17 Grenzwerte

17.1 Leitprogramm

Aufgabe A1 Bearbeite das Minileitprogramms «Grenzwerte von Folgen» von Marcel Leupp und Angelika Rupflin.

Als Ergänzung zu den Lösungen im Leitprogramm gibt es in der Lösung zu dieser Aufgabe A1 (am Ende dieses Dokuments) ausführliche Lösungen zu den Eigenschaften der Folgen in den Beispielen 1 bis 5 und in den Aufgaben 2 bis 4 des Leitprogramms.

17.2 Eigenschaften von Folgen

17.2.1. Es folgen einige Ergänzungen und Präzisierungen zu Begriffen aus dem Leitprogramm.

Definition 17.2.2 konstante Folge

Eine Folge (a_n) heisst **konstant**, wenn sie als Funktion $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konstant ist, wenn es also eine reelle Zahl c gibt mit $a_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 17.2.3 alternierende Folge

Eine Folge (a_n) heisst genau dann **alternierend**, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, d. h. wenn genau eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- Für alle geraden natürlichen Zahlen n gilt $a_n > 0$ und für alle ungeraden n gilt $a_n < 0$;
- Für alle ungeraden natürlichen Zahlen n gilt $a_n > 0$ und für alle geraden n gilt $a_n < 0$;

Beispiele 17.2.4.

- Die Folge mit n-tem Folgeglied $a_n = (-1)^n$ ist alternierend.
- Die Folge mit n-tem Folgeglied $b_n = (-1)^{5n+2}\sqrt{n+1}$ ist alternierend.

Definition 17.2.5 (streng) monoton wachsende/fallende Folge

Eine Folge (a_n) heisst genau dann **(streng) monoton wachsend/fallend**, wenn sie als Funktion $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ diese Eigenschaft hat. Statt wachsend wird auch der Begriff **steigend** verwendet.
Dies bedeutet:

- Streng monoton wachsend (= steigend) bedeutet, dass $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Monoton wachsend (= steigend) bedeutet, dass $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Streng monoton fallend bedeutet, dass $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Monoton fallend bedeutet, dass $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Man sagt, dass eine Folge **monoton** ist, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiele 17.2.6.

- Die durch $a_n = \frac{1}{n}$ definierte Folge ist streng monoton fallend (sie startet beim Index 1).
  Beweis: Zu zeigen ist $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Per Multiplikation mit $n(n+1) > 0$ ist dies gleichbedeutend zu $n+1 > n$, was offensichtlich stimmt.
- Konstante Folgen sind monoton wachsend und monoton fallend, aber nicht streng monoton wachsend/fallend.

BY-SA

Definition 17.2.7 (nach oben/unten) beschränkte Folge, obere/untere Schranke

Eine Folge (a_n) heisst genau dann

- **nach oben beschränkt**, wenn es eine (meist recht grosse, positive) reelle Zahl S gibt mit
$$a_n \leq S \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Die Zahl S heisst dann **obere Schranke** der Folge.
- **nach unten beschränkt**, wenn es eine (meist recht kleine, negative) reelle Zahl s gibt mit
$$s \leq a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Die Zahl s heisst dann **untere Schranke** der Folge. (Gleichbedeutend kann man natürlich $a_n \geq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verlangen.)
- **beschränkt** oder **beidseits beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele 17.2.8.

- Die durch $a_n = n$ definierte Folge ist nach unten beschränkt. Eine untere Schranke ist -42, eine andere 0 (dies ist die grösste untere Schranke, wenn die Folge beim Index 0 startet).
- Die durch $a_n = 5 - \frac{1}{n+1}$ definierte Folge ist beschränkt, denn sie liegt gänzlich im Intervall $[4, 5]$. Die Zahl 4 (und jede kleinere Zahl) ist eine untere Schranke, die Zahl 5 (und jede grössere Zahl) ist eine obere Schranke.

Definition 17.2.9 periodische Folge

Eine Folge (a_n) heisst genau dann **periodisch**, wenn es eine positive natürliche Zahl $p > 0$ gibt mit
$$a_{n+p} = a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
In diesem Fall nennt man das kleinste $p > 0$ mit dieser Eigenschaft die **Periode** der Folge.

Beispiele 17.2.10.

- Die Folge mit $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$ ist periodisch mit Periode 4, denn es gilt
$$a_{n+4} = \sin((n+4)\tfrac{\pi}{2}) = \sin(n\tfrac{\pi}{2} + 2\pi) = \sin(n\tfrac{\pi}{2}) = a_n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, denn die Sinusfunktion ist 2π-periodisch (d. h. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).
- Die Folge mit $a_n = (-1)^n$ ist periodisch mit Periode 2, denn $a_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

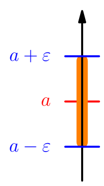
17.2.11. In der Mathematik verwendet man den griechischen Buchstaben ε meistens für eine positive reelle Zahl, die man sich als sehr klein vorstellen sollte (etwa ein Tausendstel, ein Millionstel, ...).

Genauer: Kommt in einer Bedingung ein $\varepsilon > 0$ vor, so ist diese Bedingung in der Regel besonders dann interessant, wenn ε sehr klein ist.

17.3 Häufungspunkte und Grenzwerte von Folgen

Definition 17.3.1 ε-Umgebung einer Zahl

Sei a eine reelle Zahl und $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Das Intervall
$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \qquad \text{besser wäre (da Notation } U_\varepsilon(a) \text{ sinnvoll):} \qquad U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$
heisst dann **ε-Umgebung von a**.



Auf dem Zahlenstrahl rechts ist eine solche ε-Umgebung von a in Orange dargestellt.

BY-SA

17.3.2. Beachte: Sind a und $\varepsilon > 0$ gegeben, so sind für jede reelle Zahl x die folgenden drei Bedingungen gleichbedeutend:

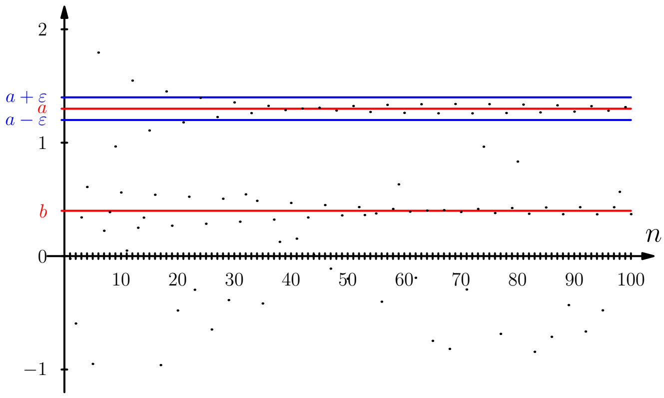
- $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in Worten: x liegt in der angegebenen ε-Umgebung von a;
- $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ oder in x liegt zwischen $a-\varepsilon$ und $a+\varepsilon$;
- $|x-a| < \varepsilon$ in Worten: Der Abstand von x zu a ist echt kleiner als ε;
- $|a-x| < \varepsilon$ in Worten: Der Abstand von a zu x ist echt kleiner als ε.

Definition 17.3.3 Häufungspunkt

Eine Zahl a heisst **Häufungspunkt** einer Folge (a_n), wenn eine der folgenden gleichbedeutenden Bedingungen erfüllt ist.

- In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Folgeglieder.
- Für jede (beliebig kleine) positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgeglieder in der ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $|a-a_n| < \varepsilon$.

In der Zeichnung ist eine Folge mit zwei Häufungspunkten a und b dargestellt.



Beispiele 17.3.4.

- Die (konstante) Folge mit $a_n = 2$ hat 2 als einzigen Häufungspunkt. Allgemeiner hat jede konstante Folge genau einen Häufungspunkt.
- Die Folge mit $a_n = 17 + \frac{1}{n}\sin(n)$ hat 17 als einzigen Häufungspunkt.
- Die Folge mit $a_n = (-1)^n$ hat 1 und -1 als Häufungspunkte (und keine anderen).
- Die Folge $a_n = \sin(n)$ hat jede reelle Zahl zwischen -1 und 1 als Häufungspunkte (und keine anderen Häufungspunkte).
  Beweisidee: Wir betrachten einen Punkt auf dem Einheitskreis, der sich mit Geschwindigkeit 1 in positiver mathematischer Drehrichtung auf dem Einheitskreis bewegt und sich zur Zeit $n = 0$ im Punkt $(1, 0)$ befindet.
  Da π und damit der Kreisumfang 2π irrational sind, häufen sich die Positionen, an denen sich der Punkt zu natürlichzahligen Zeiten befindet, überall auf dem Einheitskreis (beliebig nahe an jedem Punkt des Einheitskreises kommt der Punkt zu natürlichzahligen Zeiten unendlich oft vorbei) (dies müsste man genauer begründen).
  Da $a_n = \sin(n)$ die y-Koordinate unseres Punktes zur Zeit n ist, häufen sch die a_n an jedem Punkt des Intervalls $[-1, 1]$.

Definition 17.3.5 Grenzwert = Limes, Konvergenz, Divergenz

Eine reelle Zahl a heisst genau dann **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge (a_n), wenn eine der folgenden gleichbedeutenden Bedingungen erfüllt ist.

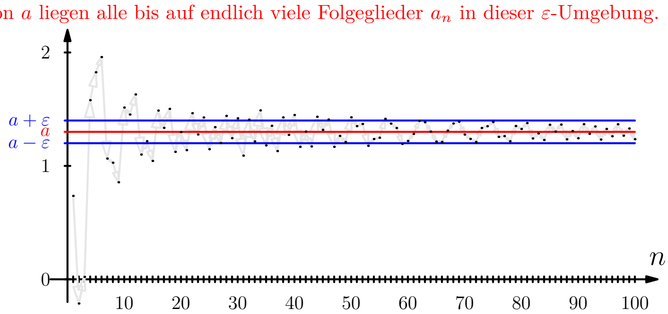
- Für jede ε-Umgebung von a gibt es einen Index $N = N(\varepsilon)$, so dass alle Folgeglieder a_n mit Index $n \geq N$ in dieser ε-Umgebung liegen.
  (Die Schreibweise $N = N(\varepsilon)$ deutet an, dass N von ε abhängen darf. Wird ε kleiner gewählt, so muss in der Regel N grösser gewählt werden.)
- Ausserhalb jeder ε-Umgebung von a liegen nur endlich viele Folgeglieder. (Damit ist gemeint, dass es nur endlich viele Indizes n gibt, so dass a_n nicht in der ε-Umgebung liegt.)
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

später ergänzt: auch gleichbedeutend: Für jede ε-Umgebung von a liegen alle bis auf endlich viele Folgeglieder a_n in dieser ε-Umgebung.

Genau dann, wenn eine Folge (a_n) einen Grenzwert a besitzt, so sagt man, dass die Folge gegen diesen Grenzwert **konvergiert** und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt (also nicht konvergent ist), wird als **divergente** Folge bezeichnet.



17.3.6. Die folgenden Bemerkungen sind offensichtliche Konsequenzen aus den obigen Definitionen von Grenzwert/Konvergenz und Häufungspunkt.

- Wenn eine Folge konvergiert, so hat sie genau einen Grenzwert.
  Eine Folge kann also nicht sowohl gegen a als auch gegen b konvergieren, wenn $a \neq b$.
- Wenn eine Folge konvergiert, so ist ihr Grenzwert der einzige Häufungspunkt der Folge.
  Andersherum ausgedrückt: Wenn eine Folge mindestens zwei Häufungspunkte hat, so ist sie nicht konvergent (sie ist also divergent).
- Jede konvergente Folge ist beschränkt (= beidseitig beschränkt).

17.3.7. Die folgende Aufgabe zeigt, wie wichtig Formulierungen wie «für alle ...» und «es gibt ...» und deren Reihenfolge sind (mehr dazu in Abschnitt 17.9).

Aufgabe A2 In Definition 17.3.5 wurde a als Grenzwert einer Folge (a_n) definiert, wenn gilt:

- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Betrachte die folgende (nich sehr sinnvolle) Definition, die sich von dieser korrekten Definition des Grenzwerts nur in der Reihenfolge der Quantoren unterscheidet.

- Eine reelle Zahl a heisst genau dann **Krenzfert** einer Folge (a_n), wenn gilt:
  Es gibt eine natürliche Zahl N, so dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq N$ gilt $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Welche Eigenschaft hat eine jede Folge, die gemäss dieser Definition einen Krenzfert hat? Was wäre ein sinnvoller Name für Folgen mit dieser Eigenschaft?

Definition 17.3.8 Bestimmte Divergenz gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$

Man sagt, dass eine Folge (a_n) **bestimmt gegen $+\infty$ divergiert**, wenn eine der folgenden gleichbedeutenden Bedingungen gilt:

- Für jede (beliebig grosse) reelle Zahl S gibt es einen Index $N = N(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \geq S$.
- Für jede reelle Zahl S sind alle Folgeglieder ab einem geeignet gewählten Index grösser-gleich als S.
  (Statt «grösser-gleich» kann man hier auch «grösser» schreiben und erhält eine gleichbedeutende Definition.)

Ist dies der Fall, so schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

(Das Pluszeichen vor dem Unendlichsymbol wird oft weggelassen.)
Analog definiert man **bestimmte Divergenz gegen** $-\infty$ und schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Hier darf das Minuszeichen nicht weggelassen werden.
Im normalen mathematischen Sprachgebrauch üblich sind auch die folgenden Sprechweisen (auch wenn wir oben eigentlich nur reelle Zahlen als Grenzwerte konvergenter Folgen zugelassen haben):

- «Konvergenz gegen $+\infty$» oder «Grenzwert ist ∞» statt «bestimmte Divergenz gegen $+\infty$».
- «Konvergenz gegen $-\infty$» oder «Grenzwert ist $-\infty$» statt «bestimmte Divergenz gegen $-\infty$».

17.3.9. Direkt aus den Definitionen folgen die folgenden Behauptunge.:

- Eine Folge (a_n) divergiert genau dann bestimmt gegen $+\infty$, wenn ihr «Negatives», also die Folge $(-a_n)$, bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.
- Jede Folge, die bestimmt gegen ∞ divergiert, ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben.
- Jede Folge, die bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, ist nach oben beschränkt, aber nicht nach unten.

17.3.10. Auf der zweiten Seite des Leitprogramms wird nahegelegt, dass «übertrifft alle Schranken» dasselbe bedeutet wie «wächst gegen $+\infty$». Mir kommt das unglücklich vor.

Ich würde diese Begriffe wie folgt definieren:

- «übertrifft alle Schranken» bedeutet: «ist nicht nach oben beschränkt»;
- «wächst gegen $+\infty$» bedeutet: «divergiert bestimmt gegen $+\infty$».

Mit dieser Definition übertrifft die Folge $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots$ alle Schranken, wächst aber nicht gegen $+\infty$. Das zeigt, dass eine Folge, die alle Schranken übertrifft, nicht gegen $+\infty$ wächst.

Umgekehrt übertrifft aber jede Folge, die gegen $+\infty$ wächst, alle Schranken.

17.4 Übungen zu Eigenschaften von Folgen

Aufgabe A3 (Bitte die Schülerversion des Skripts verwenden, denn die Lehrerversion enthält die Lösungen dieser Aufgabe.)

(i) Entscheide bei jeder der folgenden Aussagen über Folgen, ob sie wahr oder falsch ist.
Bei jeder falschen Aussagen solltes du ein Gegenbeispiel angeben können. Bei korrekten Aussagen solltest du plausibel erklären können, dass die Aussage stimmt (kein strenger Beweis verlangt; Sinn der Aufgabe ist der sichere Umgang mit den neu gelernten Begriffen für Folgen).

(a) Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt. [x] wahr [ ] falsch
(b) Jede Folge, die genau einen Häufungspunkt a hat, konvergiert gegen a. [ ] wahr [x] falsch
(c) Jede alternierende Folge ist beschränkt. [ ] wahr [x] falsch
(d) Jede beschränkte Folge ist alternierend. [ ] wahr [x] falsch
(e) Jede beschränkte (= beidseitig beschränkte) Folge hat einen Häufungspunkt. [x] wahr [ ] falsch
(f) Es gibt eine Folge, die monoton wachsend und monoton fallend ist. [x] wahr [ ] falsch
(g) Jede Folge mit zwei verschiedenen Häufungspunkten ist konvergent. [ ] wahr [x] falsch
(h) Jede beschränkte, monoton wachsende Folge ist konvergent. [x] wahr [ ] falsch
(i) Jede alternierende Folge ist monoton (also monoton wachsend oder monoton fallend). [ ] wahr [x] falsch
(j) Jede monotone Folge ist streng monoton. [ ] wahr [x] falsch
(k) Jede streng monotone Folge ist monoton. [x] wahr [ ] falsch
(l) Jede monoton wachsende Folge ohne obere Schranke ist streng monoton wachsend. [ ] wahr [x] falsch
(m) Jede monoton wachsende Folge hat höchstens einen Häufungspunkt. [x] wahr [ ] falsch
(n) Es gibt eine monoton wachsende Folge mit zwei verschiedenen Häufungspunkten. [ ] wahr [x] falsch
(o) Jede konstante Folge hat einen Grenzwert. [x] wahr [ ] falsch
(p) Jede konstante Folge hat einen Häufungspunkt. [x] wahr [ ] falsch
(q) Es gibt eine konstante Folge, die einen Grenzwert hat. [x] wahr [ ] falsch
(r) Hat eine Folge dieselbe Zahl als obere und untere Schranke, so ist sie konstant. [x] wahr [ ] falsch
(s) Es gibt eine Folge, die 3 und 4 als Grenzwerte hat. [ ] wahr [x] falsch
(t) Jede streng monoton wachsende periodische Folge ist konstant. [x] wahr [ ] falsch
(u) Es gibt eine bestimmt divergente Folge, die nach unten beschränkt ist. [x] wahr [ ] falsch
(v) Es gibt eine bestimmt divergente Folge, die beschränkt (= beidseitig beschränkt) ist. [ ] wahr [x] falsch

(ii) Ergänze jede der folgenden Aussage zu einer korrekten, «möglichst starken» Aussage (z. B. durch Angabe einer möglichst starken Eigenschaft einer Folge).

(a) Jede monoton wachsende periodische Folge ist ✎konstant.
(b) Jede beschränkte Folge hat einen ✎Häufungspunkt.
(c) Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist ✎konvergent
bzw. – gleichbedeutend – hat einen ✎Grenzwert.
(d) Jede monoton fallende Folge hat eine ✎obere Schranke, zum Beispiel das Folgeglied mit Index ✎0
(e) Jede monoton wachsende Folge ohne obere Schranke ist ✎bestimmt divergent gegen $+\infty$.
(f) Jede alternierende konvergente Folge hat den Grenzwert ✎0.
(g) Jede arithmetische Folge mit ✎Schrittweite 0 ist konvergent.
(h) Jede geometrische Folge mit ✎Wachstumsfaktor q mit $|q| < 1$ (also $-1 < q < 1$) ist konvergent.

17.5 Einige Aufgaben zu Folgen aus dem DMK-Buch «Analysis»

Aufgabe A4 Quelle: Analysis-Buch der DMK, Aufgabe II.3.42

Gib jeweils den Grenzwert der Folge (a_n) an und bestimme das kleinste $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < 0.01$$

(Dies zeigt die Bedingung in der Konvergenz-Definition 17.3.5 für $\varepsilon = \frac{1}{100} = 0.01$.)

Ein ähnliches Beispiel vorrechnen, etwa $a_n = \frac{-2-3n^3}{n^3}$.
Lösung: Grenzwert -3, ab Index $N = 6$ näher an 3 als 0.01.
GeoGebra-Veranschaulichung: Schnittpunkt mit Gerade $y = -3.01$ bei $n = \sqrt[3]{200} \approx 5.85$.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$
(b) $a_n = \frac{1}{n^2} - 2$
(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
(d) $a_n = \frac{3n^2-1}{4n^2+2}$
(e) $a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$
(f) $a_n = e^{-\frac{1}{n}}$

Aufgabe A5 (Aufgaben ähnlich wie im Leitprogramm, Abschnitt B, wohl etwas einfacher)

Quelle: Analysis-Buch der DMK, Aufgabe II.3.43

Untersuche jeweils, ob die Folge (a_n) konvergent ist, und gibt den Grenzwert an, wenn er existiert. Im Falle der Divergenz ist anzugeben, ob die Folge bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$
(b) $a_n = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$
(c) $a_n = \frac{1+n^3}{n^3-1}$
(d) $a_n = \frac{n^3+1}{n^4+1}$
(e) $a_n = \frac{2n^3-2}{n-2}$
(f) $a_n = \frac{2n^3-3n+1}{4n+n^3+2}$
(g) $a_n = \frac{4n^4-3n^2+1}{2n^2-1}$
(h) $a_n = \frac{3n^3+7n}{4n^4-5n^2+6}$

Aufgabe A6 (Aufgaben ähnlich wie im Leitprogramm, Abschnitt C)

Quelle: Analysis-Buch der DMK, Aufgabe II.3.44

Untersuche jeweils, ob die Folge (a_n) konvergent ist, und gibt den Grenzwert an, wenn er existiert. Im Falle der Divergenz ist anzugeben, ob die Folge bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+3}$
(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
(c) $a_n = \frac{n+\sqrt{n}+1}{\sqrt{1+n^2}}$
(d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$
Hinweis: $\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{2}{6}} = (\sqrt[6]{n})^2$ und ähnlich kann man $\sqrt{n}$ als Potenz von $\sqrt[6]{n}$ ausdrücken.
(e) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n + 1$
(f) $a_n = \sqrt{(3n+2)(12n-1)} - 6n$
(g) $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{\sqrt{n}\sqrt{n^5+1}}$
(h) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2+1}$

BY-SA

(Pascalsches Dreieck und Dinge wie $(2n+3)^3$ wiederholen? Wird im Leitprogramm verwendet.)

17.6 Zur Monotonie von Folgen

17.6.1 (Nachtrag, Definition von monoton)**.** Man sagt, dass eine Folge **monoton** ist, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiel 17.6.2. Wir zeigen an einem Beispiel, wie man feststellt, ob eine Folge monoton ist oder nicht; ist sie monoton, wird dies präzisiert zu (streng) monoton fallend bzw. wachsend.
Betrachte die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n-3}{n+5}$.
Frage: Kann man in die Box in

$$a_n \boxed{\quad} a_{n+1}$$

ein Vergleichszeichen eintragen (also $\leq$ oder $<$ oder $\geq$ oder $>$), so dass die erhaltene Ungleichung für alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ gilt? Das würde bedeuten, dass unsere Folge monoton wachsend oder streng monoton wachsend oder monoton fallend oder streng monoton fallend ist; sonst ist unsere Folge nicht monoton. ✎

$$\begin{aligned}
& & a_n &\boxed{\quad} a_{n+1} \\
&\iff & \frac{n-3}{n+5} &\boxed{\quad} \frac{(n+1)-3}{(n+1)+5} \\
&\iff & \frac{n-3}{n+5} &\boxed{\quad} \frac{n-2}{n+6} & &\text{multipliziere mit beiden Nennern, beide } > 0 \text{, da } n \geq 0 \\
&\iff & (n-3)(n+6) &\boxed{\quad} (n-2)(n+5) \\
&\iff & n^2+3n-18 &\boxed{\quad} n^2+3n-10 \\
&\iff & 0 &\boxed{\quad} 8
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile und damit alle Zeilen sind korrekt, wenn man «echt-kleiner» als Vergleichszeichen wählt (da alle Umformungen Äquivalenzumformungen). (in Rot eintragen)
Also gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge (a_n) ist streng monoton wachsend.

Weitere Eigenschaften der Folge:

- Sie ist nach unten beschränkt: Sicherlich ist $a_0 = \frac{-3}{5} = -\frac{6}{10} = -0.6$ eine untere Schranke und genauer die grösste untere Schranke, denn $-0.6 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ wegen des streng monotonen Wachstums.
- Sie konvergiert gegen 1:

$$a_n = \frac{n-3}{n+5} = \frac{\frac{n-3}{n}}{\frac{n+5}{n}} = \frac{\frac{n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

  Beachte die Schreibweise. Alternativ kann man dies so aufschreiben:

$$a_n \overset{\text{wie oben}}{=} \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} \quad \text{also (Grenzwertsätze)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1} = 1$$

  Nicht in der Prüfung lesen möchte ich schlichtweg Falsches wie

$$a_n = \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{oder noch schlimmer} \qquad a_n = \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

Als (streng) monoton wachsende Folge mit Grenzwert 1 ist unsere Folge (a_n) offensichtlich durch 1 nach oben beschränkt (= obere Schranke ist 1). Genauer ist 1 die kleinste obere Schranke.

Aufgabe A7 Entscheide jeweils, ob die angegebene Folge monoton ist oder nicht; im Falle der Monotonie, präzisiere diese zu (streng) monoton fallend bzw. wachsend. (Wenn strenge Monotonie vorliegt, ist dies als stärkere Eigenschaft anzugeben.)

(a) (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n+2}$
(b) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$
(c) (a_n) mit $a_n = \frac{3-n}{n+7}$
(d) (a_n) mit $a_n = (-1)^n \frac{3-n}{n+7}$
(e) etwas schwieriger: (a_n) mit $a_n = \frac{n+3}{n^2+3}$
Macht es hier einen Unterschied, ob man die Folge für Indizes $n \in \mathbb{N}$ oder nur für Indizes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachtet?

17.7 Beispiele: Wenn eine Folge gegen Null konvergiert, so kann die zugehörige Reihe konvergent sein oder nicht

17.7.1. Ich erinnere daran, dass die Reihe (s_n) zu einer Folge (a_n) definiert ist als Folge der Teilsummen, d. h. $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{p=0}^{n} a_n$.

Beispiel 17.7.2. Betrachte eine geometrische Folge (a_n) mit $a_n = q^n$ für beliebiges reelles $q \neq 0$.
Sie konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, also $-1 < q < 1$ gilt; der Grenzwert ist dann 0.
Wir haben gesehen, dass die zugehörige Reihe (s_n) im Fall $q \neq 1$ gegeben ist durch

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Sie konvergiert ebenfalls genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt; der Grenzwert ist dann $\frac{1}{1-q}$.
Also ist jede geometrische Folge mit Wachstumsfaktor q mit $|q| < 1$ eine gegen 0 konvergierende Folge, deren zugehörige Reihe konvergiert.

17.7.3. Man mag nun vermuten, dass die Reihe zu jeder gegen 0 konvergenten Folge konvergent ist. Dies ist aber falsch. Das bekannteste Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe.

Definition 17.7.4 harmonische Folge, harmonische Reihe

Die **harmonische Folge** ist die Folge der Kehrwerte $\frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sie ist explizit gegeben durch

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Die **harmonische Reihe** $(h_n)_{n\geq 1}$ ist die zugehörige Reihe (= Folge der Teilsummen), also die Folge

$$1, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{=\frac{3}{2}=1.5}, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=\frac{11}{6}=1.8\overline{3}}, \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{=\frac{25}{12}=2.08\overline{3}}, \quad \ldots$$

17.7.5. Offensichtlich konvergiert die harmonische Folge $(\frac{1}{n})$ gegen 0.
Die harmonische Reihe ist offensichtlich streng monoton wachsend. Per Computer kann man leicht einige Glieder der harmonischen Reihe berechnen, etwa

$$h_{1'000} = 7.48547\ldots \qquad h_{1'000'000} = 14.39272\ldots \qquad h_{1'000'000'000} = 21.30048\ldots$$

Die harmonische Reihe wächst also extrem langsam. Trotzdem gilt:

Satz 17.7.6

Die harmonische Reihe divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Beweis. Es gilt

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}$$

Dies zeigt

$$h_{16}=h_{2^4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$$

Analog sieht man

$$h_{31}=h_{2^5}>3.5=1+\frac{5}{2} \qquad h_{2^6}>4=1+\frac{6}{2}$$

bzw. allgemein

$$h_{2^m}>1+\frac{m}{2}$$

Daraus folgt sofort, dass die harmonische Reihe bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. □

17.7.7. Auf überübernächster Seite sind mittlerweile Illustrationen zum Blockstapelproblem.

Man stelle sich vor, dass man unendlich viele identische Bausteine hat (etwa in der Form von Dominosteinen) und diese wie in `https://de.wikipedia.org/wiki/Blockstapelproblem` oder `https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe#Anwendungsbeispiele` gezeigt übereinanderstapelt.

Das Ziel ist, an einer Tischkante einen möglichst grossen Überhang zu erzeugen. Wie gross ist dieser maximale Überhang?

Zur Lösung (bisher ohne Details): Den Stapelvorgang stellt man sich am besten so vor.

- Den ersten Stein legt man so, dass er halb über die Tischkante hinausragt.
- Man hebt den ersten Stein an und legt den zweiten Stein so darunter auf den Tisch, dass er genau an der Tischkante endet. Dann schiebe man den gesamten Stapel so weit nach aussen, dass der Turm noch nicht kippt.
- ...
- Man hebt den bisher konstruierten Stapel an und legt den n-ten Stein so darunter auf den Tisch, dass er an der Tischkante endet. Dann schiebe man den gesamten Stapel so weit nach aussen, dass der Turm noch nicht kippt.
- ...

Mit den Hebelgesetzen überlegt man sich leicht: Wenn jeder Stein die Länge 2 hat, so ist die Folge der Überhänge jedes Steins über dem nächsten gegeben durch

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \dots$$

Die sukzessiven Überhänge bilden also die harmonische Folge.

Der gesamte, mit n Bauklötzen realisierte Überhang ist also das n-te Glied der harmonischen Reihe. Also kann man beliebig grosse Überhänge erzeugen (zumindest theoretisch).

Unser obiges Zahlenbeispiel $h_{1'000'000'000}=21.30048\dots$ zeigt, dass man bei einer Klotzlänge von 2 cm mit einer Milliarde Klötzen theoretisch einen Überhang von etwa 21.3 cm erreicht.

Satz 17.7.8 Grenzwertsätze

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gelten:

(1) Die «Summenfolge» $(a_n + b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $a + b$. In Formelschreibweise gilt also

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

(2) Analoges gilt für die «Differenzenfolge» $(a_n - b_n)$ (im vorherigen Punkt alle Pluszeichen durch Minuszeichen ersetzen).

(3) Die «Produktfolge» $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $a \cdot b$. In Formelschreibweise gilt also

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

(4) Die «Quotientenfolge» $(\frac{a_n}{b_n})$ ist konvergent mit Grenzwert $\frac{a}{b}$ (unter den unten genannten Voraussetzungen). In Formelschreibweise gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Voraussetzungen (vgl. 17.7.9): Dies gilt nur, falls hierbei nirgends durch Null dividiert wird. Man muss also einerseits voraussetzen, dass $b \neq 0$ gilt, und andererseits, dass $b_n \neq 0$ für alle n gilt.

17.7.9. Bei der Quotientenfolge ist die eigentlich entscheidende Voraussetzung, dass $b \neq 0$ gilt, denn dann ist die Quotientenfolge automatisch für genügend grosse Indizes n definiert (denn aus $b \neq 0$ folgt, dass b_n für genügend grosses n von Null verschieden ist).

Gilt etwa $b_n \neq 0$ für alle Indizes $n \geq N$, so konvergiert (die nun wohldefinierte) Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage für die Summenfolge (die anderen Beweise sind minimal schwieriger).

Sei eine beliebige reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen ist, das es eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle Indizes $n \geq N$ gilt, dass $a_n + b_n \in (a + b - \varepsilon, a + b - \varepsilon)$ oder äquivalent

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

Wir verwenden dazu die Dreiecksungleichung. Sie besagt, dass $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.
(Dasselbe gilt auch für Vektoren und ist dann sogar anschaulicher als im Eindimensionalen: Die Vektoren x, y und $x + y$ bilden die Seiten(vektoren) eines Dreiecks (hänge den Vektor y an den Vektor x, um $x + y$ zu erhalten). Die Dreiecksungleichung besagt dann, dass die Seite $x + y$ kürzer ist als die Summe der beiden anderen Seitenlängen; dies gilt aber in jedem Dreieck.)

Wir schätzen ab (Abschätzung = Folge von Ungleichungen und Gleichungen, um eine gesuchte Ungleichung zu zeigen)

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n + b_n - a - b| \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \qquad \text{Dreiecksungleichung für } x = a_n - a \text{ und } y = b_n - b \end{aligned} \tag{17.1}$$

Wegen $\lim a_n = a$ gibt es ein N_1 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$.
Wegen $\lim b_n = b$ gibt es ein N_2 mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$.
Sei $N = \max(N_1, N_2)$ das Maximum dieser beiden Zahlen. Für jedes $n \geq N$ gelten dann sowohl $n \geq N_1$ als auch $n \geq N_2$ und damit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit können wir die obige Abschätzung für alle $n \geq N$ wie folgt fortsetzen und die gewünschte Aussage erhalten.

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &\overset{(17.1)}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 17.7.10 Grenzwerte von Potenzen und Wurzeln im Leitprogramm

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gelten:

(1) Für jeden Exponenten $p \in \mathbb{N}$ ist die «Potenzenfolge» (a_n^p) konvergent mit Grenzwert a^p. In Formelschreibweise gilt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p = a^p$$

(2) Die «Quadratwurzelfolge» $(\sqrt{a_n})$ ist konvergent mit Grenzwert $\sqrt{a}$. In Formelschreibweise gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$$

Hier ist natürlich vorauszusetzen, dass man alle Wurzeln ziehen kann, dass also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und dann automatisch $a \geq 0$ auf Grund der Konvergenz).
(Die analoge Aussage gilt auch für m-te Wurzeln.)

Kombiniert man beide Aussagen, so erhält man: Für jeden rationalen Exponenten $q = \frac{p}{m}$ gilt $a_n^q \to a^q$ für $n \to \infty$ (denn $x^q = \sqrt[m]{x^p}$). Das gilt allgemeiner auch für jeden reellen Exponenten q.

Beweis. Die erste Aussage (ist offensichtlich für $p = 1$ und $p = 0$) und folgt sofort aus der Aussage über die Produktfolge in Satz 17.7.8, die man auch zweimal auf dieselbe Folge anwenden darf. Damit gilt nämlich zuerst

$$\lim a_n^2 = \lim a_n \cdot a_n = (\lim a_n) \cdot (\lim a_n) = a \cdot a = a^2$$

Damit erhält man

$$\lim a_n^3 = \lim a_n \cdot a_n^2 = (\lim a_n) \cdot (\lim a_n^2) = a \cdot a^2 = a^3$$

Damit erhält man

$$\lim a_n^4 = \lim a_n \cdot a_n^3 = (\lim a_n) \cdot (\lim a_n^3) = a \cdot a^3 = a^4$$

undsoweiter.
Beweis für die Wurzelfolge: Es gilt (jedenfalls für $a > 0$)

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \cdot |a_n - a|$$

Wegen $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} > 0$ gilt $\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$. Also folgt

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \cdot |a_n - a| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |a_n - a|$$

Wegen $a_n \to a$ gilt $|a_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt aber auch (Multiplikation mit einer Konstanten)

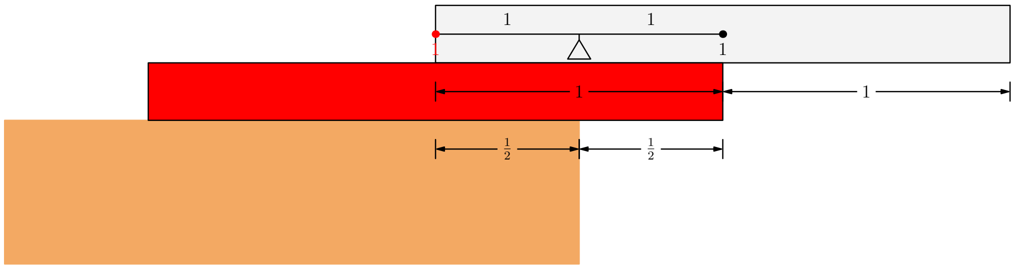
$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |a_n - a| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

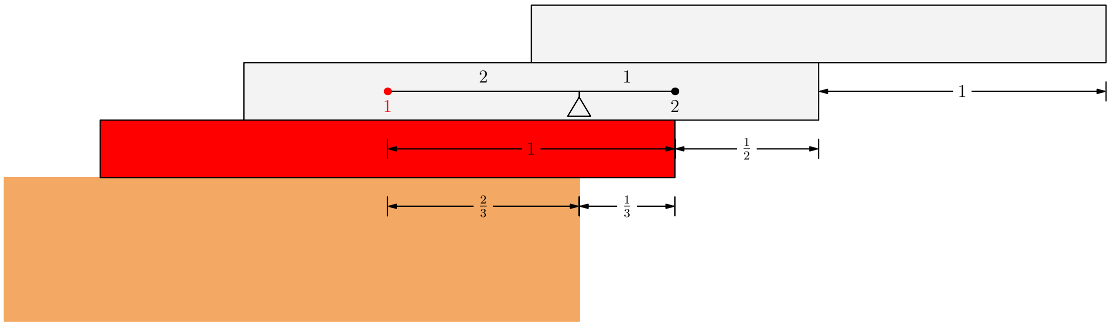
Dies zeigt, dass $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right|$ beliebig klein wird für genügend grosses n. Also gilt $\sqrt{a_n} \to a$ für $n \to \infty$.
Im Fall $a = 0$ ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit: Für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt{n} < \varepsilon$.
Letztere Bedingung ist gleichbedeutend zu $a_n < \varepsilon^2$. Wegen $a_n \to a = 0$ ist dies aber für genügend grosse n erfüllt (man wähle das «Epsilon» in der Definition des Grenzwerts als ε^2).
Der Beweis für m-te Wurzeln geht ähnlich. Für $m = 3$ geht das beispielsweise wie folgt:

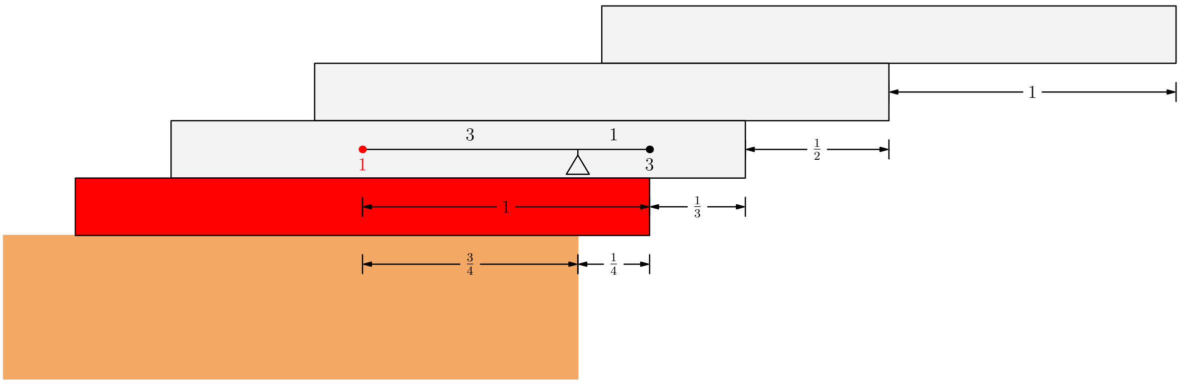
$$\left|\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a_n}^2 + \sqrt[3]{a_n} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)}{\sqrt[3]{a_n}^2 + \sqrt[3]{a_n} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt[3]{a_n}^2 + \sqrt[3]{a_n} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[3]{a}^2} \to 0$$

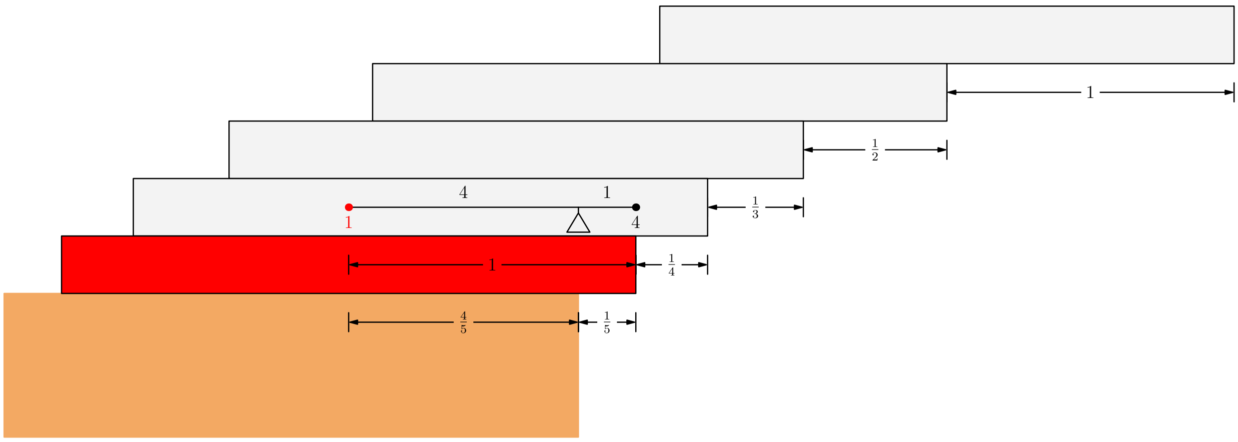
□

BY-SA
I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer









17.8 Stetigkeit

17.8.1. Stetigkeit ist einer der wichtigsten Begriffe der Mathematik. Wir lernen ihn für reellwertige Funktionen $f(x)$ einer rellen Variablen x kennen.

Eine Funktion ist stetig, wenn «hinreichend kleine Änderungen des Arguments nur beliebig kleine Änderungen des Funktionswertes nach sich ziehen» (Zitat aus Wikipedia).

17.8.2. Ich erinnere daran, dass ein Intervall I eine «zusammenhängende» Teilmenge der reellen Zahlen ist. Beispiele:

- offenes Intervall $I = (0, 2)$;
- halboffenes Intervall $I = [2, 5)$;
- $I = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$;
- $I = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Definition 17.8.3 stetige Funktion (auf Intervall)– informelle Definition

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf einem $\boxed{\text{Intervall}}$ $I \subset \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion.
Dann heisst f **stetig**, wenn man den Graphen von f zeichnen kann, ohne den Stift anzuheben (die Funktion darf also nicht «hüpfen» oder «springen»; sie darf aber «Knicke» haben).

Aufgabe A8 Skizziere jeweils den Graphen der angegebenen Funktion (eine Handskizze genügt) und entscheide, ob sie stetig ist. Wenn nicht anders angegeben, ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(a) $f(x) = 5$
(b) $f(x) = \frac{1}{2}x$
(c) (eine «stückweise definierte» Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0; \\ 5 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

(d) $f(x) = x^2$
(e) $f(x) = |x|$
(f) (eine weitere stückweise definierte Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \leq 2; \\ 4 - x & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}$ als Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
(h) $f(x) = \sqrt{x}$ als Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$.
(i) $f(x) = 2^x$
(j) $f(x) = \cos(x)$
(k) Variation der Aufgabenstellung: Wie muss man die reellen Zahlen c und d wählen, damit die folgende (stückweise definierte) Funktion stetig ist?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{falls } x \leq 2; \\ c & \text{falls } 2 < x < 5; \\ x + d & \text{falls } 5 \leq x. \end{cases}$$

(l) (eine per Fallunterscheidung definierte Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}; \\ 2 & \text{sonst (wenn also } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Aufgabe A9 Verwende für die folgenden Aufgaben Geogebra oder den Taschenrechner oder ein sonstiges Hilfsmittel zum Anzeigen der Graphen.

(Es geht darum, ein Gefühl für Stetigkeit zu entwickeln; präzise Begründungen sind mit unserer bisherigen informellen Stetigkeitsdefinition ohnehin nicht möglich.)

(a) Ist $f(x) = 5x^4 - x^3 - x + 1$ stetig?

(b) Ist $g(x) = \frac{(2x^3+x-3)}{1+2^{|x|}} + \sin(x)$ stetig?

Die folgenden Funktionen sind nicht ganz zufällig gewählt; vielmehr handelt es sich entweder um interessante Standardbeispiele (un)stetiger Funktionen oder um für die Differentialrechnung wichtige Funktionen.

(c) Für welche reelle Zahl k ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0; \text{ (denn wir dürfen nicht durch 0 dividieren)} \\ k & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Man sagt, dass die «Definitionslücke 0» der Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x$ «stetig hebbar» ist dadurch, dass man $f(0) = \ldots$ definiert.

(d) Für welche reelle Zahl a ist die folgende Funktion stetig? (Auch hier kann man die Definitionslücke «stetig schliessen».)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0; \text{ (denn wir dürfen nicht durch 0 dividieren)} \\ a & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(e) Für welche reelle Zahl a ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{falls } x \neq 0; \text{ (denn wir dürfen nicht durch 0 dividieren)} \\ a & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(f) Was denkst du: Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0; \text{ (denn wir dürfen nicht durch 0 dividieren)} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(g) Was denkst du: Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0; \text{ (denn wir dürfen nicht durch 0 dividieren)} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Definition 17.8.4 stetige Funktion – informelle Definition

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine auf einer Vereinigung X von Intervallen definierte reellwertige Funktion. Dann heisst f **stetig**, wenn f auf jedem Intervall I, das in X enthalten ist, stetig ist.

Beispiel 17.8.5. Die Menge $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Vereinigung von Intervallen, denn $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Aufgabe A10

(a) Ist $f(x) = \frac{1}{x}$ als Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ stetig?

(b) Ist $f(x) = \frac{1}{|x|}$ als Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ stetig?

(c) Ist $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ als Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ stetig? (Geogebra o. ä. erlaubt)

(d) Ist $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$ als Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ stetig? (Geogebra o. ä. erlaubt)

(e) Ist $f(x) = \frac{\sin(x)}{(x-2)(x-3)}$ als Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \to \mathbb{R}$ stetig? (Geogebra o. ä. erlaubt)

Lösung: Alle Funktionen sind stetig. Keine der Definitionslücken ist stetig hebbar.

17.8.6. Die übliche Standard-Definition der Stetigkeit einer Funktion geschieht in zwei Schritten.

(1) Zuerst definiert man, wann eine Funktion **an einer Stelle stetig** ist.
(Mit einer **Stelle** meint man ein beliebiges Element der Definitionsmenge einer Funktion. Konkret ist also eine Stelle meist eine reelle Zahl in einem Intervall.)

(2) Dann definiert man eine Funktion als **stetig**, wenn sie an allen Stellen stetig ist.

Definition 17.8.7 (ε-δ-)Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle; Stetigkeit einer Funktion

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einer Teilmenge X der reellen Zahlen definiert ist.

(1) Sei $x_0 \in X$ ein beliebiges Element.
Man sagt genau dann, dass f **an einer Stelle** x_0 **stetig** ist, wenn eine der folgenden, gleichbedeutenden Bedingungen gilt: (Die drei eingerahmten Aussagen bedeuten genau dasselbe.)

- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:
  $\boxed{\text{Aus } |x - x_0| < \delta \text{ folgt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:
  $\boxed{\text{Aus } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ folgt } f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).}$
- Für jede ε-Umgebung U_ε von $f(x_0)$ gibt es eine δ-Umgebung V_δ von x_0, so dass für alle $x \in X$ gilt:
  $\boxed{\text{Aus } x \in \underbrace{V_\delta}_{=(f(x_0)-\delta,f(x_0)+\delta)} \text{ folgt } f(x) \in \underbrace{U_\varepsilon}_{=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)}.}$
- Für jede ε-Umgebung U von $f(x_0)$ gibt es eine δ-Umgebung V von x_0, so dass f alle Elemente aus $V \cap X$ nach U abbildet.

(2) Man sagt, dass f **stetig** ist (im Sinne von «überall stetig»), wenn f an allen Stellen $x_0 \in X$ stetig ist.

Statt «stetig an der Stelle x_0» sagt man auch «stetig im Punkt x_0» oder «stetig bei x_0».

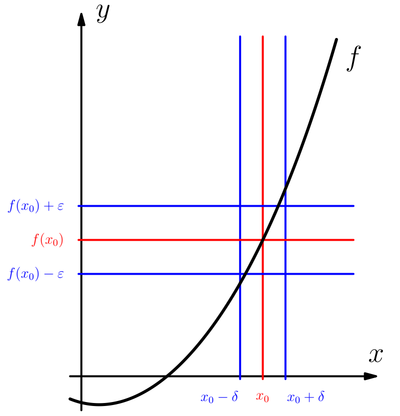
17.8.8. Diese Definition präzisiert das obengenannte Zitat aus der Wikipedia, dass eine Funktion genau dann stetig (an einer Stelle x_0) ist, wenn «hinreichend kleine Änderungen des Arguments» (alias δ-nahe bei x_0) nur beliebig kleine Änderungen des Funktionswertes (alias Änderungen kleiner als ε) nach sich ziehen».

Zu jedem gegebenem $\varepsilon > 0$ ist also im Falle der Stetigkeit die δ-Nähe von x zu x_0 hinreichend für die ε-Nähe von $f(x)$ zu $f(x_0)$.

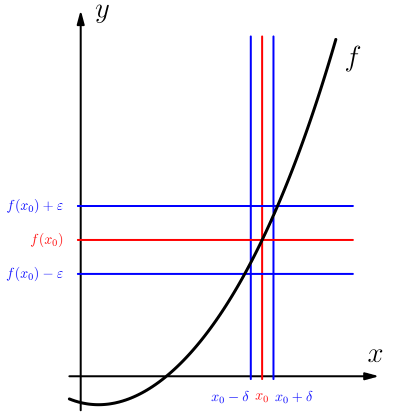
17.8.9. In den beiden unten dargestellten Koordinatensystem ist dieselbe Funktion f dargestellt. Sie ist stetig. Um zu zeigen, dass f an einer fixierten Stelle x_0 stetig ist, muss man zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\delta > 0$ zeigen, so dass die

- auf der x-Achse sichtbare δ-Umgebung $V_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0 unter der Abbildung f
- ganz in der auf der y-Achse sichtbaren ε-Umgebung $U_\varepsilon = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ von $f(x_0)$ landet.

Konkret stelle man sich vor, dass ein ε und damit eine ε-Umgebung von $f(x_0)$ vorgegeben ist wie in den Zeichnungen dargestellt.



- Die linke Abbildung zeigt eine schlechte Wahl von δ: Die Punkte nahe des Randes der δ-Umgebung landen nicht in der ε-Umgebung.
  Jede grössere Wahl von δ ist ebenfalls eine schlechte Wahl.
- Die rechte Abbildung zeigt eine gute Wahl von δ. Nun landet die δ-Umgebung unter f ganz in der ε-Umgebung.
  Jede kleinere Wahl von δ ist ebenfalls eine gute Wahl.



Beispiel 17.8.10. Die Funktion $f(x) = x$ ist stetig. Dafür ist zu zeigen, dass f an jeder beliebig gewählten Stelle x_0 stetig ist. Dafür ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

- Aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Gleichbedeutend: Aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|x - x_0| < \varepsilon$. (da $f(x) = x$ und $f(x_0) = x_0$))

Letzteres ist trivialerweise korrekt, wenn $\delta = \varepsilon$ gilt. Also ist $\delta = \varepsilon$ eine gute Wahl für δ.

Damit ist $f(x) = x$ bei x_0 stetig. Da x_0 beliebig war, ist f (überall) stetig.

Proposition 17.8.11 alternative Charakterisierung der Stetigkeit: Stetigkeit = «Folgenstetigkeit»

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig bei $x_0 \in X$, wenn sie im folgenden Sinne «folgenstetig ist bei x_0»:

(Wir formulieren dieselbe Bedingung dreimal: einmal in Worten, einmal mit «Pfeilschreibweise für Grenzwerte» und einmal in«Limesschreibweise».)

- Für jede Folge in X, die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte gegen $f(x_0)$.
- Für jede Folge (a_n) in X mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt $f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.
- Für alle Folgen (a_n) in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Beweis. Nicht schwierig, aber eher nicht schulgeeignet. □

Beispiel 17.8.12. Mit Hilfe von Folgenstetigkeit ist die Stetigkeit von $f(x) = x$ nahezu trivial: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann muss man zeigen, dass für jede konvergente Folge (a_n) mit $a_n \to x_0$ die Folge $(f(a_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dies ist aber trivial, denn $f(a_n) = a_n \to x_0 = f(x_0)$.

Beispiel 17.8.13. Wir zeigen mit Hilfe von Folgenstetigkeit, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0; \\ c & \text{sonst} \end{cases}$ für keine reelle Zahl c bei $x_0 = 0$ stetig ist.
Betrachte die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$. Dann gilt $a_n \to 0$. Wenn f bei $x_0 = 0$ stetig ist, gilt $f(a_n) \to c$.
Aber $f(a_n) = \sin(\frac{1}{a_n}) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$ ist abwechselnd $+1$ und -1, also sicherlich nicht konvergent.
Variation des Beweises: Man kann ähnlich zwei gegen Null konvergente Folgen (a_n) und (b_n) definieren mit $f(a_n) = 1$ und $f(b_n) = -1$ für alle n (die Folgen der Funktionswerte sind also konstant). Wenn f stetig ist, gilt sowohl $c = f(0) = \lim f(a_n) = \lim 1 = 1$ als auch $c = f(0) = \lim f(b_n) = \lim -1 = -1$. Widerspruch.

Satz 17.8.14 «Alle» Standardfunktionen sind stetig

Die folgenden Funktionen sind stetig (auf ihrer jeweiligen maximalen Definitionsmenge):

$f(x) = c$	für jedes $c \in \mathbb{R}$	(konstante Funktionen)
$f(x) = x^n$	für jedes $n \in \mathbb{Z}$	(Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten)
$f(x) = \sqrt[m]{x}$	für jedes $m \in \mathbb{Z}$	(Wurzelfunktionen (Umkehrfunktionen der obigen Potenzfunktionen))
$f(x) = x^p$	für jedes $p \in \mathbb{R}$	(Potenzfunktionen; verallgemeinert die beiden vorherigen Punkte: $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$)
$f(x) = b^x$	für jedes $b > 0$;	(Exponentialfunktionen)
$f(x) = \log_b(x)$	für jedes $b > 0$;	(Logarithmusfunktionen (Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen))
$\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$		(trigonometrische Funktionen und
$\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$		deren Umkehrfunktionen)

Beweis. Klar mit Folgenstetigkeit und Grenzwertsätzen: c, x^n.
Trigonometrische Funktionen: Bogenlänge $x \mapsto \cos(x)$ oder $\sin(x)$: Geometrisch ist klar, dass man $\delta = \varepsilon$ wählen kann, da sich die x- bzw. y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis bei einer Änderung der Bogenlänge um Δx um höchstens Δx ändert. Stetigkeit von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$ des Tangens folgt aus nächstem Ergebnis (Quotient stetiger Funktionen stetig).
Die Stetigkeit der Exponentialfunktionen bitte glauben und sich mit GeoGebra plausibel machen.
Die Stetigkeit der genannten Umkehrfuntionen folgt aus dem nächsten Ergebnis (Umkehrfunktionen vieler stetiger Funktionen sind stetig). □

Beispiel 17.8.15. Da $f(x) = \sqrt{x}$ stetig ist, folgt aus $a_n \to a$, dass $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ (wegen Folgenstetigkeit).
Dies wurde im Leitprogramm als Grenzwertsatz tituliert.
Analog: Da $f(x) = x^p$ stetig ist, folgt aus $a_n \to a$, dass $(a_n)^p \to a^p$.

Satz 17.8.16 aus stetigen Funktionen neue stetige Funktionen basteln

Sind f und g stetige Funktionen, so sind auch die folgenden Funktionen stetig:

$h(x) = f(x) \pm g(x)$	Summen und Differenzen stetiger Funktionen sind stetig
$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	Produkte stetiger Funktionen sind stetig
$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Quotienten stetiger Funktionen sind stetig
$h(x) = f(g(x))$	Verknüpfungen = Hintereinanderschaltungen stetiger Funktionen sind stetig
$h(x) = f^{-1}(x)$	Umkehrfunktionen stetiger bijektiver Funktionen auf Intervallen sind stetig

All diese Aussagen gelten nur unter den offensichtlichen Voraussetzungen: (1) Die Verknüpfung $f(g(x))$ muss definiert sein, d. h. g muss im Definitionsbereich von f landen. (2) Um den Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ zu bilden, darf g nicht Null werden (man verkleinere also eventuell die Definitionsmenge von g zu $\{x \mid g(x) \neq 0\}$). (3) Die Umkehrfunktion existiert nur, wenn f bijektiv ist.

Zwei Beispiele dafür, dass Umkehrfunktionen stetiger Funktionen im Allgemeinen nicht stetig sind:

- Die Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $0 \mapsto 0$, ist stetig und bijektiv auf seine Bildmenge, ihre Umkehrfunktion ist aber nicht stetig bei 0.
- Die Funktion $[0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$, ist bijektiv und stetig, ihre Umkehrfunktion ist aber bei 1 nicht stetig.

Beweis. Die ersten drei Aussagen folgen aus den Grenzwertsätzen und Folgenstetigkeit.
Die Aussage zur Verknüpfung folgt ebenfalls aus der Folgenstetigkeit: Wenn $a_n \to p$ konvergiert, so konvergiert $g(a_n) \to g(p)$ wegen der Folgenstetigkeit von g; wegen der Folgenstetigketi von f konvergiert dann $f(g(a_n)) \to f(g(p))$. Dies zeigt die Folgenstetigkeit von $h(x) = f(g(x))$.
Die Aussage über die Stetigkeit der Umkehrfunktion bitte glauben. □

Beispiel 17.8.17. Die Funktion x ist stetig. Also ist $x \cdot x = x^2$ stetig als Produkt stetiger Funktionen. Da ausserdem 1 und $\sin(x)$ stetig ist, ist $x^2 + 1 + \sin(x)$ stetig als Summe stetiger Funktionen. Da $\sqrt{x}$ stetig ist, ist auch $\sqrt{1 + x^2 + \sin(x)}$ stetig als Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen.

Ähnlich ist auch $x^2 + 1$ stetig, und dann ist $\frac{\sqrt{1+x^2+\sin(x)}}{x^2+1}$ als Quotient stetiger Funktionen stetig.

Da 2^x stetig ist, ist auch $2^{\frac{\sqrt{1+x^2+\sin(x)}}{x^2+1}}$ als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig.

Beispiel 17.8.18. Die Funktion $f(x) = x^x$ ist stetig: Zunächst gilt $x^x = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln(x))$. Wir wissen, dass $\ln(x)$ und x stetig sind, also ist $x \ln(x)$ als Produkt stetig. Hängen wir hinter diese stetige Funktion die stetige Funktion exp (da Standardfunktion, $\exp(x) = e^x$), so ist auch $\exp(x \ln(x))$ als Hintereinanderschaltung stetiger Funktionen stetig.

Merke 17.8.19

«Alle» Funktionen, die sich aus den «Standardfunktionen» schrittweise bilden lassen, sind stetig.
Insbesondere sind alle Funktionen, die man in «üblicher Weise» (ohne Fallunterscheidungen/stückweise Definitionen) aufschreiben kann, stetig.

Wichtige Sätze über stetige Funktionen

Satz 17.8.20 Zwischenwertsatz (vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Zwischenwertsatz, Illustration!)

Sei f eine stetige reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind.
Dann gibt es für jede reelle Zahl s, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt (d. h. s ist ein «Zwischenwert»), mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = s$.
Insbesondere gilt: Ist $f(a)$ negativ und $f(b)$ positiv (oder andersherum), so hat f eine Nullstelle auf $[a, b]$, d. h. es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$.

BY-SA

17.8.21. Der Zwischenwertsatz kann oft zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen einer stetigen Funktion f verwendet werden. Computer und Taschenrechner verwenden (gewisse Verbesserungen) des folgenden Verfahrens.

Algorithmus 17.8.22 Intervallschachtelungsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle

Gegeben sei eine stetige Funktion f.
Ausserdem benötigt man zwei reelle Zahlen a und b mit $f(a) < 0$ negativ und $f(b) > 0$ positiv (oder andersherum; wir erklären den Algorithmus im Folgenden der Einfachheit halber nur für den angegebenen Fall).
Man findet solche Zahlen oft durch Ausprobieren vieler Werte, etwa ± 1, ± 10, ± 100, ...
(Dann muss nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[a, b]$ liegen.)

(1) Nimm eine beliebige Zahl c zwischen a und b (etwa den Mittelwert $\frac{a+b}{2}$).
(2) Berechne $f(c)$.
(3) Wenn $f(c) = 0$: Fertig, Nullstelle gefunden. Am Computer ist es übrigens wegen Rundungsfehlern oft nicht so einfach, festzustellen, ob eine berechnete Zahl wirklich Null ist.
(4) Wenn $f(c) < 0$: Ersetze a durch c.
(5) Wenn $f(c) > 0$: Ersetze b durch c.
(Nun gilt wieder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so dass nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im nun kleineren Intervall $[a, b]$ liegen muss.)
(6) Wenn $[a, b]$ genügend klein ist (also wenn beispielsweise a und b bis zur dritten Nachkommastelle übereinstimmen): Fertig
(7) Sonst springe zu Schritt (1).

Die Intervalle $[a, b]$, die man während der Ausführung dieses Algorithmus betrachtet und in denen eine Nullstelle liegen muss, werden immer kleiner. Daher kommt der Name «Intervallschachtelungsverfahren»: Die Nullstelle wird immer enger durch ein Intervall «eingeschachtelt». Wenn man c stets den Mittelwert $\frac{a+b}{2}$ nimmt, so spricht man von «Intervallhalbierung».

Aufgabe A11 Bestimmen Sie mit dem Intervallschachtelungsverfahren 17.8.22 eine (und genauer die einzige) Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{100}x^3 - 2$$

auf eine Nachkommastelle genau. Wer mag, darf gerne mehr Nachkommastellen bestimmen oder ein kleines Computerprogramm schreiben, dass dies erledigt.

Bemerkung: Ich glaube nicht, dass man die Nullstelle «exakt» angeben kann (also als Ausdruck, der aus gewissen wohlbekannten Zahlen die Nullstelle mit Hilfe der Grundrechenarten und Wurzeln etc. berechnet).

Satz 17.8.23 Satz vom Maximum und vom Minimum (vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_vom_Minimum_und_Maximum, Illustration!

Sei f eine stetige reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind. Dann gilt: Die Funktion f ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.
Dies bedeutet: Es gibt reelle Zahlen $\overline{x}$ und $\underline{x}$, so dass $f(\overline{x}) \geq f(x) \geq f(\underline{x})$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. D. h. f nimmt bei $\overline{x}$ seinen maximalen Wert an und bei $\underline{x}$ seinen minimalen Wert. (Diese beiden Funktionswerte sind dann obere und untere Schranke von f.)
(Nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte zwischen $f(\overline{x})$ und $f(\underline{x})$ ebenfalls von der Funktion getroffen.)

17.8.24. Insbesondere kann eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ nicht «nach Unendlich abhauen».

Die Aussage wird falsch, wenn man nicht darauf besteht, dass das Intervall $[a, b]$ $\boxed{\text{abgeschlossen}}$ ist. Gegenbeispiele:

- Die Funktion $f(x) = x$ auf $(0, 1)$ ist stetig, nimmt aber weder Maximum noch Minimum an (ist aber beschränkt).
- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ ist stetig, nimmt aber kein Maximum an (sie «haut nach Unendlich ab für $x \to 0$») .
- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ ist stetig, nimmt aber weder Maximum noch Minimum an.

Satz 17.8.25 Satz von Heine (über gleichmässige Stetigkeit) (vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Heine)

Sei f eine stetige reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind.
Dann ist f sogar **gleichmässig stetig**: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_0, x_1 \in [a, b]$ aus $|x_1 - x_0| < \delta$ bereits $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt.
Dies ist deutlich stärker als die ε-δ-Definition der Stetigkeit an allen Stellen: Dort darf δ sowohl von ε als auch von der Stelle x_0 abhängen. Bei der gleichmässigen Stetigkeit darf δ nur von ε abhängen: Es gibt also ein «globales» δ, das es für alle Stellen x_0 tut.

17.9 Einige Bemerkungen zu Quantoren in der Mathematik

17.9.1. In den Definitionen der Begriffe «Häufungspunkt» 17.3.3 und «Grenzwerts» 17.3.5 kamen Formulierungen wie «für alle …» und «es gibt …» vor. Wir nehmen dies zum Anlass für einige allgemeine Bemerkungen zu Quantoren.

17.9.2. In der Mathematik kommen häufig Aussagen mit Quantoren vor.

- **All-Quantor**: «für jedes …»; «für alle …»
  mathematische Schreibweise: $\forall$ (umgedrehtes A), Sprechweise «für alle»; Beispiel: «$\forall \varepsilon > 0 \ldots$».
- **Existenz-Quantor**: «es gibt ein …»; «es existiert ein …»
  Damit ist in der Mathematik stets gemeint: «es gibt **mindestens** ein …». Sonst sagt man «es gibt **genau** ein …».
  mathematische Schreibweise $\exists$ (umgedrehtes E), Sprechweise «es gibt»; Beispiel: «$\exists N = N(\varepsilon)$ mit …».

Hierbei ist die Art des Quantors und die Reihenfolge, in der diese Quantoren auftauchen, enorm wichtig.

(Ähnliches gilt in juristischen Texten und in allen Bereichen, in denen genau formuliert und gearbeitet wird. In der Politik und oft auch im normalen Leben sind sehr viele «Für alle»-Aussagen falsch («Alle Leute profitieren von diesem Gesetz.»).)

Wer Aussagen mit Quantoren nicht genau liest bzw. nicht genau aufpasst, wenn er solche Aussagen formuliert, macht leicht Fehler.

Merke 17.9.3

Wie oben bereits erklärt, bedeutet der Existenz-Quantor «es gibt ein» in der Mathematik stets «es gibt **mindestens** ein».

Beispiele 17.9.4 (Unterschied zwischen All-Quantor und Existenz-Quantor)**.**

(a)
- Es gibt einen Schüler, der eine 6 in Mathematik hat.
  (Es kann auch zwei oder drei Schüler geben, die eine 6 haben; auch alle Schüler können eine 6 haben. Die Aussage bedeutet nur, dass es mindestens einen solchen Schüler gibt.)
- Alle Schüler haben eine 6 in Mathematik.

(b)
- Ein Mann raucht. Mögliche Formulierung mit Existenzquantor: Es gibt einen Mann, der raucht. Oder: Es gibt eine Person, die ein Mann ist und raucht.
- Alle Männer rauchen. Mögliche Formulierung mit Allquantor: Für alle Männer P gilt: P raucht. Oder (mit «Mann-Sein» als Bedinung): Für alle Personen P gilt: Wenn P ein Mann ist, so raucht P.

Beispiel 17.9.5 (Reihenfolge bei All- und Existenz-Quantor)**.** Wenn in einer Aussage sowohl ein All-Quantor als auch ein Existenz-Quantor vorkommt, so ist die Reihenfolge äusserst wichtig.

- Es gibt eine Person A, so dass für alle Personen B gilt: Person A liebt Person B.
- Für alle Personen B gibt es eine Person A, so dass gilt: Person A liebt Person B.

Beispiel 17.9.6. Es ist wichtig, Quantoren zu verwenden: Der Satz des Pythagoras wird manchmal nachlässig so formuliert:

- In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a, b und Hypotenuse c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Diese Formulierung ist schlecht, denn sie lässt (mindestens) die folgenden zwei Interpretationen zu:

- (hoffentlich gemeint:) «In einem **beliebigen** rechtwinkligen Dreieck …» (versteckter All-Quantor, «Für jedes/alle rechtwinklige(n) Dreiecke …» oder «In jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck …»).
- (hoffentlich nicht gemeint:) «Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck …» (Existenz-Quantor).

Aufgabe A12 Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist oder ob sie nicht sinnvoll ist.

Hinweis: «All»-Aussagen kann man durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegen.

(a) Geometrisches:
  (i) Für alle Dreiecke ABC gilt $a^3 + b^3 = c^3$ (mit den üblichen Benennungen der Seiten).
  (ii) Es gibt ein Dreieck ABC mit $a^3 + b^3 = c^3$.

(iii) Für jedes Dreieck gilt: Je zwei Seiten sind zusammengenommen länger als die dritte Seite.
Damit ist ausgeschreiben gemeint: Sind a, b und c die drei Seiten des Dreiecks, so gelten $a+b \geq c$ und $b+c \geq a$ und $c+a \geq b$.

(iv) In jedem Viereck schneiden sich die vier Höhen in genau einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt.

(b) Arithmetisches:

(i) Für alle reellen Zahlen a, b gilt $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

(ii) Es gibt reelle Zahlen a, b mit $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

(iii) Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

(iv) Es gibt eine reelle Zahl a mit $\sqrt{a^2} = -a$.

(v) Es gibt eine reelle Zahl a mit $\sqrt{a^2} = a$.

(vi) Es gibt eine reelle Zahl x mit $e^x = -2$.

(vii) Für alle reellen Zahlen x gilt $e^x \geq 1$.

(viii) Für jede reelle Zahl r gilt $\sqrt{r} \geq 0$.

17.10 Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

17.10.1. Privatkommentar: Ist zwar nett, aber ist es wirklich lehrreich für Folgen und Reihen? Kann natürlich alle Strecken, die Achilles in Zenons Überlegung sukzessive läuft, als geometrische Folge nehmen und dann die Reihe dazu betrachten. Ähnlich für die jeweiligen Zeiten.

Finde ich aber nicht wirklich erhellend.

Beispiel 17.10.2 (Paradoxon von Achilles und der Schildkröte)**.** Der für seine Schnelligkeit berühmte Achilles läuft einen Wettlauf gegen eine viel langsamere Schildkröte. Der Gerechtigkeit wegen bekommt die Schildkröte eine Vorsprung.

Zenon argumentiert nun, dass Achilles die Schildkröte nie einholen kann: Wenn Achilles den Startpunkt P_0 der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon am Punkt P_1 angekommen. Wenn Achilles den Punkt P_1 erreicht, ist die Schildkröte schon am Punkt P_2 angekommen. Undsoweiter.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass Achilles mit der Geschwindigkeit $v_A = 10\,\mathrm{m/s}$ läuft und die Schildkröte mit der Geschwindigkeit $v_K = 1\,\mathrm{m/s}$, und dass die Schildkröte eine Vorsprung von $10\,\mathrm{m}$ bekommt.

Leicht berechnet man die Zeit, zu der Achilles die Schildkröte einholt. Die von Achilles bzw. Kröte zurückgelegten Strecken zur Zeit t sind gegeben durch $s_A(t) = v_A t$ und $s_K = v_K t$. Die Zeit t der Überholvorgangs ist die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} s_A &= 10 + s_K \\ v_A t &= 10 + v_K t \\ 10t &= 10 + t \\ 9t &= 10 \\ t &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Also überholt Achilles die Schildkröte nach $\frac{10}{9} = 10 \cdot 0.111\ldots = 1.111\ldots = 1.\overline{1}$ Sekunden.

Zenons Argument liefert die folgenden Daten:

- Zur Zeit $t_0 = 0$ gelten $s_A = 0$ und $s_K = 10$.
- Zur Zeit $t_1 = 1$ gelten $s_A = 10$ und $s_K = 11$.
- Zur Zeit $t_2 = 1.1$ gelten $s_A = 11$ und $s_K = 11.1$.
- Zur Zeit $t_3 = 1.11$ gelten $s_A = 11.1$ und $s_K = 11.11$.
- etc.

Man sieht nun sofort, dass Zenon nur Zeiten betrachtet, die echt kleiner als $\frac{10}{9} = 1.\overline{1}$ sind.

Ähnlich könnte man argumentieren, dass der Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte stets mindestens $9\,\mathrm{m}$ beträgt, oder auch mindestens $9.9999\,\mathrm{m}$.

BY-SA

17.11 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

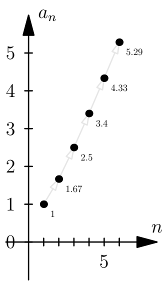
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-loesungen-zu-leitprogramm

Im Leitprogramm starten Folgen beim Index $n = 1$. Wir folgen hier dieser Konvention.

Lösung (Beispiel 1)**.**

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$$



- alternierend: nein, denn alle Folgeglieder sind positiv, siehe nächster Punkt.
- oben/unten beschränkt: nach unten beschränkt durch 1 (Beweis folgt); nach oben nicht beschränkt (Beweis siehe unten bei bestimmter Divergenz gegen ∞).
  Beweis: Zu zeigen ist für alle $n \geq 1$:
  (Erinnerung: Beim Multiplizeren einer Ungleichung mit einer positivem Zahl ändert sich das Vergleichszeichen nicht. Beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl dreht es sich. Analog beim Dividieren = Multiplizieren mit Kehrwert.)

$$\begin{aligned} & a_n = \frac{n^2+1}{n+1} \geq 1 && \mid \text{mal } n+1>0 \\ \iff \quad & n^2+1 \geq n+1 && \\ \iff \quad & n^2 \geq n && \mid \text{Division durch } n>0 \\ \iff \quad & n \geq 1 && \end{aligned}$$

  Letzteres gilt, also auch ersteres.
- Monotonie: streng monoton wachsend:
  Beweis: Zu zeigen ist für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \geq a_n && \\ \iff \quad & \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1} \geq \frac{n^2+1}{n+1} && \\ \iff \quad & \frac{n^2+2n+2}{n+2} \geq \frac{n^2+1}{n+1} && \mid \text{mal } n+2>0, \text{ mal } n+1>0 \\ \iff \quad & (n^2+2n+2)(n+1) \geq (n^2+1)(n+2) && \\ \iff \quad & n^3+3n^2+4n+2 \geq n^3+2n^2+n+2 && \\ \iff \quad & n^2+3n \geq 0 && \mid \text{Division durch } n>0 \\ \iff \quad & n+3 \geq 0 && \end{aligned}$$

  Letzteres gilt, also auch ersteres.

BY-SA

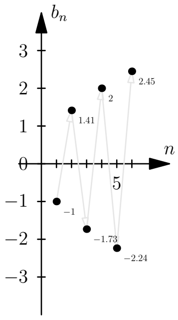
- übertrifft alle Schranken: ja, sogar bestimmte Divergenz gegen $+\infty$:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2+1}{2n} > \frac{n^2}{2n} + \frac{1}{2n} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

  und das wird grösser als jede reelle Zahl, also bestimmte Divergenz nach ∞.
- beidseits beschränkt: falsch, nur nach unten beschränkt, siehe oben
- periodisch: nicht periodisch, da streng monoton wachsend.
- Häufungspunkte: keine Häufungspunkte, da bestimmte Divergenz nach ∞.

Lösung (Beispiel 2).

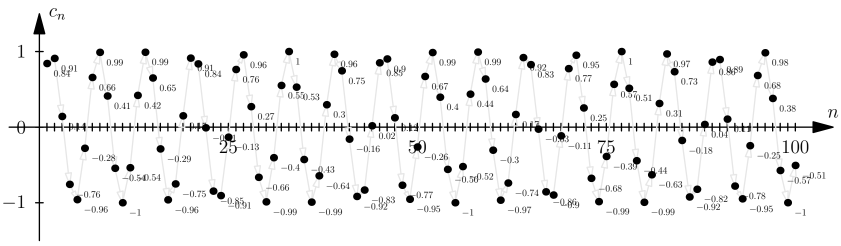
$$b_n = (-1)^n \sqrt{n}$$



- alternierend: ja, $(-1)^n$ ist alternierend, $\sqrt{n} > 0$ (da die Folge beim Index 1 beginnt).
- oben/unten beschränkt: Weder noch, da $\sqrt{n}$ gegen unendlich geht.
- Monotonie: weder monoton wachsend noch fallend, da alternierend.
- übertrifft alle Schranken: ja
- beidseits beschränkt: Nein.
- periodisch: Nein, denn alle Folgeglieder sind verschieden:
  Dazu genügt es zu zeigen, dass aus $a_n = a_m$ folgt, dass $n = m$.
  Gelte $a_n = a_m$, also $(-1)^n\sqrt{n} = (-1)^m\sqrt{m}$. Quadrieren liefert $n = m$.
- Häufungspunkte: nein, da $\sqrt{n}$ gegen unendlich geht.

Lösung (Beispiel 3).

$$c_n = \sin(n)$$



- alternierend: nein
- oben/unten beschränkt: ja, durch -1 nach unten und durch $+1$ nach oben (da der Sinus diese Eigenschaft hat).
- Monotonie: nein
- übertrifft alle Schranken(?): nein
- beidseits beschränkt: ja
- periodisch: nein
  Wir zeigen stärker, dass alle c_n verschieden sind.
  Gelte $c_n = c_m$, also $\sin(n) = \sin(m)$.
  Ist α ein beliebiger Winkel, so haben genau die folgenden Winkel denselben Sinuswert:
  - alle Winkel der Form $\alpha + z \cdot 2\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$;
  - alle Winkel der Form $\pi - \alpha + z \cdot 2\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$.

Aus $\sin(n) = \sin(m)$ folgt also

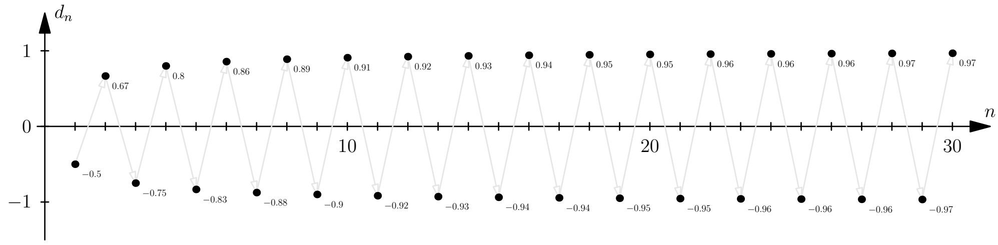
- $n = m + 2\pi z$ für eine ganze Zahl z (was im Fall $z \neq 0$ zum Widerspruch $\pi = \frac{n-m}{2z}$ führt (denn π ist nicht rational), so dass also $z = 0$ gelten muss und damit $n = m$), oder
- $n = \pi - m + 2\pi z$ für eine ganze Zahl z (was zum Widerspruch $\pi = \frac{n-m}{2z+1}$ führt (denn π ist nicht rational).

Also muss $m = n$ gelten.

- Häufungspunkte: alle Elemente von $[-1, 1]$, vgl. Erklärungsversuch in Beispiel 17.3.4

Lösung (Beispiel 4)**.**

$$d_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$



- alternierend: ja, denn $(-1)^n$ ist alternierende und $\frac{n}{n+1} > 0$.
- oben/unten beschränkt: ja, da $\frac{n}{n+1} \leq 1$. Damit nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt.
- Monotonie: nein, da alternierend.
- übertrifft alle Schranken: nein, da beidseits beschränkt.
- beidseits beschränkt: Ja, siehe oben.
- periodisch: Nein: Sonst müsste zumindest $d_n = d_m$ für verschiedene $n \neq m$ gelten. Wegen des Vorzeichens müssen dann n und m entweder beide gerade oder ungerade sein und dann $\frac{n}{n+1} = \frac{m}{m+1}$ gelten. Dazu äquivalent ist $n(m+1) = m(n+1)$, dazu äquivalent $n = m$. Also alle Folgeglieder verschieden, also sicher nicht periodisch.
- Häufungspunkte: Ja, $+1$ und -1.
  Es gilt
  $$\frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

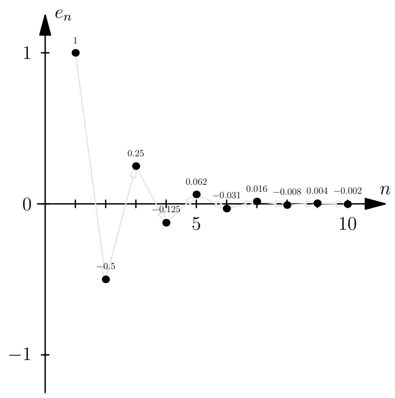
Also konvergiert

- die Teilfolge (d_{2n}) (bestehend aus den Folgegeliedern mit geradem Index) gegen 1,
- die Teilfolge (d_{2n-1}) (bestehend aus den Folgegeliedern mit ungeradem Index) gegen -1.

Also sind $+1$ und -1 die einzigen Häufungspunkte.

Lösung (Beispiel 5)**.**

$$e_n = (-2)^{1-n}$$

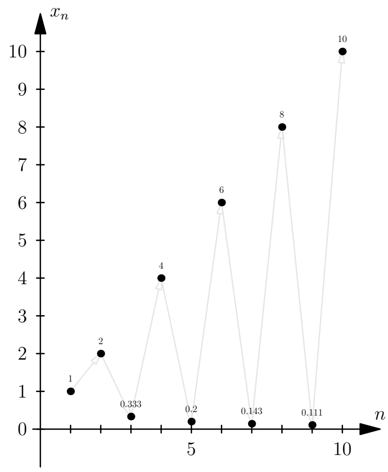


- alternierend: ja, da $(-1)^{1-n}$ alternierend und $2^{1-n} > 0$.

- oben/unten beschränkt: ja, liegt zwischen $-\frac{1}{2}$ und 1.
  Beweis: Obere Schranke 1:
  $$e_n = (-2)^{1-n} = (-1)^{1-n} \cdot 2^{1-n} \leq 2^{1-n} \leq 2^0 = 1$$
  (Die letzte Ungleichung verwendet, dass 2^x monoton wachsend ist: Aus $1 \leq n$ folgt $1-n \leq 0$ und mit monotonem Wachstum $2^{1-n} \leq 2^0 = 1$.)
  Beweis: Untere Schranke $-\frac{1}{2}$:
  $$e_n = (-2)^{1-n} = (-1)^{1-n} \cdot 2^{1-n} \begin{cases} \text{(falls } n \text{ ungerade:)} & = 2^{1-n} > 0 \\ \text{(falls } n \text{ gerade:)} & = -2^{1-n} \geq -2^{1-2} = -2^{-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{weil } 2^x \text{ monoton wachsend} \end{cases}$$
  Insgesamt also $e_n \geq -\frac{1}{2}$.
- Monotonie: nein, da alternierend.
- übertrifft alle Schranken: nein
- beidseits beschränkt: ja, siehe oben
- periodisch: nein (da keine zwei Folgeglieder gleich: Aus $e_n = e_m$ folgt $(-2)^{1-n} = (-2)^{1-m}$; Quadrieren liefert $4^{1-n} = 4^{1-m}$, was auf $n = m$ führt (etwa per Logarithmus).)
- Häufungspunkte: nur 0: Genauer konvergiert
  $$e_n = (-2)^{1-n} = (-1)^{1-n} \cdot 2^{1-n} = (-1)^{1-n} \cdot \frac{2}{2^n}$$
  gegen Null. Damit ist der Grenzwert der einzige Häufungspunkt.

Lösung (Aufabe 2)**.**

$$x_n = n^{(-1)^n}$$

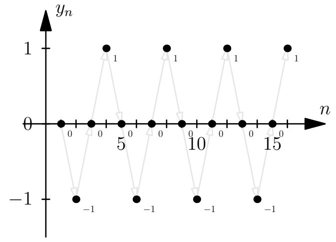


- alternierend: nein, alles positiv
- oben/unten beschränkt: nur nach unten beschränkt durch 0:
  Die Teilfolge der Glieder mit ungeradem Index ist $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ etc. Sie konvergiert gegen 0, ist aber stets positiv. Sie ist beschränkt durch 1 nach oben und 0 nach unten.
  Die Teilfolge der Glieder mit geradem Index ist $2, 4, 6, 8, \ldots$ etc. Sie divergiert bestimmt gegen ∞, ist also nicht nach oben beschränkt (aber nach unten durch 2).
  Die gesamte Folge ist also durch 0 nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt.
- Monotonie: nein, da ab Index 2 abwechselnd grösser/kleiner als 1.
- übertrifft alle Schranken: alle «oberen Schranken» übertrifft sie (jedenfalls die Teilfolge mit geraden Indizes).
- beidseits beschränkt: nein
- periodisch: nein, keine zwei Folgeglieder gleich:
  Denn $x_n = x_m$ bedeutet $n^{(-1)^n} = m^{(-1)^m}$. Quadrieren liefert
  $$\left(n^{(-1)^n}\right)^2 = n^{2(-1)^n} = n = \left(m^{(-1)^m}\right)^2 = m^{2(-1)^m} = m$$
  also $n = m$.

- Häufungspunkte: ja, 0
  Das folgt aus der obigen Betrachtung der beiden Teilfolgen.

Lösung (Aufgabe 3)**.**

$$y_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$



Beachte: Die ersten Folgeglieder sind $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ undsoweiter.

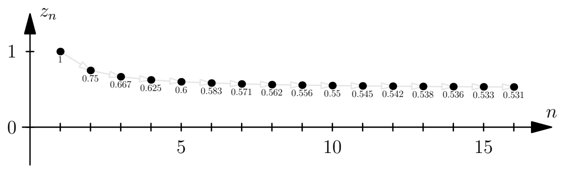
- alternierend: nein (da 0 als Folgeglied auftaucht).
- oben/unten beschränkt: alle Folgeglieder in $[-1, 1]$ (da der Kosinus diese Menge als Bildmenge hat).
- Monotonie: nein
- übertrifft alle Schranken: nein, beidseits beschränkt
- beidseits beschränkt: ja
- periodisch: ja, Periode 4 (kleinere Periode nicht möglich nach Ermittlung der ersten Folgeglieder)

$$y_{n+4} = \cos\left((n+4) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = y_n$$

- Häufungspunkte: Ja, 0, 1, -1 (nur diese Werte werden angenommen, aber jeweils unendlich oft.

Lösung (Aufgabe 4)**.**

$$z_n = \frac{n+1}{2n}$$



- alternierend: nein, alle Folgeglieder positiv, da Zähler und Nenner von $\frac{n+1}{2n}$ positiv.
- oben/unten beschränkt: nach unten durch $\frac{1}{2}$ beschränkt, nach oben durch 1, denn

$$z_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

  bzw.

$$z_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

- Monotonie: Ja, streng monoton fallend:
  Beweis: Zu zeigen ist für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& & z_{n+1} &< z_n & \\
&\iff & \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} &< \frac{n+1}{2n} & \quad | \text{ mal } 2 \\
&\iff & \frac{n+2}{n+1} &< \frac{n+1}{n} & \quad | \text{ mal } n(n+1) > 0 \\
&\iff & (n+2)n &< (n+1)^2 & \\
&\iff & n^2 + 2n &< n^2 + 2n + 1 & \\
&\iff & 0 &< 1 &
\end{aligned}$$

  Letzteres gilt, also auch ersteres.

- übertrifft alle Schranken: nein, da beidseits beschränkt, siehe oben.
- beidseits beschränkt: ja, siehe oben.
- periodisch: nein, da streng monoton fallend.
- Häufungspunkte: $\frac{1}{2}$ einziger Häufungspunkt, denn

$$z_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{2n}{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } n \to \infty$$

also ist $\frac{1}{2}$ der Grenzwert der Folge und damit der einzige Häufungspunkt.

Lösung zu A2 ex-grenzwert-definition-mit-falschen-quantoren

Jede Folge mit Krenzfert a ist ab einem geeigneten Index N konstant mit Wert a.

Insofern könnte man solche Folgen sinnvollerweise als «langfristig konstant» bezeichnen. Alternativen: «auf lange Sicht konstant», «nach endlich vielen Schritten konstant», «essentiell konstant» etc.

Lösung zu A3 ex-quantoren-wahr-oder-falsch-folgen

Siehe Eintragungen in der Lehrerversion des Skripts.

(Gegenbeispiele und Plausibilitätsargumente fehlen.)

Lösung zu A4 ex-grenzwert-und-ab-wann-naeher-als-ein-hundertstel

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

Der Grenzwert ist $a = 0$.

Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 0.01 = \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & 100 < n \end{aligned}$$

Lösung: Ab dem Index $N = 101$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} - 2$

Der Grenzwert ist $a = -2$.

Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < 0.01 = \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \left|\frac{1}{n^2} - 2 - (-2)\right| < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \left|\frac{1}{n^2} - 2 + 2\right| < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \left|\frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100} \\ \iff \quad & 100 < n^2 \\ \iff \quad & 10 < n \end{aligned}$$

Lösung: Ab dem Index $N = 11$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
Der Grenzwert ist $a = 0$.
Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned}
&& |a_n - a| < 0.01 = \frac{1}{100} \\
\iff && \left|\frac{1}{n(n+1)} - 0\right| < \frac{1}{100} \\
\iff && \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| < \frac{1}{100} \\
\iff && \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{100} \\
\iff && 100 < n(n+1)
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt offensichtlich für alle $n \geq 10$.
Lösung: Ab dem Index $N = 10$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

(d) $a_n = \frac{3n^2-1}{4n^2+2}$
Der Grenzwert ist $a = \frac{3}{4}$ (Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$).
Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned}
&& |a_n - a| < 0.01 = \frac{1}{100} && \\
\iff && \left|\frac{3n^2-1}{4n^2+2} - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{100} && \\
\iff && \left|\frac{4(3n^2-1) - 3(4n^2+2)}{4(4n^2+2)}\right| < \frac{1}{100} && \\
\iff && \left|\frac{12n^2 - 4 - 12n^2 - 6}{4(4n^2+2)}\right| < \frac{1}{100} && \\
\iff && \left|\frac{-10}{4(4n^2+2)}\right| < \frac{1}{100} && \text{Achtung, Argument der Betragsfunktion negativ} \\
\iff && \frac{10}{4(4n^2+2)} < \frac{1}{100} && \text{Multiplikation mit Nenner, der positiv! Vergleichszeichen bleibt erhalten} \\
\iff && 1000 < 4(4n^2+2) && \\
\iff && 1000 < 16n^2 + 8 && \\
\iff && 992 < 16n^2 && \\
\iff && \frac{992}{16} == 62 < n^2 && \text{beachte, dass stets } n \geq 0 \\
\iff && \sqrt{62} = 7.874\ldots < n &&
\end{aligned}$$

Lösung: Ab dem Index $N = 8$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

(e) $a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$
Der Grenzwert ist $a = \frac{1}{2}$ (denn der Grenzwert des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen ist $\frac{1}{4}$, per Erweitern mit $\frac{1}{n}$).
Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned}
&& |a_n - a| < 0.01 = \frac{1}{100} \\
\iff && \left|\sqrt{\frac{n}{4n+1}} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

Das Argument $\sqrt{\frac{n}{4n+1}} - \frac{1}{2}$ der Betragsfunktion ist negativ, denn $\frac{n}{4n+1} < \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$ und somit $\sqrt{\frac{n}{4n+1}} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (Wurzelfunktion streng monoton wachsend). Also können wir die obige Folge von Äquivalenzumformungen wie folgt fortsetzen.

$$\begin{aligned}
\iff \quad & -\left(\sqrt{\frac{n}{4n+1}} - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{100} \\
\iff \quad & -\sqrt{\frac{n}{4n+1}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{100} \\
\iff \quad & \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100} < \sqrt{\frac{n}{4n+1}} && \text{Quadrieren Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv} \\
\iff \quad & \frac{49^2}{10000} < \frac{n}{4n+1} \\
\iff \quad & 49^2(4n+1) < 10000n \\
\iff \quad & 9604n + 2401 < 10000n \\
\iff \quad & 2401 < 396n \\
\iff \quad & \frac{2401}{396} = 6.06\ldots < n
\end{aligned}$$

Lösung: Ab dem Index $N = 7$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

(f) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

Der Grenzwert ist $a = e^0 = 1$ (da e^x stetig ist (Begriff eigentlich noch nicht bekannt) und $\frac{1}{n} \to 0$).
Wir ermitteln nun, für welche $n \in \mathbb{N}$ die gewünschte Bedingung $|a_n - a| < 0.01$ gilt, indem wir diese durch Äquivalenzumformungen nach n auflösen.

$$\begin{aligned}
& |a_n - a| < 0.01 \\
\iff \quad & \left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right| < 0.01 && \text{beachte, dass } e^{\frac{1}{n}} > 1 \\
\iff \quad & e^{\frac{1}{n}} < 1.01 && \text{Nimm ln, Logarithmus streng monoton wachsend} \\
\iff \quad & \frac{1}{n} < \ln(1.01) && \text{beachte, dass } \ln(1.01) > 0\text{, also Vergleichszeichen erhalten beim Dividieren} \\
\iff \quad & \frac{1}{\ln(1.01)} = 100.499\ldots < n
\end{aligned}$$

Lösung: Ab dem Index $N = 101$ liegt die Folge näher als 0.01 beim Grenzwert.

Lösung zu A5 ex-grenzwert-quotient-von-polynomen

Lösung jeweils durch Erweitern mit $\frac{1}{n^p}$, wobei p der höchste Exponent im Nenner ist, und Anwenden der Grenzwertsätze.

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$
konvergent gegen $\frac{1}{2}$

(b) $a_n = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$
konvergent gegen 1

(c) $a_n = \frac{1+n^3}{n^3-1}$
konvergent gegen 1

(d) $a_n = \frac{n^3+1}{n^4+1}$
konvergent gegen 0

(e) $a_n = \frac{2n^3-2}{n-2}$
divergent, bestimt divergent gegen $+\infty$

(f) $a_n = \frac{2n^3-3n+1}{4n+n^3+2}$
konvergent gegen 2

(g) $a_n = \frac{4n^4-3n^2+1}{2n^2-1}$
divergent, bestimmt divergent gegen $+\infty$

© BY-SA
I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

(h) $a_n = \frac{3n^3+7n}{4n^4-5n^2+6}$
konvergent gegen 0

Lösung zu A6 ex-grenzwert-quotient-von-polynomen-in-wurzel-n

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+3}$
konvergent gegen $\frac{1}{2}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
konvergent gegen 0 (Erweitern mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, dritte binomische Formel)

(c) $a_n = \frac{n+\sqrt{n}+1}{\sqrt{1+n^2}}$
konvergent gegen 1 (Erweitern mit $\frac{1}{n} = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}$)

(d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$
Hinweis: $\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{2}{6}} = (\sqrt[6]{n})^2$ und ähnlich kann man $\sqrt{n}$ als Potenz von $\sqrt[6]{n}$ ausdrücken.
konvergent gegen -1 (Erweitern mit $\frac{1}{(\sqrt[6]{n})^3}$)

(e) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n + 1$
konvergent gegen 1 (beachte $a_n = \sqrt{n^2+1} - n + 1 = \sqrt{n^2+1} - (n-1)$, Erweitern mit $\sqrt{n^2+1} + (n-1)$, dritte binomische Formel)

(f) $a_n = \sqrt{(3n+2)(12n-1)} - 6n$
konvergent gegen $\frac{7}{4}$ (Erweitern mit $\sqrt{(3n+2)(12n-1)} + 6n$, dritte binomische Formel)

(g) $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{\sqrt{n}\sqrt{n^5+1}}$
konvergent gegen 1 (Erweitern mit $\frac{1}{n^3} = \sqrt{\frac{1}{n^6}}$, Nenner als $\sqrt{n^6+n}$ schreiben)

(h) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2+1}$
divergent, bestimmt divergent gegen $-\infty$.

Lösung zu A7 ex-monotonie-bei-einfachen-folgen-feststellen

(a) (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n+2}$
Das eingerahmte, rote Vergleichszeichen wird erst nach der letzten Äquivalenzumformung herausgefunden.

$$
\begin{aligned}
& & a_n \boxed{<} a_{n+1} \\
&\iff & \frac{n}{n+2} \boxed{<} \frac{n+1}{n+1+2} \\
&\iff & \frac{n}{n+2} \boxed{<} \frac{n+1}{n+3} \\
&\iff & n(n+3) \boxed{<} (n+1)(n+2) \\
&\iff & n^2+3n \boxed{<} n^2+3n+2 \\
&\iff & 0 \boxed{<} 2
\end{aligned}
$$

Also streng monoton wachsend.

(b) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$

$$
\begin{aligned}
& & a_n \boxed{>} a_{n+1} \\
&\iff & \frac{1}{n} \boxed{>} \frac{1}{n+1} \\
&\iff & n+1 \boxed{>} n \\
&\iff & 1 \boxed{>} 0
\end{aligned}
$$

Also streng monoton fallend.

(c) (a_n) mit $a_n = \frac{3-n}{n+7}$

$$
\begin{aligned}
& a_n \boxed{>} a_{n+1} \\
\iff\quad & \frac{3-n}{n+7} \boxed{>} \frac{3-(n+1)}{n+1+7} \\
\iff\quad & \frac{3-n}{n+7} \boxed{>} \frac{2-n}{n+8} \\
\iff\quad & (3-n)(n+8) \boxed{>} (2-n)(n+7) \\
\iff\quad & -n^2-5n+24 \boxed{>} -n^2-5n+14 \\
\iff\quad & 24 \boxed{>} 14
\end{aligned}
$$

Also streng monoton fallend.

(d) (a_n) mit $a_n = (-1)^n \frac{3-n}{n+7}$
Wegen des Faktors $(-1)^n$, der abwechselnd $1 = +1$ und -1 ist, ist es sehr unwahrscheinlich, dass die Folge monoton ist – man erwartet eher, dass sie alternierend ist, was auch stimmt, denn $\frac{3-n}{n+7}$ ist negativ für alle (erlaubten Indizes) $n \geq 0$. Also ist die Folge nicht monoton.
(Wer sieht, dass wir nur die als streng monoton erkannte Folge aus der vorherigen Teilaufgabe gliedweise mit $(-1)^n$ multipliziert haben, sieht hoffentlich auch sofort, dass die Folge alternierend und nicht monoton ist.)
Naives Drauflosrechnen:

$$
\begin{aligned}
& a_n \boxed{>} a_{n+1} \\
\iff\quad & (-1)^n \frac{3-n}{n+7} \boxed{>} (-1)^{n+1} \frac{2-n}{n+8}
\end{aligned}
$$

Nun möchte man vermutlich mit $(-1)^n$ multiplizieren (oder dadurch dividieren, was wegen $1 = (-1)^{2n}$ auf dasselbe herausläuft). Dabei muss man aber zwei Fälle unterscheiden:

- Ist n gerade, so ist $(-1)^n = 1$ positiv und das (noch nicht bestimmte) Vergleichseichen bleibt erhalten.
- Ist n ungerade, so ist $(-1)^n = -1$ negativ und das (noch nicht bestimmte) Vergleichseichen muss umgedreht werden.

Je nach Fall kommt man auf verschiedene Eintragungen der Box, die Folge ist also nicht monoton (Details dem Leser überlassen).

(e) etwas schwieriger: (a_n) mit $a_n = \frac{n+3}{n^2+3}$

$$
\begin{aligned}
& a_n \boxed{\geq} a_{n+1} \\
\iff\quad & \frac{n+3}{n^2+3} \boxed{\geq} \frac{n+4}{(n+1)^2+3} \\
\iff\quad & \frac{n+3}{n^2+3} \boxed{\geq} \frac{n+4}{n^2+2n+4} \\
\iff\quad & (n+3)(n^2+2n+4) \boxed{\geq} (n+4)(n^2+3) \\
\iff\quad & n^3+2n^2+4n+3n^2+6n+12 \boxed{\geq} n^3+3n+4n^2+12 \\
\iff\quad & n^3+5n^2+10n+12 \boxed{\geq} n^3+4n^2+3n+12 \\
\iff\quad & n^2+7n \boxed{\geq} 0 \\
\iff\quad & n(n+7) \boxed{\geq} 0
\end{aligned}
$$

Beachte, dass $n(n+7)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets ≥ 0 ist.

- Betrachtet man die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, so ist a_n also monoton wachsend, aber nicht streng monton wachsend (da $a_0 = a_1 = 1$).
- Betrachtet man die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, so ist a_n streng monoton wachsend, da $n(n+7) \boxed{>} 0$ für alle $n \geq 1$).

Lösung zu A8 ex-stetige-funktionen-informell

BY-SA
I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

Lösung zu A9 ex-stetige-funktionen-informell-mit-graphikrechner

Lösung zu A10 ex-stetige-funktionen-informell-definitionsmenge-vereinigung-von-intervallen

Lösung zu A11 ex-nullstellenbestimmung-mit-zwischenwertsatz
Die Nullstelle ist (laut Wolfram Alpha) ≈ 5.27429.

Lösung zu A12 ex-quantoren-wahr-oder-falsch-allgemein