Beachte: Im Kurvendiskussion Skript auf Seite 7 finden sich drei Repetitionsaufgaben für Donnerstag (26.03.2026), die ich (noch) nicht ausgedruckt habe.

Lernziele: Differentialrechnung 3 (Ableitungen trigonometrischer Funktionen, Parametrisierungen von Kurven, Anfänge Kurvendiskussion)

Kurzfassung:

- Skript «Differentialrechnnung», neuer Stoff ab Seite 23 (Ableitungen trigonometrischer Funktionen, Parametrisierungen von Kurven (= vektorwertige Funktionen));
- Skript «Kurvendiskussion» soweit behandelt (mindestens bis Seite 6).

Formelsammlung und einfacher Taschenrechner (der keine Ableitungen von Funktionen ausrechnen kann) sind erlaubt.

Wissen

- Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (steht in Formelsammlung).
- Begriff «Parametrisierung einer Kurve»: Die Kurve wird beschrieben durch ein «Teilchen», das zur Zeit t am Punkt $s(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist.
- Definition der Ableitung einer vektorwertigen Funktion (komponentenweises Ableiten).
- Wenn Positionsvektor zur Zeit t als vektorwertige Funktion $s(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben ist:
  - Wissen, welche physikalische Bedeutung $s'(t)$ hat. Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t
  - Wissen, welche physikalische Bedeutugn $|s'(t)|$ hat. Geschwindigkeit (als Zahl) zur Zeit t
  - Wissen, welche physikalische Bedeutung $s''(t)$ hat. Beschleunigungvektor zur Zeit t
- Kenntnis des Positionsvektors $s(t)$ beim freien Fall bei gegebenem Startpunkt und Startgeschwindigkeitsektor.
- Standardparametrisierung des Einheitskreises: Positionsvektor eines Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ beim Punkt $(1, 0)$ startet und sich auf dem Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1 in mathematisch positivem Drehsinn bewegt.
- Begriffe (Kurvendiskussion):
  - (streng) monoton steigend=wachsend/fallend
  - linksgekrümmt = konvex (linX-konveX)
  - rechtsgekrümmt = konkav
  - «f hat lokales Maximum bei x_0», Hochpunkt $(x_0, f(x_0))$, Maximalstelle x_0
    Beachte: Ist $(x_0, f(x_0))$ ein Hochpunkt, so ist die x-Koordinate x_0 die Maximalstelle und f hat bei x_0 ein lokales Maximum und das dort angenommene Maximum der Funktion ist $f(x_0)$ (= die y-Koordinate des Hochpunkts).
  - analog: «hat lokales Minimum bei …», Tiefpunkt, Minimalstelle
  - globales Maximum/Minimum
  - Extremum, Extremstelle, Extrempunkt
- Monotonie-Kriterium (Satz 19.1.1)
- Krümmungs-Kriterium (Satz 19.2.1)
- Bestimmung von Monotonie-Intervallen und damit Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten.
- Notwendige Bedingung für Extremstellen (Satz 19.3.3). Insbesondere: Kandidaten für Extremstellen sind alle x_0 in der Definitionsmenge mit $f'(x_0) = 0$.
- Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten mit Hilfe der hinreichenden Bedingung für Extremstellen in der Formulierung mit der zweiten Ableitung (Satz 19.3.4).
- Begriffe: Quadratische Funktion, kubische Funktion, Funktion vom Grad 4 (alles polynomiale Funktionen)

Beachte, dass viele der oben aufgeführten Punkte in der Formelsammlung stehen.

Fähigkeiten

- Ableitungen von Funktionen ausrechnen können, in denen trigonometrische Funktionen vorkommen (Kettenregel etc. stehen in der Formelsammlung).
- Aufgaben zum freien Fall lösen können wie im Skript (A37).
- Wenn die Bahn eines Partikels durch einen Positionsvektor gegeben ist: Position (= Positionsvektor) und Geschwindigkeitsvektor und Geschwindigkeit für allgemeines t und konkretes t (Zahlenwert) ausrechnen und einzeichnen können.
- Bei einfachen Bewegungen selbst den Positionsvektor $s(t)$ zur Zeit t angeben können (Kreisbahn, Ellipsenbahn)
- Mit Hilfe der ersten Ableitung Monotonie-Intervalle ausrechnen können.
- Hoch- und Tiefpunkte mit Hilfe von $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung) und $f''(x_0) \neq 0$ (hinreichende Bedingung) ausrechnen können.
  (Wenn $f'(x_0) = 0$ und «dummerweise» auch $f''(x_0) = 0$ gilt, helfen manchmal Monotonie-Intervalle, deswegen nächster Punkt:)
- Hoch- und Tiefpunkte mit Hilfe von Monotonie-Intervallen ausrechnen können.
- Polynomiale Funktionen von kleinem Grad bestimmen können zu vorgegebenen Daten (A5) (etwa Hoch-, Tiefpunkte, Steigung an gegebenen Stellen (= x-Werten), gegebener Punkt liegt auf Graph, Graph schneidet x-Achse bei $\ldots$, schneidet y-Achse bei $\ldots$, usw.).