I. Blöchliger, O. Schnürer

19 Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben

19.1 Was die erste Ableitung über eine Funktion aussagt

Aufgabe A1 Betrachte die folgenden Beispielfunktionen $f(x)$:

$f(x) = \mathrm{e}^x$	als Funktion auf dem Intervall $\mathbb{D} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$f(x) = \ln(x)$	als Funktion auf dem Intervall $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
$f(x) = x^2$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = x^3$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = \sqrt{x}$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

Beachte, dass bei einigen Funktionen bewusst $\mathbb{R}^+$ statt $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge gewählt wurde.

(a) Berechne die erste Ableitung all dieser Funktionen und zeige jeweils, dass

$$f'(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \text{ in der angegebenen Definitionsmenge } \mathbb{D} \text{ gilt.}$$

(b) Welche Eigenschaft haben all diese Beispielfunktionen gemeinsam?
Dabei ist eine (sehr elementare) Eigenschaft gesucht, die man ohne Verwendung der Ableitung formulieren kann (also nicht die gerade in (a) gezeigte Eigenschaft $f'(x) > 0$).
Hinweis: Denke an die Graphen dieser Funktionen (Handskizze).

Betrachte nun eine beliebige, auf einem Intervall $\mathbb{D}$ definierte Funktion $f = f(x)$.

(c) Was kann man (wohl) über f aussagen, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt?
Kannst du dies anschaulich begründen?
Hinweis: Was ist die geometrische Bedeutung der Ableitung?

(d) Welche Eigenschaft hat f, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt? Begründung?

(e) Welche Eigenschaft hat f, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt? Begründung?

(f) In (c) hast du vermutet, dass aus $f'(x) > 0$ (für alle $x \in \mathbb{D}$) eine gewisse Eigenschaft von f folgt.
Folgt umgekehrt aus dieser Eigenschaft, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt?

Erste Ableitung und Monotonie:
Kriterium für strenge Monotonie

Satz 19.1.1 Monotonie-Kriterium

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion. Dann gelten:

$f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f streng mononton wachsend auf $[a, b]$

$f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f streng mononton fallend auf $[a, b]$

$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f konstant auf $[a, b]$

Beweis. Anschaulich ist das hoffentlich klar, da
$f'(x)$ die Steigung des Graphen bei x ist und der Graph somit überall positive Steigung hat.

Auf den genauen Beweis (per Mittelwertsatz der Differentialrechnung) wird hier verzichtet. Alle Aussagen folgen später für integrierbares f' sehr einfach aus dem Hauptsatz der Integralrechnung (siehe 4. Schuljahr). □

19.2 Was die zweite Ableitung über eine Funktion aussagt

Aufgabe A2 Betrachte die folgenden Beispielfunktionen $f(x)$:

$f(x) = \mathrm{e}^x$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$f(x) = \ln(x)$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
$f(x) = x^2$	als Funktion $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = x^2$	als Funktion $\mathbb{D} = \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$
$f(x) = x^3$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = x^3$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$f(x) = \sqrt{x}$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

(a) Berechne die zweite Ableitung all dieser Funktionen und teile die Funktionen in zwei «Gruppen» ein:
- einerseits die Funktionen mit

  $f''(x) > 0$ für alle x in der angegebenen Definitionsmenge $\mathbb{D}$;

- andererseits die Funktionen mit

  $f''(x) < 0$ für alle x in der angegebenen Definitionsmenge $\mathbb{D}$.

(b) Welche Eigenschaft haben alle Funktionen
- der ersten Gruppe gemeinsam?
- der zweiten Gruppe gemeinsam?

Gesucht ist dabei eine recht elementare Eigenschaft, die man ohne Ableitungen formulieren kann und die jeder Primarschüler problemlos verstehen kann. Jeder kennt diese Eigenschaft vom Velo-, Auto-, Zug- oder Skifahren.
Hinweis: Denke an die Graphen dieser Funktionen (Handskizze).

Betrachte nun eine beliebige, auf einem Intervall $\mathbb{D}$ definierte Funktion $f = f(x)$.

(c) Was kann man (wohl) über f aussagen, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt?
Kannst du dies anschaulich begründen? Verwende dazu dein Wissen aus A1:
Aus $f''(x) > 0$ folgt nach A1, dass ✎ f' streng monoton steigt.
Dies bedeutet aber, dass f ✎ eine Linkskurve macht/linksgekrümmt ist.

(d) Welche Eigenschaft hat f, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt? Begründung?

(e) Welche Eigenschaft hat f, wenn $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt? Begründung?

(f) In (c) hast du vermutet, dass aus $f''(x) > 0$ (für alle $x \in \mathbb{D}$) eine gewisse Eigenschaft folgt.
Folgt umgekehrt aus dieser Eigenschaft, dass $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt?

(g) Kannst du diese «anschauliche» Eigenschaft mathematisch sinnvoll definieren?

Satz 19.2.1 Krümmungs-Kriterium

Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gelten: ✎

$f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f (streng) linksgekrümmt (Linkskurve, Fachbegriff: konvex)

$f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f (streng) rechtsgekrümmt (Rechtskurve, Fachbegriff konkav)

$f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f linear (Graph ist Gerade)

Beweis. Anschaulich ist das hoffentlich klar (siehe Begründung in A2 (c)).
Alle Aussagen folgen später sehr einfach aus Satz 19.1.1 und dem Hauptsatz der Integralrechnung (siehe 4. Schuljahr), sofern man die «richtige» Definition der zu beweisenden Eigenschaft verwendet. □

Merke 19.2.2 Vorzeichen von f'' und Krümmung

Wie das Vorzeichen von f'' mit der Krümmungsart zusammenhängt, kann man durch einfache Beispiele rekonstruieren:

- $f(x) = x^2$ ist offensichtlich linksgekrümmt und erfüllt $f''(x) = 2 > 0$.
- $f(x) = -x^2$ ist offensichtlich rechtsgekrümmt und erfüllt $f''(x) = -2 < 0$.

19.3 Extremstellen (Maxima, Minima, Hoch- und Tiefpunkte)

Beispiel 19.3.1. Betrachte die folgende kubische Funktion (= Funktion, die durch ein Polynom vom Grad drei gegeben ist).

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$$

Monotonie von f: Ableitung bestimmen ✎

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

Wann ist f' positiv, negativ, Null? Nullstellen der Ableitung bestimmen: ✎

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 - 18x - 24 &= 0 \\ \iff \qquad x^2 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

(oder faktorisieren: $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$).

Da f' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist f' zwischen den Nullstellen (und auch vor der kleinsten und nach der grössten Nullstelle) entweder positiv oder negativ. ✎

Zahlenstrahl zeichnen, Nullstellen von f' markieren,
nächste Zeile: links f', dann $+$ (oder > 0 oder positiv), 0, $-$, 0, $+$
nächste Zeile: f streng monoton steigend, horizontale Tangente, streng monoton fallend, horizontale Tangente, streng monoton steigend.

Nebenrechnungen: ✎

vor kleinster Nullstelle von f': $f'(-2) = 6 \cdot 4 - 18 \cdot (-2) - 24 = 24 + 36 - 24 = 36 > 0$
zw. beiden Nullstellen von f': $f'(0) = -24$
nach grösster Nullstelle von f': $f'(5) = 6 \cdot 25 - 18 \cdot 5 - 24 = 150 - 90 - 24 > 0$

(oder Beobachtung, dass f' eine nach oben offene Parabel ist).

Tabellarisch: (Monotonie-Intervalle) Begriff und drei Beispiele (mit eckigen Klammern) in Tabelle hervorheben.

x-Werte	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	streng monoton steigend auf $(-\infty, -1]$	horizontale Tangente ✎Hochpunkt Maximum	streng monoton fallend auf $[-1, 4]$	horizontale Tangente ✎Tiefpunkt Minimum	streng monoton steigend auf $[4, \infty)$

Alternatives, meist verwendetes Argument für Hoch-/Tiefpunkte: Zuerst wie oben Nullstellen von f' bestimmen (Kandidaten für Extrema). Dann Krümmungsverhalten an diesen Stellen mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen. Zweite Ableitung: ✎

$$f''(x) = 12x - 18$$

Zweite Ableitung an Nullstellen von f' auswerten: ✎

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 12 \cdot (-1) - 18 = -30 < 0 & \implies f \text{ rechtsgekrümmt nahe } -1 \\ f''(4) &= 12 \cdot 4 - 18 = 30 < 0 & \implies f \text{ linksgekrümmt nahe } 4 \end{aligned}$$

Nullstellen von f'	-1	4
f	✎40	✎-107
f'	0	0
f''	$-30 < 0$	$30 > 0$
f	horizontale Tangente, rechtsgekrümmt ✎Hochpunkt, Maximum	horizontale Tangente, linksgekrümmt ✎Tiefpunkt, Minimum

Nebenrechnung: ✎

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) + 5 = -2 - 9 + 24 + 5 = 40 \\ f(4) &= 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 5 = 128 - 144 - 96 + 5 = -107 \end{aligned}$$

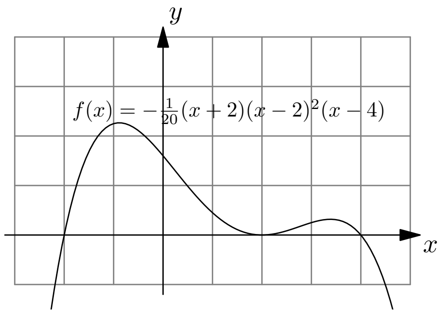
Fazit (Graph von f mit GeoGebra zeigen):

- **f hat ein Maximum** bei -1.
  Man nennt -1 eine **Maximalstelle** von f und den zugehörigen Punkt $(-1, f(-1)) = (-1, 40)$ auf dem Graphen von f einen **Hochpunkt**.
- **f hat ein Minimum** bei 4.
  Man nennt 4 eine **Minimalstelle** von f und den zugehörigen Punkt $(4, f(4)) = (4, -107)$ auf dem Graphen von f einen **Tiefpunkt**.

Definition 19.3.2 Lokale und globale Maxima/Minima; Hoch-/Tiefpunkte; Maximal-/Minimalstellen

Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ in einer geeignet kleinen Umgebung von x_0 der maximale (bzw. der minimale) Funktionswert von f ist.
Man nennt dann

- $(x_0, f(x_0))$ einen **Hochpunkt** (bzw. **Tiefpunkt**).
- x_0 eine **Maximalstelle** (bzw. **Minimalstelle**);
- $f(x_0)$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**);



Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **globales Maximum** (bzw. **globales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ der grösste (bzw. der kleinste) Funktionswert von f auf dem *gesamten* Definitionsbereich ist.
Wenn man von den **Extrempunkten** einer Funktion spricht, meint man damit die Menge aller Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.
Mit den **Extremstellen** auch: Extremalstellen einer Funktion meint man die Menge aller Maximal- und Minimalstellen.
Mit den **Extrema** einer Funktion meint man die Menge aller lokalen und globalen Maxima und Minima.

Satz 19.3.3 Notwendige Bedingung für Extremstellen

Sei f eine Funktion und x_0 eine reelle Zahl, so dass f auf einer Umgebung von x_0 definiert ist.

$$f \text{ hat bei } x_0 \text{ ein Maximum oder Minimum (= ein Extremum)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Anschaulich: In jedem Hoch- oder Tiefpunkt ist die Tangente horizontal (= hat Steigung 0).

Merke: Die Nullstellen der Ableitung sind Kandidaten für die Extremstellen.

Beweis. Das folgt sofort aus der Definition der Ableitung $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Man unterscheide die Fälle Maximum bzw. Minimum und $h > 0$ bzw. $h < 0$. Im Fall eines Maximums ist

- für kleines $h > 0$ der Differenzenquotient nicht-positiv (Zähler nicht-positiv, Nenner positiv), was sich auf den Grenzwert überträgt, also $f'(x_0) \leq 0$;
- für kleines Fall $h < 0$ der Differenzenquotient nicht-negativ (Zähler nicht-positiv, Nenner negativ), was sich auf den Grenzwert überträgt, also $f'(x_0) \geq 0$;
- insgesamt gilt also $f'(x_0) = 0$.

Analog argumentiert man im Fall eines Minimums. □

Satz 19.3.4 Hinreichende Bedingung für Extremstellen

Sei f eine Funktion und x_0 eine reelle Zahl, so dass f auf einer Umgebung von x_0 definiert ist.

- hinreichende Bedingung für lokales Maximum

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ hat ein lokales Maximum bei } x_0$$

  Hier kann man kann die Bedingung $f''(x_0) < 0$ durch die etwas schwächere Bedingung «f' wechselt bei x_0 von positivem zu negativem Vorzeichen» ersetzen.

- hinreichende Bedingung für lokales Minimum

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ hat ein lokales Minimum bei } x_0$$

  Hier kann man kann die Bedingung $f''(x_0) > 0$ durch die etwas schwächere Bedingung «f' wechselt bei x_0 von negativem zu positivem Vorzeichen» ersetzen.

Beweis. Erste Begründung: Gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$. Die zweite Bedingung besagt, dass f' nahe bei x_0 streng monoton fällt. Wegen der ersten Bedingung wechselt f' somit bei x_0 von positivem zu negativem Vorzeichen. Also wechselt f bei x_0 von streng monoton wachsend zu streng monoton fallend. Also hat f bei x_0 ein Maximum.
Zweite Begründung: Gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$. Also hat f bei x_0 eine horizontale Tangente und ist rechtsgekrümmt. Also hat f bei x_0 ein Maximum.
Die Begründung für lokale Minima geht analog. □

19.3.5. Zur Terminologie: Ist $A \implies B$ eine Folgerung «aus A folgt B», so nennt man klassisch

- A eine **hinreichende Bedingung für** B und
- B eine **notwendige Bedingung für** A.

Die Verwendung des Begriffs «hinreichend» scheint mir leicht verständlich (denn Erfülltheit von A sorgt dafür/reicht hin dafür, dass B gilt), der Begriff «notwendig» kann so motiviert werden: Wenn man sicherstellen will, dass A gilt, so ist es notwendig, dass B gilt (sonst hat man keine Chance, dass A gilt, denn aus der Gültigkeit von A folgt ja die Gültigkeit von B).

Aufgabe A3 Bestimme für die folgenden polynomialen Funktionen die Monotonie-Intervalle mit der Angabe, ob streng monoton wachsend oder fallend, und alle Hoch- und Tiefpunkte. Prüfe dann deine Ergebnisse, indem du die Funktionen mit Geogebra zeichnest.

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ (sehr einfach)
(b) $f(x) = x^2 + x + 1$
(c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x - 2$
(d) $f(x) = x^4 - \frac{1}{18}x^2$ Dieses Beispiel vorrechnen! Es zeigt, dass man beim «Graphen-Anschauen» leicht wesentliche Eigenschaften übersieht.
(e) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$
(Beachte, dass die hinreichende Bedingung in der Formulierung mit der zweiten Ableitung an einem der beiden Extremstellenkandidaten nicht anwendbar ist.)
(f) $f(x) = x^4 + x^3 + 1$
(Beachte, dass die hinreichende Bedingung in der Formulierung mit der zweiten Ableitung an einem der beiden Extremstellenkandidaten nicht anwendbar ist.)

Aufgabe A4

(a) Bestimme die quadratische Funktion, die den Hochpunkt/Extrempunkt $(2, 5)$ hat und die y-Achse (zuvor stand hier leider x-Achse) mit der Steigung $\frac{1}{2}$ schneidet. Prüfe deine Lösung mit Geogebra. Lösung: $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
(b) Bestimme die kubische Funktion, die
- den Tiefpunkt $(0, -2)$ und
- den Hochpunkt $(3, 0)$ hat.

Prüfe deine Lösung mit Geogebra. Lösung: $-\frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2$
(c) Kreiere selbst eine ähnliche Aufgabe und löse sie.
Hinweis: Eine lineare Funktion (= Gerade) ist in der Regel durch zwei Bedingungen festgelegt (da zwei «freie Variablen/Parameter», eine quadratische Funktion durch drei Bedingungen (da drei «freie Variablen»), eine kubische durch vier Bedingungen (da vier «freie Variablen»).

Aufgabe A5 Bestimme für die folgenden Funktionen alle Minimal- und Maximalstellen, die sich mit der «Hinreichenden Bedingung für Extremstellen, Formulierung mit zweiter Ableitung» finden lassen (alle lassen sich so finden).
Überlege dir im Kopf die Monotonie-Intervalle und prüfe deine Ergebnisse mit Geogebra.

(a) $f(x) = e^x - x$
(b) $f(x) = \ln(x) - x$ (Wo ist die Funktion definiert?)
(c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ Hinweis: In der Ableitung e^x ausklammern.
(d) $f(x) = x\ln(x)$ (Wo ist die Funktion definiert?)
(e) $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ (Wo ist die Funktion definiert?)
Hier bitte auch Monotonie-Intervall angeben.
(f) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

Aufgabe A6 In Satz 19.3.3 darf man den Folgerungspfeil $\implies$ nicht durch einen Äquivalenzdoppelpfeil $\iff$ ersetzen (mit anderen Worten: $f'(x_0)$ ist **keine** hinreichende Bedingung für ein Extremum):
Zeige, dass man aus $f'(x_0) = 0$ im Allgemeinen nicht schliessen kann, dass f bei x_0 ein Extremum (= Minimum oder Maximum) hat.
Hinweis: Betrachte $f(x) = x^3$.

Aufgabe A7 In Satz 19.3.4 darf man den Folgerungspfeil $\implies$ nicht durch einen Äquivalenzdoppelpfeil $\iff$ ersetzen:
Zeige, dass man im Allgemeinen aus einem Minimum bei x_0 nicht schliessen kann, dass $f''(x_0) > 0$ gilt (es muss aber $f'(x_0) = 0$ gelten).
Hinweis: Betrachte $f(x) = x^4$.

19.4 Repetition

Bei allen Aufgaben: Prüfe deine Ergebnisse mit Geogebra; Funktion eingeben, Ableitung(en) von Geogebra berechnen lassen und mit deinem Ergebnis vergleichen. Bei den geometrischen Aufgaben: Schaue, ob die von dir ermittelten Ergebnisse zu den gezeichneten Graphen passen.

Aufgabe A8 Leite ab:

(a) $\sin(x) \cdot \cos(x)$
(b) $\sin(5x)$
(c) $\sin(x^5)$
(d) $\sin^5(x) = (\sin(x))^5$
(e) $\sin(x^2 + x + 1)$
(f) $\cos(x^2 + x + 1)$

Aufgabe A9 Ermittle jeweils: Wo hat die Funktion Extrema? Handelt es sich dabei um ein lokales Maximum oder Minimum? Gib den Extrempunkt (also Hoch- oder Tiefpunkt) durch seine beiden Koordinaten an.

(a) $f(x) = 2x^2 - x^3 = -x^3 + 2x^2$
(b) $g(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8$
(c) $h(x) = x + \frac{1}{x+2} = x + (x+2)^{-1}$

Aufgabe A10 Die Parabel $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ geht durch den Punkt $(-4, 2)$ und berührt die Gerade $y = -x$ (zweite Winkelhalbierende) im Ursprung. Bestimme die Parameter a, b und c und $f(x)$.

19.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-erste-ableitung-bedeutung

(a)
- Die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist $f'(x) = \mathrm{e}^x$, was für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist.
- Die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, , was für alle $x \in \mathbb{R}^+$ positiv ist.
- Die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$, was für alle $x \in \mathbb{R}^+$ positiv ist (aber nicht für $x \leq 0$).
- Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$, was für alle $x \in \mathbb{R}^+$ (ja sogar in $\mathbb{R}^*$) positiv ist.
- Die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, was für alle $x \in \mathbb{R}^+$ positiv ist.

(b) Gemeinsame Eigenschaft: streng monoton wachsend.

(c) Wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ die Ungleichung $f'(x) > 0$ gilt, so ist die Steigung von f (oder genauer des Graphen von f) an jeder Stelle x positiv. Also ist streng monoton wachsend.

(d) Die Funktion f ist streng monoton fallend. Begründung analog wie oben: Steigung von f überall negativ, also streng monoton fallend.

(e) Die Funktion f ist konstant, denn ihre Steigung ist überall 0.

(f) Nein, $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend (= hat die «gewisse» Eigenschaft) auf ganz $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, aber es gilt nicht $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$, denn $f'(x) = 3x^2$ verschwindet für $x = 0$ (also $f'(0) = 0$).

Lösung zu A2 ex-zweite-ableitung-bedeutung

$f(x) = \mathrm{e}^x$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$f(x) = \ln(x)$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
$f(x) = x^2$	als Funktion $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = x^2$	als Funktion $\mathbb{D} = \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$
$f(x) = x^3$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f(x) = x^3$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$f(x) = \sqrt{x}$	als Funktion auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

(a)
- Gruppe A, Funktionen mit

  $$f''(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \text{ in der angegebenen Definitionsmenge } \mathbb{D},$$

  sind
  - e^x, da zweite Ableitung e^x;
  - x^2 auf $\mathbb{R}^+$, da zweite Ableitung 2;
  - x^2 auf $\mathbb{R}^-$, da zweite Ableitung 2;
  - x^3 auf $\mathbb{R}^+$, da zweite Ableitung $6x$.
- Gruppe B, Funktionen mit

  $$f''(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \text{ in der angegebenen Definitionsmenge } \mathbb{D},$$

  sind
  - $\ln(x)$, da zweite Ableitung $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;
  - x^3 auf $\mathbb{R}^-$, da zweite Ableitung $6x$;

– $\sqrt{x}$, da zweite Ableitung $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

(b) Gemeinsame Eigenschaft:
- Gruppe A: streng linksgekrümmt = Linkskurve = streng konvex
- Gruppe B: strebg rechtsgekrümmt = Rechtskurve = streng konkav

(c) Dann ist f linksgekrümmt.
Aus $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ folgt nach Satz 19.1.1 (oder der vorherigen Aufgabe), dass f' streng monoton steigend ist. Dies bedeutet aber, dass f streng linksgekrümmt ist.

(d) Dann ist f rechtsgekrümmt. Begründung analog.

(e) Aus $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$ folgt, dass f' konstant ist, d. h. f hat überall dieselbe konstante Steigung. Also ist f eine Gerade.

(f) Nein: $f(x) = x^4$ ist streng linksgekrümmt auf ganz $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, aber $f''(x) = 12x^2$ ist stets ≥ 0, aber $= 0$ für $x = 0$.

(g) streng linksgekrümmt: An jeder Stelle x liegt die Tangente an den Graphen (lokal) echt unterhalb des Graphen (ausser am Berührpunkt). (Man könnte dies auch als Ungleichung aufschreiben.)

Lösung zu A3 ex-extrema-polynome

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
Ableitung:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Die Ableitung ist überall positiv, d. h. f ist auf $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ streng monoton steigend. Da die Ableitung nirgends Null ist, hat f keinen Hochpunkt und keinen Tiefpunkt.

(b) $f(x) = x^2 + x + 1$
Ableitung:

$$f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung ist Null bei $x_1 = -\frac{1}{2}$, links davon ist sie negativ, rechts davon positiv (Gerade, oder Werte einsetzen). Also sind die Monotonieintervalle
- $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, dort f streng monoton fallend;
- $[-\frac{1}{2}, \infty)$, dort f streng monoton wachsend.

Also ist f bei x_1 minimal, der Tiefpunkt ist $(x_1, f(x_1)) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.
Alternative: $f''(x) = 2$, also $f''(x_1) = 2 > 0$, also Minimum bei x_1.

(c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x - 2$
Ableitung

$$f'(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$

hat zwei Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 2$ und ist nach oben offene Parabel. Also sind die Monotonieintervalle
- $(-\infty, -5]$, dort f streng monoton fallend;
- $[-5, 2]$, dort f streng monoton wachsend;
- $[2, \infty)$, dort f streng monoton fallend.

Also Hochpunkt

$$(-5, f(-5)) = (-5, -\frac{125}{3} + \frac{75}{2} + 50 - 2) = (-5, \frac{-250 + 225 + 300 - 12}{6}) = (-5, \frac{263}{6}) = (-5, 43.8\overline{3})$$

und Tiefpunkt

$$(2, f(2)) = (2, \frac{8}{3} + 6 - 20 - 2) = (2, \frac{8}{3} - 16) = (2, \frac{8-48}{3}) = (2, -\frac{40}{3}) = (2, -13.\overline{3})$$

Alternative: $f''(x) = 2x + 3$

- Bei $x_1 = -5$ gilt $f''(-5) = -10 + 3 = -7 < 0$, also hat f ein lokales Maximum bei -5, Hochpunkt.
- Bei $x_2 = 2$ gilt $f''(2) = 20 + 3 = 23 > 0$, also hat f ein lokales Minimum bei 2, Tiefpunkt.

(d) $f(x) = x^4 - \frac{1}{18}x^2$
Ableitung:

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{2}{18}x = 4x^3 - \frac{1}{9}x = x\left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) = x\left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{3}\right)$$

Die Nullstellen sind also

$$x_1 = -\frac{1}{6} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \frac{1}{6}$$

Die Monotonie-Intervalle sind also

- $(-\infty, -\frac{1}{6}]$, dort streng monoton fallend (etwa wegen $f'(-1) = -1 \cdot (-2 + \frac{1}{3})(-2 - \frac{1}{3}) < 0$ als Produkt dreier negativer Zahlen);
- $[-\frac{1}{6}, \frac{0}{]}$, dort streng monoton steigend (etwa wegen $f'(-0.1) = -0.1(-0.2 + 0.\overline{3})(-0.2 - 0.\overline{3}) > 0$ als Produkt zweier negativer Zahlen und einer positiven Zahl;
- $[0, \frac{1}{6}]$, dort streng monoton fallend (etwa wegen $f'(0.1) = 0.1(0.2 + 0.\overline{3})(0.2 - 0.\overline{3}) > 0$ als Produkt einer negativen Zahl und zweier positiver Zahlen;
- $[\frac{1}{6}, \infty)$, dort streng monoton steigend (etwa wegen $f'(1) = 1 \cdot (2 + \frac{1}{3})(2 - \frac{1}{3}) > 0$ als Produkt dreier positiver Zahlen);

Also zwei Tiefpunkte bei $x_{1,3} = \pm\frac{1}{6}$, nämlich

$$T_1 = \left(-\frac{1}{6}, f\left(-\frac{1}{6}\right)\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{1296} - \frac{1}{648}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{1296}\right)$$
$$T_3 = \left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{1296} - \frac{1}{648}\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{1296}\right)$$

Hochpunkt bei $x_2 = 0$, nämlich

$$H_2 = (0, f(0)) = (0, 0)$$

Alternative: Zweite Ableitung ist $f''(x) = 12x^2 - \frac{1}{9}$.

- Wegen $f''(\pm 16) = \frac{12}{36} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} > 0$ sind $\pm\frac{1}{6}$ Minimalstellen (mit zugehörigen Tiefpunkten, oben berechnet).
- Wegen $f''(0) = -\frac{1}{9} < 0$ ist 0 eine Maximalstelle (mit zugehörigem Hochpunkt, oben berechnet).

(e) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$
Ableitung:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 = x^3(15x - 20)$$

Nullstellen von f' sind

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Die Monotonie-Intervalle sind also

- $(-\infty, 0]$, dort streng monoton steigend (etwa wegen $f'(-1) = -1(-15 - 20) = 35 > 0$);
- $[0, \frac{4}{3}]$, dort streng monoton fallend (etwa wegen $f'(1) = 1(15 - 20) = -5 < 0$);
- $[\frac{4}{3}, \infty)$, dort streng monoton steigend (etwa wegen $f'(2) = 8 \cdot (30 - 20) > 0$);

Also Hochpunkt bei $x_1 = 0$, nämlich

$$H_1 = (0, f(0)) = (0, 1)$$

und Tiefpunkt bei $x_2 = \frac{4}{3}$, nämlich

$$T_2 = \left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, 3 \cdot \frac{1024}{243} - 5 \cdot \frac{256}{81} + 1\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{3072 - 3840 + 243}{243}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{525}{243}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{175}{81}\right)$$

Alternativer Lösungsversuch: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$$

- Es gilt $f''(x_1) = f''(0) = 0$, also können wir die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum in der Formulierung mit der zweiten Ableitung nicht anwenden.
- Es gilt $f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 60 \cdot \frac{16}{9}\left(\frac{4}{3} - 1\right) > 0$, also lokales Minimum bei $x_2 = \frac{4}{3}$. Tiefpunkt wurde oben berechnet.

(f) $f(x) = x^4 + x^3 + 1$
Die erste Ableitung

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x+3)$$

hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{3}{4} \qquad x_2 = 0$$

Da x^2 ausser bei 0 stets positiv ist und $4x+3$ bei $-\frac{3}{4}$ das Vorzeichen von negativ zu positiv wechselt, erhalten wir die folgenden Monotonie-Intervalle:

- $(-\infty, -\frac{3}{4}]$, dort streng monoton fallend (wer mag, kann auch $f'(-2) < 0$ verwenden);
- $[-\frac{3}{4}, 0]$, dort streng monoton steigend (wer mag, kann auch $f'(-0.5) > 0$ verwenden);
- $[0, \infty)$, dort ebenfalls streng monoton steigend (wer mag, kann auch $f'(1) > 0$ verwenden).

Also Tiefpunkt bei $x_1 = -\frac{3}{4}$, nämlich

$$T_1 = \left(-\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{81}{256} - \frac{27}{64} + 1\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{81 - 108 + 256}{256}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{229}{256}\right)$$

Bei $x_2 = 0$ ist kein Extrempunkt, denn die Funktion steigt dort streng monoton.
Alternativer Lösungsversuch: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$$

- Es gilt $f''(x_1) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-2 \cdot \frac{3}{4} + 1\right) > 0$, also lokales Minimum, zugehöriger Tiefpunkt wurde oben berechnet.
- Es gilt $f''(x_2) = f''(0) = 0$, also können wir die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum in der Formulierung mit der zweiten Ableitung nicht anwenden.

Lösung zu A4 ex-polynomiale-funktionen-bestimmen

(a) Ansatz:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir berechnen vorausschauend die Ableitung.

$$f'(x) = 2ax + b$$

- Hochpunkt $(2, 5)$ liefert die Bedingungen

$$5 = f(2) = 4a + 2b + c$$
$$0 = f'(2) = 4a + b$$

- Steigung $\frac{1}{2}$ beim Schnitt mit x-Achse liefert die Bedingung

$$\frac{1}{2} = f'(0) = b$$

Der letzten Gleichung entnehmen wir $b = \frac{1}{2}$, womit aus der vorletzten Gleichung $a = -\frac{1}{8}$ folgt und dann aus der ersten

$$\begin{aligned} 5 &= -\frac{1}{2} + 1 + c \\ 4 + \frac{1}{2} &= c \\ \frac{9}{2} &= c \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

die gesuchte quadratische Funktion.

(b) Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Wir berechnen vorausschauend die Ableitung.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

- Tiefpunkt $(0, -2)$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} -2 &= f(0) = d \\ 0 &= f(0) = c \end{aligned}$$

- Hochpunkt $(3, 0)$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= f(3) = 27a + 9b + 3c + d \\ 0 &= f'(3) = 27a + 6b + c \end{aligned}$$

Somit sind c und d bekannt und wir können diese Werte in die letzten beiden Gleichungen einsetzen.

$$\begin{aligned} 0 &= 27a + 9b - 2 \\ 0 &= 27a + 6b \end{aligned}$$

Obere minus untere Gleichung liefert

$$0 = 3b - 2$$

also $b = \frac{2}{3}$. Aus $0 = 27a + 6b = 27a + 6\frac{2}{3} = 27a + 4$ erhält man $a = -\frac{4}{27}$.
Die gesuchte kubische Funktion ist also

$$f(x) = -\frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2$$

(c) Selbst.

Lösung zu A5 ex-extrema-bestimmen

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x - x \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x - 1 \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x && \text{(dies ist überall positiv)} \end{aligned}$$

Einzige Nullstelle von f' ist $x_1 = 0$. Dies ist also der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Wegen $f''(x_1) = f''(0) = e^0 = 1 > 0$ handelt es sich um eine Minimalstelle.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) - x && \text{(definiert auf } \mathbb{R}^+\text{)} \\ f'(x) &= \frac{1}{x} - 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} && \text{(dies ist auf der gesamten Definitionsmenge negativ)} \end{aligned}$$

Einzige Nullstelle von f' ist $x_1 = 1$. Dies ist also der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Wegen $f''(x_1) = f''(1) = -1 < 0$ handelt es sich um eine Maximalstelle.

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\mathrm{e}^x \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x) \\ f'(x) &= 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2+x) \end{aligned}$$

Einzige Nullstelle von f' ist $x_1 = -1$. Dies ist also der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Wegen $f''(x_1) = f''(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2-1) = \mathrm{e}^{-1} > 0$ handelt es sich um eine Minimalstelle.

(d)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(x) && \text{(definiert auf } \mathbb{R}^+\text{)} \\ f'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} && \text{(dies ist auf der gesamten Definitionsmenge positiv)} \end{aligned}$$

Nullstellen von f' bestimmen:

$$\begin{aligned} \ln(x) + 1 &= 0 \\ \ln(x) &= -1 \\ x = \mathrm{e}^{\ln(x)} &= \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Einzige Nullstelle von f' ist $x_1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Dies ist also der einzige Kandidat für eine Extremstelle. Da f'' überall positiv ist, ist x_1 eine Minimalstelle.

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} && \text{(definiert auf } \mathbb{R}^*\text{)} \\ f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Nullstellen von f' bestimmen:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Wegen $f''(-1) = -2 < 0$ ist -1 eine Maximalstelle.
Wegen $f''(1) = 2 > 0$ ist 1 eine Minimalstelle.
Monotonie-Intervalle:

- $(-\infty, -1]$ streng monoton steigend;
- $[-1, 0)$ streng monoton fallend;

- (bei 0 nicht definiert)
- $(0,1]$ streng monoton fallend;
- $[1,\infty)$ streng monoton steigend.

(f)

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$
$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$$
$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$$

Da $\mathrm{e}^?$ stets positiv ist, ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von f' und somit der einzige Extremstellenkandidat von f. Wegen

$$f''(x_1) = f''(0) = 2e^0 + 0 = 2 > 0$$

ist $x_1 = 0$ eine Minimalstelle.

Lösung zu A6 ex-ableitung-null-aber-kein-extremum

Betrachte $f(x) = x^3$ mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$. Die Ableitung hat $x_1 = 0$ als einzige Nullstelle. Dies ist aber keine Extremstelle von f.

Dass f kein Extremum hat ist, ist hoffentlich klar: Auf $\mathbb{R}_0^+$ ist f streng monoton wachsend (klar oder wegen $f' > 0$ auf $\mathbb{R}^+$). Ebenso ist f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng mononton wachsend. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und hat somit keine Extremum.

Lösung zu A7 ex-extremum-aber-beide-ableitungen-null

Betrachte $f(x) = x^4$ mit Ableitung $f'(x) = 4x^3$ und zweiter Ableitung $f''(x) = 12x^2$.

Offensichtlich hat f bei 0 ein globales Minimum (man kann auch mit f' auf $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$ argumentieren) (und somit gilt $f'(0) = 0$.)

Es gilt aber $f''(0) = 0$, was nicht positiv ist. Also ist die Implikation $\Longleftarrow$ falsch.

Lösung zu A8 ex-ableitungen-trigo

Leite ab

(a) $\sin(x) \cdot \cos(x)$ hat Ableitung $\cos^2(x) - \sin^2(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$ (Produktregel).
Bemerkung: Übrigens gilt $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ (Doppelwinkelformel für Sinus, Spezialfall der Additionsformel). Man kann also gleichbedeutend die rechte Seite ableiten und erhält $\frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$, was wiederum nach der Doppelwinkelformel für den Kosinus dasselbe ist wie die oben berechnete Ableitung.

(b) $\sin(5x)$ hat Ableitung $5\cos(5x)$ (Kettenregel).

(c) $\sin(x^5)$ hat Ableitung $5x^4\cos(x^5)$ (Kettenregel).

(d) $\sin^5(x) = (\sin(x))^5$ hat Ableitung $5\cos(x)\sin^4(x) = 5\cos(x)(\sin(x))^4$ (Kettenregel).

(e) $\sin(x^2 + x + 1)$ hat Ableitung $(2x + 1)\cos(x^2 + x + 1)$ (Kettenregel).

(f) $\cos(x^2 + x + 1)$ hat Ableitung $-(2x + 1)\sin(x^2 + x + 1)$ (Kettenregel).

Lösung zu A9 ex-extrema

Empfehlung: Gib die Funktion jeweils in Geogebra ein und lass Geogebra die Ableitung und die zweite Ableitung berechnen. Vergleiche mit deinen Ergebnissen und betrachte die Funktiosngraphen.

(a)

$$f(x) = 2x^2 - x^3 = -x^3 + 2x^2$$
$$f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$$
$$f''(x) = -6x + 4$$

Die Extremstellenkandidaten von f sind die Nullstellen von f', also 0 und $\frac{4}{3}$.
Wegen $f''(0) = 4 > 0$ ist 0 eine Minimalstelle, der zugehörige Tiefpunkt ist $(0, 0)$.
Wegen $f''(\frac{4}{3}) = -6 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -4 < 0$ ist $\frac{4}{3}$ eine Maximalstelle, der zugehörige Hochpunkt ist $(\frac{4}{3}, -\frac{64}{27} + 2 \cdot \frac{16}{9}) = (\frac{4}{3}, \frac{32}{27})$.

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8 \\ g'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 32x = 4x(x^2 - 6x + 8) = 4x(x-2)(x-4) \\ g''(x) &= 12x^2 - 48x + 32 \end{aligned}$$

Die Extremstellenkandidaten von g sind die Nullstellen von g', also (Faktorisieren wie oben bzw. erst x aus Klammern und dann Nullstellen des anderen, quadratischen Faktors mit der Mitternachtsformel bestimmen) 0 und 2 und 4.
Wegen $g''(0) = 32 > 0$ ist 0 eine Minimalstelle, der zugehörige Tiefpunkt ist $(0, -8)$.
Wegen $g''(2) = 12 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 32 = -16 < 0$ ist 2 eine Maximalstelle, der zugehörige Hochpunkt ist $(2, 16 - 8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 - 8) = (2, 8)$.
Wegen $g''(4) = 12 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 32 = 192 - 192 + 32 = 32 > 0$ ist 2 eine Minimalstelle, der zugehörige Tiefpunkt ist $(2, 256 - 8 \cdot 64 + 16 \cdot 16 - 8) = (2, -8)$.

(c) Der maximale Definitionsberecih der Funktion ist $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= x + \frac{1}{x+2} = x + (x+2)^{-1} \\ h'(x) &= 1 - (x+2)^{-2} = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \\ h''(x) &= 2(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

Die Extremstellenkandidaten von h sind die Nullstellen von h', die wir durch Lösen der entsprechende Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{(x+2)^2} &= 0 \\ 1 &= \frac{1}{(x+2)^2} \\ (x+2)^2 &= 1 \\ x + 2 &= \pm 1 \\ x &= \pm 1 - 2 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Extremstellenkandidaten von h sind also der Grösse nach geordnet -3 und -1.
Wegen $h''(-3) = \frac{2}{-3+2)^3} = -2 < 0$ ist -3 eine Maximalstelle, der zugehörige Hochpunkt ist $(-3, -3 + \frac{1}{-3+2}) = (-3, -4)$.
Wegen $h''(-1) = \frac{2}{(-1+2)^3} = 2 > 0$ ist -1 eine Minimalstelle, der zugehörige Tiefpunkt ist $(-1, -1 + \frac{1}{-1+2}) = (-1, 0)$.

Lösung zu A10 ex-parabel-durch-punkt-tangential-zu-gerade

Ansatz $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
Die Parabel geht durch den Punkte $(-4, 2)$, also gilt $f(-4) = 2$:

$$16a - 4b + c = 2$$

Sie geht durch den Ursprung $(0, 0)$, also gilt $f(0) = 0$:

$$c = 0$$

Sie hat bei 0 die Steigung -1, also gilt $f'(0) = -1$. (Nebenrechnung: Ableitung $f'(x) = 2ax + b$.) Also

$$b = -1$$

Diese drei Gleichungen bilden ein sehr einfaches Gleichungssystem in drei Unbekannten. Setzen wir $b = -1$ und $c = 0$ in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 16a + 4 &= 2 \\ 16a &= -2 \\ a &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Antwort: Die gesuchte Parabel ist $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - x + 0 = -\frac{1}{8}x^2 - x$.