Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

19 Potenzen und Potenzfunktionen

19.1 Erinnerungen: Potenzgesetze, n-te Wurzeln

19.1.1. Bei einer **Potenz** b^e heisst b **Basis** und e **Exponent**.
19.1.2. Sei b eine beliebige reelle Zahl. Potenzen von b mit **positivem natürlichem** Exponenten $n > 0$ sind definiert durch

$$b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}$$

Dies ist schlicht eine platzsparende Notation, denn b^{1234} ausgeschrieben ist ein Produkt mit 1234 Faktoren.

Satz 19.1.3 Potenzgesetze (für positive natürliche Exponenten)

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und alle **positiven natürlichen** Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Potenzgesetze.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis a (beim Multiplizieren)
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten m (beim Multiplizieren)
$(a^m)^n = a^{mn}$	Potenz einer Potenz

Ausserdem gilt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad \text{Potenz eines Quotienten}$$

19.1.4. Beachte: Potenzgesetze machen Aussagen über «Punktoperationen» (= Multiplikationen und Divisionen) von Potenzen mit gleicher Basis oder gleichem Exponenten oder über die Potenz einer Potenz.

Bei «Plusoperationen» treffen sie keine Aussage: Im Allgemeinen gilt

$$⚠ \qquad (a+b)^m \neq a^m + b^m \qquad ⚠$$

Für solche Fälle gibt es die binomischen Formeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oder Formeln wie $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ oder allgemeiner den binomischen Lehrsatz $(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ (die hier vorkommenden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ sind die Einträge der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks).

Aufgabe A1 Schreibe die Zweierpotenzen (= Potenzen von 2) bis zum Exponent 10, die Dreierpotenzen bis zum Exponent 5 und die Fünferpotenzen bis zum Exponent 4 auf und lerne sie auswendig!

$2^0 = 1$, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, $2^8 = 256$, 512, $2^{10} = 1024$

$3^0 = 1$, 3, 9, 27, 81, $3^5 = 243$

$5^0 = 1$, 5, 25, 125, $5^4 = 625$

Definition 19.1.5 n-te Wurzeln

Für jede nicht-negative reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ und jede positive natürliche Zahl n ist die ***n*-te Wurzel aus *a*** definiert als

$$\sqrt[n]{a} := \text{(diejenige nicht-negative Zahl, deren } n\text{-te Potenz } a \text{ ist)}$$

Mit anderen Worten ist $\sqrt[n]{a}$ die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.
Beachte: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ und $\sqrt[1]{a} = a$.
Beachte: Die n-te Wurzel ist nur für nicht-negative Zahlen definiert und selbst nicht-negativ.

Aufgabe A2 Erkläre in eigenen Worten, wie die folgenden Ausdrücke definiert sind! (Wir nehmen an, dass a und t nicht-negative reelle Zahlen sind und dass n und m positive natürliche Zahlen sind.)

(a) Beispiel: $\sqrt[17]{a}$ ist diejenige nicht-negative reelle Zahl x mit $x^{17} = a$;
alternativ: … nicht-negative reelle Zahl, die «hoch 17» die Zahl a ergibt;
alternativ: … nicht-negative reelle Zahl, deren 17-te Potenz a ist.

(b) $\sqrt[13]{t}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren 13-te Potenz t ist.

(c) $\sqrt[n]{5}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren n-te Potenz 5 ist.

(d) $\sqrt[m]{7 + x^2}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren m-te Potenz $7 + x^2$ ist.

Aufgabe A3 Entscheide jeweils, ob die Behauptung wahr oder falsch ist und begründe deine Antwort!

Ist die Behauptung falsch, so reicht die Angabe eines Gegenbeispiels!

Achte darauf, dass die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen nicht negativ sein dürfen und dass Wurzeln niemals negativ sind.

(a) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $(\sqrt{a})^2 = a$. Korrekt, nach der Definition der Wurzel: $\sqrt{a}$ ist die nicht-negative Zahl, deren Quadrat a ist.

(b) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = a$. Korrekt, denn $a \geq 0$ und das Quadrat davon ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen: $a^2 = a^2$.

(c) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $(\sqrt[3]{a^3}) = a$. Korrekt, denn $a \geq 0$ und seine dritte Potenz ist der (nicht-negative) Ausdruck unter dem Wurzelzeichen: $a^3 = a^3$.

(d) Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = a$. Falsch für alle $a < 0$, denn die linke Seite ist stets nicht-negativ. Gegenbeispiel $a = -1$. (Für alle $a \geq 0$ stimmt es.)

(e) Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt[3]{a^6} = a^2$. Korrekt, denn $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$. Beachte, dass a^6 und a^2 nicht-negativ sind!

(f) Für jede reelle Zahl a gilt $(\sqrt[3]{a^3}) = a$. Falsch für alle $a < 0$, denn dann ist das Argument unter der Wurzel negativ und die Wurzel ist nicht einmal definiert.
Gegenbeispiel $a = -1$ oder $a = -2$. (Für alle $a \geq 0$ stimmt es.)

(g) Die Zahlen 10 und -10 sind die Quadratwurzeln von 100.

Falsch, denn eine Wurzel ist per Definition nie negativ: Die Quadratwurzel von 100 ist 10, d.h. $\sqrt{100} = 10$.

(h) Für alle nicht-negativen Zahlen a und b gilt $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

Korrekt, denn $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (und dies ist als Quadrat stets grösser-gleich Null, ebenso $a + b \geq 0$).

(i) Für alle nicht-negativen Zahlen a und b gilt $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$.

Falsch, denn im Fall $a < b$ ist die rechte Seite negativ. Gegenbeispiele: $a = 0$ und $b = 1$ oder $a = 1$ und $b = 10000$.
Unter der Zusatzvoraussetzung $a \geq b$ stimmt es aber wegen $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (und $a - b \geq 0$).
Beachte, dass $a^2 - 2ab + b^2$ als Quadrat grösser-gleich Null und die Wurzel somit definiert ist (auch wenn $a < b$).
Wenn man rechts $a - b$ durch $|a - b|$ ersetzt, stimmt es allgemein.

19.2 Einige zukunftsgerichtete Aufgaben

19.2.1. Einige der Ergebnisse der folgenden drei Aufgaben werden später wichtig, etwa für die saubere Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten oder um zu zeigen, dass die Potenzgesetze allgemeiner für solche Potenzen gelten.

Aufgabe A4 Ergänze in jedem freien Rechteck die korrekte, passende Zahl und begründe, warum du diese Zahl gewählt hast! (ohne Taschenrechner; in den letzten Teilaufgaben sind Variablen einzutragen)

(a) $\sqrt[4]{16} = \boxed{2}$, weil $\boxed{2}^4 = \boxed{16}$

(b) $\sqrt[3]{\boxed{125}} = 5$, weil $\boxed{5}^3 = \boxed{125}$

(c) $\sqrt{\boxed{36}} = \boxed{6}$, weil $6^2 = \boxed{36}$

(d) $\sqrt[8]{\boxed{256}} = \boxed{2}$, weil $\boxed{2}^8 = 256$

(e) $\sqrt[\boxed{7}]{\boxed{128}} = 2$, weil $\boxed{2}^{\boxed{7}} = 128$

(f) $\sqrt{\boxed{0.01}} = \boxed{0.1}$, weil $\boxed{0.1}^2 = 0.01$

(g) $\sqrt{\boxed{0.16}} = \boxed{0.4}$, weil $\boxed{0.4}^2 = 0.16$

(h) $\sqrt[\boxed{3}]{\boxed{0.001}} = \boxed{0.1}$, weil $\boxed{0.1}^3 = 0.001$

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{\boxed{a}}\sqrt{\boxed{b}}$, weil $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \boxed{\sqrt{a}}^2\boxed{\sqrt{b}}^2 = \boxed{ab}$

(j) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{\boxed{a}}}{\sqrt{\boxed{b}}}$, weil $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\boxed{\sqrt{a}}^2}{\boxed{\sqrt{b}}^2} = \dfrac{\boxed{a}}{\boxed{b}}$

(k) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{\boxed{a}}\sqrt[n]{\boxed{b}}$, weil $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = \boxed{\sqrt[n]{a}}^n\boxed{\sqrt[n]{b}}^n = \boxed{ab}$

(l) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{\boxed{a}}}{\sqrt[n]{\boxed{b}}}$, weil $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\boxed{\sqrt[n]{a}}^n}{\boxed{\sqrt[n]{b}}^n} = \dfrac{\boxed{a}}{\boxed{b}}$

Aufgabe A5 Fülle die Lücken und begründe deine Eintragungen!

(a) $\sqrt[5]{\boxed{32}} = 2$, weil $\boxed{2}^{\boxed{5}} = \boxed{32}$

(b) $\sqrt[5]{\boxed{3}^{\boxed{2}}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^2$, weil $\left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^2\right)^{\boxed{5}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^{\boxed{2}\cdot\boxed{5}} = \left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^{\boxed{5}}\right)^2 = \boxed{3}^2$

(c) $\sqrt[3]{\boxed{a}^{\boxed{2}}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$, weil $\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right)^{\boxed{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^{\boxed{2}\cdot\boxed{3}} = \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^{\boxed{3}}\right)^2 = \boxed{a}^{\boxed{2}}$

(d) $\sqrt[n]{\boxed{a}^{\boxed{m}}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, weil $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^{\boxed{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\boxed{m}\cdot\boxed{n}} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\boxed{n}}\right)^m = \boxed{a}^{\boxed{m}}$

(e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \neq \left(\sqrt[2]{5}\right)^3$, weil sonst beim Potenzieren mit $2 \cdot 3 = 6$ dasselbe herauskommen müsste. Aber $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^6 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\boxed{12}} = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\boxed{3}}\right)^4 = \boxed{5}^{\boxed{4}}$ und $\left(\left(\sqrt[2]{5}\right)^3\right)^6 = \left(\sqrt[2]{5}\right)^{\boxed{18}} = \left(\left(\sqrt[2]{5}\right)^{\boxed{2}}\right)^9 = \boxed{5}^{\boxed{9}}$ sind verschieden.

Aufgabe A6

(a) $\sqrt[15]{7^9} = \sqrt[5]{7^3}$, da $\boxed{\sqrt[5]{7^3}}^{15} = \left(\boxed{\sqrt[5]{7^3}}^5\right)^{\boxed{3}} = \left(7^{\boxed{3}}\right)^3 = \boxed{7}^{\boxed{9}}$

(b) $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$, da $\boxed{\sqrt[n]{a^m}}^{n\cdot k} = \left(\boxed{\sqrt[n]{a^m}}^n\right)^{\boxed{k}} = \left(a^{\boxed{m}}\right)^k = \boxed{a}^{\boxed{m}\cdot\boxed{k}}$

19.3 Erinnerung: Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

19.3.1. Sei b eine beliebige reelle Zahl. Wir haben oben daran erinnert, dass b^n für jeden **positiven natürlichem** Exponenten $n > 0$ definiert ist durch

$$b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}$$

Damit können wir in der folgenden Tabelle alle Einträge b^e unter positiven natürlichen Zahlen $e = 1, 2, 3, \dots$ angeben.

Exponent e	-2	-1	0	1	2	3
Potenz b^e	$\frac{1}{b^2} = b^{-2}$	$\frac{1}{b} = b^{-1}$	$1 = b^0$	$b = b^1$	$b \cdot b = b^2$	$b \cdot b \cdot b = b^3$

Beobachtung:

- Geht man in der unteren Zeile ein Kästchen nach rechts, so wird der Eintrag ✎mit b multipliziert.
- Geht man in der unteren Zeile ein Kästchen nach links, so wird der Eintrag ✎durch b dividiert.

Es ist deswegen naheliegend, die restlichen Kästchen der unteren Zeile so zu füllen, dass bei jedem Schritt nach links der Eintrag durch b dividiert wird.

Dies motiviert die folgende Definition der Potenzen mit **ganzzahligen** Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ (für $b \neq 0$):

$$b^n := \begin{cases} \text{wie zuvor, siehe oben} & \text{falls } n > 0; \\ 1 & \text{falls } n = 0; \\ \frac{1}{b^{-n}} & \text{falls } n < 0. \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{-(-3)}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Satz 19.3.2 Potenzgesetze (für ganze Exponenten (= ganzzahlige Exponenten))

Für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^*$ und alle **ganzen** Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Potenzgesetze.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis a (beim Multiplizieren)

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$ Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten m (beim Multiplizieren)

$(a^m)^n = a^{mn}$ Potenz einer Potenz

Ausserdem gelten:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Aufgabe A7 Überzeugen Sie sich am Beispiel $m = 5$ und $n = -2$, dass die obigen sechs Potenzgesetze gelten. Zum Beispiel ist zu überlegen, warum $a^5 \cdot a^{-2} = a^{5+(-2)}$ und $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{5-(-2)}$ gelten (für beliebiges $a \neq 0$). Dabei dürfen die Potenzgesetze natürlich nicht verwendet werden.

Wer mag, kann sich auch die Fälle «m negativ und n positiv» und «sowohl m als auch n negativ» für konkrete Wahlen von m und n überlegen. (Das ist dann im Wesentlichen ein Beweis der Potenzgesetze an aussagekräftigen Beispielen.)

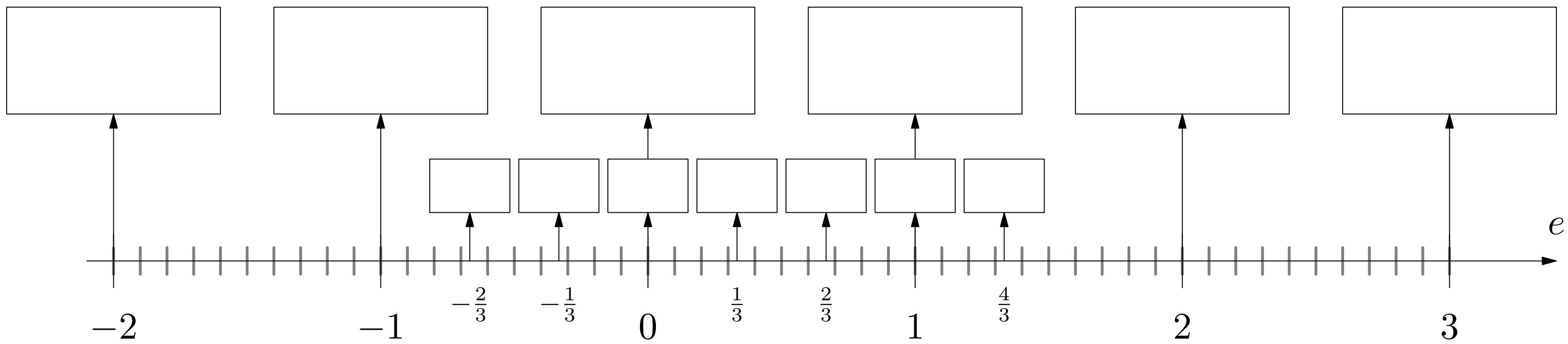
19.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

19.4.1. Wir möchten nun auch Potenzen mit *rationalen* Exponenten definieren, also Ausdrücke wie $2^{\frac{1}{3}}$ oder $2^{-\frac{7}{13}}$. Unsere Definition wird die obigen Definitionen verallgemeinern. Die Potenzgesetze werden allgemeiner für rationale Exponenten gelten.

19.4.2. Der abgebildete Zahlenstrahl mitsamt der grossen Boxen enthält dieselbe Information wie die obige Tabelle: Jeder ganzen Zahl e auf dem Zahlenstrahl ist die Zahl b^e zugewiesen. grosse Boxen füllen

Zusätzlich würden wir gerne in die kleinen Boxen sinnvolle Werte schreiben für die Potenzen ✎

$b^{-\frac{2}{3}}$, $b^{-\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{0}{3}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{3}{3}}$, $b^{\frac{4}{3}}$,



Sicherlich sollten gelten: ✎

$$b^{\frac{0}{3}} = b^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad b^{\frac{3}{3}} = b^1 = b$$

grosse Boxen: jeder Schritt nach rechts: Multiplikation mit b.
Hoffnung: kleine Boxen: jeder Schritt nach rechts: Multiplikation mit einer festen Zahl x. Was ist x?

$$b^{\frac{0}{3}} \cdot x \cdot x \cdot x = b^{\frac{3}{3}} \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot x^3 = b \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{b}$$

Damit ist klar, wie die kleinen Boxen zu füllen sind: ✎

$$b^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot x = x = \sqrt[3]{b} \qquad b^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot x \cdot x = x^2 = (\sqrt[3]{b})^2 \qquad b^{\frac{4}{3}} = 1 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 = (\sqrt[3]{b})^4$$

$$b^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = (\sqrt[3]{b})^{-1}$$

in neue Zeile

$$b^{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{b})^2} = (\sqrt[3]{b})^{-2}$$

19.4.3. Die Überlegungen auf der Seite zuvor legen nahe, dass man für jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ die Potenz $b^{\frac{z}{3}}$ definieren sollte als ✎

$$b^{\frac{z}{3}} = (\sqrt[3]{b})^z$$

Statt des Nenners 3 des Bruchs $\frac{z}{3}$ im Exponenten kann man diese Überlegungen für jeden beliebigen positiven natürlichen Nenner n durchführen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 19.4.4 Potenzen mit *rationalen* Exponenten

Für jede positive reelle Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ und jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ definieren wir a^q wie folgt. Wähle eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ und eine positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ mit $q = \frac{z}{n}$ und definiere ✎

$$a^q = a^{\frac{z}{n}} := (\sqrt[n]{a})^z$$

Nach Lemma 19.4.7 ist dies «wohldefiniert» (= das definierte Objekt ist unabhängig von möglichen Wahlen).
Ausserdem definieren wir $0^q = 0$ für positives q.

Der Ausdruck 0^0 ist im Allgemeinen nicht definiert. Der Grund ist, dass es mehrere sinnvolle Werte für 0^0 gibt, etwa 0 oder 1.

19.4.5. Das eventuelle Problem an der obigen Definition ist, dass man eine rationale Zahl auf verschiedene Arten als Bruch schreiben kann, etwa ✎

$$1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = \frac{21}{15}$$

Diese verschiedenen Darstellungen führen laut obiger Definition zu den folgenden Kandidaten für $a^{1.4}$ ✎

$$a^{1.4} = a^{\frac{14}{10}} = (\sqrt[10]{a})^{14} \qquad a^{1.4} = a^{\frac{7}{5}} = (\sqrt[5]{a})^{7} \qquad a^{1.4} = a^{\frac{21}{15}} = (\sqrt[15]{a})^{21}$$

Auf den ersten Blick ist nicht klar, dass diese drei Zahlen übereinstimmen (was aber der Fall ist). Dies ist mit der «Wohldefiniertheit» gemeint. Wir erklären hier, warum die zweite mit der dritten Zahl übereinstimmt: ✎

$$\begin{aligned}
(\sqrt[5]{a})^7 &= \sqrt[5]{a^7} && \text{wegen } \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ nach Aufgabe A5.(d)} \\
&= \sqrt[5\cdot 3]{a^{7\cdot 3}} && \text{wegen } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ nach Aufgabe A6.(b)} \\
&= \sqrt[15]{a^{21}} && \\
&= \left(\sqrt[15]{a}\right)^{21} && \text{wie oben wegen } \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ nach Aufgabe A5.(d)}
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Gleichheit $(\sqrt[10]{a})^{14} = (\sqrt[5]{a})^7$ der ersten beiden Zahlen.

19.4.6. Das obige, für konkrete Zahlen aufgeschriebene Argument kann man auch abstrakt aufschreiben. Wir formulieren dies als ein «Lemma» (technische Hilfsaussage).

Lemma 19.4.7

Ist z eine beliebige ganze Zahl und sind n und k beliebige positive natürliche Zahlen, so gilt

$$(\sqrt[n]{a})^z = (\sqrt[nk]{a})^{zk}$$

für jede positive reelle Zahl $a > 0$.
Insbesondere folgt: Sind die beiden rationalen Zahlen $\frac{z}{n}$ und $\frac{z'}{n'}$ gleich, so gilt

$$(\sqrt[n]{a})^z = (\sqrt[n']{a})^{z'}$$

Dies zeigt, dass Definition 19.4.4 nicht von der Darstellung der rationalen Zahl q als Bruch abhängt (Wohldefiniertheit).

Beweis. In den Aufgaben A5 und A6 haben wir die folgenden «Wurzelgesetze» bewiesen (dort eigentlich nur für positives natürliches m; sie gelten aber allgemeiner für ganzzahliges m, wie sich der Leser leicht überlegt)

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m && \text{Wurzelziehen vertauscht mit Potenzieren} \\
\sqrt[nk]{a^{mk}} &= \sqrt[n]{a^m} && \text{eine Art «Erweitern von Wurzeln»}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die erste behauptete Gleichheit wie folgt (erstes Gesetz, zweites Gesetz, erstes Gesetz).

$$(\sqrt[n]{a})^z = (\sqrt[n]{a^z}) = (\sqrt[nk]{a^{zk}}) = (\sqrt[nk]{a})^{zk}$$

Gelte nun $\frac{z}{n}$ und $\frac{z'}{n'}$. Per Multiplikation mit dem Produkt nn' der Nenner folgt daraus $zn' = z'n$ (was zur Folge hat, dass man den einen Bruch aus dem anderen durch Erweitern und Kürzen erhalten kann: $\frac{z}{n} = \frac{zn'}{nn'} = \frac{z'n}{nn'} = \frac{z'}{n'}$). Indem wir die erste, schon bewiesene Gleichheit zweimal verwenden, erhalten wir die zweite behauptete Gleichheit wie folgt.

$$(\sqrt[n]{a})^z = (\sqrt[nn']{a})^{zn'} = (\sqrt[nn']{a})^{z'n} = (\sqrt[n']{a})^{z'}$$

□

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 19.4.8

Für jede positive reelle Zahl ~~$a \neq 0$~~ $a > 0$, jede ganze Zahl z und jede positive natürliche Zahl n gelten

$$a^{\frac{z}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z = \sqrt[n]{a^z}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

19.4.9. Hier mag man sich die Frage stellen, ob man eher $\sqrt[n]{a}$ oder gleichbedeutend $a^{\frac{1}{n}}$ schreiben soll. Ich denke, dass es auf den Kontext ankommt. Wenn in einer Formel nur eine Wurzel vorkommt, würde ich diese mit dem Wurzelzeichen schreiben. Sonst und insbesondere beim Vereinfachen von Ausdrücken würde ich die Potenzschreibweise vorziehen, denn ich kann mir die Potenzgesetze viel besser merken als die Wurzelgesetze (die weiter unten erklärt werden).

Beispiele 19.4.10.

$$8^{\frac{2}{3}} = ✎ \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$32^{-0.2} = ✎ 32^{-\frac{1}{5}} = 32^{\frac{-1}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = ✎ \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\sqrt[2]{\frac{1}{9}}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \overset{\text{Potenzgesetz } \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}}{=} 3^{-(-3)} = 3^3 = 27$$

Aufgabe A8 Berechnen Sie:

a) $64^{\frac{1}{2}}$
b) $144^{0.5}$
c) $81^{0.25}$
d) $1024^{-0.1}$
e) $512^{\frac{1}{3}}$
f) $625^{\frac{3}{4}}$
g) $27^{\frac{2}{3}}$
h) $100'000^{\frac{3}{5}}$
i) $0.01^{\frac{3}{2}}$
j) $6.25^{\frac{1}{2}}$
k) $\left(\frac{81}{16}\right)^{1.25}$
l) $\left(\frac{25}{9}\right)^{-1.5}$

Satz 19.4.11 Potenzgesetze (für rationale Exponenten)

Für alle positiven ~~von Null verschiedenen~~ reellen Zahlen $a, b \in$ ~~$\mathbb{R}^*$~~ $\mathbb{R}^+$ und alle **rationalen** Zahlen $q, r \in \mathbb{Q}$ gelten die folgenden Potenzgesetze.

$a^q \cdot a^r = a^{q+r}$	Addition der Exponenten bei **gleicher** Basis a (beim Multiplizieren)
$a^q \cdot b^q = (ab)^q$	Multiplikation der Basen bei **gleichem** Exponenten q (beim Multiplizieren)
$(a^q)^r = a^{qr}$	Potenz einer Potenz

Ausserdem gelten:

$$\frac{a^q}{a^r} = a^{q-r} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q} \qquad a^{-q} = \frac{1}{a^q} = \left(\frac{1}{a}\right)^q$$

Beweis. ✎

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{x}{m}} \cdot a^{\frac{y}{n}} = a^{\frac{xn}{mn}} \cdot a^{\frac{my}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{xn} \cdot \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{my}$$

$$\overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{xn+my} = a^{\frac{xn+my}{mn}} = a^{\frac{x}{m}+\frac{y}{n}} = a^{p+q}$$

Wer sich für die ähnlichen Beweise der anderen Potenzgesetze interessiert, löse die Teleskop-Aufgabe A9 oder schaue sich die Lösung dieser Aufgabe an. □

Aufgabe A9 Beweisen Sie die Potenzgesetze für rationale Exponenten (Satz 19.4.11). Verwenden Sie dafür insbesondere die Potenzgesetze für ganze (= ganzzahlige) Exponenten (Satz 19.3.2).

Aufgabe A10 Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

a) $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}}$

b) $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}}$

c) $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$

d) $(z^{\frac{7}{3}})^{-\frac{2}{11}}$

e) $\left(x^{-\frac{5}{7}} y\right)^{\frac{7}{3}}$

f) $(z^{\frac{2}{7}} a)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}}$

g) $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}}$

h) Schreiben Sie als Produkt von Potenzen (ohne Bruchstrich): $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}}$

i) Schreiben Sie als Bruch von Produkten von Potenzen mit **positiven** Exponenten: $\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{5}}}$

j) $\left(\frac{1}{5^{-x}}\right)^3 \cdot 5^{-2x}$

k) $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}}$

l) $(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{2}{3}}$

m) $a(a + b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}}$

Aufgabe A11 «Kreative Fehler»: Ein fiktiver kreativer Schüler behauptet, dass die folgenden Rechnungen für alle Belegungen der Variablen stimmen – dabei wimmelt es nur so von Fehlern.

Überlegen Sie sich bei jedem Fehler, welche Regel der Schüler irrtümlicherweise als richtig angenommen haben könnte (falls der Fehler nicht zu abstrus ist) und widerlegen Sie diese «Regel» durch ein **möglichst einfaches, explizites Gegenbeispiel**, in dem **als Exponenten** möglichst nur ganze Zahlen vorkommen.

a) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

c) $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$

d) $(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$

e) $\left(z^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$

f) $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a-b)^{\frac{4}{7}}$

g) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$

h) $\frac{a^{\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$

i) $a^{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2$

Aufgabe A12 Schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz mit einem rationalen Exponenten.

Empfehlung: Ersetzen Sie zuerst alle Wurzelausdrücke durch geeignete Potenzen.

Beispiel: $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

a) $x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x^3}}$

c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}}$

d) $x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5} \cdot x}$

e) $\frac{\left(\sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}}$

f) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$

Satz 19.4.12 Wurzelgesetze

Für alle positiven ~~von Null verschiedenen~~ reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ ~~$\mathbb{R}^*$~~, alle positiven natürlichen Zahlen m, n und alle ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Wurzelgesetze.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^z = \sqrt[m]{a^z} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \qquad \sqrt[mn]{a^{zn}} = \sqrt[m]{a^z}$$

(und etwas weniger wichtig)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$$

Beweis. Dem Leser überlassen, siehe Aufgabe A13. ☐

Aufgabe A13 Folgern Sie alle Wurzelgesetze (siehe Satz 19.4.12) aus den Potenzgesetzen (siehe Satz 19.4.11).

19.4.13. Die Potenzgesetze sollte jeder auswendig können. Bei den Wurzelgesetzen sollte man die ersten beiden Gesetze kennen, die anderen leitet man sich im Zweifelsfall rasch aus den Potenzgesetzen her.

Im Allgemeinen ist es beim Vereinfachen von Ausdrücken oft empfehlenswert, alle Wurzelausdrücke durch Potenzen zu ersetzen und dann mit Hilfe der Potenzgesetze zu vereinfachen. Am Ende kann man eventuell wieder Wurzelzeichen verwenden.

Aufgabe A14 Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als eine einzige Potenz von x mit rationalem Exponenten:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x^5}}$

b) $\dfrac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}}$

c) $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}}$

f) $\sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x \cdot \sqrt[n]{x}}}}$

Beispiel 19.4.14. Löse die folgende Gleichung. ✎

$$16x - x^5 = 0$$
$$x(16 - x^4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 16 - x^4 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^4 = 16 \quad \text{alt.} \quad (4 - x^2)(4 + x^2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = \pm 4 \quad \text{alt.} \quad 4 - x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 4 + x^2 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = 4 \quad \text{alt.} \quad 4 = x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = -4$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm 2 \qquad \text{keine Lösu}$$

Beispiel 19.4.15. Löse die folgende Gleichung. ✎

$$\begin{aligned} x^4 + 27x &= 0 \\ x(x^3+27) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{oder} \quad x^3+27=0 \\ x &= 0 \quad \text{oder} \quad x^3=-27 \\ x &= 0 \quad \text{oder} \quad x=-3 \end{aligned}$$

19.4.16. Beachte

- $x^{\text{gerade}} > 0$ für alle reellen Zahlen $x \neq 0$.
- $x^{\text{ungerade}} > 0$ für alle positiven reellen Zahlen $x > 0$.
- $x^{\text{ungerade}} < 0$ für alle negativen reellen Zahlen $x < 0$.

Merke 19.4.17

Seien n eine positive natürliche Zahl und $a \neq 0$ ein reelle Zahl. Dann gilt:
Die Gleichung

$$x^n = a$$

hat

- im Fall $a > 0$ und n gerade ✎genau zwei Lösungen, nämlich $\pm\sqrt[n]{a}$
- im Fall $a < 0$ und n gerade ✎keine Lösung
- im Fall $a > 0$ und n ungerade ✎genau eine Lösung, nämlich $\sqrt[n]{a}$
- im Fall $a < 0$ und n ungerade ✎genau eine Lösung, nämlich $-\sqrt[n]{-a}$

Beispiele 19.4.18.

- Die Gleichung $x^4 = 16$ hat ✎genau zwei Lösungen, nämlich $\pm 2 = \pm\sqrt[4]{16}$.
- Die Gleichung $x^4 = -16$ hat ✎keine Lösung.
- Die Gleichung $x^3 = 125$ hat ✎genau eine Lösung, nämlich $5 = \sqrt[3]{125}$.
- Die Gleichung $x^3 = -125$ hat ✎genau eine Lösung, nämlich $-5 = -\sqrt[3]{125} = -\sqrt[3]{-(-125)}$.

Aufgabe A15 Löse die folgenden Gleichungen (ohne Taschenrechner).

Hinweise:

- Wenn man eine Gleichung wie $x^{\frac{3}{4}} = 5$ mit $\frac{4}{3}$ potenziert (d. h. beide Seiten «hoch $\frac{4}{3}$», so erhält man $x = 5^{\frac{4}{3}}$, denn $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}} = x^1 = x$.
- Wenn man eine Gleichung wie $x^{-0.3} = x^{2.1}$ mit $x^{0.3}$ multipliziert, erhält man $1 = x^{2.4}$, denn $x^{-0.3} \cdot x^{0.3} = x^{-0.3+0.3} = x^0 = 1$.

a) $x^{-4} = 16$

b) $(4-x)^3 = -27$

c) $8x^{-1} = -x^2$

d) $(2x^{\frac{1}{2}})^3 + x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$

e) $2x^{0.2} - 8x^{-0.2} = 0$

f) $(d-x)^{-2} = 4x^{-2}$

g) $3x^{1.5} - 96x^{0.25} = 0$

h) $5.515 = 6(1-0.2x)^{0.8}$ Die Lösung darf ganz am Ende mit dem Taschenrechner berechnet werden.

Aufgabe A16

(a) Mit welchem Streckfaktor λ muss ein Würfel gestreckt werden, damit sich sein Volumen halbiert?
(b) Ein Würfel mit Kantenlänge 10 cm hat bekanntlich ein Volumen von 1 l. Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit Volumen 0.5 l? Schätzen Sie, bevor Sie rechnen!

Aufgabe A17 Das (Hyper-)Volumen eines 4-dimensionalen (Hyper-)Würfels mit Seitenlänge s ist s^4.

(a) Wie lange ist die Seitenlänge eines 4-dimensionalen Würfels mit Volumen $1\,\mathrm{m}^4$?
(b) Wie lange ist die Seitenlänge eines 4-dimensionalen Würfels mit Volumen $0.5\,\mathrm{m}^4$?
(c) Mit welchem Streckfaktor muss ein 4-dimensionaler Würfel gestreckt werden, damit sich sein Volumen verhundertfacht?

Aufgabe A18 Die Schweizer Nationalbank gibt (oder gab) im November 2016 Bundesanleihen mit einer Laufzeit von 42 Jahren heraus (und konstantem jährlichem Zinssatz). Der gesamte Zins (mit Zinseszins über die 42 Jahre) beläuft sich auf 23.3%. Wie gross ist der jährliche Zinssatz?

Aufgabe A19 Bei der temperierten Klavierstimmung ist das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinanderfolgender Halbtöne immer gleich (z.B. von e zu f oder von f zu fis; der höhere Ton hat die grössere Frequenz). Für die Oktave (12 Halbtöne) ist das Frequenz-Verhältnis $2:1$.
(Frequencen werden in Hertz $\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$ gemessen; Anzahl der Schwingungen pro Sekunde.)

(a) Mit welchem Faktor λ muss die Frequenz eines Tones multipliziert werden, damit der Ton einen Halbton höher wird?
Hinweis: Zwölfmaliger Übergang zum nächsten Halbton liefert eine Oktave, also eine Verdoppelung der Frequenz. Stellen Sie damit eine Gleichung für λ auf.
(b) Wenn der Kammerton a^1 (eingestrichenes A) die Frequenz $440\,\mathrm{Hz}$ hat, welche Frequenz hat das c^2 (zweigestrichenes C)? Welche Frequenz hat das eingestrichene c^1 (eingestrichenes C)?
Hinweis: Das eingestrichene A ist das A «in den Notenlinien», wenn der Violinschlüssel verwendet wird. Das zweigestrichene C befindet sich dann ebenfalls in den Notenlinien. Das eingestrichene C befindet sich direkt unter der untersten Notenlinie und benötigt eine Hilfslinie.
(c) Eine Quinte ist ein Tonabstand von 7 Halbtönen. Wird eine Violine nach Gehör gestimmt, werden die Quinten (Tonabstand zweier nebeneinander liegender Saiten) rein gestimmt («reine Stimmung»). Das Frequenzverhältnis ist genau $3:2 = \frac{3}{2} = 1.5$. Das Klavier hingegen ist meist temperiert gestimmt.Wenn man annimmt, dass das Kammer-a (a1) beider Instrumente auf genau 440 Hz gestimmt ist: Wie viel Prozent höher ist die Frequenz der reinen Quinte (reines e2) über dem a1 als die Frequenz der temperierten Quinte (temperiertes e2)?

Potenzen mit reellen Exponenten

19.4.19. Der Leser mag sich fragen, wie man Potenzen mit reellen Exponenten sinnvoll definieren kann, wie also etwa $2^{\sqrt{3}}$ oder 2^{π} zu definieren ist.

Eine Möglichkeit ist die folgende. Wir illustrieren sie am Beispiel 2^{π}. Man kann die irrationale Zahl π durch abbrechende Kommazahlen immer besser annähern:

$$3, \qquad 3.1 = \frac{31}{10}, \qquad 3.14 = \frac{314}{100}, \qquad 3.141 = \frac{3141}{1000}, \qquad \text{usw.}$$

Die Folge dieser Zahlen nähert sich der Zahl π immer besser an; man sagt, dass π der **Grenzwert** dieser Folge ist.

Wir können für alle Zahlen q dieser Folge die Potenz 2^q ausrechnen (da q rational ist) und erhalten die Zahlenfolge

$$2^3, \qquad 2^{3.1} = 2^{\frac{31}{10}}, \qquad 2^{3.14} = 2^{\frac{314}{100}}, \qquad 2^{3.141} = 2^{\frac{3141}{1000}}, \qquad \text{usw.}$$

Man kann zeigen, dass diese Folge einen Grenzwert hat: Es gibt eine Zahl, der sich diese Zahlen immer besser annähern. Diese Zahl nennen wir 2^{π}.

Analog kann man a^r für jede reelle Zahl r (und jede positive reelle Zahl a) definieren, indem man r immer besser durch rationale Zahlen approximiert.

Alle Potenzgesetze für rationale Exponenten gelten allgemeiner auch für reelle Exponenten (ohne Beweis).

19.5 Potenzfunktionen

Definition 19.5.1 Potenzfunktion

Eine Funktion f heisst genau dann **Potenzfunktion**, wenn sie die Gestalt

$$f(x) = x^p \qquad \text{oder etwas allgemeiner} \qquad f(x) = ax^p$$

hat, wobei der Exponent p und der Vorfaktor a beliebige, fest gewählte reelle Zahlen sind.
Ausführlich schreibt man eine solche Funktion als

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{D} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto ax^p \end{aligned}$$

Der (maximale) Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f hängt vom Exponenten p ab (siehe unten).

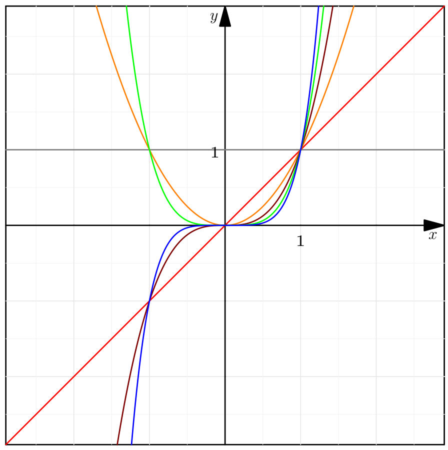
Aufgabe A20 Graphen der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

(a) In der Zeichnung sind die Graphen der Potenzfunktionen

$$y = x^0 = 1 \qquad y = x^1 = x \qquad y = x^2$$
$$y = x^3 \qquad y = x^4 \qquad y = x^5$$

dargestellt. Finden Sie heraus (etwa per Taschenrechner oder GeoGebra), welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
Wenn in Zukunft eine dieser Funktionen auftaucht, sollten Sie sofort wissen, wie der Graph aussieht!

(b) Was passiert mit dem Graphen von $f(x) = x^n$, wenn die natürliche Zahl n immer grösser wird («gegen unendlich geht», Schreibweise $n \to \infty$).
Unterscheiden Sie die Fälle, dass n gerade bzw. ungerade ist.



Merke 19.5.2 Eigenschaften der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit positivem natürlichem Exponenten n

Für jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit **positivem natürlichem Exponenten** $n > 0$ gilt:

(a) Die Definitionsmenge von f ist ✎$\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(b) Der Graph von f geht durch die beiden Punkte ✎$(0,0)$ und $(1,1)$, denn $f(0) = 0^n = 0$ und $f(1) = 1^n = 1$.

(c) Ist n gerade, so
- ist der Graph von f ✎achsensymmetrisch zur y-Achse, denn $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = x^n = f(x)$;
- hat (der Graph von) f bei $x = 0$ einen ✎Tiefpunkt/ein Minimum;
- ist f auf dem ✎Intervall $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend (siehe unten); und auf dem ✎Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wachsend (= steigend);
- ist die Bildmenge (= Wertemenge) von f die Menge ✎$\mathbb{R}_0^+$.

(d) Ist n ungerade, so
- ist der Graph von f ✎punktsymmetrisch zum Ursprung $(0,0)$, denn $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = -x^n = -f(x)$;
- hat f (im Fall $n \geq 3$) bei $x = 0$ einen ✎Wendepunkt (Wechsel von Rechts- zu Linkskurve);
- ist f auf dem Intervall ✎$\mathbb{R}$ streng monoton wachsend (= steigend);
- ist die Bildmenge (= Wertemenge) von f die Menge ✎$\mathbb{R}$.

19.5.3 (Erinnerungen (vielleicht nicht alles)). Ist $f\colon \mathbb{D} \to Y$ eine Funktion, so heisst $\mathbb{D}$ **Definitionsmenge** und Y **Zielmenge**. In der Schule sind $\mathbb{D}$ und Y meist Teilmengen der Menge der reellen Zahlen. Die Menge

$$\mathbb{B} = \{y \in Y \mid \text{es gibt ein } x \in \mathbb{D} \text{ mit } f(x) = y\}$$

heisst **Bildmenge** oder **Wertemenge von** f. Sie besteht aus allen Elementen von Y, die von f «getroffen» werden.

Beispiel 19.5.4. Die Bildmenge der Sinusfunktion $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{B} = [-1, 1]$, denn die Werte der Sinusfunktion liegen in diesem Intervall und jeder Wert dieses Intervalls ist ein Wert der Sinusfunktion.

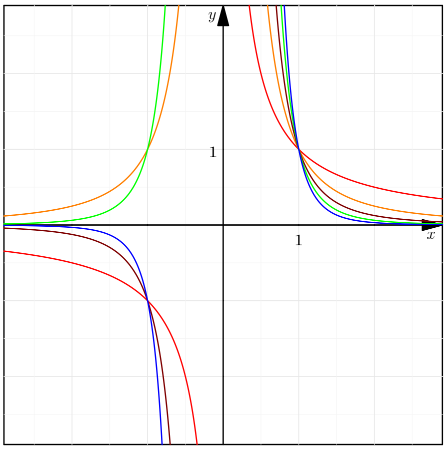
Man kann die Sinusfunktion auch als Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ auffassen. Dann stimmen Ziel- und Bildmenge der Sinusfunktion überein.

Aufgabe A21 Graphen der Potenzfunktionen mit negativen ganzen (= ganzzahligen) Exponenten

(a) In der Zeichnung sind die Graphen der Potenzfunktionen

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$
$$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4} \qquad y = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

dargestellt.
Beachten Sie, dass jeder Graph einen linken und einen rechten «Zweig» hat.
Finden Sie heraus (etwa per Taschenrechner oder GeoGebra), welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
Wenn in Zukunft eine dieser Funktionen auftaucht (insbesondere bei $f(x) = \frac{1}{x}$ oder $f(x) = \frac{1}{x^2}$, sollten Sie sofort wissen, wie der Graph aussieht!



(b) Was passiert mit dem Graphen von $f(x) = x^{-n}$, wenn die natürliche Zahl n gegen $+\infty$ geht (also der Exponent $-n$ gegen $-\infty$ geht). Unterscheiden Sie die Fälle, dass n gerade bzw. ungerade ist.

Merke 19.5.5 Eigenschaften der Potenzfunktionen $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit negativem ganzen Exponenten

Für jede Potenzfunktion $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit **negativem ganzen Exponenten** $-n$ gilt: (Hier ist $n > 0$ eine beliebige positive natürliche Zahl.)

(a) Die Definitionsmenge von f ist ✎$\mathbb{D} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Definitionslücke bei $x = 0$)

(b) Der Graph von f hat bei $x = 0$ ✎einen Pol/eine Polstelle n-ter Ordnung.

(c) Der Graph von f hat die beiden Koordinatenachsen als ✎Asymptoten.

(d) Der Graph von f geht durch den Punkt ✎$(1, 1)$, denn $f(1) = 1^{-n} = \frac{1}{1^n} = 1$.

(e) Ist n gerade, so
- ist der Graph von f ✎achsensymmetrisch zur y-Achse;
- ist f auf dem ✎Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton wachsend; und auf dem ✎Intervall $(0, \infty)$ streng monoton fallend;
- ist die Bildmenge (= Wertemenge) von f die Menge ✎$\mathbb{R}^+$.

(f) Ist n ungerade, so
- ist der Graph von f ✎punktsymmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$;
- ist f auf dem ✎Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend; und auf dem ✎Intervall $(0, \infty)$ ebenfalls streng monoton fallend;
  (Er ist aber nicht streng monoton fallend auf der gesamten Definitionsmenge $\mathbb{R}^*$.)
- ist die Bildmenge (= Wertemenge) von f die Menge ✎$\mathbb{R}^*$.

Definition 19.5.6 Polstelle

Eine **Polstelle** oder kurz ein **Pol** einer reellwertigen Funktion f ist eine einpunktige Definitionslücke x der Funktion, für die die Funktionswerte «nahe bei x betragsmässig beliebig gross werden».
Formaler: Für jede (beliebig grosse) positive reelle Zahl R gibt es eine Umgebung U von x, so dass $|f(u)| > R$ für alle $u \in U$ gilt.

Definition 19.5.7 (streng) monoton wachsend, (streng) monoton fallend

Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heisst

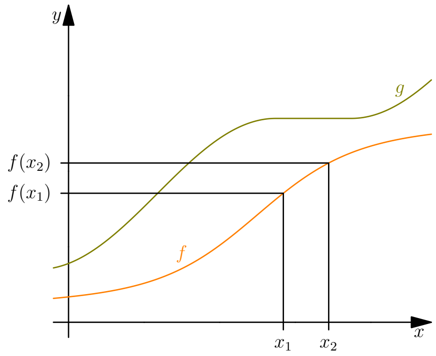
- **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt: ✎

  Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$

- **streng monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt: ✎

  Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$

- **monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt:
  Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ gilt:
  Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.



In der Zeichnung ist f streng monoton wachsend, während g monoton wachsend ist, aber nicht streng monoton wachsend.

19.5.8. Alle oben behaupteten Eigenschaften der Potenzfunktionen kann man mathematisch streng beweisen.

19.5.9. Sei $n > 0$ eine positive natürliche Zahl. Wir erklären dem interessierten Leser exemplarisch, warum die Funktion $f(x) = x^n$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist (und etwas mehr).
Vorbemerkung: Aus $0 \leq a < b$ und $0 \leq c < d$ folgt $0 \leq ac < bd$.
Beweis der Vorbemerkung:

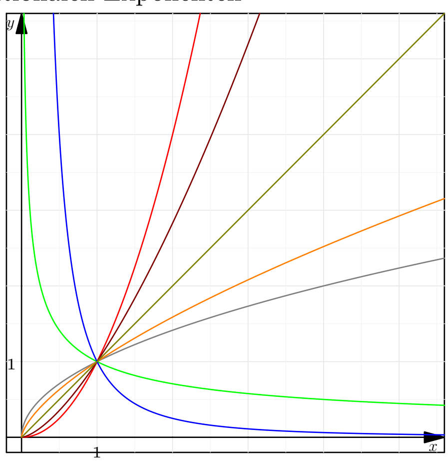
- Aus $0 \leq a < b$ folgt per Multiplikation mit $c \geq 0$, dass $0 \leq ac \leq bc$.
- Aus $c < d$ folgt per Multiplikation mit $b > 0$ (da $b > a \geq 0$), dass $bc < bd$.

Folglich gilt $0 \leq ac \leq bc < bd$, also $0 \leq ac < bd$ wie gewünscht.
Beweis der strengen Monotonie von $f(x) = x^n$ auf $[0, \infty)$.
Seien x_1, x_2 mit $0 \leq x_1 < x_2$ beliebig. Wendet man die Vorbemerkung auf $a = c = x_1$ und $b = d = x_2$ an, so erhält man $0 \leq x_1^2 < x_2^2$. Wendet man die Vorbemerkung darauf und auf $0 \leq x_1 < x_2$ an, so erhält man $0 \leq x_1^3 < x_2^3$ usw. Allgemein gilt also $0 \leq x_1^n < x_2^n$. Dies zeigt, dass $f(x) = x^n$ streng monoton wächst auf $[0, \infty)$.
Im Fall $x_1 > 0$ kann man die Ungleichung $x_1^n < x_2^n$ durch $x_1^n x_2^n > 0$ dividieren und erhält $\frac{1}{x_2^n} < \frac{1}{x_1^n}$. Dies zeigt, dass $f(x) = x^n$ streng monoton fällt auf $(0, \infty)$.
Die restlichen Monotonie-Eigenschaften folgen nun aus der Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

⚒ Aufgabe A22 Graphen der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

(a) In der Zeichnung sind die Graphen der Potenzfunktionen mit (echt) rationalen Exponenten

$$y = x^{0.5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$
$$y = x^{0.\overline{6}} = x^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$
$$y = x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{x}\right)^3$$
$$y = x^{-0.5} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



dargestellt und ausserdem die Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^{-2}$, $y = x^1$ mit ganzen Exponenten.
Warum ist nur der «positive Teil» der x- und y-Achse dargestellt?
Finden Sie heraus, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
Wenn in Zukunft eine dieser Funktionen auftaucht, sollten Sie in etwa wissen, wie der Graph aussieht!

(b) Was passiert mit dem Graphen von $f(x) = x^e$, wenn der Exponent e gegen $+\infty$ geht? Wenn er von oben gegen 0 geht? Wenn er von unten gegen 0 geht? Wenn er gegen $-\infty$ geht?

Merke 19.5.10 Eigenschaften der Potenzfunktionen $f(x) = x^r$ mit rationalen Exponenten

Für jede Potenzfunktion $f(x) = x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ mit **rationalem Exponenten** $r = \frac{p}{q}$ gilt:

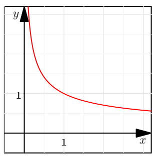
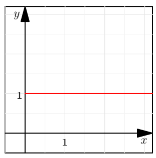
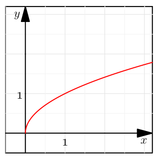
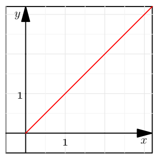
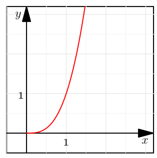
(a) Die Definitionsmenge von f ist für nicht ganzzahliges r ✎

$$\mathbb{D} = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) & \text{falls } r > 0; \\ \mathbb{R}^+ = (0, \infty) & \text{falls } r < 0. \end{cases}$$

Ist $r = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, so kommt $(-\infty, 0)$ hinzu.

(b) Der Graph von f geht durch den Punkt ✎$(1, 1)$, denn $f(1) = \sqrt[q]{1^p} = 1$.

(c) Wachstumsverhalten und «Kurventyp»:

Exponent r	$r < 0$	$r = 0$	$0 < r < 1$	$r = 1$	$r > 1$
					
Wachstumsverhalten von $f(x) = x^r$	streng monoton fallend	konstant	streng monoton wachsend		
«Kurventyp»/ «Wölbungsverhalten» von $f(x) = x^r$	Linkskurve = konvex	Gerade	Rechtskurve = konkav	Gerade	Linkskurve = konvex

(d) Die Bildmenge von f ist für nicht ganzzahliges r ✎

$$\begin{cases} \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) & \text{falls } r > 0; \\ \mathbb{R}^+ = (0, \infty) & \text{falls } r < 0. \end{cases}$$

(für ganzzahliges $r \in \mathbb{Z}$ siehe obige Merkeboxen)

(Anschauliche) Beweise all dieser Aussagen: Einzelne Graphen in A22 anschauen.
Alles hier Gesagte gilt auch für reelle Exponenten.

⚒ Aufgabe A23

Grössenvergleich von Potenzen

(a) Schreibe in jede Box das richtige Vergleichszeichen ($<$ oder $=$ oder $>$).
Hinweis: Verwende dein Wissen über das Wachstumsverhalten von Potenzfunktionen und deren Graphen.

gleicher Exponent: $2^3 \square 3^3$ $2^2 \square 3^2$ $2^{\frac{1}{2}} \square 3^{\frac{1}{2}}$ $2^0 \square 3^0$ $2^{-1} \square 3^{-1}$ $2^{-2} \square 3^{-2}$

gleiche Basis: $3^2 \square 3^3$ $2^2 \square 2^3$ $1^2 \square 1^3$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \square \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \square \left(\frac{1}{3}\right)^3$

(b) Trage (mit Bleistift) die richtigen Vergleichszeichen in der folgenden Merkebox 19.5.11 ein.

Merke 19.5.11 Monotonie-Gesetze: Wachstum bei Potenzen

- Gleicher Exponent, Wachstumsverhalten von Potenzfunktionen x^r:
  Für beliebige reelle Zahlen $a, b > 0$ (als Basen) und r (als Exponent) gilt:

$$a < b \implies \begin{cases} a^r \ \boxed{>}\ b^r & \text{falls } r < 0; \\ a^r \ \boxed{<}\ b^r & \text{falls } r > 0. \end{cases}$$

  Beweis: Wachstumseigenschaften in der Tabelle in der obigen Merkebox 19.5.10.
- Gleiche Basis, Wachstumsverhalten von Exponentialfunktionen Begriff wird in Bälde erklärt:
  Für beliebige reelle Zahlen $a > 0$ (als Basis) und r, s (als Exponenten) gilt:

$$r < s \implies \begin{cases} a^r \ \boxed{<}\ a^s & \text{falls } 0 < a < 1; \\ a^r \ \boxed{>}\ a^s & \text{falls } 1 < a. \end{cases}$$

  (Anschaulicher) Beweis: Für fixiertes a auf der x-Achse betrachte die verschiedenen Graphen in A22 an dieser Stelle.

19.6 Elementare Eigenschaften von Funktionen

Definition 19.6.1 Erinnerung: Funktion/Abbildung

Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Zuordnung, die
- *jedem* Element x der Menge X
- *genau ein* Element $f(x)$ der Menge Y zuweist.

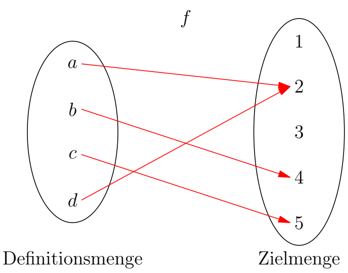
Schreibweise (am Beispiel der «Quadrierfunktion»; dabei $X = \mathbb{R}$ und $Y = [0, \infty)$):

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{lies: } f \text{ von } \mathbb{R} \text{ nach } [0, \infty) \\ &x \text{ wird abgebildet auf } f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Kurzschreibweise: $f(x) = x^2$

Begriffe:
- X ist die **Definitionsmenge** von f (in der Schule meist als $\mathbb{D}$ geschrieben);
- Y ist die **Zielmenge** von f;
- $f(x)$ ist das **Bild**/der **Wert** von x unter f;
- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ist die **Bildmenge**/**Wertemenge** von f. In der Schule wird sie oft mit $\mathbb{B}$ bezeichnet.

Beispiel 19.6.2 (einer Funktion zwischen endlichen Mengen).



Links ist eine Funktion graphisch dargestellt.
- Der Name der Funktion ist f.
- Die Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \{a, b, c, d\}$.
- Die Zielmenge ist $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Die Zuordnungsvorschrift ist durch die Pfeile angegeben, beispielsweise gilt $f(a) = 2$.
  In Worten: Das Bild von a unter f ist 2.
- Die Bildmenge (= Wertemenge) ist $\mathbb{B} = \{2, 4, 5\}$. (Im Bild einkringeln.)

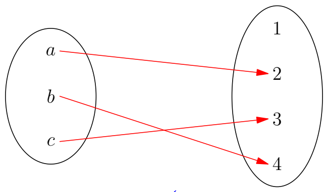
Aufgabe A24 Elementare Eigenschaften von Funktionen selbst entdecken

Unten sind einige Funktionen angegeben, links bildlich und rechts in mathematischer Notation. Jede Funktion hat eine wichtige Eigenschaft (die du selbst herausfinden sollst). Jede dieser Eigenschaften taucht genau einmal links und genau einmal rechts auf. Zumindest dann, wenn man die «richtigen» wichtigen Eigenschaften herausfindet.

Deine Aufgabe ist, für jede Funktion links die Funktion rechts zu finden, die dieselbe Eigenschaft hat.

Empfehlung: Überlege dir zuerst bei den links angegebenen Funktionen, was die wichtige Eigenschaft sein könnte.

a)



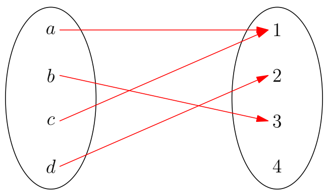
✎injektiv (und nicht surjektiv)

b)

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

✎allgemeine Funktion, weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv

c)



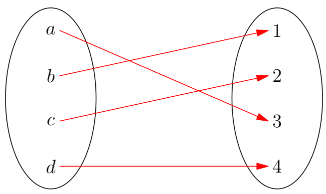
✎allgemeine Funktion, weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv

d)

$$\begin{aligned} d\colon [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

✎bijektiv

e)



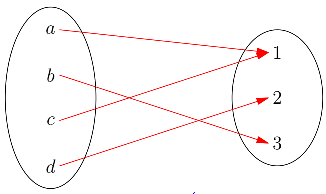
✎bijektiv

f)

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

✎injektiv (und nicht surjektiv)

g)



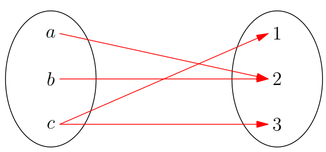
✎surjektiv (und nicht injektiv)

h)

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

✎keine Funktion, nicht wohldefiniert

i)



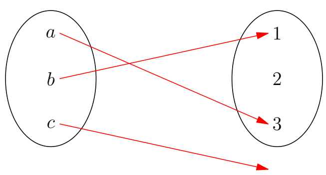
✎keine Funktion, nicht wohldefiniert

j)

$$\begin{aligned} j\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \pm\sqrt{x} \end{aligned}$$

✎keine Funktion, nicht wohldefiniert

k)



✎keine Funktion, nicht wohldefiniert

l)

$$\begin{aligned} l\colon \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

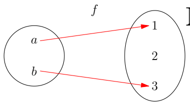
✎surjektiv (und nicht injektiv)

Definition 19.6.3 injektiv, surjektiv, bijektiv: Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst

Klar sagen, dass für uns «bijektiv» am wichtigsten.

- **injektiv**, wenn ✎verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet werden.

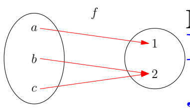


Mit mathematischer Notation: Für alle Elemente $x_1, x_2 \in X$ gilt: ✎

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Äquivalent: Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$ für alle Elemente $x_1, x_2 \in X$.

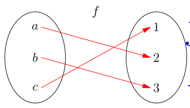
- **surjektiv**, wenn ✎jedes Element der Zielmenge getroffen wird.



Mathematisch: ✎
Für jedes Element $y \in Y$ gibt es ein Element $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Äquivalent: Die Bildmenge stimmt mit der Zielmenge überein.

- **bijektiv**, wenn ✎



jedes Element der Zielmenge genau einmal getroffen wird.
Äquivalent: Wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Mathematisch: Für jedes Element $y \in Y$ gibt es **genau ein** Element $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Beispiele 19.6.4. Entweder als Beispiel oder als Aufgabe: Bei jeder Funktion in A24 angeben, welche Eigenschaft sie hat (bzw. nicht hat).

Aufgabe A25 Welche der folgenden Funktionen sollte injektiv sein? Welche sollte sogar bijektiv sein? Welche sollte surjektiv (und nicht bijektiv) sein? Weder surjektiv noch bijektiv? Handelt es sich um eine Funktion?

- Die Funktion, die jedem Bürger seine Steuernummer zuordnet.
- Die Funktion, die jedem Menschen seine Blutgruppe zuordnet.
- Die Funktion, die eine Temperaturangabe in Grad Celsius in Grad Fahrenheit umrechnet.
- Die Funktion, die jedem Theaterbesucher seine Platznummer zuordnet.
  Welche Eigenschaft hat diese Funktion, wenn das Theater ausverkauft ist?
  Welche Eigenschaft hat diese Funktion, wenn sich zwei Besucher gerechtfertigterweise um denselben Platz streiten?
- Die Funktion, die jedem Schüler seine letzte Mathe-Note zuordnet.
- Die Funktion, die jeder Note den Schüler mit dieser Note zuordnet.
- Die Funktion, die jedem Berg seine Höhe zuordnet.

Beispiele 19.6.5.

- Ist jede streng monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv? ✎Ja
- Ist jede monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv? ✎Nein, etwa $f(x) = 0$.
- Ist jede injektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend? ✎Nein, beispielsweise ist $f(x) = -x$ (streng monoton fallend).
- Ist jede injektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend? ✎Nein, etwa $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$.
  Aber korrekt für **stetige** Funktionen; das sind grob gesagt Funktionen, deren Graph man «ohne Abzusetzen mit einem Strift zeichnen kann». Die «meisten» Funktionen im normalen Leben sind stetig.

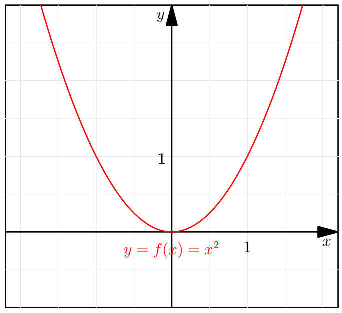
Merke 19.6.6 Funktionen bijektiv machen

Jede Funktion kann man bijektiv machen, indem man
(1) sie zuerst surjektiv macht, indem man die Zielmenge durch die Bildmenge ersetzt;
(2) sie dann zusätzlich injektiv (also insgesamt bijektiv) macht, indem man die Definitionsmenge geeignet verkleinert. Bitte nicht zu stark verkleinern, damit die Surjektivität erhalten bleibt!

Beispiel 19.6.7.

Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$



Diese Funktion ist ✎

- weder injektiv (da zum Beispiel $f(-1) = f(1)$)
- noch surjektiv (es gibt zum Beispiel kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$).

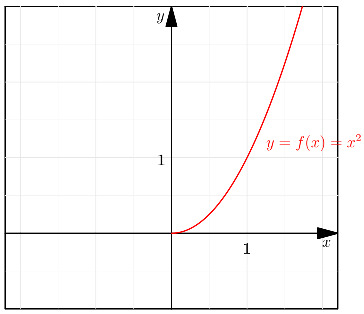
(1) surjektiv machen: Die Bildmenge von f ist ✎$\mathbb{B} = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$. (grün einzeichnen auf y-Achse)

Indem wir die Zielmenge $\mathbb{R}$ durch diese Bildmenge ersetzen, erhalten wir eine surjektive Funktion ✎

$$\begin{aligned} f_{\text{surj}}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto f_{\text{surj}}(x) = x^2 \end{aligned}$$

(2) zusätzlich injektiv machen (und damit bijektiv): Indem wir nun die Definitionsmenge zu ✎$\mathbb{R}_0^+$ (orange dargestellen) verkleinern, erhalten wir eine injektive (und bijektive) Funktion ✎

$$\begin{aligned} f_{\text{bij}}\colon \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto f_{\text{bij}}(x) = x^2 \end{aligned}$$



(Eine andere naheliegende Wahl wäre, die Definitionsmenge zu $\mathbb{R}_0^-$ zu verkleinern.)

Aufgabe A26 Funktionen bijektiv machen durch Verkleinern von Ziel- und Definitionsmenge wie in Beispiel 19.6.7.

(a) Verwandle die Betragsfunktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = |x| \end{aligned}$$

wie folgt in eine bijektive Funktion:

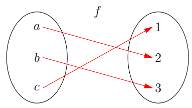
- Skizziere ihren Graphen und lies die Bildmenge ab. (Warum ist f weder injektiv noch surjektiv?)
- Mache sie surjektiv (mit Hilfe der Bildmenge).
- Mache sie zusätzlich injektiv (dabei ist die Definitionsmenge möglichst gross zu wählen; es gibt zwei naheliegende Wahlen für die neue Definitionsmenge).

(b) Verwandle die Funktion $f(x) = x^{-2}$ von $\mathbb{R}^*$ nach $\mathbb{R}$ ebenso in eine bijektive Funktion.
(c) Verwandle die Funktion $f(x) = \sin(x)$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ebenso in eine bijektive Funktion.

19.7 Umkehrfunktion

19.7.1. Idee/Motivation:

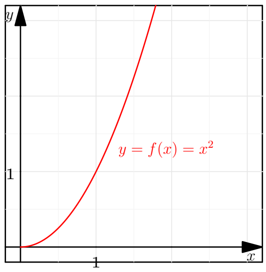
Jede bijektive Funktion kann man «rückgängig machen», denn jedem Element der Definitionsmenge entspricht genau ein Element der Zielmenge.
Die entsprechende Funktion in die andere Richtung nennt man *Umkehrfunktion von* f.



Beispiel 19.7.2. Wir betrachten zwei Funktionen f und g:

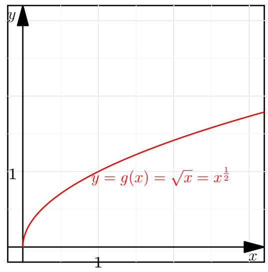
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$



Die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto y = g(x) = \sqrt{x}$$



Diese beiden Funktionen sind im folgenden Sinne **invers** zueinander:

- Für jedes Element $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: ✎

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x \qquad (\text{wegen } x \geq 0)$$

  d. h. g macht f rückgängig oder «g kehrt f um».

- Für jedes Element $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: ✎

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x \qquad (\text{wegen } x \geq 0)$$

  d. h. f macht g rückgängig oder «f kehrt g um».

Man sagt ✎

- g ist die **Umkehrfunktion** von f; Schreibweise: $g = f^{-1}$;
- f ist die **Umkehrfunktion** von g; Schreibweise: $f = g^{-1}$;.

Rechts kleines Bild ergänzen mit zwei Mengen $\mathbb{R}_0^+$ und Pfeilen f und g in beide Richtungen.
Beachte: Sowohl f als auch g sind bijektiv!

Beispiel 19.7.3. Umrechnungsfunktionen sind stets Umkehrfunktionen voneinander.

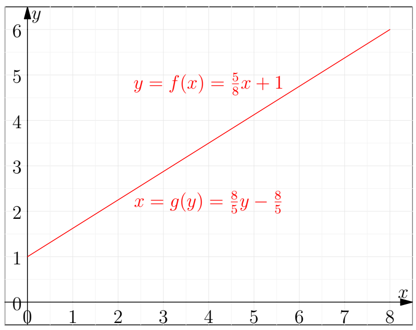
- Umrechnung von Kilometer in Meilen und umgekehrt:

$$f(x) = x \cdot 1.609344 \qquad \text{mit Umkehrfunktion} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x}{1.609344}$$

- Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit und umgekehrt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Umrechnungsfunktion von einer Punktzahl in eine Note. In einer Prüfung gibt es minimal 0 und maximal 8 Punkte; die Funktion zur Notenberechnung ist

$$f\colon X = [0, 8] \to Y = [1, 6]$$
$$x \mapsto y = f(x) = \frac{x}{8} \cdot 5 + 1 = \frac{5}{8}x + 1$$



Was ist die Umkehrfunktion f^{-1}?

Die Funktion f berechnet aus der Punktzahl $x \in X = [0, 8]$ die Note $y = f(x)$.

Wir suchen umgekehrt eine Funktion f^{-1}, ✎die aus der Note y die zugehörige Punktzahl x berechnet.

Konkret: ✎Gegeben eine Note y ist diejenige Punktzahl x gesucht, für die $f(x) = y$ gilt; diese Punktzahl x nennen wir dann $f^{-1}(y)$.

In mathematischer Notation möchten wir f^{-1} also wie folgt definieren: ✎

$$f^{-1}(y) = \text{✎}\big(\text{die Punktzahl } x \text{ mit } f(x) = y\big)$$

Um eine konkrete Berechnungsvorschrift für $f^{-1}(y)$ zu erhalten, liegt es nahe, die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen: ✎

$$\begin{aligned} & & y = f(x) &= \frac{5}{8}x + 1 \\ &\iff & 8y &= 5x + 8 \\ &\iff & 8y - 8 &= 5x \\ &\iff & \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} &= x \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gibt an, wie man die Punktzahl x aus der Note y berechnen kann.

Fazit: Die Umkehrfunktion f^{-1} von f ist

Mengendiagramm rechts ergänzen.

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y = [1, 6] &\to X = [0, 8] \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Beachte:

- Der oben gezeigte Graph von f ist auch der Graph der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn man ihn «von der y-Achse aus liest», also in dem Sinne, dass er für jedes y das zugehörige $x = f^{-1}(y)$ liefert. (Wer mag, kann das Blatt Papier drehen, so dass die y-Achse horizontal zu liegen kommt.)
- Die Funktion f geht von $X = [0, 8]$ nach $Y = [1, 6]$, während die Umkehrfunktion f^{-1} in die andere Richtung von $Y = [1, 6]$ nach $X = [0, 8]$ geht.
- Sowohl f als auch f^{-1} sind bijektiv.

Definition 19.7.4

Eine Funktion heisst **Umkehrfunktion** einer Funktion f, wenn die beiden Funktionen sich gegenseitig rückgängig machen (insbesondere muss die Zielmenge der einen Funktion die Definitionsmenge der anderen sein und umgekehrt).
Die Umkehrfunktion von f wird notiert als

$$f^{-1}$$

Statt *Umkehrfunktion* wird auch der Begriff **inverse Funktion** verwendet.

19.7.5. Achtung: Die Notation f^{-1} könnte auch den Kehrwert $\frac{1}{f}$ der Funktion f meinen, also die Funktion $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. Aus dem Kontext ist so gut wie immer klar, was gemeint ist.

Aufgabe A27 Um nachzurechnen, dass zwei Funktionen f und g Umkehrfunktionen voneinander sind, muss man die folgenden zwei Gleichheiten zeigen.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \text{ in der Definitionsmenge von } f; \\ f(g(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \text{ in der Definitionsmenge von } g. \end{aligned}$$

Voraussetzung dafür ist natürlich, dass die Definitionsmenge von f die Zielmenge von g ist und umgekehrt, was man graphisch wie folgt andeuten mag:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ und $g(x) = x^{\frac{5}{3}}$ Umkehrfunktionen voneinander sind.
Welche (möglichst grossen) Teilmengen von $\mathbb{R}$ sollten A und B hier sinnvollerweise sein? (Rollen von A und B wie in der Graphik oben.)

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{7x+4}{5x+3} \qquad \text{und bei } g \text{ war Schreibfehler!} \qquad g(x) = \frac{3x-4}{-5x+7}$$

Umkehrfunktionen voneinander sind.
Welche (möglichst grossen) Teilmengen von $\mathbb{R}$ sollten A und B hier sinnvollerweise sein?
Bemerkung: Funktionen dieser Form heissen Möbiustransformationen. (Zumindest, wenn x eine komplexe Zahl ist.)

(c) Was ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$? (raten (Muster in vorheriger Teilaufgabe erkennen), nachrechnen)

(d) Was ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{7x+3}{11x+5}$? (raten, nachrechnen)

(e) (allgemeine Möbiustransformation) Was ist die Umkehrfunktion $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$?
Um Spezialfälle zu vermeiden: Nehmen Sie an, dass $ad - bc \neq 0$ und dass $c \neq 0$. Der Ausdruck $ad - bc$ ist die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Satz 19.7.6 über die (eindeutige Existenz der) Umkehrfunktion

Genau dann hat eine Funktion eine Umkehrfunktion, wenn sie bijektiv ist.
Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion $f\colon X \to Y$ ist die durch

$$f^{-1}(y) := \text{(das Element } x \in X \text{ mit } f(x) = y)$$

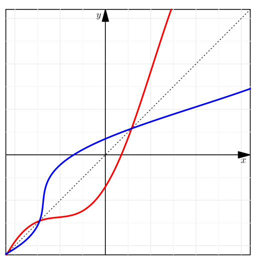
definierte Funktion $f^{-1}\colon Y \to X$.

Beweis. Hat eine Funktion $f\colon X \to Y$ eine Umkehrfunktion g, so ist f wegen $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$ surjektiv; sind x_1, $x_2 \in X$ Elemente mit $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt daraus durch Anwenden von g, dass $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, also ist f injektiv. Insgesamt ist somit f bijektiv.
Sei nun f bijektiv. Dann ist die Definition in der Formulierung des Satzes wohldefiniert, denn für jedes $y \in Y$ gibt es auf Grund der Bijektivität genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Das «Rückgängigmachen» ist dann eine Konsequenz der Definition: $f^{-1}(f(x)) = \big(\text{das } x' \in X \text{ mit } f(x') = f(x)\big) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = f\big(\text{das } x \in X \text{ mit } f(x) = y\big) = y$. Damit ist gezeigt, dass jedes bijektive Funktion eine Umkehrfunktion hat und dass diese die gesuchte Form hat.
Dies zeigt übrigens auch, dass eine bijektive Funktion **genau eine** Umkehrfunktion hat, was den Artikel «die» im obigen Aufschrieb rechtfertigt. □

19.7.7. Die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion ist die Funktion selbst: Ist f^{-1} die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion f, so ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}, es gilt also $(f^{-1})^{-1} = f$. Dies liegt schlicht an der Symmetrie des «Sich-gegenseitig-Rückgängig-Machens» in der Definition der Umkehrfunktion.

Merke 19.7.8

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} stimmt mit dem Graphen der Funktion f überein, wenn man ihn «von der anderen Achse her liest».
Stellt man beide Funktionen als Funktionen von x dar (wie das meist getan wird), so entsteht der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} deswegen aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden (und umgekehrt); siehe Beispiel 19.7.2.



 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

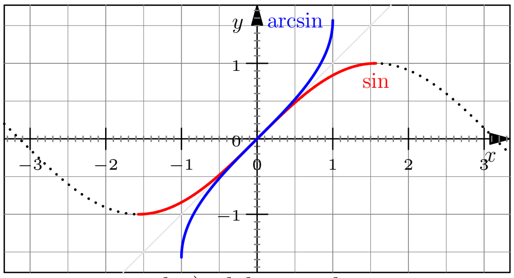
Beispiele 19.7.9 (Arcusfunktionen sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)**.**

Die Sinusfunktion ist bijektiv, wenn Definitions- und Zielmenge geeignet gewählt sind, üblicherweise wie folgt:

$$\sin\colon [-90°, 90°] = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

Die Umkehrfunktion ist dann die Arkussinusfunktion

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$



Diese beiden Funktionen sind invers zueinander (= Umkehrfunktionen voneinander), d. h. es gelten

$$\sin^{-1} = \arcsin \qquad \text{und} \qquad \arcsin^{-1} = \sin$$

Wie in der Graphik ersichtlich, sind ihre Graphen spiegelbildlich bezüglich der ersten Winkelhalbierenden. Beachte, dass die Definitionsmenge des roten Sinus-Graphen die Zielmenge des blauen Arcussinus-Graphen ist und umgekehrt.

Ähnliches gilt für die beiden anderen trigonometrischen Funktionen.

- Der Arcuskosinus arccos ist die Umkehrfunktion von $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$.
- Der Arcustangens arctan ist die Umkehrfunktion von $\tan\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$.

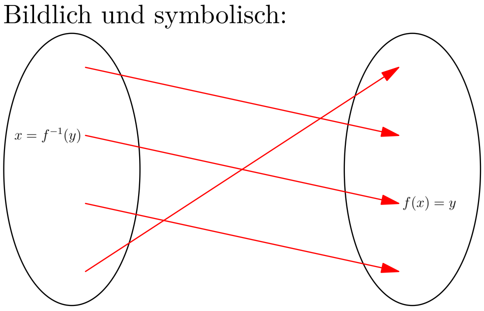
Die entsprechenden Bilder der gespiegelten Graphen findet man im Trigonometrie-Skript.

Merke 19.7.10

Ist $f\colon X \to Y$ bijektiv mit Umkehrfunktion f^{-1}, so gilt für alle $x \in X$ und $y \in Y$:

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y)$$

Bildlich und symbolisch:



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, equal] & f(x) \arrow[d, equal] \\ f^{-1}(y) & y \arrow[l, mapsto, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Beispiele 19.7.11.

(a) Die Funktion $f(x) = x^3$ hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. In der Tat gilt:

$$y = f(x) = x^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt[7]{x}$ hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = x^7$. In der Tat gilt:

$$y = f(x) = \sqrt[7]{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) = y^7$$

(c) Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \arccos(x)$. In der Tat gilt:

$$y = f(x) = \cos(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) = \arccos(y)$$

(d) Die Funktion tan hat die Umkehrfunktion arctan. In der Tat gilt:

$$y = \tan(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \arctan(y)$$

19.7.12. Der folgende Algorithmus beschreibt unser Vorgehen in Beispiel 19.7.3 abstrakt.

Algorithmus 19.7.13 zur Bestimmung der Umkehrfunktion

Gegeben ist eine (hoffentlich bijektive) Funktion $f\colon X \to Y$ durch eine Funktionsgleichung $y = f(x)$.

(1) Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf; verwende dabei nur Äquivalenzumformungen.

(2) Wenn dies möglich ist und genau einen Wert für x liefert, so ist die erhaltene Gleichung $x = \ldots$ die gesuchte Funktionsgleichung $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion f^{-1} (und f ist bijektiv).

(3) Die Zielmenge Y von f wird zur Definitionsmenge von f^{-1}.

(4) Die Definitionsmenge X von f wird zur Zielmenge von f^{-1}, d. h. $f^{-1}\colon Y \to X$.

(5) Nicht zwingend nötig, aber üblich: Ersetze in der Funktionsgleichung von f^{-1} die Variable y durch x.

Aufgabe A28 Bestimme jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} (mit Algorithmus 19.7.13).

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 5$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + q$
Welche Bedingungen muss m erfüllen, damit diese Funktion umkehrbar ist?

(c) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x}$

(d) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

(e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \frac{x}{x-2}$

In den folgenden Teilaufgaben sind neben der Umkehrfunktion f^{-1} auch Definitionsmenge X und Zielmenge Y sinnvoll und als möglichst grosse Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu bestimmen.

(f) $f\colon X \to Y,\ f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

(g) $f\colon X \to Y,\ f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

Aufgabe A29

(a) Bestimme jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} (mit Algorithmus 19.7.13).

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$

(ii) $f\colon [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = 1 - x$

(iii) $f\colon [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(iv) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\},\ f(x) = \frac{5}{x-3} + 3$

(b) Fällt dir bei deinen Lösungen etwas auf?
Eventuell hilfreich: Vergleiche die Graphen von f und f^{-1}.

19.7.14. Eine Funktion f kann ihre eigene Umkehrfunktion sein, d. h. $f = f^{-1}$ erfüllen. Dies ist natürlich nur möglich, wenn Definitions- und Zielmenge von f übereinstimmen.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **Involution**.

Alle Funktionen in A29 sind Involutionen.

Ist $f\colon X \to X$ eine Involution (beachte: Definitionsmenge $= X =$ Zielmenge), so gilt $f(f(x)) = x$ für alle $x \in X$. Der Graph von f ist symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden.

20 Einschub: Prozentrechnen

Merke 20.0.1

Prozent bedeutet «pro Hundert» und steht für Hundertstel. Schreibweise: %.
Promille bedeutet «pro Tausend» und steht für Tausendstel. Schreibweise: ‰.

Beispiele 20.0.2.

$$42\% = \tfrac{42}{100} \qquad -0.18 = -\frac{18}{100} = -18\% \qquad 1.2 = \frac{120}{100} = 120\% \qquad 42‰ = \tfrac{42}{1000}$$

20.1 Prozente zur Angabe von Anteilen von Grössen

Beispiel 20.1.1. Wenn in einer Schule mit 1100 Kindern der Anteil der Jungen 42% beträgt, wie viele Jungen sind an der Schule?

Lösung per **Dreisatz**: ✎

$$\begin{aligned} 1100 &\mathrel{\hat{=}} 100\% && \mid :100 \\ 11.00 &\mathrel{\hat{=}} 1\% && \mid \cdot 42 \\ 462 &\mathrel{\hat{=}} 42\% \end{aligned}$$

Direkte Lösung: ✎Es sind $42\% \cdot 1100 = \frac{42}{100} \cdot 1100 = 462$ Jungen an der Schule.

Merke 20.1.2 Prozentualer Anteil

Um $p\,\%$ einer Grösse a auszurechnen, wird mit $p\,\% = \frac{p}{100}$ **multipliziert**:

$$(p\,\% \text{ von } a) \quad = \quad \tfrac{p}{100} \cdot a$$

20.2 Prozentuale Zunahme und Abnahme

Beispiel 20.2.1. Eine Grösse g_{alt} wird um $p\,\%$ vergrössert. Wie gross ist die neue Grösse g_{neu}? ✎
neue Grösse = alte Grösse plus Anteil der alten Grösse.

$$g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} + \tfrac{p}{100} \cdot g_{\text{alt}} = (1 + \tfrac{p}{100}) \cdot g_{\text{alt}}$$

Wird ein Grösse um $p\,\%$ verkleinert, so ist die neuen Grösse ✎

$$g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} - \tfrac{p}{100} \cdot g_{\text{alt}} = (1 - \tfrac{p}{100})g$$

Typische Beispiele sind: ✎Zinsen, Rabatte, Entwicklung von Wirtschaftsdaten

Aufgabe A30 Lösen Sie folgende Textaufgaben. Geben Sie jeweils an, welche Grösse 100% entspricht.
Bemerkung: Die Aufgaben wurden kreiert von Priska Casanova Blöchliger.

(a) Ein Menu wird in einem Restaurant nach einer Preiserhöhung um 2.5% für 22.50 CHF angeboten. Wie teuer war das Menu vor der Preiserhöhung?
(b) Der Preis eines Autos erhöht sich durch die Zahlung in Raten auf 42'109.20 CHF, gegenüber 38'990 CHF bei sofortiger Zahlung. Um wie viel Prozent teurer ist der Ratenkauf gegenüber sofortiger Zahlung? Um wieviel Prozent billiger ist die sofortige Zahlung gegenüber dem Ratenkauf?
(c) Nach Abzügen von 7% bekommt ein Angestellter 4240.10 CHF Nettolohn ausbezahlt. Wie hoch ist sein Bruttolohn?
(d) Eine Immobilienmarklerin verlangt für einen Hausverkauf 1.5% des Kaufpreises. Wie hoch ist ihr Honorar bei einem Einfamilienhaus, das 890'000 CHF kostet?

(e) Ein langjähriger Kunde eines Möbelgeschäfts erhält 20% auf alle Betten. Er kauft sich ein neues Einzelbett und bezahlt dafür 79.20 CHF. Wie viel bezahlt ein Kunde für das Bett, welcher nicht von diesem Rabatt profitiert?

(f) Fritz hat am Jahresanfang 987.25 CHF auf seinem Sparkonto. Während des Jahres hat er kein Geld auf das Konto einbezahlt und nichts abgehoben. Am Jahresende weist das Konto einen Saldo von 1'011.95 CHF auf. Wieviel Prozent Zins hat Fritz erhalten?

(g) Martin ist bei seiner Geburt 50 cm lang und 3200g schwer. An seinem 2. Geburtstag misst er 88 cm und wiegt 10.8kg. Um wieviel Prozent ist er seit der Geburt gewachsen? Wie erklären Sie sich den grossen Unterschied der Prozentzahlen?

(h) Anna stellt Sirup her: Auf einen Liter Wasser gibt sie einen Deziliter Sirupkonzentrat. Wie viel Prozent der Flüssigkeit sind Wasser? Welche Angabe fehlt, um die Aufgabe korrekt lösen zu können?

(i) Der Frauenanteil der Angestellten einer Firma mit 900 Angestellten beträgt 45%. Wie viele Männer sind bei dieser Firma angestellt?

⚒ Aufgabe A31

a) Für ein Möbelhaus haben Sie zwei kumulierbare Rabatt-Coupons für ein bestimmtes Sofa. Der eine Coupon bewirkt eine Reduktion um 15% des Preises, der andere einen Nachlass um 100 CHF. Spielt die Reihenfolge des Einlösens eine Rolle? Wenn ja, welche Reihenfolge ist für den Kunden vorteilhaft?

b) Ein Aktie verliert $p \cdot 100\% = \frac{p \cdot 100}{100} = p$ an Wert (mit $0 < p < 1$). Um wieviele Prozent q muss die Aktie wieder zulegen, damit sie wieder genauso viel wert ist wie zuvor? Finden Sie zuerst eine Formel, um q aus p zu berechnen. Erstellen Sie dann eine Tabelle mit p und q für $p = 5\%, 10\%, 20\%, 50\%, 90\%$.

c) Ein Kapital K_0 wird zu $p \cdot 100\%$ angelegt. Am Ende des Jahres wird der Zins zum Kapital hinzugeschlagen und man erhält K_1. Dieses neue Kapital wird wieder gleich verzinst und man erhält nach zwei Jahren K_2, etc. Schreiben Sie die Formel für K_1, K_2 und K_3 einmal additiv und einmal multiplikativ auf.

d) Wenn ein Kapital K_0 zum Zinssatz $p = 10\%$ angelegt wird (mit Zinseszins wie bei der vorigen Aufgabe): Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt? Gesucht ist genauer das kleinste n mit $K_n \geq 2K_0$.

Merke 20.2.2

Wird ein Kapital K_0 pro Zeiteinheit (etwa pro Jahr) mit dem Zinssatz $p \cdot 100\% = \frac{p \cdot 100}{100} = p$ verzinst und der Zins jeweils zum Kapital dazugenommen und somit weiterverzinst (Zinseszins), so beträgt das Kapital nach n Zeiteinheiten

$$K_n = (1+p)^n \cdot K_0$$

20.2.3. Man kann dieselbe Formel auch für den Zinssatz $q\,\% = \frac{q}{100} = \frac{q}{100} \cdot 100\%$ aufschreiben. Dann gilt die ästhetisch weniger schöne Formel

$$K_n = \left(1 + \tfrac{q}{100}\right)^n \cdot K_0$$

⚙ Aufgabe A32

Eine Grösse g wächst zunächst um $p \cdot 100\%$ und schrumpft danach um $q \cdot 100\%$.

(a) Wie gross ist der Unterschied, wenn die Grösse umgekehrt zuerst um $q \cdot 100\%$ schrumpft und danach um $p \cdot 100\%$ wächst?

(b) Was passiert im Fall $p = q$? Wie gross ist der prozentuale Unterschied von der alten zur neuen Grösse?

⚒ Aufgabe A33

«Rabatte» beim Einkaufen in Deutschland (Stand Frühjahr 2025)

(a) Ein Schweizer kauft in einem Geschäft in Konstanz für 100 € ein (inklusive 19 % Mehrwertsteuer). Beim nächsten Besuch dieses Geschäftes lässt er sich diese Mehrwertsteuer erstatten (dank Ausfuhrschein). Wie viel Geld bekommt er ausbezahlt? Welchen prozentualen «Rabatt» hat er auf den Einkauf erhalten?

(b) Ein Schweizer kauft in einem Geschäft in Konstanz für 1000 € ein. Bei der Einreise in die Schweiz muss er nun 8.1 % Einfuhrsteuer an die Schweiz zahlen (auf den deutschen Preis ohne Mehrwertsteuer).

(Diesmal muss er diese Einfuhrsteuer zahlen, denn sein Einkauf liegt weit über der Wertfreigrenze von CHF 150 Franken. Für die Wertfreigrenze relevant ist meines Wissens der in Franken umgerechnete Euro-Preis ohne Mehrwertsteuer.)

Beim nächsten Besuch dieses Geschäftes lässt er sich die deutsche Mehrwertsteuer erstatten. Wie viel Euro hat der Schweizer diesmal im Endeffekt für seinen Einkauf ausgegeben? Welchen prozentualen «Rabatt» hat er auf den Einkauf erhalten?

Könnte Worte erklären:

$$\text{Zins} = \text{Zinssatz} \cdot \text{Ausgangsbetrag}$$

$$\text{Zinsfaktor} = 1{+}\text{Zinssatz}$$

20.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-potenzen-auswendiglernen
siehe Lehrerversion

Lösung zu A2 ex-lueckentext-potenzen-und-wurzeln-definition
siehe Lehrerversion

Lösung zu A3 ex-lueckentext-potenzen-und-wurzeln-wahr-oder-falsch
siehe Lehrerversion

Lösung zu A4 ex-lueckentext-potenzen-und-wurzeln-einfache-beispiele
siehe Lehrerversion

Lösung zu A5 ex-lueckentext-wurzel-vertauscht-mit-potenz
siehe Lehrerversion

Lösung zu A6 ex-lueckentext-rationaler-exponent-darstellung-egal
siehe Lehrerversion

Lösung zu A7 ex-potenzen-ganzzahlige-exponenten-beispiele

Lösung zu A8 ex-rationale-potenzen-von-hand-berechnen

a) $64^{\frac{1}{2}} = 8$

b) $144^{0.5} = 144^{\frac{1}{2}} = 12$

c) $81^{0.25} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$

d) $1024^{-0.1} = 1024^{-\frac{1}{10}} = 1024^{\frac{-1}{10}} = \left(\sqrt[10]{1024}\right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

e) $512^{\frac{1}{3}} = 8$

f) $625^{\frac{3}{4}} = 125$

g) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

h) $100'000^{\frac{3}{5}} = 1'000$

i) $0.01^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{100}}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.001$

j) $6.25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25}{10} = 2.5$

k) $\left(\frac{81}{16}\right)^{1.25} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{\frac{81}{16}}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$

l) $\left(\frac{25}{9}\right)^{-1.5} = \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{25}{9}}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

Lösung zu A9 ex-potenzgesetze-rationale-exponenten
Erstes Potenzgesetz, wobei $p = \frac{x}{m}$ und $q = \frac{y}{n}$:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{x}{m}} \cdot a^{\frac{y}{n}} = a^{\frac{xn}{mn}} \cdot a^{\frac{my}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{xn} \cdot \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{my} \overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^{xn+my}$$
$$= a^{\frac{xn+my}{mn}} = a^{\frac{x}{m}+\frac{y}{n}}$$

Zweites Potenzgesetz: Beachte, dass $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ gilt, denn beide Seiten sind nicht-negativ und die m-te Potenz beider Seiten ist $a \cdot b$ (dies verwendet ein Potenzgesetz für ganzzahlige (= ganze) Exponenten).

$$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{\frac{x}{m}} = \left(\sqrt[m]{a \cdot b}\right)^x \overset{\text{siehe oben}}{=} \left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^x \overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \left(\sqrt[m]{a}\right)^x \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^x$$
$$= a^{\frac{x}{m}} \cdot b^{\frac{x}{m}} = a^p \cdot b^p$$

Drittes Potenzgesetz: Beachte $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, denn beide Seiten sind nicht-negativ und ihre mn-te Potenz ist a (dies verwendet ein Potenzgesetz für ganze Exponenten).

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{x}{m}}\right)^{\frac{y}{n}} = \sqrt[n]{\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^x\right)^y} \overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{xy}}$$
$$= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{xy}}} \overset{\text{siehe oben}}{=} \sqrt[mn]{a^{xy}} = a^{\frac{xy}{mn}} = a^{\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{n}} = a^{p \cdot q}$$

Nun zu den anderen drei Gesetzen:

Letztes Gesetz:

$$a^{-q} = a^{-\frac{z}{n}} = a^{\frac{-z}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-z} \overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^z} = \frac{1}{a^q}$$

und

$$\frac{1}{a^q} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^z} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^z = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^z = \left(\frac{1}{a}\right)^q$$

Drittletztes Gesetz:

$$\frac{a^q}{a^r} = a^q \cdot \frac{1}{a^r} \overset{\text{gerade bewiesenes Potenzgesetz}}{=} a^q \cdot a^{-r} \overset{\text{erstes Potenzgesetz}}{=} a^{q+(-r)} = a^{q-r}$$

Vorletztes Gesetz:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^q = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{z}{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^z = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^z \overset{\text{Potenzgesetz für ganze Exponenten}}{=} \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^z}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^z} = \frac{a^q}{b^q}$$

Lösung zu A10 ex-rationale-gesetze-anwenden

Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

a) $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} = x^{\frac{13}{30}}$

b) $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}} = x^{\frac{14}{7}} x^{-2} = x^2 x^{-2} = x^0 = 1$

c) $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(z^{\frac{7}{3}}\right)^{-\frac{2}{11}} = z^{\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right)} = z^{-\frac{14}{33}}$

e) $\left(x^{-\frac{5}{7}} y\right)^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3}} y^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{3}}$

f) $\left(z^{\frac{2}{7}} a\right)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^{-\frac{2}{5}} a^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^0 a^{\frac{15}{5}} = a^3$

g) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{7}{3}} = x^{-\frac{19}{12}}$

h) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{3}{7}}}{y^{\frac{3}{7}}} \cdot \dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{3}{7}} y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{3}{7}}} = \dfrac{x^{\frac{3}{7}}}{x^{-\frac{5}{3}}} \cdot \dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{3}{7}}} = x^{\frac{3}{7}+\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}-\frac{3}{7}} = x^{\frac{44}{21}} \cdot y^{\frac{5}{21}}$

i)

$$\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{5}}} = \left(b(ca)^{-1}\right)^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = \left(bc^{-1}a^{-1}\right)^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = b^{-\frac{3}{7}} c^{\frac{3}{7}} a^{\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}}$$
$$= a^{\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7}} b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{3}{7}+\frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7}+\frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{23}{21}} b^{-\frac{8}{35}} c^{\frac{3}{7}} = \frac{a^{\frac{23}{21}} c^{\frac{3}{7}}}{b^{\frac{8}{35}}}$$

j) $\left(\frac{1}{5^{-x}}\right)^3 \cdot 5^{-2x} = \frac{1^3}{(5^{-x})^3} \cdot 5^{-2x} = \frac{5^{-2x}}{5^{-3x}} = 5^{-2x+3x} = 5^x$

k) $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}} = \frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{(3x+y^2)^{\frac{1}{4}}} = (3x+y^2)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{2}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x+y^2}$

l) $(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2+2ab+b^2)^{\frac{2}{3}} = ((a+b)(a-b))^{\frac{2}{3}} \cdot ((a+b)^2)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} \cdot (a+b)^{\frac{4}{3}} = (a+b)^{\frac{6}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^2(a-b)^{\frac{2}{3}}$

m) $a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2 \cdot \frac{1}{(a+b^2)^{\frac{1}{2}}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^1(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{1-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b^2}$

Lösung zu A11 ex-typische-fehler

a) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$
Falsche Regel: $a^m + b^m = (a+b)^m$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = b = 1$ und $m = 2$ gilt $1^2 + 1^2 \neq (1+1)^2$.

b) $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$
Falsche Regel: $a^m + a^n = a^{m+n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 1$ und $m = n = 2$ gilt $1^2 + 1^2 \neq 1^{2+2}$.

c) $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$
Falsche Regel: $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $m = n = 1$ gilt $2^1 \cdot 2^1 \neq 2^{1 \cdot 1}$.

d) $(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$
Falsche Regel: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ oder schlimmer gar $(a+b)^m = a^m + b^m$. (Korrekt ist die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.) Gegenbeispiel: Für $a = b = 1$ und $m = 2$ gilt $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$.

e) $\left(z^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$
Falsche Regel: $(a^m)^n = a^{m+n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $m = n = 1$ gilt $(2^1)^1 \neq 2^2$.

f) $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a-b)^{\frac{4}{7}}$
Falsche Regel: $\frac{a^m}{b^m} = (a-b)^m$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $\frac{m^a}{m^b} = m^{a-b}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $b = 1$ und $m = 1$ gilt $\frac{2^1}{1^1} \neq (2-1)^1$.

g) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$ (die zweite Gleichheit stimmt)
Sehr abstruser Kürzungsfehler. Ist etwa für $a = 8$ und $b = 1$ falsch, denn $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{1^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{(\sqrt[3]{1})^2} = \frac{2^2}{1^2} = 4 \neq \frac{8}{1}$.

h) $\frac{a^{\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$ (nur die erste Gleichheit ist falsch)
Falsche Regel könnte $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$ sein. Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $b = 1$ und $m = 2$ und $n = 1$ gilt $\frac{2^2}{1^2} \neq \frac{2^1}{1^1}$.

i) $a^{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2$
Falsche Regel: $x^{y^z} = (x^y)^z$
Gegenbeispiel: Für $x = z = 2$ und $y = 1$ gilt $2^{1^2} \neq (2^1)^2$. (Kein Gegenbeispiel ist $x = y = z = 2$.)

Lösung zu A12 ex-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x}} = x^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{9}{4}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x^3}} = \left((x^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$

d) $x^2\cdot\dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5}\cdot x} = x^2\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}}}}{x^{\frac{5}{2}}\cdot x} = x^2\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{x^{\left(2+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\right)}}{x^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{31}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{\left(\frac{31}{8}-\frac{7}{2}\right)} = x^{\frac{3}{8}}$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{9}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{x\cdot x^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{x^{\frac{15}{8}}} = x^{\frac{15}{16}}$

Lösung zu A13 ex-wurzelgesetze-aus-potenzgesetzen-herleiten

Lösung zu A14 ex-nte-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[2]{x^5}} = \sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}}\cdot(x^5)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2}{5}}\cdot x^{\frac{5}{2}}} = \left(x^{\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{29}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{29}{20}}$

b) $\dfrac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{24}}$

c) $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = x^{-\frac{1}{25}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}} = x^{\frac{1}{n^3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{x^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{30}}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{13}{60}}} = x^{\frac{7}{60}}$

f) $\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot x^{\frac{n+1}{n^2}}}} =$
$\sqrt[n]{x\cdot\left(x^{\frac{n^2+n+1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^4}}$

Lösung zu A15 ex-gleichungen-mit-potenzen-loesen

(a)

$$\begin{aligned} x^{-4} &= 16 && \mid\cdot x^4 \\ 1 &= 16x^4 \\ \frac{1}{16} &= x^4 \\ \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} &= x \\ x &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (4-x)^3 &= -27 \\ 4-x &= -\sqrt{27} = -3 \\ -x &= -7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}8x^{-1} &= -x^2\\ 8 &= -x^3\\ x^3 &= -8\\ x &= -\sqrt[3]{8} = -2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(2x^{-\frac{1}{2}})^3 + x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{3}\\ 2^3x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{3}\\ 8x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{3}\\ 9x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{3}\\ x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{27}\\ x = (x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Hier Probe nötig, welche erfolgreich.

(e)

$$\begin{aligned}2x^{0.2} - 8x^{-0.2} &= 0\\ 2x^{0.4} - 8 &= 0\\ x^{0.4} - 4 &= 0\\ x^{\frac{2}{5}} &= 4\\ x = (x^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} &= 4^{\frac{5}{2}} = 32\end{aligned}$$

Hier Probe nötig, welche erfolgreich.

(f)

$$\begin{aligned}(d-x)^{-2} &= 4x^{-2} && &&\\ x^2 &= 4(d-x)^2 && &&\\ x &= \pm 2(d-x) && &&\\ x &= 2(d-x) && \text{oder} && x = -2(d-x)\\ x &= 2d - 2x && \text{oder} && x = -2d + 2x\\ 3x &= 2d && \text{oder} && -x = -2d\\ x &= \frac{2}{3}d && \text{oder} && x = 2d\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}3x^{1.5} - 96x^{0.25} &= 0\\ 3x^{1.25} - 96 &= 0\\ 3x^{1.25} &= 96\\ x^{1.25} &= 32\\ x^{\frac{5}{4}} &= 32\\ x = (x^{\frac{5}{4}})^{45} &= 32^{\frac{4}{5}} = 2^4 = 16\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
5.515 &= 6(1-0.2x)^{0.8} \\
\frac{5.515}{6} &= (1-0.2x)^{\frac{4}{5}} \\
\left(\frac{5.515}{6}\right)^{\frac{5}{4}} &= 1-0.2x \\
\left(\frac{5.515}{6}\right)^{\frac{5}{4}} - 1 &= -0.2x \\
-5\left(\frac{5.515}{6}\right)^{\frac{5}{4}} + 5 &= x \\
x &\approx 0.499997
\end{aligned}$$

Lösung zu A16 ex-wuerfelvolumen-halbieren

(a) Das Volumen wird mit dem Faktor λ^3 multipliziert. Wir suchen also λ so, dass:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 &= \frac{1}{2} && |(\cdot)^{\frac{1}{3}} \\
\lambda &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937
\end{aligned}$$

(b) Ein Würfel mit ca. 7.94 cm Kantenlänge hat ein Volumen von 0.5 l.

Lösung zu A17 ex-volumen-hyperwuerfel-strecken

(a) 1 m
(b) $s^4 = 0.5$, also $s = \sqrt[4]{0.5} \approx 0.8409$ m
(c) Das Volumen wird mit λ^4 multipliziert. Also $\lambda^4 = 100$ und damit $\lambda = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \approx 3.1623$.

Lösung zu A18 ex-bundesanleihe-snb

Sei p der unbekannte jährliche Zinssatz. (Beispiel: Wenn dieser 2 % betragen würde, so würde $p = 2\% = 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2}{100} = 0.02$ gelten).

Pro Jahr wird das eingesetzte Kapital also mit dem Faktor $1+p$ multipliziert. Damit ist nach 42 Jahren der Faktor, mit dem das anfängliche Kapital multipliziert wird $(1+p)^{42}$. Da diese Zahl laut Aufgabenstellung 1.233 beträgt, erhalten wir die folgende Gleichung.

$$\begin{aligned}
(1+p)^{42} &= 1+0.233 && |(\cdot)^{\frac{1}{42}} \\
1+p &= 1.233^{\frac{1}{42}} && |-1 \\
p &= \sqrt[42]{1.233} - 1 \approx 0.005 = 0.005 \cdot \underbrace{100 \cdot \frac{1}{100}}_{=1} = 0.5 \cdot \underbrace{\frac{1}{100}}_{=\%} = 0.5\%
\end{aligned}$$

Der Zinssatz beträgt also etwa 0.5%.

Lösung zu A19 ex-zwoelfte-wurzel-aus-zwei

(a) Für den Faktor λ gilt

$$\lambda^{12} = 2$$

Um den Exponenten 12 zum Verschwinden zu bringen, werden beide Seiten mit $\frac{1}{12}$ potenziert (was dasselbe ist, wie die 12-te Wurzel zu nehmen):

$$\begin{aligned}\left(\lambda^{12}\right)^{\frac{1}{12}} &= 2^{\frac{1}{12}}\\ \lambda &= 2^{\frac{1}{12}} \approx 1.059463\end{aligned}$$

(b) Das c^2 liegt drei Halbtöne über dem a^1, hat also die Frequenz

$$440 \cdot \lambda^3 \approx 523.251131\text{Hz}$$

Das c^1 hat die halbe Freuqenz des c^2, also die Frequenz

$$\frac{1}{2} \cdot 440 \cdot \lambda^3 \approx 261.625565\text{Hz}$$

Man kann auch die Frequenz des Kammertons durch λ^9 teilen (denn das c^1 liegt 9 Halbtöne unter dem a^1) und erhält dieselbe Frequenz wegen

$$\frac{440}{\lambda^9} = 440\lambda^{-9} = 440\lambda^{-12} \cdot \lambda^3 = 440 \cdot \frac{1}{\lambda^{12}}\lambda^3 = 440 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda^3$$

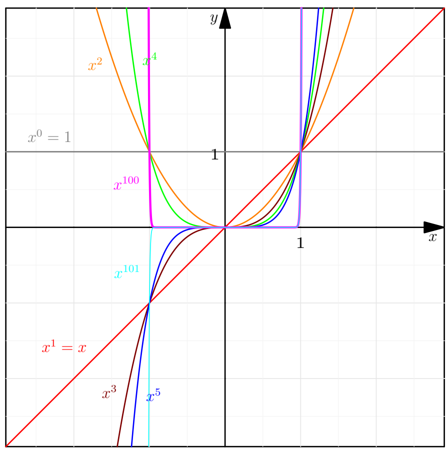
(c) In reiner Stimmung hat der Ton e2 die Frequenz $\frac{3}{2} \cdot 440 = 660$ Hertz.
Das Frequenzverhältnis zweier benachbarter Halbtöne bei der temperierten Stimmung ist $\sqrt[12]{2}$ (vom höheren zum tieferen Ton). Der temperierten Quinte (7 Halbtöne) entspricht also ein Verhältnis von $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498307$. In temperierter Stimmung hat der Ton e2 also die Frequenz $2^{\frac{7}{12}} \cdot 440 \approx 659.25508$ Hertz.
Der Quotient dieser beiden Frequenzen ist

$$\frac{\text{Frequenz reines e2}}{\text{Frequenz temperiertes e2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 440}{2^{\frac{7}{12}} \cdot 440} = \frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2^{\frac{7}{12}}} \approx 1.00112989$$

Die bedeutet, dass das reine e2 um 0.112989% höher ist als das temperierte e2. D.h. das e2 auf der Violine ist etwa 1‰ (= ein Promille) grösser das e2 auf dem Klavier.

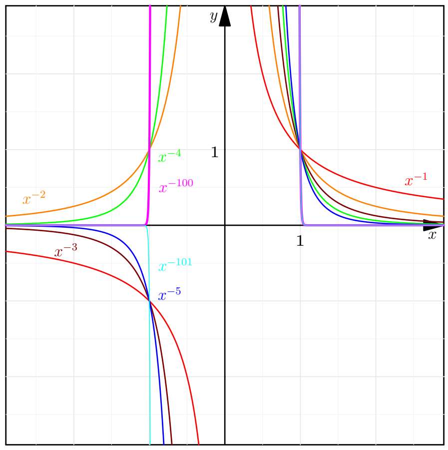
Lösung zu A20 ex-potenzfunktion-zu-graph-ermitteln-natuerliche-exponenten

(a) Siehe Zeichnung.
(b) Siehe Zeichnung (zwei aussagekräftige Beispiele sind eingezeichnet).



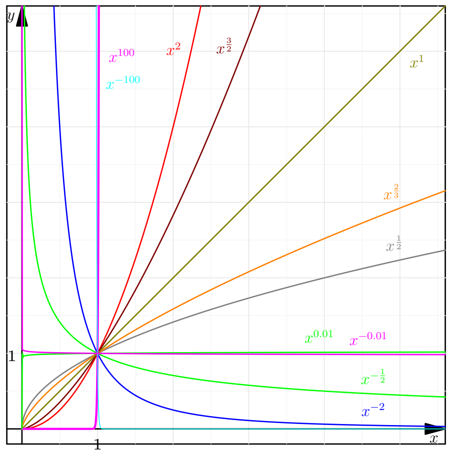
Lösung zu A21 ex-potenzfunktion-zu-graph-ermitteln-negative-ganze-exponenten

(a) Siehe Zeichnung.
(b) Siehe Zeichnung (zwei aussagekräftige Beispiele sind eingezeichnet).



Lösung zu A22 ex-potenzfunktion-zu-graph-ermitteln-rationale-exponenten

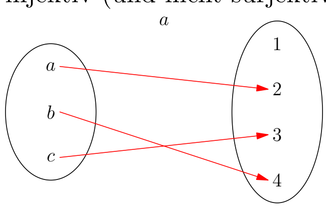
(a) Siehe Zeichnung.
(b) Siehe Zeichnung (zwei aussagekräftige Beispiele sind eingezeichnet).



Lösung zu A23 ex-wachstumsverhalten-potenzen

Lösung zu A24 ex-funktionen-in-sur-bi-jektiv

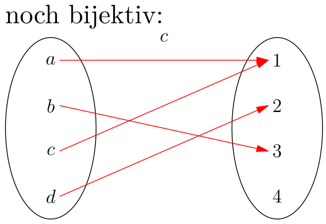
a) injektiv (und nicht surjektiv):



b) allgemeine Funktion, weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv:

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

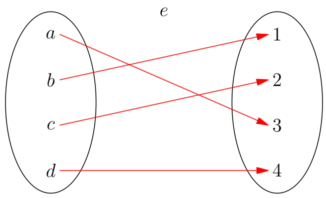
c) allgemeine Funktion, weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv:



d) bijektiv:

$$\begin{aligned} d\colon [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

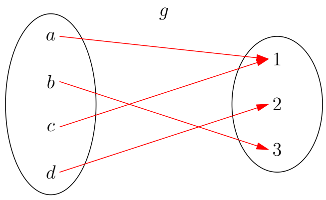
e) bijektiv:



f) injektiv (und nicht surjektiv):

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

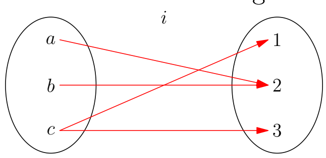
g) surjektiv (und nicht injektiv):



h) nicht wohldefiniert (mindestens ein Element der Definitionsmenge landet nicht in der Zielmenge):

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

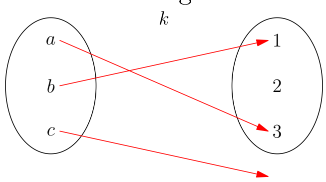
i) nicht wohldefiniert (mindestens ein Element wird auf zwei Elemente abgebildet):



j) nicht wohldefiniert (mindestens ein Element wird auf zwei Elemente abgebildet):

$$\begin{aligned} j\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \pm\sqrt{x} \end{aligned}$$

k) nicht wohldefiniert (mindestens ein Element der Definitionsmenge landet nicht in der Zielmenge):



l) surjektiv (und nicht injektiv):

$$\begin{aligned} l\colon \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Lösung zu A25 ex-funktionen-welche-eigenschaft-sollte-sie-haben

Lösung zu A26 ex-funktionen-bijektiv-machen

Lösung zu A27 ex-umkehrfunktion-nachrechnen

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ und $g(x) = x^{\frac{5}{3}}$ Umkehrfunktionen voneinander sind.

$$\begin{aligned} g(f(x))(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} &= x^{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}} = x \\ f(g(x))(x^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}} &= x^{\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}} = x \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind maximal auf $\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$ definiert und haben als Bildmenge $\mathbb{R}_0^+$. Man kann und sollte also $A = B = \mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$ wählen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g\left(\frac{7x+4}{5x+3}\right) \\
&= \frac{3\,\frac{7x+4}{5x+3} - 4}{-5\,\frac{7x+4}{5x+3} + 7} && \text{Erweitern!} \\
&= \frac{3(7x+4) - 4(5x+3)}{-5(7x+4) + 7(5x+3)} \\
&= \frac{21x + 12 - 20x - 12}{-35x - 20 + 35x + 21} \\
&= \frac{x}{1} = x \\
f(g(x)) &= \frac{7\frac{3x-4}{-5x+7} + 4}{5\frac{3x-4}{-5x+7} + 3} \\
&= \frac{7(3x-4) + 4(-5x+7)}{5(3x-4) + 3(-5x+7)} \\
&= \frac{21x - 28 - 20x + 28}{15x - 20 - 15x + 21} \\
&= \frac{x}{1} = x
\end{aligned}
$$

Die Funktion $f(x) = \frac{7x+4}{5x+3}$ hat als maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$ (denn «verboten» ist $5x + 3 = 0$).
Die Funktion $g(x) = \frac{3x-4}{-5x+7}$ hat als maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{5}\}$ (denn «verboten» ist $-5x + 7 = 0$).
Es liegt also nahe, A und B wie folgt zu wählen:

$$
\begin{tikzcd}
A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}\} \arrow[r, bend left, "f"] & B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{5}\} \arrow[l, bend left, "g"]
\end{tikzcd}
$$

Nun muss man noch prüfen, dass

- f wirklich in B landet und dass
- g wirklich in A landet.
- Beweis, dass f in B landet:
  Sonst gibt es ein $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$ mit

$$
\begin{aligned}
& & f(x) = \frac{7x+4}{5x+3} &= \frac{7}{5} && \text{multipliziere mit } 5x+3 \neq 0 \\
&\iff & 7x + 4 &= \frac{7}{5}(5x+3) \\
&\iff & 7x + 4 &= 7x + \frac{21}{5} \\
&\iff & 4 &= \frac{21}{5}
\end{aligned}
$$

  Da die letzte Gleichung offensichtlich falsch ist, kann auch die erste Gleichung nicht stimmen (da Äquivalenzumformungen). Also gibt es kein solches x, d. h. f landet in B.
- Beweis, dass g in A landet:
  Sonst gibt es ein $x \in B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{5}\}$ mit

$$
\begin{aligned}
& & g(x) = \frac{3x-4}{-5x+7} &= -\frac{3}{5} && \text{multipliziere mit } -5x+7 \neq 0 \\
&\iff & 3x - 4 &= -\frac{3}{5}(-5x+7) \\
&\iff & 3x - 4 &= +3x - \frac{21}{5} \\
&\iff & -4 &= -\frac{21}{5}
\end{aligned}
$$

Da die letzte Gleichung offensichtlich falsch ist, kann auch die erste Gleichung nicht stimmen (da Äquivalenzumformungen). Also gibt es kein solches x, d. h. f landet in A.

(c) Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$:
Die Umkehrfunktion ist $g(x) = \frac{x-2}{-2x+3}$.
Rechnungen und Bestimmung von A und B: Wie oben oder siehe letzte Teilaufgabe für den allgemeinen Fall.

(d) Was ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{7x+3}{11x+5}$?
Die Umkehrfunktion ist $g(x) = \frac{5x-3}{-11x+7}$.
Rechnungen und Bestimmung von A und B: Wie oben oder siehe letzte Teilaufgabe für den allgemeinen Fall.

(e) Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$:
Wir nehmen an, dass $ad - bc \neq 0$ und $c \neq 0$ gelten.
Dann ist die gesuchte Umkehrfunktion $g(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$, denn

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \\
&= \frac{d\frac{ax+b}{cx+d} - b}{-c\frac{ax+b}{cx+d} + a} && \text{Erweitern mit } cx+d \neq 0 \text{ (sonst } f(x) \text{ nicht definiert, vgl. unten)} \\
&= \frac{d(ax+b) - b(cx+d)}{-c(ax+b) + a(cx+d)} \\
&= \frac{adx + bd - bcx - bd}{-acx - bc + acx + ad} \\
&= \frac{(ad-bc)x}{ad-bc} \\
&= x \\
f(g(x)) &= \frac{a\frac{dx-b}{-cx+a} + b}{c\frac{dx-b}{-cx+a} + d} \\
&= \frac{a(dx-b) + b(-cx+a)}{c(dx-b) + d(-cx+a)} \\
&= \frac{adx - ab - bcx + ab}{cdx - bc - cdx + ad} \\
&= \frac{(ad-bc)x}{ad-bc} && \text{Kürzen mit } ad-bc \neq 0 \\
&= x
\end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ hat als maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ (denn «verboten» ist $cx + d = 0$). (Hier verwenden wir $c \neq 0$.)
Die Funktion $g(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ hat als maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ (denn «verboten» ist $-cx + a = 0$).
Es liegt also nahe, A und B wie folgt zu wählen:

$$A = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}$$

Nun muss man noch prüfen, dass

- f wirklich in B landet und dass
- g wirklich in A landet.
- Beweis, dass f in B landet:

Sonst gibt es ein $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ mit

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} && \text{multipliziere mit } 5x+3 \neq 0 \\
\iff \quad & ax + b = \frac{a}{c}(cx+d) \\
\iff \quad & ax + b = ax + \frac{a}{c}d \\
\iff \quad & b = \frac{ad}{c} \quad \iff bc = ad \iff 0 = ad - bc
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung ist falsch wegen unserer Annahme $ad - bc \neq 0$. Also landet f in B.

- Beweis, dass g in A landet:
  Sonst gibt es ein $x \in B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ mit

$$
\begin{aligned}
& g(x) = \frac{dx-b}{-cx+a} = -\frac{d}{c} && \text{multipliziere mit } -cx+a \neq 0 \\
\iff \quad & dx - b = -\frac{d}{c}(-cx+a) \\
\iff \quad & dx - b = dx - \frac{d}{c}a \\
\iff \quad & -b = -\frac{d}{c}a \\
\iff \quad & -bc = -ad \\
\iff \quad & ad - bc = 0
\end{aligned}
$$

  Die letzte Gleichung ist falsch wegen unserer Annahme $ad - bc \neq 0$. Also landet g in A.

Der Vollständigkeit halber noch die restlichen Fälle, wenn es jemand ganz genau wissen will.

Fall Z: $\boxed{ad - bc \neq 0 \text{ und } c = 0}$

In diesem Fall gilt $ad \neq 0$ (also $a \neq 0$ und $d \neq 0$) und f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{ax+b}{0x+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

Dies ist eine lineare Funktion.
Ebenso ist

$$g(x) = \frac{dx-b}{-0x+a} = \frac{d}{a}x - \frac{b}{a}$$

eine lineare Funktion. Die obige Rechnung zeigt, dass g die Umkehrfunktion von f ist.
Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und landen in $\mathbb{R}$. Wir können also $A = B = \mathbb{R}$ wählen.

Fall Y: $\boxed{ad - bc = 0}$

Fall Y.a: $\boxed{\text{zusätzlich } c \neq 0}$ In diesem Fall ist $ax + b$ ein das $\frac{a}{c}$-Fache von $cx + d$ (denn $\frac{a}{c} \cdot d = \frac{ad}{c} = b$), d. h. f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Mit anderen Worten ist f konstant. Wähle $B = \{\frac{a}{c}\}$.

Fall Y.b: $\boxed{\text{zusätzlich } c = 0}$ In diesem Fall gilt $ad = 0$, also $a = 0$ oder $d = 0$. Beachte

$$f(x) = \frac{ax+b}{0x+d} = \frac{ax+b}{d}$$

Im Fall $d = 0$ ist dieser Ausdruck nicht definiert (höchstens noch als eine Art «Unendlich»). (Implizit ist aus der Aufgabenstellung klar, dass dieser Fall nicht zu betrachten ist, denn dann wäre der Nenner $0x + 0 = 0$.)
Also können wir annehmen, dass $d \neq 0$ gilt. Dann muss $a = 0$ gelten und wir erhalten

$$f(x) = \frac{0x+b}{0x+d} = \frac{b}{d}$$

Also ist f konstant. Wähle $B = \{\frac{b}{d}\}$.

In beiden Fällen ist also f konstant. Nun kann etwa g auf der einpunktigen Menge B als 0 definieren und $A = \{0\}$ wählen.

Lösung zu A28 ex-umkehrfunktion-bestimmen

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$

$$
\begin{aligned}
& y = 2x + 5 \\
\iff \quad & y - 5 = 2x \\
\iff \quad & \frac{1}{2}(y-5) = x
\end{aligned}
$$

Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-5) = \frac{y}{2} - \frac{5}{2}$.
Wenn man lieber x als Parameter verwendet: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-5) = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

Ausführlich:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$
Beim Ausführen der folgenden Umformungen merkt man, dass man $m \neq 0$ voraussetzen muss (denn sonst ist Division durch m nicht erlaubt geschweige denn eine Äquivalenzumformung).
(Für $m = 0$ ist der Graph von f eine horizontale Gerade und f ist weder surjektiv noch injektiv, also erst recht nicht bijektiv bzw. umkehrbar. Für $m \neq 0$ ist f eine nicht-horizontale Gerade und somit bijektiv.)

$$\begin{aligned} && y &= mx + q \\ \iff && y - q &= mx \\ \iff && \frac{1}{m}(y-q) &= x \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{1}{m}(y-q) = \frac{y}{m} - \frac{q}{m}$.
Wenn man lieber x als Parameter verwendet: $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}(x-q) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m}$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m} \end{aligned}$$

(c) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} && y &= \frac{1}{x} \\ \iff && xy &= 1 \\ \iff && x &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(d) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\begin{aligned} && y &= \sqrt[3]{x} \\ \iff && y^3 &= x \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = y^3$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = x^3 \end{aligned}$$

(e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$$\begin{aligned}
&& y &= \frac{x}{x-2} \\
\iff && y(x-2) &= x \\
\iff && xy-2y &= x \\
\iff && xy-x &= 2y \\
\iff && x(y-1) &= 2y \\
\iff && x &= \frac{2y}{y-1}
\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{2y}{y-1}$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned}
f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} &\to \mathbb{R}\setminus\{2\} \\
x \mapsto f^{-1}(x) &= \frac{2x}{x-1}
\end{aligned}$$

(f) $f\colon X \to Y,\ f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
Da $x+2$ im Nenner vorkommt und man nicht durch Null teilen darf, muss $x \neq -2$ vorausgesetzt werden.

$$\begin{aligned}
&& y &= \frac{x+1}{x+2} \\
\iff && y(x+2) &= x+1 \\
\iff && xy+2y &= x+1 \\
\iff && xy-x &= 1-2y \\
\iff && x(y-1) &= 1-2y \\
\iff && x &= \frac{1-2y}{y-1}
\end{aligned}$$

Hierbei ist auch $y \neq 1$ vorausgesetzt (sonst Division durch Null).
Dies zeigt:

- Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ und $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt genau dann $y = \frac{x+1}{x+2}$, wenn $x = \frac{1-2y}{y-1}$ gilt.

Wir setzen deswegen $X = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ und $Y = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-1}$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned}
f^{-1}\colon Y = \mathbb{R}\setminus\{1\} &\to X = \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\
x \mapsto f^{-1}(x) &= \frac{1-2x}{x-1}
\end{aligned}$$

(g) $f\colon X \to Y,\ f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

$$\begin{aligned}
&& y &= \frac{x+1}{2x+1} \\
\iff && y(2x+1) &= x+1 \\
\iff && 2xy+y &= x+1 \\
\iff && 2xy-x &= 1-y \\
\iff && x(2y-1) &= 1-y \\
\iff && x &= \frac{1-y}{2y-1}
\end{aligned}$$

Dies gilt nur, falls $x \neq -\frac{1}{2}$ und $y \neq \frac{1}{2}$ (sonst Division durch Null).
Dies zeigt:

- Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ gilt genau dann $y = \frac{x+1}{2x+1}$, wenn $x = \frac{1-y}{2y-1}$ gilt.

Wir setzen deswegen $X = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ und $Y = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2y-1}$.
Ausführlich:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} &\to X = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1} \end{aligned}$$

Lösung zu A29 ex-umkehrfunktion-involution

In allen vier Fällen ist f seine eigene Umkehrfunktion, es gilt also $f = f^{-1}$.

Wir erklären das nur im dritten Beispiel und überlassen die restlichen Rechnungen dem Leser:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2} \\ y^2 &= 1-x^2 \\ y^2-1 &= -x^2 \\ -y^2+1 &= x^2 \\ 1-y^2 &= x^2 \\ \sqrt{1-y^2} &= x \end{aligned}$$

Man beachte, dass alle Umformungen Äquivalenzumformungen sind, sofern x und y Elemente von $[0,1]$ sind.

Es gilt also $f^{-1}(y) = \sqrt{1-y^2}$ bzw. $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$. Also gilt $f = f^{-1}$.

Für die ganz Genauen: Für alle $x \in [0,1]$ gilt $1-x^2 \in [0,1]$ (da wir wissen, wie die Parabel $1-x^2$ aussieht) und $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$ (da die Wurzel streng monoton wachsend ist und $\sqrt{0}=0$ und $\sqrt{1}=1$ erfüllt, bildet sie das Intervall $[0,1]$ in sich ab (auf bijektive Weise)).
(Nur auf Grund dieser Tatsachen ist f überhaupt wohldefiniert: Dort wird die Wurzel aus $1-x^2$ gezogen, was nur erlaubt ist, wenn dies ≥ 0 ist. Ausserdem wird behauptet, dass $\sqrt{1-x^2}$ in der angegebenen Wertemenge $[0,1]$ liegt, falls x in der angegebenen Definitionsmenge $[0,1]$ liegt.)
Die annalogen Aussagen gelten für alle $y \in [0,1]$.
Die obigen Umformungen sind für $x \in [0,1]$ und $y \in [0,1]$ Äquivalenzumformungen: Dies ist a priori nur für die erste und die letzte Umformung unklar.
(Erste und letzte Umformung sind im Wesentlichen dieselben, nur in unterschiedlichen Richtungen gelesen.)

- In der ersten Umformung wird quadriert. Im Allgemeinen ist das keine Äquivalenzumformung; hier aber schon, denn beide Seiten y und $\sqrt{1-x^2}$ sind Zahlen ≥ 0.
- In der letzten Umformung wird die Wurzel zweier **nicht-negativer Zahlen gezogen**, was nur deshalb erlaubt ist. Ausserdem ist die Wurzel von x^2 die Zahl x, denn x ist nicht-negativ. Man kann diese Umformung rückgängig machen, indem man quadriert.

Lösung zu A30 ex-prozentrechnen-textaufgaben-priska

(a) 100%: Preis x vor der Erhöhung. Der Preis nach der Erhöhung ist also

$$\begin{aligned} x \cdot (1+0.025) &= 22.50 && \mid : 1.025 \\ x &\approx 21.95 \end{aligned}$$

Der Preis vor der Erhöhung betrug 21.95 CHF.

(b) **Teil 1**: 100%: Sofortige Zahlung s, Ratenzahlung: $r = (1+p)s$, mit p: Prozentualer Unterschied. Es gilt also:

$$\begin{aligned} (1+p)38990 &= 42109.2 \\ 38990 + 38990p &= 42109.2 && \mid -38990 \\ 38990p &= 3119.2 && \mid : 38990 \\ p &= 0.08 \end{aligned}$$

Der Ratenkauf ist also 8% teurer.

Teil 2: 100% Ratenzahlung r. Sofortige Zahlung $s = (1-q)r$, mit q: prozentualer Unterschied. Wir wissen von oben, dass $r = (1+p)s$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned} s &= (1-q)(1+p)s && \mid : s \qquad s \neq 0 \\ 1 &= (1-q)(1+p) && \mid : (1+p) \qquad p \neq -1 \\ \frac{1}{1+p} &= 1-q && \mid + q - \frac{1}{1+p} \\ q &= 1 - \frac{1}{1+p} \approx 0.074 \end{aligned}$$

Der Sofortkauf ist also um 7.4% billiger.

(c) 100%: Bruttolohn b. Nettolohn:

$$\begin{aligned} (1-0.07)\cdot b &= 4240.10 && \mid : 0.93 \\ b &\approx 4559.25 \end{aligned}$$

Der Bruttolohn beträgt 4559.25 CHF.

(d) Honorar $= 890000 \cdot 0.015 = 13350$ CHF.

(e) 100%: Vollpreis v. Reduzierter Preis:

$$\begin{aligned} v \cdot (1-0.2) &= 79.20 && \mid : 0.8 \\ v &= 99 \end{aligned}$$

Der Vollpreis beträgt 99 CHF.

(f) 100%: Guthaben $g = 987.25$ am Anfang. Guthaben am Schluss:

$$\begin{aligned} (1+p)\cdot 987.25 &= 1011.95 && \mid -987.25 \\ p \cdot 987.25 &= 24.7 && \mid : 987.25 \\ p &\approx 0.025 \end{aligned}$$

Der Zins betrug 2.5%.

(g) 100%: Gewicht, bzw. Grösse bei Geburt.
Zunahme Gewicht: $3.2 \cdot p = 10.8 - 3.2$ also $p = 237.5\%$.
Zunahme Grösse: $50 \cdot q = 88 - 50$ also $p = 76\%$.
Das Gewicht entspricht in etwa dem Volumen. Vergrössert man z.B. eine Würfelseite um Faktor 2 (d.h. um 100%), wächst das Volumen um Faktor 8 (d.h. 700%). Das Modell ist nicht realistisch (die Proportionen ändern sich während dem Wachstum), aber man würde bei einer Grössenzunahme um den Faktor 1.76 eine Gewichtszunahme von $1.76^3 \approx 5.45$, also 445% erwarten.

(h) 100%: 1.1l fertiger Sirup. Anteil Wasser: $\frac{1}{1.1} \approx 0.909 \approx 91\%$.
Im Sirupkonzentrat hat es natürlich auch noch einen unbekannten Anteil an Wasser. Auch ist nicht klar, ob von Volumen- oder Gewichtsprozenten die Rede ist. Geht es um Volumenprozente ist die Antwort sogar annähernd 100%, da das Lösen von Zucker in Wasser das Volumen praktisch nicht ändert.

(i) 100%: 900 Angestellte. Anzahl Männer: $900 \cdot 0.55 = 495$.

Lösung zu A31 ex-prozente-knifflige-aufgaben

a) Je grösser der Preis, auf den der 15%-Coupon eingelöst wird, desto grösser die Reduktion. Es soll also dieser zuerst eingelöst werden, bevor noch die (konstanten) 100 CHF abgezogen werden.

b) Der Wert nach dem Verlust ist $g_{\text{neu}} = g_{\text{alt}} \cdot (1-p)$. Dieser Wert wird mit $(1+q)$ multipliziert, wobei q der gesuchte Prozentsatz ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} g_{\text{alt}} \cdot (1-p) \cdot (1+q) &= g_{\text{alt}} && \mid : g_{\text{alt}} \\ (1-p) \cdot (1+q) &= 1 && \mid : (1-p) \\ 1+q &= \frac{1}{1-p} && \mid -1 \\ q &= \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{1-(1-p)}{1-p} = \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

p	q
5%	$\frac{1}{19} \approx 0.05263 = 5.263\%$
10%	$\frac{1}{9} \approx= 0.1111 = 11.11\%$
20%	$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$
50%	$1 = 100\%$
90%	$9 = 900\%$

c)

Additiv	Multiplikativ
$K_1 = K_0 + pK_0$	$K_1 = K_0(1+p)$
$K_2 = K_0 + pK_0 + p(K_0 + pK_0)$	$K_1 = K_0(1+p)^2$
$K_3 = K_0 + pK_0 + p(K_0 + pK_0) + p(K_0 + pK_0 + p(K_0 + pK_0))$	$K_1 = K_0(1+p)^3$

d) Es gilt $K_n = (1+0.1)^n \cdot K_0 = 1.1^n \cdot K_0$. Gesucht ist also das kleinste n mit $1.1^n \geq 2$. Durch Ausprobieren erhält man $1.1^7 \approx 1.9487 < 1$ und $1.1^8 \approx 2.1436 > 2$.
Also hat sich das Kapital nach 8 Jahren (etwas mehr als) verdoppelt.

Lösung zu A32 ex-prozentrechnen-mehrfach-auf-und-ab

Vorbemerkungen: Der Wachstumsfaktor beim Wachsen um $p \cdot 100\%$ ist $(1+\frac{p\cdot 100}{100}) = (1+p)$. Der Wachstumsfaktor beim Schrumpfen um $q \cdot 100\%$ ist $(1-\frac{q\cdot 100}{100}) = (1-q)$.

(a) Erst wachsen, dann schrumpfen:

$$g_{\text{neu}} = (1-q)(1+p) \cdot g_{\text{alt}}$$

Erst schrumpfen, dann wachsen:

$$g_{\text{neu}} = (1+p)(1-q) \cdot g_{\text{alt}}$$

Beide Male kommt dasselbe heraus (nach dem Kommutativgesetz der Multiplikation)!

(b)

$$g_{\text{neu}} = (1+p)(1-p) \cdot g_{\text{alt}} = (1-p^2) \cdot g_{\text{alt}}$$

Der gesamte Wachstumsfaktor ist $1-p^2 = 1 - \frac{p^2\cdot 100}{100})$. Also schrumpft die Grösse um $p^2 \cdot 100\%$, und zwar unabhängig davon, ob die Grösse zuerst wächst oder schrumpft.

Lösung zu A33 ex-auslandseinkauf

(a) Der Kaufpreis 100 € entspricht 119 % = 1.19. Also ist der Warenwert (ohne Mehrwertsteuer) $\frac{100}{1.19} \approx 84.03$ €. Der Kunde bekommt den Differenzbetrag (= die deutsche Mehrwertsteuer von) 15.97 € ausbezahlt.
Der prozentuale Rabatt beträgt also 15.97%.

(b) Der Kaufpreis 1000 € entspricht 119 % = 1.19. Also ist der Warenwert (ohne Mehrwertsteuer) $\frac{1000}{1.19} \approx 840.34$ €. Der Kunde bekommt die deutsche Mehrwertsteuer 159.76 €, muss jedoch $0.081 \cdot \frac{1000}{1.19} \approx 68.07$ € Einfuhrsteuer zahlen.
Insgesamt hat der Einkauf somit $\frac{1000}{1.19} \cdot 1.081\text{euro} \approx 840.34 + 68.07€ \approx 908.40$ € gekostet.
Der prozentuale Rabatt beträgt nun 9.15 %.