Sie die Höhe x des einbeschriebenen Rechtecks mit einer Seite auf c, dessen Flächeninhalt maximal ist.



Aufgabe A29 Eine Party hat bei einem Eintritt von 8 Franken durchschnittlich 240 Besucher. Würde man den Eintritt

- um 0.5 CHF erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10 zurück;
- um 1 CHF erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 20 zurück;
- um 1.5 CHF erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 30 zurück;
- usw.

Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten?

Aufgabe A30 Ein Motorboot mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s und ein Surfer mit 2 m/s kreuzen sich auf senkrechten Kursen (d. h. beide bewegen sich auf Geraden, die sich senkrecht schneiden).

Zur Zeit $t = 0$ Sekunden ist das Motorboot 50 m, der Surfer 10 m vor dem Kreuzungspunkt ihrer Kurse (= dem Schnittpunkt der Geraden). Zu welchem Zeitpunkt ist die Entfernung am kleinsten?

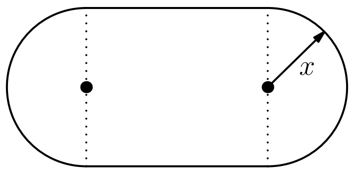
Hinweise: Wähle das Koordinatensystem so, dass sich das Motorboot auf der x-Achse bewegt und der Surfer auf der y-Achse, beide in Richtung der jeweiligen Achse. Minimiere statt des Abstands das Quadrat des Abstands (= den Term unter dem Wurzelzeichen, wenn man den Abstand mit Pythagoras berechnet).

Aufgabe A31

Ein a Meter langer Zaun soll wie abgebildet einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer angrenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt F kann der Platz maximal haben? Löse die Aufgabe für $a = 50$ Meter und allgemein für a.

Aufgabe A32

Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt (siehe Abbildung). Wie lang muss der Radius x sein, damit das Rechteck (= Fussballfeld) maximalen Flächeninhalt hat? Wie lang sind dann Länge und Breite des Rechtecks?



Aufgabe A33 Für welches Paar (x, y) reeller Zahlen, die die Bedingung $x - y = 4$ erfüllen, ist die Quadratsumme $s = x^2 + y^2$ minimal? Wie gross ist die minimale Quadratsumme?

Aufgabe A34 Die Position eines Balles zur Zeit t ist

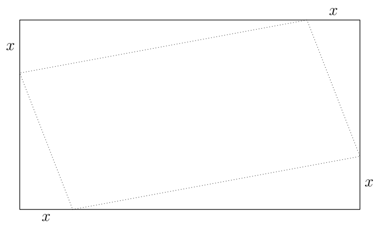
$$b(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zur welchem Zeitpunkt hat der Ball den kleinsten Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ und an welcher Position befindet er sich dann? Welchen Abstand hat er dann zum Ursprung?

Hinweis: Minimiere das Quadrat des Abstandes (= den Term unter dem Wurzelzeichen, wenn man den Abstand mit Pythagoras berechnet).

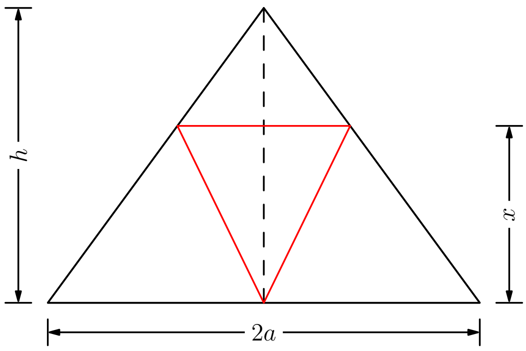
Aufgabe A35

Auf den Seiten eines Rechtecks mit den Seiten 9 cm und 5 cm werden von jeder Ecke aus im gleichen Umlaufsinn x cm lange Strecken abgetragen und ihre Endpunkte verbunden (siehe Skizze). Berechne x, so dass der Flächeninhalt des entstehenden Parallelogramms minimal wird.



Aufgabe A36

Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Basis $2a$ und die zugehörige Höhe h (siehe Abbildung). Der Basismittelpunkt ist die Spitze eines einbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks (rot in der Skizze), dessen Basisendpunkte auf den beiden Schenkeln des ursprünglichen Dreiecks liegen. Für welche Höhe x hat dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt?



Aufgabe A37

In einem Geschäft werden von einem bestimmten Artikel monatlich 200 Stück verkauft. Der Reingewinn beträgt CHF 10 pro Stück. Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung

- um 1 CHF pro Stück den Monatsabsatz um 50 Stück steigert;
- um 2 CHF pro Stück den Monatsabsatz um 100 Stück steigert;
- um 3 CHF pro Stück den Monatsabsatz um 150 Stück steigert;
- usw.

Bei welcher Preissenkung pro Stück ist der grösste Gesamtgewinn zu erwarten?

Hinweis: Wenn man den Preis um x Franken senkt, verkauft man ... Stück monatlich. Der Reingewinn pro Stück beträgt dann .... Der Gesamtgewinn beträgt dann ....

Aufgabe A38

Zwei Punkte A und B bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten auf zwei zueinander senkrechten Geraden. Wenn A im Schnittpunkt der beiden Geraden ist, befindet sich B noch 8 m vor dem Schnittpunkt. Fünf Sekunden später erreicht B den Schnittpunkt, sein Abstand zu A beträgt dann bereits 6 m.

Wann ist der Abstand zwischen A und B am kleinsten, und wie gross ist dieser minimale Abstand?

Hinweise:

- Sei A zur Zeit $t = 0$ im Schnittpunkt.
- Nimm an, dass sich A auf der x-Achse bewegt und B auf der y-Achse, jeweils in Richtung der Achse.
- Skizze empfohlen für $t = 0$ und $t = 5$.
- Bestimme $x_A(t)$, die x-Koordinate von A zur Zeit t.
- Bestimme $y_B(t)$, die y-Koordinate von B zur Zeit t.
- Minimiere das Quadrat des Abstandes (= den Term unter dem Wurzelzeichen, wenn man den Abstand mit Pythagoras berechnet).

15.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-altbabylonisch

Sei x die Länge und y die Breite. Dann ist das Gleichungssystem $x+y=14$ und $xy=48$ zu lösen.

Wenn man vermutet, dass Länge und Breite natürliche Zahlen sind, so kommt man durch Ausprobieren schnell auf zwei Lösungen:

- 1. Lösung: $x=6$ und $y=8$
- 2. Lösung: $x=8$ und $y=6$

Alternativ verwende man die Substitutionsmethode: Die erste Gleichung liefert $y=14-x$. Substituiert man dies in die zweite Gleichung, so erhält man $x(14-x)=48$ oder ausmultipliziert $14x-x^2=48$ bzw. umgeschrieben

$$x^2-14x+48=0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung. Wie man eine solche Gleichung allgemein löst, ist das Thema dieses Kapitels. Wer die Faktorisierung $x^2-14x+48=(x-6)(x-8)$ sieht, kommt auf die Gleichung

$$(x-6)(x-8)=0.$$

Da ein Produkt nur dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $x=6$ (und $y=8$) oder $x=8$ (und $y=6$).

Lösung zu A2 ex-mitternachts-formel-erarbeiten

a) $x=\pm 2$

b) $x=\pm\sqrt{2}$

c) $x=\pm 2\sqrt{2}$

d) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

e) $x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$

f) $x^2=11\Rightarrow x=\pm\sqrt{11}$

g) $(x+1)=\pm 2$ bzw. ausgeschrieben $x+1=2$ oder $x+1=-2$; also $x=1$ oder $x=-3$ (zwei Lösungen). Meist schreibt man diese zwei Lösungen kurz so auf: $x_1=1,\ x_2=-3$

h) $(x+1)=\pm\sqrt{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}-1,\ x_2=-\sqrt{2}-1$

i) $(x+1)^2=9\Rightarrow(x+1)=\pm 3\Rightarrow x_1=2,\ x_2=-4$

j) $(x+1)^2=9\Rightarrow x_1=2,\ x_2=-4$

k) $x^2+2x+1=9\Rightarrow x_1=2,\ x_2=-4$

l) $x^2+2x+1=4\Rightarrow(x+1)^2=4\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-3$

m) $(x-1)^2=16\Rightarrow x_1=5,\ x_2=-3$

n) $(x-2)^2=9\Rightarrow x-2=\pm 3\Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1$

o) $x^2-4x+4=9\Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1$

p) $x^2-2\cdot x\cdot 3=16\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=16+3^2\Rightarrow(x-3)^2=25\Rightarrow x_1=8,\ x_2=-2$

q) $x^2-2x=1\Rightarrow x^2-2x+1=2\Rightarrow(x-1)^2=2\Rightarrow x_1=\sqrt{2}+1,\ x_2=-\sqrt{2}+1$

r) $x^2-6x+\frac{7}{2}=0\Rightarrow x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2+\frac{7}{2}=3^2\Rightarrow(x-3)^2=\frac{11}{2}\Rightarrow x_1=3+\frac{\sqrt{22}}{2},\ x_2=3-\frac{\sqrt{22}}{2}$

s) $x^2-6x=-4\Rightarrow x^2-6x+9=5\Rightarrow(x-3)^2=5\Rightarrow x_1=3+\sqrt{5},\ x_1=3-\sqrt{5}$

t) $x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-1=0\Rightarrow x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$

u) $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (für $a\neq 0$, wobei a und c unterschiedliche Vorzeichen haben müssen oder $c=0$ gelten muss, damit $-\frac{c}{a}\geq 0$ gilt und die Wurzel definiert ist)

v) $x(x+b)=0$ also (Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null) $x=0$ oder $x+b=0$, d.h. $x=0$ oder $x=-b$

w)

$$\begin{aligned}
x^2+bx+c&=0 && \mid +\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\\
x^2+2\cdot\frac{1}{2}bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2&=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c && \text{binomische Formel}\\
\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2&=\frac{1}{4}b^2-c && \mid \pm\sqrt{\cdot}\ \text{(erlaubt, falls rechte Seite} \geq 0)\\
x+\frac{1}{2}b&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c} && \mid -\frac{1}{2}b\\
x&=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}
\end{aligned}$$

x) Siehe Herleitung der Mitternachtsformel in Abschnitt A3 auf Seite 2

Lösung zu A3 ex-quadratische-ergaenzung-geometrisch

$$\begin{aligned}
x^2+10x&=39\\
x^2+2\cdot 5x&=39 && \text{Die linke Seite ist die graue Fläche in der Zeichnung.}\\
x^2+2\cdot 5x+5^2&=39+5^2
\end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung: Die graue Fläche wurde durch das Quadrat $EFIH$ der Seitenlänge 5 **zum Quadrat** $ACIG$ der Seitenlänge $x+5$ **ergänzt**.

$$\begin{aligned}
(x+5)^2&=64 && \text{(links binomische Formel)}\\
x+5&=\pm\sqrt{64}=\pm 8\\
x_1&=3,\quad x_2=-13
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die positive Lösung $x_1=3$ ist geometrisch sinnvoll.
Mögliche Textaufgabe: Finde eine Länge x, so dass ein Quadrat mit Seitenlänge x und ein Rechteck mit Breite x und Höhe 10 zusammen den Flächeninhalt 39 haben!

Lösung zu A4 ex-mitternachtsformel-einueben

Lösung zu A5 ex-partner-quadratische-gleichung-per-mf-loesen-lassen

Lösung zu A6 ex-allg-quadratische-gleichungen

a) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$ b) $x=-\frac{1}{3}$ c) $\mathbb{L}=\varnothing$

d)

$$\begin{aligned}
2(x-1)(x-2)&=(x-3)(x-4)\\
2(x^2-3x+2)&=x^2-7x+12\\
2x^2-6x+4&=x^2-7x+12 && \mid -x^2+7x-12\\
x^2+x-8&=0\\
x_{1,2}&=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{33}
\end{aligned}$$

e) $x^2-4x-16=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{80}}{2}=2\pm 2\sqrt{5}$

f) $5x^2-325x+4830=0 \Rightarrow x_1=42$, $x_2=23$

Lösung zu A7 ex-textaufgaben-quadr-gleichung

Die folgenden Lösungen sind fast wortwörtlich aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR, übernommen. Download http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf

a) 1. Schritt : Variable(n) deklarieren: $x =$ kleinere Zahl.
Also ist die grössere Zahl $x + 50$.
2. Schritt : Gleichung aufstellen:
Da das Produkt um 50 grösser ist als die Summe, muss zur Summe 50 addiert werden, um das Produkt zu bekommen: Produkt = Summe + 50, d.h.

$$x(x+50) = (x + (x+50)) + 50$$

3. Schritt: Gleichung lösen

$$\begin{aligned} x(x+50) &= (x+(x+50))+50 && \\ x^2+50x &= 2x+100 && \mid -2x-100 \\ x^2+48x-100 &= 0 && \mid \text{Faktorisieren oder Lösungsformel} \\ (x-2)(x+50) &= 0 && \\ x-2=0 &\text{ oder } x+50=0 && \\ x=2 &\text{ oder } x=-50 && \end{aligned}$$

4. Schritt: Antwortsatz
Die beiden Zahlen lauten 2 und 52 oder -50 und 0.

b) $x =$ Breite des Rasens
Gleichung: Fläche Beet = Fläche Einfassung (machen Sie eine Skizze!)

$$\begin{aligned} 2\cdot 3 &= 2\cdot 2x + 2\cdot 3x + 4x^2 && \\ 6 &= 10x + 4x^2 && \mid -6 \\ 0 &= 4x^2 + 10x - 6 && \mid :2 \text{ dieser Schritt ist optional} \\ 0 &= 2x^2 + 5x - 3 && \mid \text{Lösungsformel} \\ x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{-5\pm 7}{4} && \\ x_1 &= \frac{1}{2} \qquad x_2 = -3 && \end{aligned}$$

Die negative Lösung $x_2 = -3$ ist gartenbautechnisch sinnlos und muss deswegen verworfen werden.
Die Einfassung ist 0.5 m breit.

c) $x =$ Prozentsatz (als reelle Zahl) des jährlichen Gewinns
Gleichung: Kapital nach 2 Jahren:

$$\begin{aligned} 2645 &= 2000\cdot(1+x)^2 && \mid :2000 \\ \frac{529}{400} &= (1+x)^2 && \mid \sqrt{\cdot} \\ \pm\frac{23}{20} &= 1+x && \mid -1 \\ x_1 = \frac{3}{20} &= \frac{15}{100} = 0.15 \qquad x_2 = -\frac{43}{20} = -\frac{215}{100} = -2.15 && \end{aligned}$$

Die erste Lösung entspricht einem Zins vom 0.15=15%.
Die zweite (unbrauchbare negative Lösung) entspricht einem grossen Verlust im ersten Jahr, auf dieses negative Kapital (Schulden) wird ein negativer Zins erwirtschaftet, was dann einem Gewinn entspricht.

d) $x =$ gesuchte Zahl
$x^2 - 100 - 200 = 300 - x$, Lösungen $x_1 = -25$, $x_2 = 24$.
Die Zahl ist -25 oder 24.

e) $x =$ Länge der Grundlinie in m
Die zu lösende Gleichung ist $3.6 = \frac{x(x-11.4)}{2}$.
Die Lösungen sind $x_1 = 12$, $x_2 = -0.6$, wobei die negative Lösung geometrisch nicht sinnvoll ist. Die Grundlinie ist 12 m lang.

Lösung zu A8 ex-anzahl-loesungen-quadr-gleichung

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ Null ist. Wir müssen also jeweils die Gleichung $D = 0$ nach t auflösen.

a) $D = 4 - 4t = 0$, also $t = 1$.
b) $D = 25 + 4t = 0$, also $t = -\frac{25}{4}$.
c) $D = t^2 - 4t = t(t-4) = 0$, also $t = 0$ oder $t = 4$
Bemerkung: Die Gleichung $t^2 - 4t = 0$ ist eine quadratische Gleichung **in der Variablen** t und lässt sich auch mit der Mitternachtsformel lösen: $t_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{4\pm 4}{2}$, also $t_1 = 4$ und $t_2 = 0$.
d) $D = 9 + 12t^2 = 0$, also keine Lösung (denn $D = 9 + 12t^2 \geq 9 > 0$ für jede reelle Zahl t). Dies bedeutet, dass die betrachtete quadratische Gleichung stets zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 hat.
Alternative: Die quadratische Gleichung $12t^2 + 9$ hat keine Lösung, denn ihre Diskriminante $0^2 - 4 \cdot 12 \cdot 9 = -4 \cdot 12 \cdot 9$ ist negativ.
e) $x^2 + x(1-t) + 1 = 0$, also $D = (1-t)^2 - 4 = 0$, d.h. $1 - t = \pm 2$, d.h. $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.
f) $2x^2 + tx + (t^2 + 1) = 0$, also $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot (t^2 + 1) = t^2 - 8t^2 - 8 = -7t^2 - 8 = 0$, also keine Lösung; genauer ist die Diskriminante $D = -7t^2 - 8$ für alle $t \in \mathbb{R}$ negativ, d.h. die Gleichung $2x^2 + tx + t^2 + 1 = 0$ hat für **kein** t eine Lösung.

Lösung zu A9 ex-goldener-schnitt

Aus $\frac{100}{a} = \frac{a+b}{b} = \varphi$ erhalten wir

$$a = \frac{100}{\varphi} = \frac{100}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{200}{1+\sqrt{5}} \approx 61.80$$

und damit

$$b = 100 - a \approx 38.20$$

Alternative für b: Aus $\frac{a}{b} = \frac{100-b}{b} = \varphi$ folgt $100 - b = \varphi b$ bzw. $100 = b(\varphi + 1)$ und somit

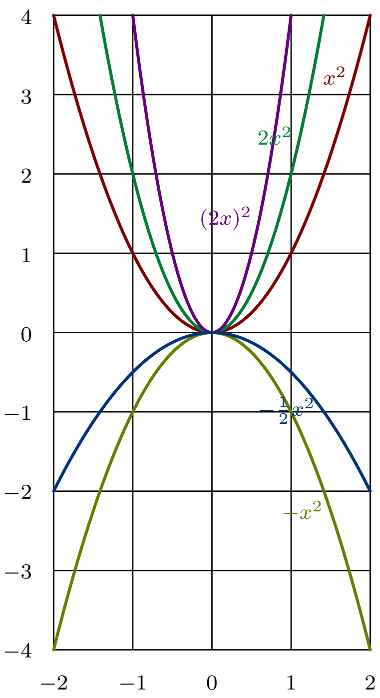
$$b = \frac{100}{\varphi + 1} = \frac{100}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{200}{1 + \sqrt{5} + 2} = \frac{200}{3 + \sqrt{5}} \approx 38.20$$

Lösung zu A10 ex-pentagramm-goldener-schnitt

Lösung zu A11 ex-pentagramm-konstruieren

Lösung zu A12 ex-normalparabeln-oeffnungsfaktor

Aufgabe b) kann sowohl als Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$, wie auch als Streckung mit Faktor 4 in y-Richtung betrachtet werden, da $(2x)^2 = 4 \cdot x^2$.



Lösung zu A13 ex-nullstellenform-ermitteln

Das Ausmultiplizieren ist dem Leser überlassen.

a) $f(x) = x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$

b) $g(x) = 3x^2 - 24x + 48 = 3(x-4)^2$

c) $h(x) = x^2 + 1$ keine Nullstellenform

d) $p(x) = 2x^2 + 8x - 42 = 2(x-3)(x+7)$

e) $q(x) = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Lösung zu A14 ex-beweis-faktorisierung

$$\begin{aligned}
a(x-x_1)(x-x_2) &= a\left(x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2\right) \\
&= ax^2 - ax\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + a \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= ax^2 - ax\frac{-2b}{2a} + a \cdot \frac{b^2 - \left(b^2-4ac\right)}{4a^2} \\
&= ax^2 + bx + a \cdot \frac{4ac}{4a^2} \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Lösung zu A15 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen

Die Skizzen finden sich am Ende der Lösung.

a) Scheitelform

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2 = (x-2)^2 + (-2)$$

Also Scheitel $S = (2, -2)$.
Nullstellen und Nullstellenform:
1. Lösungsweg: Aus $0 = (x-2)^2 - 2$ folgt $(x-2)^2 = 2$, also $x - 2 = \pm\sqrt{2}$ und somit sind $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ die Nullstellen von f. Angenähert: $x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$ und $x_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$ (was beim Zeichnen hilft). Die Nullstellenform ist $f(x) = (x - (2+\sqrt{2})(x - (2 - \sqrt{2})$.

Man kann dies auch als $f(x) = (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$ schreiben, jedoch sind die Nullstellen dann nicht so leicht ablesbar wie in der Schreibweise «x - Nullstelle1 mal x - Nullstelle2».

2. Lösungsweg: Aus der Scheitelform bekommt man mit der dritten binomischen Formel direkt die Nullstellenform und kann daraus die Nullstellen ablesen.

$$f(x) = (x-2)^2 - 2 = ((x-2)-\sqrt{2})((x-2)+\sqrt{2}) = (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) = (x-(\underbrace{2+\sqrt{2}}_{\text{Nullstelle } x_1}))(x-(\underbrace{2-\sqrt{2}}_{\text{Nullstelle } x_2}))$$

b) Scheitelform $f(x) = x^2 + 12x + 36 - 36 - 5 = (x+6)^2 - 41 = (x - (-6))^2 + (-41)$. Also Scheitelpunkt $S = (-6, -41)$.
Nullstellen: $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{41}$,
Nullstellenform $f(x) = (x - (-6 + \sqrt{41}))(x - (-6 - \sqrt{41}))$.

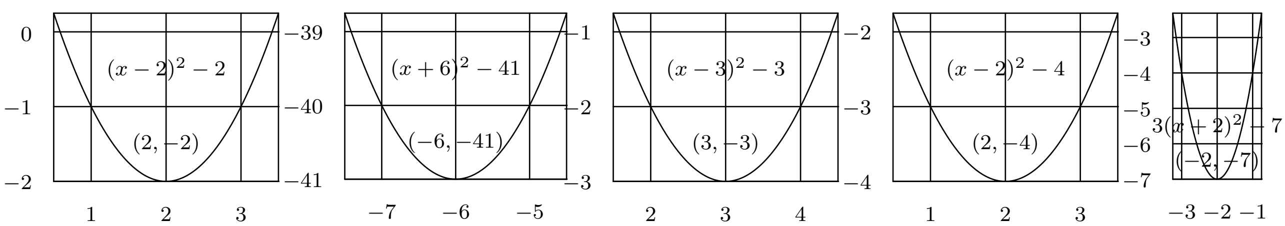
c) Scheitelform $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 6 = (x-3)^2 - 3 = (x-3)^2 + (-3)$. Also Scheitel $S = (3, -3)$.
Nullstellen: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$,
Nullstellenform $f(x) = (x - (3 + \sqrt{3}))(x - (3 - \sqrt{3}))$.

d) Scheitelform $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4 = (x-2)^2 + (-4)$. Also Scheitel $S = (2, -4)$.
Nullstellen und Nullstellenform sind hier langweilig, denn $f(x)$ ist bereits in Nullstellenform gegeben.
Dennoch: Nullstellen: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4} = 2 \pm 2 = \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases}$.
Nullstellenform $f(x) = (x-2)(x-0) = (x-4)x$.

e) Scheitelform $f(x) = 3x^2 + 12x + 5 = 3(x^2+4x)+5 = 3(x^2+4x+4-4)+5 = 3(x^2+4x+4)-12+53(x+2)^2-7 = 3(x-(-2))^2 - 7$. Also Scheitelpunkt $S = (-2, -7)$.
Nullstellen:

$$\begin{aligned} & & 3(x+2)^2 - 7 &= 0 \\ &\iff & 3(x+2)^2 &= 7 \\ &\iff & (x+2)^2 &= \frac{7}{3} \\ &\iff & x + 2 &= \pm\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{3} \\ &\iff & x_{1,2} &= -2 \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

Nullstellenform (beachte den Faktor 3) $f(x) = 3\left(x - \left(-2 + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\right)\left(x - \left(-2 - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\right)$.



Lösung zu A16 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen-allgemein
Man ergänzt wieder quadratisch:
$f(x) = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$.
Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten $S = \left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4}\right)$.

Lösung zu A17 ex-normalparabel-verschieben

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$

d) $f(x) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$

Lösung zu A18 ex-schnitt-normalparabel-gerade

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen erhält man, indem man die Funktionsterme (y-Koordinaten) gleichsetzt.

a) $x^2 = x + \frac{3}{4}$, umgeformt $4x^2 - 4x - 3 = 0$, Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Für die y-Koordinaten setzt man die erhaltenen x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen ein (in welche spielt keine Rolle, da beide das gleich ergeben müssen).
Schnittpunkte: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b) $x^2 = -\frac{1}{2}x + 1$, Lösungen $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
Schnittpunkte: $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}+9}{8}\right)$ und $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \frac{9-\sqrt{17}}{8}\right)$

c) $x^2 = 2x - 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 = 0$ also $x = 1$ als einzige Lösung. Schnittpunkt $(1, 1)$.

d) Die Gleichung $x^2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ hat keine Lösung. Die Gerade schneidet die Parabel nicht.

Lösung zu A19 ex-scheitel-allgemein-kurz

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
\frac{1}{a} f(x) &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
\frac{1}{a} f(x) &= x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
\frac{1}{a} f(x) &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
f(x) &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 \underbrace{-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c}_{-\frac{b^2}{4a}+c=\frac{-b^2+4ac}{4a}}
\end{aligned}
$$

Also ist $-\frac{b}{2a}$ die x-Koordinate des Scheitels (wenn man für x diesen Wert einsetzt, wird Null quadriert).
(Die Vereinfachung der y-Koordinate des Scheitels in der Unterklammerung ist nicht relevant für die Lösung der Aufgabe.)

Lösung zu A20 ex-mittelpunkt-und-radius-zu-kreisgleichung

(a)

a) Die Gleichung kann auch als $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$ geschrieben werden. Sie definiert offensichtlich einen Kreis um den Ursprung $(0, 0)$ mit Radius 5.

b) Die Gleichung kann auch als $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$ geschrieben werden. Sie definiert einen Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt{5}$.

c) Es gilt $x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{1}{4} = (x-1)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$.
Gesucht sind also die Nullstellen des Ausdrucks $(x-1)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$ bzw. die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ist gesucht. Sie definiert einen Kreis um $(1, 0)$ mit Radius $\frac{1}{2}$.

d) Es gilt $x^2 + 2x + 1 + y^2 - \frac{1}{4} = (x+1)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$.
Gesucht sind also die Nullstellen der Gleichung $(x+1)^2 + y^2 - \frac{1}{4} =$ bzw. der äquivalenten Gleichung $(x-(-1))^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Sie definiert einen Kreis um $(-1, 0)$ mit Radius $\frac{1}{2}$.

e) Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned}x^2+y^2-6x+20x+73 &= x^2-6x+y^2+20x+73\\ &= x^2-6x+9-9+y^2+20y+100-100+73\\ &= (x-3)^2-9+(y+10)^2-100+73\\ &= (x-3)^2+(y+10)^2-36\end{aligned}$$

Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung $(x-3)^2+(y+10)^2-36=0$ bzw. äquivalent der Gleichung

$$(x-3)^2+(y-(-10))^2=6^2$$

Sie definiert einen Kreis mit Mittelpunkt $(3,-10)$ und Radius 6.

f) Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2\sqrt{3}x+4\sqrt{2}y+4 &= x^2-2\sqrt{3}x+y^2+4\sqrt{2}y+4\\ &= x^2-2\sqrt{3}x+3-3+y^2+4\sqrt{2}y+8-8+4\\ &= (x-\sqrt{3})^2-3+(y+2\sqrt{2})^2-8+4\\ &= (x-\sqrt{3})^2+(y+2\sqrt{2})^2-7\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $(x-\sqrt{3})^2+(y+2\sqrt{2})^2=7=(\sqrt{7})^2$ ist ein Kreis um den Punkt $(\sqrt{3},-2\sqrt{2})$ mit Radius $\sqrt{7}$.

(b)

a) Weil die Gleichung $x^2+y^2=-25$ keine Lösung hat (denn Quadrate sind nie negativ). Die Gleichung definiert also die leere Mengen.

b) Die Gleichung $x^2+y^2=0$ hat genau eine Lösung, nämlich $(0,0)$ (denn ein Quadrat ist nur dann Null, wenn Null quadriert wird). Die Gleichung definiert also die einpunktige Menge $\{(0,0)\}$.
Die Gleichung $x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$ definiert eine Ellipse mit Halbachsen 1 (in x-Richtung) und 2 (in y-Richtung).

Lösung zu A21 ex-kreis-mit-gerade-schneiden

(a) Zeichnung bitte selbst anfertigen. Die Gerade kann auch als $y=x+1$ geschrieben werden. Die Schnittpunkte sind $(3,4)$ und $(-4,-3)$. Beide Punkte erfüllen beide Gleichungen.
Rechnerische Lösung: Setze $y=x+1$ in die Kreisgleichung $x^2+y^2=25$ ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned}x^2+(x+1)^2&=25\\ x^2+x^2+2x+1&=25\\ 2x^2+2x-24&=0\\ x^2+x-12&=0\end{aligned}$$

Lösungen $x_1=3$ und $x_2=-4$ erraten (etwa per Faktorisierung $(x-3)(x+4)$) oder per Mitternachtsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$$

Die zugehörigen y-Koordinaten sind $y_1=x_1+1=3+1=4$ und $y_2=x_2+1=-3$. Das ergibt die zuvor abgelesenen Schnittpunkte.

(b) Einsetzen von $y = \frac{1}{2}x + 1$ in die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 25$ liefert

$$
\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 &= 25 \\
x^2 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 &= 25 \\
4x^2 + x^2 + 4x + 4 &= 100 \\
5x^2 + 4x - 96 &= 0
\end{aligned}
$$

Mitternachtsformel:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5 \cdot 96}}{10} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 24}}{10} = \frac{-4 \pm \sqrt{16(1 + 5 \cdot 24)}}{10} \\
&= \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 + 10 \cdot 12}}{10} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{121}}{5} = \frac{-2 \pm 22}{5} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{24}{5} = -\frac{48}{10} = -4.8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen x-Koordinaten sind

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}x_1 + 1 = 3 \\
y_2 &= \frac{1}{2}x_2 + 1 = -\frac{12}{5} + 1 = -\frac{7}{5} = -\frac{14}{10} = -1.4
\end{aligned}
$$

(c) Der Kreis hat die Gleichung

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

Die Geradengleichung bekommt man wie folgt: Ansatz $y = \ell(x) = \frac{3}{2}x + q$. Da $(-2, 1)$ auf ℓ liegt, gilt $\ell(-2) = 1$, also $\frac{3}{2} \cdot (-2) + q = 1$, also $q = 4$. Die Geradengleichung ist also

$$y = \frac{3}{2}x + 4$$

Einsetzen der (bereits nach y aufgelösten) Geradengleichung in die Kreisgleichung liefert

$$
\begin{aligned}
(x + 2)^2 + \left(\frac{3}{2}x + 4 - 1\right)^2 &= 16 \\
(x + 2)^2 + \left(\frac{3}{2}x + 3\right)^2 &= 16 \\
x^2 + 4x + 4 + \frac{9}{4}x^2 + 9x + 9 &= 16 \\
x^2 + \frac{9}{4}x^2 + 13x - 3 &= 0 \\
4x^2 + 9x^2 + 52x - 12 &= 0 \\
13x^2 + 52x - 12 &= 0
\end{aligned}
$$

Mitternachtsformel:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-52 \pm \sqrt{52^2 + 4 \cdot 13 \cdot 12}}{26} = \frac{-52 \pm \sqrt{52 \cdot (52 + 12)}}{26} = \frac{-52 \pm \sqrt{52 \cdot 64}}{26} = \frac{-52 \pm 8\sqrt{52}}{26} \\
&= \frac{-26 \pm 4\sqrt{4 \cdot 13}}{13} = \frac{-26 \pm 8\sqrt{13}}{13} = -2 \pm 8\frac{\sqrt{13}}{13}
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen y-Werte sind

$$y_{1,2} = \frac{3}{2}x_{1,2} + 4 = 1 \pm 12\frac{\sqrt{13}}{13}$$

Lösung zu A22 ex-tangenten-an-normalparabel-in-punkt

(a) • Da $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ auf t liegen soll, muss $t(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ gelten, also

$$m\frac{1}{2} + q = \frac{1}{4}$$
$$q = -\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$$

• Damit sich t und f genau einmal schneiden, muss $f(x) = t(x)$ genau eine Lösung haben. Wir verwenden dafür die Determinante, müssen unsere Gleichung aber zuerst auf Standardform bringen.

$$f(x) = t(x)$$
$$x^2 = mx + q$$
$$x^2 - mx - q = 0$$

Die Diskriminante ist somit $D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-q) = m^2 + 4q$. Unsere Gleichung hat genau dann genau eine Lösung, wenn gilt
$$D = m^2 + 4q = 0$$

Es gilt also, die beiden gerade ermittelten Gleichungen

$$q = -\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}$$
$$m^2 + 4q = 0$$

gleichzeitig zu lösen, d. h. das aus ihnen bestehende Gleichungssystem zu lösen. Wir ersetzen q in der zweiten Gleichung durch den durch die erste Gleichung gegebenen Ausdruck für q.

$$m^2 + 4(-\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}) = 0$$
$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

(Alternativlösung per Faktorisieren: $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$ hat nur die Nullstelle $m = 1$.)
Einsetzen in die erste Gleichung unseres Gleichungssystems liefert

$$q = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Fazit: Die gesuchte Tangente ist

$$t(x) = mx + q = 1x - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4}$$

(b) Lösungsweg 1:
Ähnlich wie oben muss einerseits $p^2 = mp + q$ gelten und andererseits $D = m^2 + 4q = 0$. Löst man ersteres nach q auf (Ergebnis $q = p^2 - mp$) und setzt das Ergebnis in zweiteres ein, so erhält man

$$m^2 + 4(p^2 - mp) = 0$$
$$m^2 - 4pm + 4p^2 = 0$$
$$m^2 - 4pm + 4p^2 = 0$$
$$m_{1,2} = \frac{4p \pm \sqrt{16p^2 - 16p^2}}{2} = 2p$$

(Alternativlösung per Faktorisieren: $m^2 - 4pm + 4p^2 = (m-2p)^2$ hat nur die Nullstelle $m = 2p$.)
Also
$$t(x) = mx + q = mx + p^2 - mp = 2px + p^2 - 2p^2 = 2px - p^2$$

Lösungsweg 2: Wie oben muss $q = p^2 - mp$ gelten, also $t(x) = mx + p^2 - mp$. Nun ist m so zu bestimmen, dass $f(x) = t(x)$ genau eine Lösung hat.

$$\begin{aligned} f(x) &= t(x) \\ x^2 &= mx + p^2 - mp \\ x^2 - mx + (mp - p^2) &= 0 \end{aligned}$$

Da $x = p$ nach Konstruktion eine Lösung ist, können wir den Faktor $(x - p)$ abspalten und erhalten

$$(x - p)(x - m + p) = 0$$

Die andere Lösung ist also $x = m - p$. Damit es nur eine Lösung gibt, muss diese mit der Lösung $x = p$ übereinstimmen, d. h. es muss gelten $m - p = p$, was zu $m = 2p$ führt. Nun weiter wie oben.
Alternative:

Lösung zu A23 ex-tangenten-an-normalparabel-durch-externen-punkt

(a)

1. Weg: Die Tangente an die Normalparabel im Punkt (p, p^2) hat die Gleichung $t_p(x) = 2px - p^2$. Für welches p geht diese Tangente durch $A = (1, -3)$? Dazu ist p so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned} && t_p(1) &= -3 \\ \iff && 2p \cdot 1 - p^2 &= -3 \\ \iff && 0 &= p^2 - 2p - 3 \\ \iff && p &= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Die beiden Tangenten sind also

$$\begin{aligned} t_3(x) &= 2 \cdot 3 \cdot x - 3^2 = 6x - 9 \\ t_{-1}(x) &= 2 \cdot (-1) \cdot x - (-1)^2 = -2x - 1 \end{aligned}$$

2. Weg: Da $A = (1, -3)$ auf der Tangente $t(x) = mx + q$ liegen soll, muss $t(1) = -3$ gelten, also

$$\begin{aligned} m \cdot 1 + q &= -3 \\ q &= -m - 3 \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} && f(x) &= t(x) \\ \iff && x^2 &= mx + q && \iff x^2 - mx - q = 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung hat, muss die Diskriminatne D Null sein, d. h. $D = m^2 + 4q = 0$ gelten. Ersetzen von $q = -m - 3$ liefert

$$\begin{aligned} m^2 + 4(-m - 3) &= 0 \\ m^2 - 4m - 12 &= 0 \\ m_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = 2 \pm 4 = \begin{cases} 6 \\ -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Steigung $m = m_1 = 6$ erhalten wir $q = -m - 3 = -9$ und die Tangente

$$t(x) = 6x - 9$$

Für die Steigung $m = m_2 = -2$ erhalten wir $q = -m - 3 = -1$ und die Tangente

$$t(x) = -2x - 1$$

Wir nennen die beiden Tangenten im folgenden t_{-1} und t_3 wie beim ersten Lösungsweg.

(a) Laut erstem Lösungweg ist klar, dass t_{-1} durch den Punkt $(-1, 1)$ geht (denn allgemein geht t_p durch (p, p^2)). Ebenso geht t_3 durch $(3, 9)$.
Alternativ kann man auch die Lösungen der Gleichungen $x^2 = -2x - 1$ (einzige Lösung $x = -1$) bzw. $x^2 = 6x - 9$ (einzige Lösung $x = 3$) ausrechnen und daraus die Schnittpunkte $(-1, 1)$ bzw. $(3, 9)$.

(b)

Lösung zu A24 ex-tangenten-an-allgemeine-parabel-durch-externen-punkt

(a) Ansatz für die Tangente: $t(x) = mx + q$.
Damit $P = (-2, -1)$ auf t liegt, muss $t(-2) = -1$ gelten, also

$$\begin{aligned} & m \cdot (-2) + q = -1 \\ \iff \quad & q = 2m - 1 \end{aligned}$$

Damit t die Parabel f berührt, muss $f(x) = t(x)$ genau eine Lösung haben. Da wir dies mit Hilfe der Diskriminante sicherstellen, bringen wir diese Gleichung auf Standardform:

$$\begin{aligned} & f(x) = t(x) \\ \iff \quad & \frac{1}{4}(x+3)^2 + 1 = mx + q \\ \iff \quad & (x+3)^2 + 4 = 4mx + 4q \\ \iff \quad & x^2 + 6x + 9 + 4 = 4mx + 4q \\ \iff \quad & x^2 + 6x - 4mx + 9 + 4 - 4q = 0 \\ \iff \quad & x^2 + \underbrace{(6-4m)}_{=b} x + \underbrace{13-4q}_{=c} = 0 \end{aligned}$$

Die Diskriminante D dieser Gleichung muss Null sein, d. h.

$$\begin{aligned} & D = (6-4m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (13-4q) = 0 \\ \iff \quad & 36 - 48m + 16m^2 - 52 + 16q = 0 \\ \iff \quad & 9 - 12m + 4m^2 - 13 + 4q = 0 \end{aligned}$$

Wir ersetzen $q = 2m - 1$ (wir haben oben gesehen, dass dies gelten muss) und erhalten

$$\begin{aligned} & 9 - 12m + 4m^2 - 13 + 4(2m-1) = 0 \\ \iff \quad & 9 - 12m + 4m^2 - 13 + 8m - 4 = 0 \\ \iff \quad & 4m^2 - 4m - 8 = 0 \\ \iff \quad & m^2 - m - 2 = 0 \\ \iff \quad & m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Zu $m_1 = 2$ gehört $q_1 = 2m_1 - 1 = 3$ und die Tangente
$$t_1(x) = 2x + 3$$
- Zu $m_2 = -1$ gehört $q_2 = 2m_2 - 1 = -3$ und die Tangente
$$t_2(x) = -x - 3$$

(b) Die Berührpunkte erhält man durch Lösen der Gleichung $t_1 = f$ bzw. $t_2 = f$.

- Berührpunkt von t_1:

$$\begin{aligned} t_1(x) &= f(x) \\ 2x+3 &= \frac{1}{4}(x+3)^2+1 \\ 8x+12 &= (x+3)^2+4 \\ 8x+12 &= x^2+6x+9+4 \\ 0 &= x^2-2x+1 = (x-1)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \end{aligned}$$

  Die y-Koordinate des Berührpunkts ist $t_1(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ (alternativ $f(1) = \frac{1}{4} \cdot 16 + 1 = 5$). Der Berührpunkt ist also $(1, 5)$.
- Berührpunkt von t_2:

$$\begin{aligned} t_2(x) &= f(x) \\ -x-3 &= \frac{1}{4}(x+3)^2+1 \\ -4x-12 &= (x+3)^2+4 \\ -4x-12 &= x^2+6x+9+4 \\ 0 &= x^2+10x+25 = (x+5)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = -5 \end{aligned}$$

  Die y-Koordinate des Berührpunkts ist $t_2(-5) = -(-5) - 3 = 2$ (alternativ $f(-5) = \frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 2$). Der Berührpunkt ist also $(-5, 2)$.

(c) dem Leser überlassen

Lösung zu A25 ex-tangenten-an-allgemeine-parabel-in-parabelpunkt

Es gilt $A = (-1, f(-1)) = (-1, 2)$.
Ansatz: $t(x) = mx + q$.
Wegen $A \in t$ folgt

$$\begin{aligned} && t(-1) &= 2 \\ \iff && m \cdot (-1) + q &= 2 \\ \iff && q &= m + 2 \end{aligned}$$

(Das Vorgehen nun ist genau wie bei der vorherigen Aufgabe.)
Damit t die Parabel f berührt, und zwar in $A = (-1, 2)$, muss $f(x) = t(x)$ genau eine Lösung haben, nämlich $x = -1$. Die folgende Gleichung soll also genau eine Lösung haben:

$$\begin{aligned} && f(x) &= t(x) \\ \iff && \frac{1}{4}(x+3)^2+1 &= mx+q \\ \iff && (x+3)^2+4 &= 4mx+4q \\ \iff && x^2+6x+9+4 &= 4mx+4q \\ \iff && x^2+6x-4mx+9+4-4q &= 0 \\ \iff && x^2+\underbrace{(6-4m)}_{=b}x+\underbrace{13-4q}_{=c} &= 0 \end{aligned}$$

Zwei Lösungswege:

- 1. Weg: Die Diskriminante D dieser Gleichung muss Null sein, d. h.

$$\begin{aligned} & D=(6-4m)^2-4\cdot 1\cdot(13-4q)=0 \\ \iff\quad & 36-48m+16m^2-52+16q=0 \\ \iff\quad & 9-12m+4m^2-13+4q=0 \end{aligned}$$

  (Bis hier genau wie bei der vorherigen Aufgabe.)
  Wir ersetzen $q=m+2$ (wir haben oben gesehen, dass dies gelten muss) und erhalten

$$\begin{aligned} & 9-12m+4m^2-13+4(m+2)=0 \\ \iff\quad & 9-12m+4m^2-13+4m+8=0 \\ \iff\quad & 4m^2-8m+4=0 \\ \iff\quad & m^2-2m+1=0 \end{aligned}$$

  Mitternachtsformel oder Faktorisierung $m^2-2m+1=(m-1)^2$ liefern $m=1$ als einzige Lösung.
  Dies ist die Steigung der Tangente. Den y-Achsenabschnitt erhält man per $q=m+2=3$.
  Die gesuchte Tangente ist also $t(x)=mx+q=x+3$.
- 2. Weg: Erinnerung: Wir möchten, dass

$$x^2+(6-4m)x+13-4q=0$$

  genau eine Lösung hat, und zwar $x=-1$. Ersetze $q=m+3$:

$$\begin{aligned} x^2+(6-4m)x+13-4(m+2)&=0 \\ x^2+(6-4m)x+13-4m-8&=0 \\ x^2+(6-4m)x-4m+5&=0 \end{aligned}$$

  Da $x=-1$ Nullstelle ist, kann man den Faktor $(x-(-1))=(x+1)$ abspalten, also die linke Seite der Gleichung wie folgt faktorisieren:

$$x^2+(6-4m)x-4m+5=(x+1)(x-4m+5)$$

  Die «andere Lösung» ist also $-(-4m+5)=4m-5$. Diese soll mit -1 übereinstimmen, es soll also gelten

$$\begin{aligned} 4m-5&=-1 \\ 4m&=4 \\ m&=1 \end{aligned}$$

  Daraus erhält man $q=m+2=3$ und die gesuchte Tangente $t(x)=mx+q=x+3$

Lösung zu A26 ex-groesstes-rechteck

Seien x und y die beiden Rechtecksseiten. Dann gilt $2x+2y=10$, also $x+y=5$ bzw. $y=5-x$.
Wir suchen x so, dass die Fläche

$$F(x)=xy=x(5-x)=-x^2+5x$$

maximal wird. Hierbei handelt es sich um eine nach unten offene Parabel (da Öffnungsfaktor $-1<0$) mit Scheitel bei $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$.
Dies bedeutet, dass F an der Stelle $x_S=\frac{5}{2}$ einen maximalen Wert annimmt.
Das gesuchte Rechteck ist also ein Quadrat mit Seitenlänge $\frac{5}{2}$ Meter.
Die Fläche ist dann $\frac{25}{4}=6.25$ Quadratmeter.

Lösung zu A27 ex-zwei-quadrate-aus-draht

Man schneidet den Draht bei x Zentimetern entzwei. Dann hat man zwei Stücke der Länge x und $10-x$. Dies ergibt zwei Quadrate der Seitenlänge $\frac{x}{4}$ und $\frac{10-x}{4}$. Der Flächeninhalt ist also

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{16} + \frac{100-20x+x^2}{16} \\ &= \frac{2x^2-20x+100}{16} \\ &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Dies ist eine nach oben offene Parabel mit Scheitel bei

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{8}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{8}{2} = \frac{5}{4}\cdot 4 = 5$$

Die Fläche ist $F(5) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2\cdot\frac{25}{16} = \frac{25}{8} = 3.125[\mathrm{cm}^2]$.
Dies ist ein Minimum (die Minimalstelle ist $x_S = 5$).

Die Maxima werden bei $x = 0$ und $x = 10$ angenommen, die Fläche ist dann $F(0) = F(10) = \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6.25[\mathrm{cm}^2]$.

Lösung zu A28 ex-dreieck-einbeschriebenes-rechteck-flaeche-maximieren

Sei s die andere Seite des Rechtecks. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{c}{h} = \frac{s}{h-x}$, also

$$s = \frac{c}{h}(h-x)$$

Der zu maximierende Flächeninhalt ist

$$F(x) = sx = \frac{c}{h}(h-x)\cdot x$$

Diese quadratische Funktion hat die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = h$. Der Scheitel liegt genau dazwischen, hat also die x-Koordinate $x_S = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{h}{2}$. Man sollte sich noch überlegen, dass der Öffungsfaktor negativ ist, es sich also um ein Maximum handelt.

Alternative:

$$F(x) = sx = \frac{c}{h}(h-x)\cdot x = \frac{c}{h}(hx-x^2) = cx - \frac{c}{h}x^2 = -\frac{c}{h}x^2 + cx$$

Quadratische Funktion mit negativem Öffnungsfaktor, also Maximum bei

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-c}{\frac{-2c}{h}} = \frac{c}{\frac{2c}{h}} = c\cdot\frac{h}{2c} = \frac{h}{2}$$

Lösung zu A29 ex-party-einnahmen-maximieren

Sei x die Preiserhöhung in Franken. Dann kommen voraussichtlich

$$240 - x\cdot 20$$

Besucher. Jeder zahlt $8+x$ Franken Eintritt. Die Einnahmen betragen also

$$E(x) = (240-20x)(8+x) = 1920 + 240x - 160x - 20x^2 = -20x^2 + 80x + 192$$

Franken. Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum bei $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{-40} = 2$.
Der gesuchte Eintrittspreis beträgt $8 + x_S = 10$ Franken.

Lösung zu A30 ex-boot-surfer-abstand-minimal

Das Motorboot fährt auf der x-Achse und hat zum Zeitpunkt t die x-Koordinate $x_M(t) = -50 + 6t$ (Buchstabe M wie Motorboot).

Der Surfer fährt auf der y-Achse und hat zum Zeitpunkt t die Position $y_S(t) = -10 + 2t$ (Buchstabe S wie Surfer).

Der Abstand der beiden zur Zeit t beträgt

$$= \sqrt{(x_M(t))^2 + (y_S(t))^2}$$

Statt diesen Abstand zu minimieren, könnnen wir gleichbedeutend den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen minimieren, also

$$\begin{aligned} f(t) &= (x_M(t))^2 + (y_S(t))^2 \\ &= (-50+6t)^2 + (-10+2t)^2 \\ &= 2500 - 600t + 36t^2 + 100 - 40t + 4t^2 \\ &= 40t^2 - 640t + 2600 \end{aligned}$$

Dies ist eine nach oben offene Parabel mit Minimum bei $t_S = \frac{-b}{2a} = \frac{640}{80} = 8$.

Lösung zu A31 ex-rechteckiger-platz-an-mauer

Sei x die Länge der linken vertikalen Zaunteils. Dann ist $F(x) = x(a-2x) = ax - 2x^2 = -2x^2 + ax$ zu maximieren. Da F eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x_S = \frac{-a}{-4} = \frac{a}{4}$ ist, ist die Fläche für dieses $x_S = \frac{a}{4}$ maximal. Der gesuchte Flächeninhalt ist $\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$.

Für $a = 50$ ergibt sich als maximale Fläche $\frac{2500}{8} = 312.5\ \text{m}^2$.

Schneller (?) geht es so: $F(x) = x(a-2x)$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{a}{2}$. Die x-Koordinate des Scheitels liegt genau dazwischen, also bei $\frac{0+\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$.

Lösung zu A32 ex-laufbahn

Die horizontale Seite des Rechtecks ist $\frac{400-2\pi x}{2} = 200 - \pi x$, die vertikale Seite $2x$. Der Flächeninhalt ist somit

$$F(x) = (200 - \pi x) \cdot 2x = 400x - 2\pi x^2 = -2\pi x^2 + 400x$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2\cdot(-2\pi)} = \frac{400}{4\pi} = \frac{100}{\pi}$. Für diesen Wert ist F also maximal.

Alternativ hat $F(x) = (200-\pi x)\cdot 2x$ die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{200}{\pi}$. Die x-Koordinate des Scheitels liegt genau dazwischen, also bei $\frac{0+\frac{200}{\pi}}{2} = \frac{100}{\pi}$.

Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$F\left(\frac{100}{\pi}\right) = -2\pi\frac{10000}{\pi^2} + 400 \cdot \frac{100}{\pi} = \frac{-20000}{\pi} + \frac{40000}{\pi} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366 \text{ Quadratmeter}$$

Das Rechteck hat dann die Breite $2x = \frac{200}{\pi} \approx 63.66$ Meter und die Länge $200 - \pi x = 200 - \pi\frac{100}{\pi} = 100$.

Lösung zu A33 ex-quadratsumme-maximieren-mit-nebenbedingung

Zu minimieren ist $s = x^2+y^2$ unter der Bedingung $x-y = 4$. Es gilt also $y = x-4$ und somit $s = x^2+(x-4)^2 = x^2+x^2-8x+16 = 2x^2-8x+16$. Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$. Das zugehörige y ist $y = x-4 = 2-4 = -2$, das minimierende Zahlenpaar also $(2,-2)$. Die minimale Quadratsumme ist $2^2 + (-2)^2 = 8$.

Lösung zu A34 ex-abstand-punkt-gerade

Es gilt

$$b(t) = \begin{pmatrix} -2+2t \\ 11-t \end{pmatrix}$$

Zu minimieren ist

$$\sqrt{(-2+2t)^2 + (11-t)^2}$$

oder äquivalent der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, also

$$q(t) = (-2+2t)^2 + (11-t)^2 = 4 - 8t + 4t^2 + 121 - 22t + t^2 = 5t^2 - 30t + 125$$

Dies ist eine nach oben offene Parabel mit Scheitel/Minimum bei $t_S = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{10} = 3$.
Der Ball ist also zur Zeit $t = 3$ am nächsten am Ursprung. Er ist dann an der Position

$$b(3) = \binom{-2}{11} + 3\binom{2}{-1} = \binom{4}{8}$$

Der Abstand zum Ursprung ist $\sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Lösung zu A35 ex-parallelogramm-maximaler-flaeche-in-rechteck

Wir maximieren stattdessen die Komplementärfläche, die aus den 4 Dreiecken an den Ecken besteht. Diese hat den Flächeninhalt

$$F(x) = x(5-x) + x(9-x) = 14x - 2x^2 = -2x^2 + 14x$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$. Dies ist der gesuchte Wert.

Alternative: Man kann auch aus $F(x) = x(5-x) + x(9-x) = x(5-x+9-x) = x(14-2x)$ sofort die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 7$ ablesen, die x-Koordinate des Scheitels liegt genau dazwischen, also bei $\frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$.

Stattdessen kann man auch die Parallelogrammfläche $45 - F(x)$ minimieren.

Lösung zu A36 ex-gleichschenkliges-dreieck-einbeschriebenes-maximieren

Wenn b die halbe Basis des einbeschriebenen Dreiecks ist, gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{h-x}$$

also $b = \frac{a}{h}(h-x)$.
Der zu maximierende Flächeninhalt ist

$$F(x) = \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}\frac{a}{h}(h-x)x = \frac{a}{2h}(hx - x^2) = -\frac{a}{2h}x^2 + \frac{a}{2}x$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei

$$x_S = \frac{-\frac{a}{2}}{-2\cdot\frac{a}{2h}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{h}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{h}{a} = \frac{h}{2}$$

Dies ist die gesuchte Höhe.
Schneller kann man den Scheitel so bestimmen: Wegen $F(x) = \frac{1}{2}\frac{a}{h}(h-x)x$ hat F die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = h$. Der Scheitel liegt genau dazwischen, also bei $x_S = \frac{h}{2}$.

Lösung zu A37 ex-gewinn-artikelverkauf

Wenn man den Preis um x Franken senkt, verkauft man $200 + 50x$ Stück monatlich. Der Reingewinn pro Stück beträgt dann $10 - x$ Franken. Der Gesamtgewinn $G(x)$ bei einer Senkung des Preises um x Franken ist also

$$G(x) = (200 + 50x)\cdot(10 - x) = 2000 + 500x - 200x - 50x^2 = -50x^2 + 300x + 2000$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-300}{-100} = 3$.
Den maximalen Gesamtgewinn erzielt man also voraussichtlich bei einer Preissenkung um CHF 3.

Lösung zu A38 ex-abstand-zweier-sich-bewegender-punkte

Der Punkt A bewegt sich in 5 Sekunden um 6 Meter, hat also die Geschwindigkeit $\frac{6}{5}$ [m/s]. Also gilt $x_A(t) = \frac{8}{5}t$. (Die y-Koordinate von A ist 0.)
Der Punkt B bewegt sich in 5 Sekunden um 8 Meter, hat also die Geschwindigkeit $\frac{8}{5}$ [m/s]. Also gilt $x_B(t) = -8 + \frac{8}{5}t$. (Die x-Koordinate von B ist 0.)
Der Abstand von $A(t) = (\frac{6}{5}t, 0)$ und $B(t) = (0, -8 + \frac{8}{5}t)$ zur t beträgt nach Pythagoras

$$\sqrt{(x_A(t) - 0)^2 + (0 - y_B(t))^2} = \sqrt{(x_A(t))^2 + (y_B(t))^2}$$

Dieser Abstand wird minimal, wenn sein Quadrat minimal wird. Der quadrierte Abstand ist

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \left(\sqrt{(x_A(t))^2 + (y_B(t))^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{6}{5}t\right)^2 + \left(-8 + \tfrac{8}{5}t\right)^2 \\
&= \frac{36}{25}t^2 + 64 - \frac{128}{5}t + \frac{64}{25}t^2 \\
&= \frac{100}{25}t^2 + 64 - \frac{128}{5}t \\
&= 4t^2 - \frac{128}{5}t + 64
\end{aligned}
$$

Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel. Also wird $q(t)$ minimal bei

$$t_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{128}{5}}{8} = \frac{128}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16}{5} = 3.2$$

Zur Zeit $t = 3.2\,\mathrm{s}$ ist der Abstand am kleinsten. Der quadrierte Abstand zu dieser Zeit ist

$$
\begin{aligned}
q\left(\frac{16}{5}\right) &= 4 \cdot \frac{256}{25} - \frac{128}{5} \cdot \frac{16}{5} + 64 \\
&= \frac{1024}{25} - \frac{2048}{25} + 64 \\
&= \frac{-1024}{25} + \frac{64 \cdot 25}{25} \\
&= \frac{-1024}{25} + \frac{1600}{25} \\
&= \frac{576}{25} = \frac{24^2}{5^2}
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Abstand ist also $\frac{24}{5} = \frac{48}{10} = 4.8$ Meter.