Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

13 Gleichungssysteme

13.0.1. Bis jetzt haben wir meistens Gleichungen in einer Variablen betrachtet. Oft hat man es in der Praxis aber mit mehreren Gleichungen in mehreren Variablen, sogenannten **Gleichungssystemen**, zu tun. Man möchte dann herausfinden, für welche Belegungen der Variablen alle Gleichungen *gleichzeitig* gelten.

Es gibt mehrere Lösungsstrategien für Gleichungssysteme, die teilweise auch nur für gewisse Arten von Gleichungssystemen, etwa lineare Gleichungssysteme, funktionieren.

Beim Lösen von Gleichungssystemen ist es auch sehr wichtig, den Lösungsweg sorgfältig zu dokumentieren, denn sonst verliert man leicht den Überblick (welche Gleichung wurde bereits verwendet, welche Gleichung liefert eine neue Information?). In Anwendungen kommen Gleichungssysteme aus Tausenden von Gleichungen in Tausenden Variablen vor. Diese kann man nur denn mit dem Computer lösen, wenn man eine präzise beschriebene Lösungsstrategie verwendet.

13.0.2 (Graphisches Lösen von Gleichungssystemen)**.** In der Vektorgeometrie haben wir gesehen, dass zum Beispiel beim Schneiden von Geraden Gleichungssysteme auftreten. Wenn man die beteiligten Geraden einzeichnet, kann man bisweilen den Schnittpunkt durch Ablesen erraten und so das Gleichungssystem graphisch lösen; per Rechnung sollte man dann aber testen, ob die erratene Lösung wirklich das Gleichungssystem löst.

Dieses graphische Lösen bzw. Raten funktioniert meist nur bei «einfachen» Gleichungssystemen mit wenigen Variablen(z. B. zwei Gleichungen in zwei Variablen), ist im Allgemeinen aber unpraktikabel und ungenau. Darum sind wir an exakten rechnerischen Methoden interessiert.

13.1 Allgemeiner Lösungsstrategie: Elimination von Variablen

13.1.1. Allen Lösungsstrategien liegt die Idee zu Grunde, durch geeignete Umformungen eine Variable zu eliminieren (= zu beseitigen), so dass man ein Gleichungssystem in einer Variablen weniger erhält, also ein einfacheres Gleichungssystem. Dieses versucht man dann in derselben Weise zu vereinfachen.

13.2 1. Lösungsstrategie: Substitutionsverfahren (= Ersetzungsverfahren)

Algorithmus 13.2.1 Substitutionsverfahren: Auflösen und Einsetzen

Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems aus n Gleichungen in n Variablen (also gleich viele Gleichungen wie Variablen).

(1) Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf (sofern möglich).
Bemerkung: Welche Gleichung man nach welcher Variable auflöst, kann den Rechenaufwand entscheidend beeinflussen. Deswegen sollte man nicht blind drauflosrechnen, sondern etwas nachdenken und versuchen, die «einfachste» Gleichung nach der «einfachsten» Variablen aufzulösen. Übung macht den Meister.

(2) Setze das Resultat in alle anderen Gleichungen ein (damit wird eine Variable eliminiert).

(3) Das so erhaltene, neue Gleichungssystem hat eine Variable und eine Gleichung weniger. Wende auf dieses Gleichungssystem die Schritte (1), (2) und (3) an, bis nur noch eine Gleichung in einer Variablen übrigbleibt. Löse diese Gleichung.

(4) Setze die bereits bekannten Lösungen «rückwärts» ein (Resubstitution) und löse die so erhaltenen Gleichungen nach den noch zu bestimmenden Variablen auf.

13.2.2. Bei nicht-linearen Gleichungssystemen ist das Substitutionsverfahren oft die einzige sinnvolle Methode. Bei linearen Gleichungssystemen werden wir noch weitere Methoden kennenlernen, die oft mit weniger Aufwand verbunden sind.

Variante des Substitutionsverfahrens: Gleichsetzungsverfahren

Algorithmus 13.2.3 Gleichsetzungsverfahren

Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems aus 2 Gleichungen in 2 Variablen.

(1) Forme beide Gleichungen so um, dass ihre linken Seiten identisch sind und nur eine Variable enthalten, die auf den rechten Seiten nicht vorkommt.
Oft löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen auf.

(2) Setze die beiden rechten Seiten gleich und löse die so erhaltene Gleichung (in einer Variablen) auf.

(3) Setze das Ergebnis in eine der beiden Gleichungen ein und löse sie nach der anderen Variablen auf.

13.3 2. Lösungsstrategie: Additionsverfahren

13.3.1. Das Additionsverfahren ist die Standardmethode für lineare Gleichungssysteme. Es beruht auf der folgenden Beobachtung:

> Addiert (oder subtrahiert) man zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) eines linearen Gleichungssystems, so erhält man eine neue lineare Gleichung, die von jeder Lösung der beiden Gleichungen erfüllt wird.

Algorithmus 13.3.2 Additionsverfahren

(1) Bringe alle Gleichungen auf die Gestalt «Summe von Vielfachen der Variablen = Zahl».

(2) Wähle eine Variable, die du elimineren möchtest.

(3) Addiere (oder subtrahiere) jeweils geeignete Vielfache zweier Gleichungen, so dass in der Summe die gewählte, zu eliminierende Variable nicht mehr vorkommt. Ersetze eine der beiden Gleichungen durch die Summe.
Wiederhole dies so lange, bis die zu eliminierende Variable nur noch in einer Gleichung vorkommt.

(4) Die anderen Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem, das eine Gleichung weniger und eine Variable weniger enthält. Löse dieses Gleichungssystem mit den Schritten (2), (3) und (4), bis du ein einfach zu lösendes lineares Gleichungssystem erhältst (oft wird dieses aus einer Gleichung in einer Variablen bestehen). Löse dieses Gleichungssystem.

(5) Setze die bereits berechneten Lösungen «rückwärts» in geeignete Gleichungen ein und finde so Schritt für Schritt alle Lösungen.

13.4 Aufgaben

Aufgabe A1 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a) $$\begin{cases} -3x + 8y = 26 & (G_1) \\ -9x - 8y = -50 & (G_2) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -x + 10y = -61 & (G_1) \\ -6x - y = 61 & (G_2) \end{cases}$$

Aufgabe A2 Lösen Sie jeweils das angegebene lineare Gleichungssystem.
Führen Sie dann die Probe durch, ob die von Ihnen berechnete Lösung alle Gleichungen des Gleichungssystems erfüllt. Wenn nicht: Suchen Sie Ihren Fehler oder starten Sie einen neuen Lösungsversuch!

a) $$\begin{cases} -2x - 3y = -1 & (G_1) \\ 3x + 3y = -3 & (G_2) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x - 3y = -2 & (G_1) \\ -2x + 2y = -2 & (G_2) \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x - y = 1 & (G_1) \\ 5x - 2y = 1 & (G_2) \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x + 2y = -1 & (G_1) \\ x + 5y = 5 & (G_2) \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 & (G_1) \\ 4x + 2y + 3z = -4 & (G_2) \\ 2x + 4y - z = -4 & (G_3) \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} -2x - 3y + 8z = 1 & (G_1) \\ -2x - y + 4z = 3 & (G_2) \\ 4x - 6y + 3z = 1 & (G_3) \end{cases}$$

g) $$\begin{cases} -5x - 3y - 3z = 5 & (G_1) \\ -5x + 5y - z = -1 & (G_2) \\ 3x + y + z = -3 & (G_3) \end{cases}$$

h) $$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (G_1) \\ x + z = -1 & (G_2) \\ -2x + 4y - 4z = -4 & (G_3) \end{cases}$$

i) $$\begin{cases} -3a - 8b + 5c + d = -4 & (G_1) \\ a + 4b - 8c - 3d = -2 & (G_2) \\ -3a - 5b + c + d = -2 & (G_3) \\ a + 9b + 8c + 5d = -4 & (G_4) \end{cases}$$

j) $$\begin{cases} -2b + 2d = 2 & (G_1) \\ 2a + 2b + c = 1 & (G_2) \\ -4a + b - 2c - 8d = -1 & (G_3) \\ -2a + 2b + 2c - d = -2 & (G_4) \end{cases}$$

k) $$\begin{cases} a + 4b + 3c + d + 6e = -4 & (G_1) \\ 3a - 2b + 2c + 4e = 3 & (G_2) \\ 3a - 5b - 5c - 6d - 4e = -2 & (G_3) \\ -a - 2b - 5c + 3d - 9e = -1 & (G_4) \\ 2a - 3b + c + e = 2 & (G_5) \end{cases}$$

l) $$\begin{cases} -3a - 3b - c + d - 2e = 3 & (G_1) \\ -5a - 4b - c + d - e = -2 & (G_2) \\ 4a - 2b + 3c + 2d - e = 2 & (G_3) \\ 4a + 4b - 5c + 5d + e = -2 & (G_4) \\ 5a + 2c + 3d + e = -3 & (G_5) \end{cases}$$

Merke 13.4.1

Im Allgemeinen gilt: Wenn ein lineares Gleichungssystem aus **genau so vielen Gleichungen** besteht, **wie** es **Variablen** enthält, so hat es **genau eine** Lösung. Symbolisch:

$$\text{Anzahl der Gleichungen} = \text{Anzahl der Variablen} \overset{\text{im Allgemeinen}}{\Longrightarrow} \text{genau eine Lösung}$$

Dies haben Sie vermutlich beim Lösen der obigen Aufgaben bemerkt.
Abstakt kann man so argumentieren: In den beiden oben erklärten Verfahren wird jeweils beim Eliminieren einer Variablen die Anzahl der betrachteten linearen Gleichungen um eins verringert. Am Ende erhält man eine lineare Gleichung in einer Variablen, die im Allgemeinen genau eine Lösung hat.

13.4.2. In Spezialfällen kann es aber trotzdem keine oder unendlich viele Lösungen geben (obwohl Anzahl der Variablen = Anzahl der Gleichungen). Beispiele dafür sollen Sie in der folgenden Aufgabe A3 finden.

Aufgabe A3

(a) Finden Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem, das aus zwei Gleichungen in zwei Variablen x und y besteht (also Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Variablen), das
- keine Lösung hat;
- unendliche viele Lösungen hat;
- (wie erwartet) genau eine Lösung hat.

(b) Finden Sie eine lineare Gleichung in der Variablen x (= was dasselbe ist wie ein lineares Gleichungssystem, das aus einer Gleichung in einer Variablen x besteht) (also wiederum Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Variablen), das
- keine Lösung hat;
- unendliche viele Lösungen hat;
- (wie erwartet) genau eine Lösung hat.

13.5 Cramersche Lösungsformel für 2×2-Gleichungssysteme (d. h. 2 Gleichungen, 2 Variablen)

13.5.1. Erklärung des Beweises der Cramerschen Regel (Satz 13.5.3) an der Tafel, vgl. Aufschrieb im Anhang. Im Anschluss daran Definition 13.5.2 der Determinante.

Definition 13.5.2 2×2-Matrix, Determinante einer solchen Matrix

Schreibt man vier reelle Zahlen a, b, c, d in der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

so nennt man dies eine 2×2-**Matrix** (2 Zeilen, 2 Spalten). Die **Determinante** einer solchen quadratischen Matrix ist wie folgt definiert:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ✎ ad - bc$$

$$= _{\text{Merkhilfe}} \text{Diagonale minus Nebendiagonale}$$

$$= \text{Produkt der Einträge auf der Diagonalen minus Produkt der Einträge auf der Nebendiagonalen}$$

Der Name *Determinante* (von lateinisch «determinare» abgrenzen, bestimmen) kommt daher, dass die Determinante bestimmt, ob ein Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat oder nicht (siehe Satz 13.5.3).

Satz 13.5.3 Cramerscher Regel (benannt nach dem Genfer Mathematiker Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Das lineare Gleichungssystem mit $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases} \quad \text{bzw. symbolisch} \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array}\right)$$

hat

- im Fall ✎ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{pd - bq}{ad - bc} \qquad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

- sonst ✎(also im Fall $ad - bc = 0$) entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Beweis. Herleitung der Lösungsformeln: Wir nehmen an, dass das gegebene Gleichungssystem für geeignete Werte von x und y gilt. Wir multiplizieren die erste Gleichung $ax + by = p$ unseres Gleichungssystems mit d und die zweite Gleichung $cx + dy = q$ mit b und erhalten ✎

$$adx + bdy = dp$$
$$bcx + bdy = bq$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist

$$(ad - bc)x = dp - bq$$

Falls $ad - bc \neq 0$ gilt, können wir durch $ad - bc$ dividieren und erhalten

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$$

In ähnlicher Weise findet man eine Formel für y (bitte selbst versuchen!). Das Ergebnis ist ✎

$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Nun muss man strenggenommen prüfen, dass unser Lösungskandidat wirklich eine Lösung des Gleichungssystems ist (damit gezeigt ist, dass es im Fall $ad - bc \neq 0$ genau eine Lösung gibt). Wir zeigen die erste Gleichung $ax + by = p$: ✎

$$\begin{aligned} ax + by &= a \cdot \frac{dp - bq}{ad - bc} + b \cdot \frac{aq - cp}{ad - bc} = \frac{adp - abq}{ad - bc} + \frac{abq - bcp}{ad - bc} \\ &= \frac{adp \cancel{- abq} \cancel{+ abq} - bcp}{ad - bc} = \frac{adp - bcp}{ad - bc} = p \cdot \frac{ad - bc}{ad - bc} = p \end{aligned}$$

Der Leser zeige die zweite Gleichung ebenso als Aufgabe.

Was passiert im Fall $ad - bc = 0$ bzw. gleichbedeutend im Fall $ad = bc$? Wir führen in diesem Fall eine weitere Fallunterscheidung durch:

- Fall 1: Alle Zahlen a, b, c, d sind Null, d. h. $a = b = c = d = 0$: Dann lautet unser Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= p \\ 0x + 0y &= q \end{aligned} \qquad \text{oder kurz} \qquad \begin{aligned} 0 &= p \\ 0 &= q \end{aligned}$$

  - Fall 1.1: $p = 0$ und $q = 0$: Für jeden Wert von x und y ist unser Gleichungssystem erfüllt, das heisst die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  - Fall 1.2: $p \neq 0$ oder $q \neq 0$: Das Gleichungssystem hat keine Lösung, d. h. $\mathbb{L} = \emptyset$.
- Fall 2: Mindestens eine der vier Zahlen a, b, c, d ist nicht Null:
  Dann ist die linke Seite einer der beiden Gleichungen unseres Gleichungssystem ein Vielfaches der linken Seite der anderen Gleichung.[1]
  Nun kann es sein, dass nicht nur die linke Seite, sondern die gesamte eine Gleichung ein Vielfaches der anderen Gleichung ist (das hängt von p und q ab). Ist dies nicht der Fall, so widersprechen sich die beiden Gleichungen und das Gleichungssystem hat keine Lösung (Lösungsmenge $\mathbb{L} = \emptyset$). Sonst genügt es, die «andere Gleichung» zu lösen (denn die «eine Gleichung» gilt dann als Vielfaches automatisch). In der «anderen Gleichung» ist mindestens ein Koeffizient von Null verschieden, weshalb die Gleichung unendlich viele Lösungen hat (die Lösungsmenge ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$). □

Beispiel 13.5.4. Das Gleichungssystem

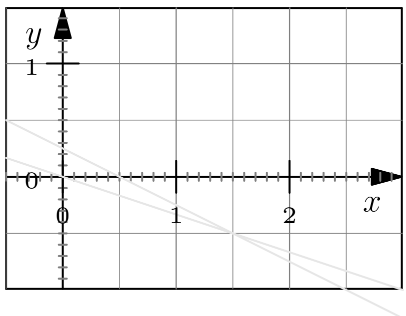
$$\begin{cases} x + 3y &= 0 \\ 2x + 4y &= 1 \end{cases} \quad \text{hat wegen} \quad ✎\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{0 \cdot 4 - 3 \cdot 0}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 2}{-2} = \frac{1}{-2} =$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ (besteht aus einem Punkt in der Ebene). Probe:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= 1 \end{cases}$$



Graphische Lösung (dient auch als Probe):

- Die Gleichung $x + 3y = 0$ beschreibt eine Gerade in der Ebene (d. h. ihre Lösungsmenge ist eine Gerade). Warum?
  - Nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{3}x$ ist die Gerade mit Steigung $-\frac{1}{3}$ und y-Achsenabschnitt 0.
  - Alternative: $x + 3y = 0$ ist die Koordinatenform einer Geraden (siehe Vektorgeometrie vor den Sommerferien): Die Gerade geht durch einen beliebigen Punkt (x, y), der diese Gleichung erfüllt, etwa den Punkt $(0, 0)$, und steht senkrecht auf dem Normalenvektor $\binom{1}{3}$.
  - Alternative: Zwei Punkte (etwa auf den Achsen) berechnen und verbinden.
- Analog ist $2x + 4y = 1$ die Gerade durch $(\frac{1}{2}, 0)$, die senkrecht auf $\binom{2}{4}$ steht.

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ löst beide Gleichungen, d. h. er ist die Lösung des Gleichungssystems.

[1] Z. B. ist im Fall $b \neq 0$ die linke Seite der Gleichung $cx + dy = q$ das $\frac{d}{b}$-Fache der linken Seite der Gleichung $ax + by = p$:

$$\frac{d}{b} \cdot (ax + by) = \frac{ad}{b}x + dy \overset{ad = bc}{=} cx + dy$$

Beispiel 13.5.5. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - 2y &= p \\ 2x - 4y &= 1 \end{cases} \quad \text{hat wegen} \quad ✎\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = 0 \quad \text{keine oder unendlich viele Lösung}$$

- Falls $p = \frac{1}{2}$: Die beiden Gleichungen sind äquivalent und es gibt unendlich viele Lösungen: Die Lösungsmenge ist die Gerade $2x - 4y = 1$ (Normalenform). Nach y aufgelöst: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, also $\mathbb{L} = \{(x, \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- Sonst (d. h. $p \neq \frac{1}{2}$): Die beiden Gleichungen widersprechen sich (warum?), also keine Lösung, $\mathbb{L} = \emptyset$.
  Geometrisch: Zwei parallele, aber verschiedene Geraden, also kein Schnittpunkt.

Aufgabe A4 Entscheiden Sie mit Hilfe der Determinante der zugehörigen Matrix für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme an, ob das System genau eine Lösung hat oder nicht (es geht nicht darum, das Gleichungssystem zu lösen).

a) $\begin{cases} 1x - 2y &= 2023 \\ 2x - 4y &= 2024 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y &= 2023 \\ 2x - y &= 2024 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3a + 2b &= 2^{3^{4^5}} \\ 6a + 4b &= 2024 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10s + t &= -3 \\ -10s &= q \end{cases}$

Aufgabe A5 Lösen Sie jedes der vier linearen 2×2-Gleichungssysteme in Aufgabe A2

- zuerst mit der Cramerschen Regel und
- danach graphisch.

Aufgabe A6 Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} (c-6)x - y &= p \\ cx + y &= q \end{aligned}$$

(a) Mit Hilfe der Determinante zu beantworten: Für welche Werte von c hat das Gleichungssystem keine oder uendlich viele Lösungen?

Hinweis: Die «rechte Seite des Gleichungssystems» (d. h. p und q) spielt keine Rolle bei der Beantwortung dieser Frage.

(b) Finde Werte für p und q, so dass das obige Gleichungssystem im Fall $c = 3$
- keine Lösung hat;
- unendlich viele Lösungen hat.

Ausblick 13.5.6. Die Cramersche Regel gibt es für beliebige lineare $n \times n$-Gleichungssysteme (also gleich viele Variablen wie Gleichungen), jedoch benötigt die Definition der Determinante für quadratische $n \times n$-Matrizen etwas Vorarbeit (für 3×3 ist es noch relativ einfach).

13.6 Textaufgaben

Aufgabe A7 Gegeben sind die drei Punkte $A = (-2, -1)$, $B = (0, 2)$ und $C = (2, 1)$. Gesucht ist eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph die drei Punkte A, B, C enthält. Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c auf. Lösen Sie dieses und bestimmen Sie so die Funktion $f(x)$. Skizzieren Sie anschliessend den Graphen von $f(x)$.

Aufgabe A8 Gesucht ist eine Notenfunktion, so dass 0 Punkte die Note 1, 10 Punkte die Note 4 und 20 Punkte die Note 6 ergeben.

(a) Begründen Sie, warum diese Notenfunktion keine lineare Funktion sein kann.

(b) Finden Sie die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, die die obigen Bedingungen erfüllt. Zeichnen Sie dann den Graphen dieser Funktion.

Aufgabe A9 Vor 5 Jahren war der Vater 5 Mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3 Mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden heute?

Aufgabe A10 Adam und Eva sind Geschwister (in einer «traditionellen Familie»). Adam hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Eva hat dreimal so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Kinder haben die Eltern von Adam und Eva?

Aufgabe A11

Ein Händler verkauft zwei verschiedene Pralinésorten. Die billigere Sorte kostet 60 Franken pro kg, die teurere 80 Franken pro kg.

Eine Packung enthält eine Mischung beider Sorten und kostet 20 Franken. Welche Menge jeder Sorte ist in der Packung, wenn die gleiche Packung nach einem Preisaufschlag bei beiden Sorten von jeweils 3 Franken pro kg neu 20.9 Franken kostet?

Aufgabe A12 Folgende Aufgaben sind aus einer alten Ausgabe von Algebra 1 S. 181-186

Hinweis: Notieren Sie zuerst immer Ihre Unbekannten, mit **Angabe der Masseinheit**. Bei den Gleichungen, notieren Sie sich jeweils, was Sie in welcher Masseinheit ausrechnen.

Ein einfacher, nicht programmierbarer Taschenrechner darf verwendet werden.

Lösungen bitte als ganze Zahlen oder Brüche angeben (statt als Kommazahlen).

a) *A114 S. 184*
Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, auf dem Rest der Strecke fährt Herr Merz auf der Hin- bzw. der Rückfahrt eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h bzw. 70 km/h. Wie lang sind AD und BC?

b) *A118 S. 184*
Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren (in Richtung einer weiteren, sehr weit entfernten Station) und der langsamere Zug vorausfährt, so holt der schnellere Zug den langsameren nach b Minuten ein. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück? Lösen Sie mit $a = 4, \quad b = 20, \quad d = 8600$.

c) Lösen Sie Aufgabe b) allgemein. *Das Resultat ist eine Formel, die a, b und d enthält.*

d) *122 S. 184*
Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungzeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

Aufgabe A13 Eine dreistellige natürliche Zahl hat die Quersumme 18 und die folgenden beiden Eigenschaften:

- Vertauscht man die erste Ziffer (von links) mit der zweiten, so wächst die Zahl um 180.
- Vertauscht man die zweite Ziffer mit der dritten, so wächst die Zahl um 18.

Um welche Zahl handelt es sich?

13.7 Weitere Gleichungssysteme

13.7.1. In den Gleichungssystemen der folgenden Aufgabe gibt es nicht unbedingt eine eindeutig bestimmte Lösung. Wenn es keine Lösung gibt, ist die Lösungsmenge einfach aufzuschreiben. Wenn es unendlich viele Lösungen gibt, kann man eine odere mehrere Variablen frei wählen und die anderen Variablen aus diesen Variablen berechnen. Eventuell Beispiel an Tafel vorrechnen!

Aufgabe A14

a) $\begin{cases} 10x + 8y = -13 & (G_1) \\ 15x + 12y = -18 & (G_2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -12x - 3y = 30 & (G_1) \\ -16x - 4y = 40 & (G_2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+5y-z=-8 & (G_1)\\ 15x-10y-20z=-26 & (G_2)\\ 9x-6y-12z=-15 & (G_3)\end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x-14y-21z=0 & (G_1)\\ 2x-4y-6z=0 & (G_2)\\ 4x-2y-z=5 & (G_3)\end{cases}$

e) $\begin{cases} 28x-28y+7z=0 & (G_1)\\ -20x+20y-5z=0 & (G_2)\\ -8x+8y-2z=0 & (G_3)\end{cases}$

f) $\begin{cases} 13x+30y+20z=-10 & (G_1)\\ 3x+y-4z=12 & (G_2)\\ x+4y+4z=-5 & (G_3)\end{cases}$

g) $\begin{cases} 12x-32y-33z=-23 & (G_1)\\ -3x+y-4z=11 & (G_2)\\ 3x-5y-3z=-8 & (G_3)\end{cases}$

13.8 Kurz: Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme

13.8.1. «Überbestimmte» Gleichungssysteme sind Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen als Variablen. Solche haben oft gar keine Lösung: Beispiel: $x+y=1$, $x+2y=2$, $x+3y=4$ (keine Lösung). Oder $x=1$, $y=3$, $x+y=5$ (keine Lösung).

«Unterbestimmte» Gleichungssysteme sind Gleichungssysteme mit weniger Gleichungen als Variablen. Solche haben meist unendlich viele Lösungen. Beispiel: $x+y+2z=3$, $x+z=7$ (man kann z. B. $z\in\mathbb{R}$ frei wählen und erhält daraus $x=7-z$ und $y=3-x-2z=3-(7-z)-2z=-4-z$).

13.9 Repetition: Gleichungssysteme

Aufgabe A15 Hier und in den folgenden ähnlichen Aufgaben sind jeweils die Lösungen des angegebenen Gleichungssystems zu bestimmen.

a) $\begin{cases} 7x-10y=-36 & (G_1)\\ -10x=-20 & (G_2)\end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x-y=-7 & (G_1)\\ -6x-2y=-14 & (G_2)\end{cases}$

c) $\begin{cases} -10x+6y=-70 & (G_1)\\ -2x=-20 & (G_2)\end{cases}$

d) $\begin{cases} -6x=30 & (G_1)\\ -5x+10y=25 & (G_2)\end{cases}$

Aufgabe A16

a) $\begin{cases} -10x-4y-5z=-85 & (G_1)\\ 3x-5y+9z=-74 & (G_2)\\ 7y+9z=25 & (G_3)\end{cases}$

b) $\begin{cases} -8x-y+6z=-58 & (G_1)\\ 3x+10y-2z=99 & (G_2)\\ -x-2y-2z=-25 & (G_3)\end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x-8y-9z=6 & (G_1)\\ -3y+9z=54 & (G_2)\\ 7x+7y=-21 & (G_3)\end{cases}$

d) $\begin{cases} -2y-8z=-48 & (G_1)\\ 8x+6y+z=69 & (G_2)\\ x+2y+10z=63 & (G_3)\end{cases}$

Aufgabe A17

a) $\begin{cases} -5a-2b+6c-10d=10 & (G_1)\\ 10a+10b-3c+3d=50 & (G_2)\\ -c-9d=50 & (G_3)\\ 8a-4b+2d=-30 & (G_4)\end{cases}$

b) $\begin{cases} -b+10c+7d=-130 & (G_1)\\ -7a-7b-7c-8d=10 & (G_2)\\ 10a+3b+3d=50 & (G_3)\\ -9a-9b-10c+4d=-125 & (G_4)\end{cases}$

Aufgabe A18

a) $\begin{cases} -a-b+6c+10d-6e=-55 & (G_1)\\ 3b-5c+8d+10e=81 & (G_2)\\ -2a-b+8c+4d+10e=-6 & (G_3)\\ -4a+7b-7c-7d+7e=10 & (G_4)\\ 10a+10b+9c+4d-2e=-173 & (G_5)\end{cases}$

b) $\begin{cases} 6a+5b-3c-3d+3e=12 & (G_1)\\ 8a-3b-7c+8d+5e=-44 & (G_2)\\ -8a-5b-c+3d-e=16 & (G_3)\\ -5a-2b+8c-2e=-34 & (G_4)\\ -8a-4c-7d-9e=124 & (G_5)\end{cases}$

13.10 Geometrische Anschauung - vielleicht ins Geometrie-Skript verschieben

Geometrische Anschauung: 2 lineare Gleichungen, 2 Variablen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen ist normalerweise eine Gerade. Die Gerade kann sogar vertikal sein, z.B. $x + 0y = 4$.

Die einzige Ausnahme ist der Fall, dass alle Koeffizienten Null sind, d. h. die Gleichung hat die Form $0x+0y = p$. In diesem Fall kommt es auf p an: Im Fall $p = 0$ ist die Gleichung stets war, d. h. die Lösungsmenge ist die gesamte Zeichenebene, $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$; im Fall $p \neq 0$ ist die Gleichung stets falsch, d. h. die Lösungsmenge ist leer, $\mathbb{L} = \emptyset$.

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen und 2 Gleichungen ist deswegen normalerweise (= beide Gleichungen definieren Geraden) die Schnittmenge der beiden Geraden. Es gibt somit drei Fälle:

Fall 1: Die beiden Geraden schneiden sich. Es gibt genau eine Lösung (= der Schnittpunkt).

Fall 2: Die beiden Geraden sind parallel und verschieden. Es gibt keine Lösung.

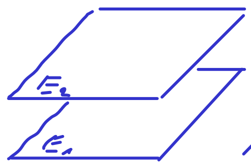
Fall 3: Die beiden Geraden sind identisch. Alle Punkte der Geraden sind Lösungen, die Gerade ist die Lösungsmenge.

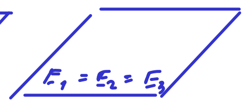
Geometrische Anschauung: 3 lineare Gleichungen, 3 Variablen

Die Lösungen einer linearen Gleichung $ax + by + cz = d$ in drei Variablen bilden eine Ebene im Raum, falls mindestens einer der drei Koeffizienten a, b, c von Null verschieden ist (siehe Vektorgeometrie, Koordinatenform/Normalenform einer Ebene). Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aus drei Gleichungen in drei Variablen entspricht also der Schnittmenge dreier Ebenen. Folgende Fälle können auftreten:

Fall 1: Alle drei Ebenen sind parallel. (Sprechweise: gleiche Ebenen sind parallel)

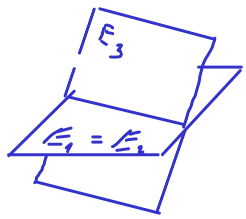
- Falls zwei der drei Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung. linkes Bild, eine parallele Ebene ist nicht dargestellt
- Sonst sind alle drei Ebenen gleich und alle Punkte dieser Ebene sind Lösungen. rechtes Bild





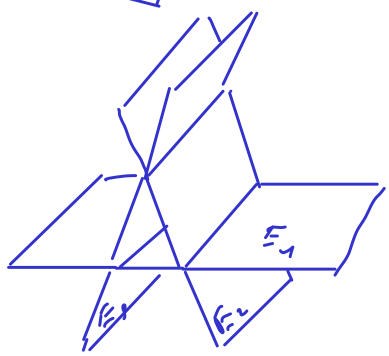
Fall 2: Genau zwei der drei Ebenen sind parallel. (Dann ist die dritte nicht parallel zu jeder dieser beiden.)

- Falls diese beiden parallelen Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung. kein Bild
- Sonst bilden sie eine Ebene, die die dritte in einer Geraden schneidet; die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.

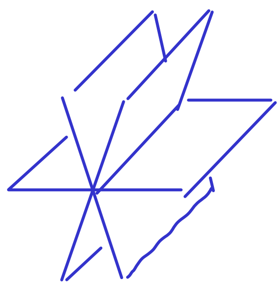


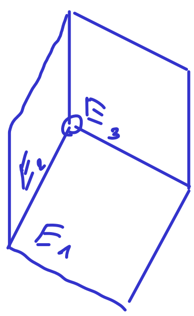
Fall 3: Keine zwei der drei Ebenen sind parallel. Dann schneiden sich je zwei der drei Ebenen in einer Geraden.
Wir betrachten eine beliebige der drei Ebenen. Sie enthält dann zwei Schnittgeraden (mit den anderen beiden Ebenen).

- Fall 3.1: Diese beiden Schnittgeraden sind parallel und verschieden: Es gibt keine Lösung. («Toblerone-Situation»)
- Fall 3.2: Diese beiden Schnittgeraden stimmen überein. Dann schneiden sich die drei Ebenen in dieser Geraden, und die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.



- Fall 3.3: Diese beiden Schnittgeraden schneiden sich in einem Punkt. Dann ist dieser Punkt die einzige Lösung (d. h. seine drei Koordinaten bilden eine Lösung).
  Dieser Fall ist der Normalfall! Wenn man zufällig drei Ebenen (= lineare Gleichungen in drei Variablen mit nicht allen Koeffizienten Null) wählt, schneiden sich diese in genau einem Punkt, vgl. Merke 13.4.1





13.11 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-lineare-gleichungssysteme-2var-einstieg

a) y eliminieren: $(G_1)+(G_2)$: $\quad -12x=-24 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$.
Eingesetzt in (G_1) : $\quad -6+8y=26 \quad \Leftrightarrow \quad 8y=32 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$.
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen, z.B. (G_1) nach x auflösen: $x=\frac{1}{3}(8y-26)$. Eingesetzt in (G_2):
$-9\cdot\frac{1}{3}(8y-26)-8y=-50 \quad \Leftrightarrow \quad -24y+78-8y=-50 \quad \Leftrightarrow \quad -32y=-128 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$
Und damit $x=\frac{1}{3}(32-26)=2$.

b) y eliminieren: $(G_1)+10(G_2)$: $\quad -x-60x=-61+610 \quad \Leftrightarrow \quad -61x=-61(1-10) \quad \Leftrightarrow \quad x=-9$
Eingesetzt in (G_2): $-6\cdot(-9)-y=61 \quad \Leftrightarrow \quad 54=61+y \quad \Leftrightarrow \quad y=-7$
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, z.B. (G_2) nach y aufzulösen und in (G_1) einzusetzen:
(G_2) : $\quad y=-6x-61$, eingesetzt in (G_1):
$-x+10(-6x-61)=-61 \quad \Leftrightarrow \quad -61x-610=-61 \quad \Leftrightarrow \quad -x-10=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-9$
Und damit $y=y=-6\cdot(-9)-61=54-61=-7$.

Lösung zu A2 ex-lineare-gleichungssysteme-von-hand

a)

$$\begin{array}{rrrr} -2x & -3y & =-1 & (G_0) \\ 3x & +3y & =-3 & (G_1) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$\begin{array}{rrrr} (G_0)+(G_1): & x & =-4 & (G_0') \end{array}$$

Aus (G_0') folgt: $x=-4$. Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -2\cdot(-4)-3y &= -1 && |\text{TU} \\ -3y+8 &= -1 && |-8 \\ -3y &= -9 && |:-3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Lösung: $x=-4$, $y=3$

b)

$$\begin{array}{rrrr} 2x & -3y & =-2 & (G_0) \\ -2x & +2y & =-2 & (G_1) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$(G_0)+(G_1): \quad -y \quad = -4 \quad (G_0')$$

Aus (G_0') folgt: $y=4$. Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} 2x-3\cdot 4 &= -2 && |\text{TU} \\ 2x-12 &= -2 && |+12 \\ 2x &= 10 && |:2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: $x=5$, $y=4$

c)

$$\begin{array}{llll} 2x & -y & =1 & (G_0) \\ 5x & -2y & =1 & (G_1) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$2(G_0)-(G_1): \quad -x \quad = 1 \quad (G_0')$$

Aus (G_0') folgt: $x=-1$. Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} 2\cdot(-1)-y &= 1 && |\text{TU} \\ -y-2 &= 1 && |+2 \\ -y &= 3 && |:-1 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Lösung: $x=-1$, $y=-3$

d)

$$\begin{array}{llll} x & +2y & =-1 & (G_0) \\ x & +5y & =5 & (G_1) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$(G_0)-(G_1): \quad -3y \quad = -6 \quad (G_0')$$

Aus (G_0') folgt: $y=2$. Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} x+2\cdot 2 &= -1 && |\text{TU} \\ x+4 &= -1 && |-4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Lösung: $x=-5$, $y=2$

e)

$$\begin{array}{rrrrr} 3x & +y & +2z & =0 & (G_0) \\ 4x & +2y & +3z & =-4 & (G_1) \\ 2x & +4y & -z & =-4 & (G_2) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrr} 2(G_0)-(G_1): & 2x & +z & =4 & (G_0') \\ 2(G_1)-(G_2): & 6x & +7z & =-4 & (G_1') \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$\begin{array}{rrrr} 3(G_0')-(G_1'): & -4z & =16 & (G_0'') \end{array}$$

Aus (G_0'') folgt: $z=-4$. Eingesetzt in (G_0'):

$$\begin{aligned} 2x+\cdot(-4) &= 4 && |\text{TU} \\ 2x-4 &= 4 && |+4 \\ 2x &= 8 && |:2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} 3\cdot 4+y+2\cdot(-4) &= 0 && |\text{TU} \\ y+4 &= 0 && |-4 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Lösung: $x=4$, $y=-4$, $z=-4$

f)

$$\begin{array}{rrrrr} -2x & -3y & +8z & =1 & (G_0) \\ -2x & -y & +4z & =3 & (G_1) \\ 4x & -6y & +3z & =1 & (G_2) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrr} (G_0)-(G_1): & -2y & +4z & =-2 & (G_0') \\ 2(G_1)+(G_2): & -8y & +11z & =7 & (G_1') \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$\begin{array}{rrrr} 4(G_0')-(G_1'): & 5z & =-15 & (G_0'') \end{array}$$

Aus (G_0'') folgt: $z=-3$. Eingesetzt in (G_0'):

$$\begin{aligned} -2y+4\cdot(-3) &= -2 && |\text{TU} \\ -2y-12 &= -2 && |+12 \\ -2y &= 10 && |:-2 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -2x-3\cdot(-5)+8\cdot(-3) &= 1 && |\text{TU} \\ -2x-9 &= 1 && |+9 \\ -2x &= 10 && |:-2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Lösung: $x=-5$, $y=-5$, $z=-3$

g)

$$\begin{array}{rrrrr} -5x & -3y & -3z & =5 & (G_0) \\ -5x & +5y & -z & =-1 & (G_1) \\ 3x & +y & +z & =-3 & (G_2) \end{array}$$

Variable z eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrr} (G_0)-3(G_1): & 10x & -18y & =8 & (G_0') \\ (G_1)+(G_2): & -2x & +6y & =-4 & (G_1') \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$\begin{array}{rrrr} (G_0')+3(G_1'): & 4x & =-4 & (G_0'') \end{array}$$

Aus (G_0'') folgt: $x=-1$. Eingesetzt in (G_0'):

$$\begin{aligned} 10\cdot(-1)-18y &= 8 && |\text{TU} \\ -18y-10 &= 8 && |+10 \\ -18y &= 18 && |:-18 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -5\cdot(-1)-3\cdot(-1)-3z &= 5 && |\text{TU} \\ -3z+8 &= 5 && |-8 \\ -3z &= -3 && |:-3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: $x=-1$, $y=-1$, $z=1$

h)

$$\begin{array}{rrrrr} -x & +y & +2z & =3 & (G_0) \\ x & & +z & =-1 & (G_1) \\ -2x & +4y & -4z & =-4 & (G_2) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrr} (G_0)+(G_1): & y & +3z & =2 & (G_0') \\ 2(G_1)+(G_2): & 4y & -2z & =-6 & (G_1') \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$4(G_0') - (G_1') : \quad 14z \quad = 14 \quad (G_0'')$$

Aus (G_0'') folgt: $z = 1$. Eingesetzt in (G_0'):

$$\begin{aligned} y + 3 \cdot 1 &= 2 && |\text{TU} \\ y + 3 &= 2 && |-3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -x + \cdot(-1) + 2 \cdot 1 &= 3 && |\text{TU} \\ -x+ &= 3 && |- \\ -x &= 2 && |:-1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Lösung: $x = -2$, $y = -1$, $z = 1$

i)

$$\begin{array}{rrrrrl} -3a & -8b & +5c & +d & = -4 & (G_0) \\ a & +4b & -8c & -3d & = -2 & (G_1) \\ -3a & -5b & +c & +d & = -2 & (G_2) \\ a & +9b & +8c & +5d & = -4 & (G_3) \end{array}$$

Variable a eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrl} (G_0) - (G_2) : & -3b & +4c & & = -2 & (G_0') \\ (G_1) - (G_3) : & -5b & -16c & -8d & = 2 & (G_1') \\ (G_2) + 3(G_1) : & 7b & -23c & -8d & = -8 & (G_2') \end{array}$$

Variable d eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrl} (G_0') : & -3b & +4c & = -2 & (G_0'') \\ (G_1') - (G_2') : & -12b & +7c & = 10 & (G_1'') \end{array}$$

Variable b eliminieren:

$$4(G_0'') - (G_1'') : \quad 9c \quad = -18 \quad (G_0''')$$

Aus (G_0''') folgt: $c = -2$. Eingesetzt in (G_0''):

$$\begin{aligned} -3b + 4 \cdot (-2) &= -2 && |\text{TU} \\ -3b - 8 &= -2 && |+8 \\ -3b &= 6 && |:-3 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'):

$$\begin{aligned} -5\cdot(-2)-16\cdot(-2)-8d &= 2 && |\text{TU} \\ -8d+42 &= 2 && |-42 \\ -8d &= -40 && |:-8 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -3a-8\cdot(-2)+5\cdot(-2)+\cdot 5 &= -4 && |\text{TU} \\ -3a+11 &= -4 && |-11 \\ -3a &= -15 && |:-3 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: $a=5$, $b=-2$, $c=-2$, $d=5$

j)

$$\begin{array}{rrrrrl} & -2b & & +2d & =2 & (G_0) \\ 2a & +2b & +c & & =1 & (G_1) \\ -4a & +b & -2c & -8d & =-1 & (G_2) \\ -2a & +2b & +2c & -d & =-2 & (G_3) \end{array}$$

Variable a eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrl} (G_0): & -2b & & +2d & =2 & (G_0') \\ (G_1)+(G_3): & 4b & +3c & -d & =-1 & (G_1') \\ (G_2)+2(G_1): & 5b & & -8d & =1 & (G_2') \end{array}$$

Variable c eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrl} (G_0'): & -2b & +2d & =2 & (G_0'') \\ (G_2'): & 5b & -8d & =1 & (G_1'') \end{array}$$

Variable d eliminieren:

$$\begin{array}{rrrl} 4(G_0'')+(G_1''): & -3b & =9 & (G_0''') \end{array}$$

Aus (G_0''') folgt: $b=-3$. Eingesetzt in (G_0''):

$$\begin{aligned} -2\cdot(-3)+2d &= 2 && |\text{TU} \\ 2d+6 &= 2 && |-6 \\ 2d &= -4 && |:2 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'):

$$\begin{aligned} 4\cdot(-3)+3c-\cdot(-2) &= -1 && |\text{TU} \\ 3c-10 &= -1 && |+10 \\ 3c &= 9 && |:3 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Eingesetzt in (G_1):

$$\begin{aligned} 2a+2\cdot(-3)+\cdot 3+0\cdot(-2) &= 1 && \mid \text{TU} \\ 2a-3 &= 1 && \mid +3 \\ 2a &= 4 && \mid :2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: $a=2$, $b=-3$, $c=3$, $d=-2$

k)

$$\begin{array}{rrrrrrl} a & +4b & +3c & +d & +6e & =-4 & (G_0) \\ 3a & -2b & +2c & & +4e & =3 & (G_1) \\ 3a & -5b & -5c & -6d & -4e & =-2 & (G_2) \\ -a & -2b & -5c & +3d & -9e & =-1 & (G_3) \\ 2a & -3b & +c & & +e & =2 & (G_4) \end{array}$$

Variable d eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrrl} 3(G_0)-(G_3): & 4a & +14b & +14c & +27e & =-11 & (G_0') \\ (G_1): & 3a & -2b & +2c & +4e & =3 & (G_1') \\ (G_2)+2(G_3): & a & -9b & -15c & -22e & =-4 & (G_2') \\ (G_4): & 2a & -3b & +c & +e & =2 & (G_3') \end{array}$$

Variable a eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrl} (G_0')-2(G_3'): & 20b & +12c & +25e & =-15 & (G_0'') \\ (G_1')-3(G_2'): & 25b & +47c & +70e & =15 & (G_1'') \\ 2(G_2')-(G_3'): & -15b & -31c & -45e & =-10 & (G_2'') \end{array}$$

Variable b eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrl} 3(G_0'')+4(G_2''): & -88c & -105e & =-85 & (G_0''') \\ 3(G_1'')+5(G_2''): & -14c & -15e & =-5 & (G_1''') \end{array}$$

Variable e eliminieren:

$$\begin{array}{rrrl} (G_0''')-7(G_1'''): & 10c & =-50 & (G_0'''') \end{array}$$

Aus (G_0'''') folgt: $c=-5$. Eingesetzt in (G_0'''):

$$\begin{aligned} -88\cdot(-5)-105e &= -85 && \mid \text{TU} \\ -105e+440 &= -85 && \mid -440 \\ -105e &= -525 && \mid :-105 \\ e &= 5 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_2''):

$$\begin{aligned} -15b - 31\cdot(-5) - 45\cdot 5 &= -10 && \vert \text{TU} \\ -15b - 70 &= -10 && \vert +70 \\ -15b &= 60 && \vert : -15 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_2'):

$$\begin{aligned} a - 9\cdot(-4) - 15\cdot(-5) - 22\cdot 5 &= -4 && \vert \text{TU} \\ a+ &= -4 && \vert - \\ a &= -5 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} \cdot(-5) + 4\cdot(-4) + 3\cdot(-5) + d + 6\cdot 5 &= -4 && \vert \text{TU} \\ d - 6 &= -4 && \vert +6 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: $a = -5,\ b = -4,\ c = -5,\ d = 2,\ e = 5$

l)

$$\begin{array}{rrrrrrr} -3a & -3b & -c & +d & -2e & = 3 & (G_0) \\ -5a & -4b & -c & +d & -e & = -2 & (G_1) \\ 4a & -2b & +3c & +2d & -e & = 2 & (G_2) \\ 4a & +4b & -5c & +5d & +e & = -2 & (G_3) \\ 5a & & +2c & +3d & +e & = -3 & (G_4) \end{array}$$

Variable e eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrrr} (G_0) - 2(G_1): & 7a & +5b & +c & -d & = 7 & (G_0') \\ (G_1) - (G_2): & -9a & -2b & -4c & -d & = -4 & (G_1') \\ (G_2) + (G_3): & 8a & +2b & -2c & +7d & = 0 & (G_2') \\ (G_3) - (G_4): & -a & +4b & -7c & +2d & = 1 & (G_3') \end{array}$$

Variable d eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrr} (G_0') - (G_1'): & 16a & +7b & +5c & = 11 & (G_0'') \\ 2(G_1') + (G_3'): & -19a & & -15c & = -7 & (G_1'') \\ (G_2') + 7(G_0'): & 57a & +37b & +5c & = 49 & (G_2'') \end{array}$$

Variable c eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrr} (G_0'') - (G_2''): & -41a & -30b & = -38 & (G_0''') \\ (G_1'') + 3(G_0''): & 29a & +21b & = 26 & (G_1''') \end{array}$$

Variable b eliminieren:

$$7(G_0''') + 10(G_1''') : \quad 3a \quad = -6 \quad (G_0'''')$$

Aus (G_0'''') folgt: $a = -2$. Eingesetzt in (G_0'''):

$$\begin{aligned} -41 \cdot (-2) - 30b &= -38 && \vert \text{TU} \\ -30b + 82 &= -38 && \vert -82 \\ -30b &= -120 && \vert : -30 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0''):

$$\begin{aligned} 16 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 5c &= 11 && \vert \text{TU} \\ 5c - 4 &= 11 && \vert +4 \\ 5c &= 15 && \vert : 5 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0'):

$$\begin{aligned} 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + \cdot 3 - d &= 7 && \vert \text{TU} \\ -d + 9 &= 7 && \vert -9 \\ -d &= -2 && \vert : -1 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{aligned} -3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 - \cdot 3 + \cdot 2 - 2e &= 3 && \vert \text{TU} \\ -2e - 7 &= 3 && \vert +7 \\ -2e &= 10 && \vert : -2 \\ e &= -5 \end{aligned}$$

Lösung: $a = -2$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$, $e = -5$

Lösung zu A3 ex-unerwartete-anzahl-loesungen

(a) zwei Gleichungen in zwei Variablen:

- Keine Lösung hat zum Beispiel das Gleichungssystem $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- Unendliche viele Lösungen hat zum Beispiel das Gleichungssystem $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

  Ein anderes Beispiel ist das Gleichungssystem $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$
- Genau eine Lösung hat zum Beispiel das Gleichungssystem $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

(b)
- Das lineare Gleichungssystem/die lineare Gleichung $0x = 1$ hat keine Lösung, $\mathbb{L} = \emptyset$.
- Das lineare Gleichungssystem/die lineare Gleichung $0x = 0$ hat unendliche vielen Lösungen, genauer gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
- Das «allgemeine» lineare Gleichungssystem/die lineare Gleichung $ax = b$ mit $a \neq 0$ hat genau eine Lösung $x = \frac{b}{a}$ bzw. als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$.

Lösung zu A4 ex-cramer-2x2-matrix-extrahieren

Man beachte, dass die rechte Seite aller Gleichungen keine Rolle bei den Antworten spielt.

a) $\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix} = -4-(-4) = 0$, also nicht genau eine Lösung (d. h. keine Lösung oder unendlich viele Lösungen).

b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$, also genau eine Lösung.

c) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix} = 12-12 = 0$, also nicht genau eine Lösung (d. h. keine Lösung oder unendlich viele Lösungen)

d) $\begin{pmatrix}10 & 1\\ -10 & 0\end{pmatrix} = 0-(-10) = 10 \neq 0$, also genau eine Lösung.

Lösung zu A5 ex-cramer-2x2

Die Lösungen der Gleichungssysteme findet man bei den Lösungen von Aufgabe A2. Das genaue Aufschreiben des rechnerischen und graphischen Lösungswegs ist dem Leser überlassen – er mag sich an Beispiel 13.5.4 orientieren.

Lösung zu A6 ex-cramer-2x2-det-0

(a) Das Gleichungssystem hat genau dann keine oder unendlich viele Lösungen, wenn «seine Determinante» Null ist, d. h. wenn

$$(c-6)\cdot 1-(-1)\cdot c = 0$$

gilt, d. h. $c = 3$.

(b) Im Fall $c = 3$ hat das System die Gestalt

$$\begin{aligned} -3x - y &= p\\ 3x + y &= q \end{aligned}$$

Beachte: Die linken Seiten der beiden Gleichungen gehen per Multiplikation mit -1 auseinander hervor.

- keine Lösung: Falls $p \neq -q$, etwa $p = 0$ und $q = 1$. (Dann widersprechen sich die beiden Gleichungen.)
- unendlich viele Lösungen: Falls $q = -p$, etwa $p = q = 0$ oder $p = 1$ und $q = -1$. (Dann ist jede Gleichung das -1-Fache der anderen Gleichung. Es genügt also, eine Gleichung zu lösen. Die Lösungsmenge jeder Gleichung ist aber unendlich (denn man kann etwa x beliebig wählen und dann y berechnen).) Geometrisch: Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade. Ihr Schnitt ist also diese Gerade. Die Punkte dieser Geraden sind die unendlich vielen Lösungen des Gleichungsssystems.

Lösung zu A7 ex-parabel-durch-punkte

Setzt man die x-Koordinate eines Punktes in f ein, muss dessen y-Koordinate herauskommen. Wir haben also folgendes Gleichungssystem für a, b und c:

$$\left\{\begin{array}{rll} f(-2) & = -1 & \text{Punkt } A\\ f(0) & = 2 & \text{Punkt } B\\ f(2) & = 1 & \text{Punkt } C \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rll} 4a-2b+c & = -1 & (G_1)\\ c & = 2 & (G_2)\\ 4a+2b+c & = 1 & (G_3) \end{array}\right.$$

(G_2) ist schon nach c aufgelöst, also einsetzen in (G_1) und (G_3):

$$\left\{\begin{array}{rll} 4a-2b+2 & = -1 & (G_1')\\ 4a+2b+2 & = 1 & (G_3') \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll} 4a-2b & = -3 & (G_1')\\ 4a+2b & = -1 & (G_3') \end{array}\right.$$

Die Unbekannte b wird eliminiert: $(G_1') + (G_3')$:

$$8a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

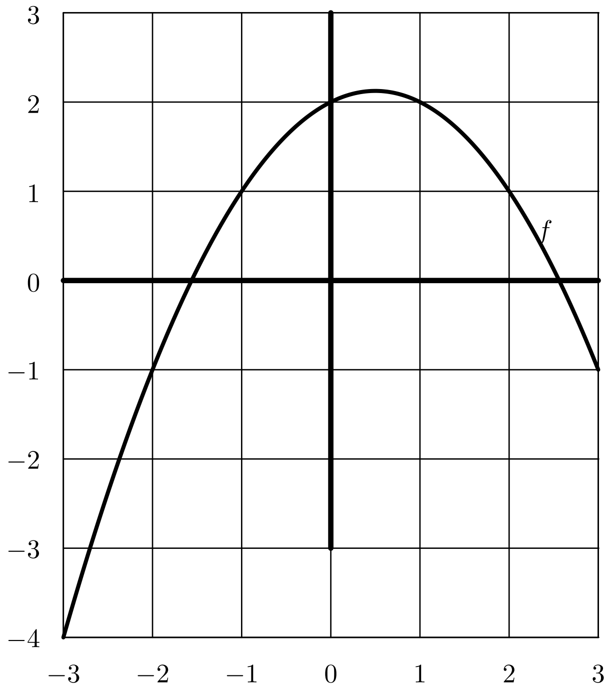
Eingesetzt in (G_1'):

$$-2-2b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Und damit ist die gesuchte Funktion $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 2$.

Der Graph ist wie folgt:



Lösung zu A8 ex-quadratische-notenskala

(a) Die Punkte (0,1), (10,4), und (20,6) liegen nicht auf einer Geraden. Dies kann man zeigen, indem man z.B. die Steigung zwischen den Punkten berechnet: $\frac{3}{10} \neq \frac{2}{10}$.
Man kann auch rein algebraisch argumentieren (statt geometrisch): Eine lineare Funktion hat die allgemeine Form $f(x) = ax + b$. Die Vorgaben bedeuten $f(0) = 1$, $f(10) = 4$ und $f(20) = 6$ bzw. als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{cases} b &= 1 \\ 10a + b &= 4 \\ 20a + b &= 6 \end{cases}$$

Nun muss man zeigen, dass dieses («überbestimmte», da mehr Gleichungen als Variablen) Gleichungssystem keine Lösung hat. Wenn man von der dritten Gleichung das Doppelte der zweiten subtrahiert, so erhält man $-b = -2$ oder äquivalent $b = 2$, was der ersten Gleichung widerspricht. Also gibt es keine Lösung.

(b) Wir kennen wieder für drei Argumente (0, 10 und 20) die Funktionswerte (1, 4 und 6). Wir erhalten also folgendes System:

$$\begin{cases} f(0) &= 1 & \text{Punkt } (0,1) \\ f(10) &= 4 & \text{Punkt } (10,4) \\ f(20) &= 6 & \text{Punkt } (20,4) \end{cases} \qquad \begin{cases} c &= 1 & (G_1) \\ 100a + 10b + c &= 4 & (G_2) \\ 400a + 20b + c &= 6 & (G_3) \end{cases}$$

(G_1) ist bereits nach c aufgelöst. Eingesetzt in (G_2), (G_3):

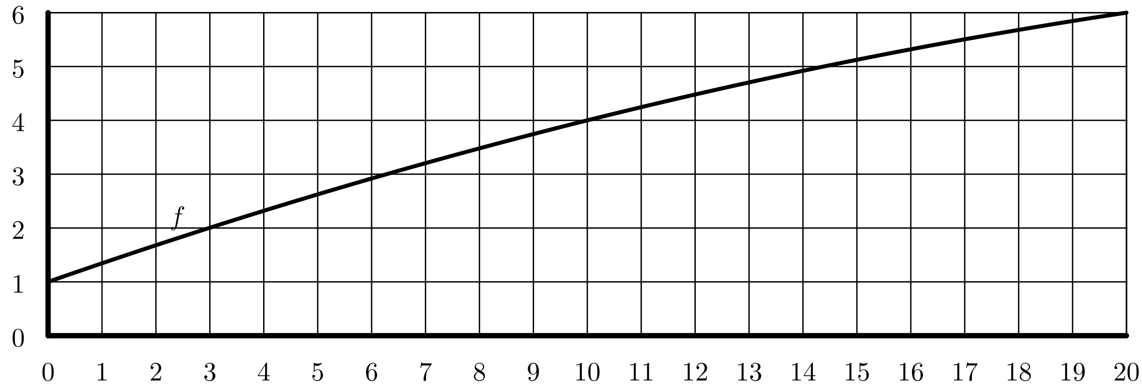
$$\begin{cases} 100a + 10b &= 3 & (G_2') \\ 400a + 20b &= 5 & (G_3') \end{cases}$$

b eliminieren: $2(G_2') - (G_3'):\quad -200a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{200}$. Eingesetzt in (G_2'):

$$-\frac{1}{2} + 10b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10b = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{7}{20}$$

Und damit ist die Notenfunktion $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{7}{20}x + 1$. Der Graph sieht wie folgt aus:

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer



Lösung zu A9 ex-textaufgabe-alter

Sei s das Alter des Sohnes und v das Alter des Vaters (in Jahren).

- Situation vor 5 Jahren: Vater $v-5$ Jahre alt, Sohn $s-5$ Jahre alt. Dies liefert die Gleichung

$$5(s-5)=v-5$$

- Situation in 3 Jahren: Vater $v+3$ Jahre alt, Sohn $s+3$ Jahre alt. Dies liefert die Gleichung

$$3(s+3)=v+3$$

Beide Gleichungen zusammen bilden ein Gleichungssystem, das wir wie folgt auf «Standardform» (also «Zahl mal Variable plus Zahl mal Variable = Zahl», dabei Variablen alphabetisch geordnet) bringen.

$$\begin{cases} 5(s-5) &= v-5 \\ 3(s+3) &= v+3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5s-25 &= v-5 \\ 3s+9 &= v+3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5s-v &= 20 \\ 3s-v &= -6 \end{cases}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann man nun mit einer der Standardmethoden (Substitutions-, Additionsverfahren, Cramersche Regel) lösen und erhält:

Der Sohn ist $s=13$ Jahre, der Vater $v=45$ Jahre alt.

Eine Probe ist empfohlen.

Lösung zu A10 ex-textaufgabe-soehne-und-toechter

Sei m die Anzahl der männlichen und w die Anzahl der weiblichen Kinder.

- Adam hat $m-1$ Brüder und w Schwestern. Die erste Textinformation bedeutet also

$$m-1=2w$$

- Eva hat $w-1$ Schwestern und m Brüder w Schwestern. Also gilt

$$m=3(w-1)$$

Wie bei Aufgabe A9 bringt man dieses Gleichungssystem auf Standardform und löst es mit einem der Standardverfahren.

Ergebnis: $m=9$, $w=4$. Also haben die Eltern Kinder (davon 9 Söhne und 4 Töchter).

Eine Probe ist empfohlen.

Lösung zu A11 ex-textaufgabe-pralinen

Sei b die Menge der billigeren und t die Menge der teureren Sorte in der Packung, jeweils in Kilogramm.

- Vor dem Preisaufschlag:

$$60b+80t=20$$

- Danach:

$$63b+83t=20.9$$

Lösung: $(b,t)=(0.2,0.1)$

Also sind von der billigeren Sorte 200 g, von der teureren Sorte 100 g in der Packung.

Lösung zu A12 ex-textaufgaben

a) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Strecke AD: x [km], Strecke BC: y [km]
Berechnet wird jeweils die benötigte **Zeit in Stunden**, also Strecke geteilt durch Geschwindigkeit:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{90} + \frac{y}{40} &= \frac{48}{60} \quad \text{Hinweg} \\ \frac{x-y}{70} + \frac{y}{40} &= \frac{55}{60} \quad \text{Rückweg} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{629}{12}$, $y = \frac{47}{3}$
Antwort: Die ganze Strecke ist ungefähr 52.4 km lang, das Teilstück etwa 15.7 km.

b) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Geschwindigkeit Zug 1: x [m/min], Geschwindigkeit Zug 2: y [m/min].
Variante 1: Man betrachtet die Strecken, die die Züge zurücklegen. Im ersten Fall legen Sie zusammen die Distanz d der Bahnhöfe zurück. Im zweiten Falle beträgt die Differenz der Strecken die Distanz d der Bahnhöfe:

$$\begin{cases} 4x + 4y &= 8600 \quad \text{Summe der Strecken [m]} \\ 20x - 20y &= 8600 \quad \text{Differenz der Strecken [m]} \end{cases}$$

Variante 2: Man kann die Situation relativ zu einem der beiden Züge zu betrachten. D.h. dessen Geschwindigkeit ist dann Null, die eigene Geschwindigkeit wird zur Geschwindigkeit des anderen Zuges addiert (bzw. davon subtrahiert).
Verglichen wird die benötigte **Zeit in min** (Strecke durch relative Geschwindigkeit):

$$\begin{cases} \frac{8600}{x+y} &= 4 \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ \frac{8600}{x-y} &= 20 \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Lösung: $x = 1290$, $y = 860$
Antwort: Der erste Zug legt 1290 m/min zurück, der zweite 860 m/min.

c) Variante 1:

$$\begin{cases} ax + ay &= d \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ bx - by &= d \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Variante 2:

$$\begin{cases} \frac{d}{x+y} &= a \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ \frac{d}{x-y} &= b \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{d(a+b)}{2ab}$, $y = \frac{d(b-a)}{2ab}$

d) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Fülleistung Zuleitung 1: x [Gefässe pro Stunde], Fülleistung Zuleitung 2: y [Gefässe pro Stunde]
Berechnet werden die Füllmengen (Leistung mal Zeit):

$$\begin{cases} 6x + 4y &= 1 \quad \text{korrekte Einstellung} \\ 4x + 6y &= \frac{7}{6} \quad \text{falsche Einstellung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{1}{15}$, $y = \frac{3}{20}$.
Antwort: Die erste Zuleitung liefert $\frac{1}{15}$ des Gefässinhaltes, die zweite liefert $\frac{3}{20}$ des Inhaltes pro Stunde. Die erste Zuleitung benötigt $\frac{1}{\frac{1}{15}} = 15$ h, die zweite $\frac{1}{\frac{3}{20}} = \frac{20}{3} = 6$ h 40 min, um das Gefäss alleine zu füllen.
Zusammen leisten die Zuleitungen $\frac{1}{15} + \frac{3}{20} = \frac{13}{60}$ Gefässe pro Stunde. Also eine Füllzeit von $\frac{1}{\frac{13}{60}} = \frac{60}{13} \approx 4.62$ h, bzw. 4 h 37 min.

Lösung zu A13 ex-textaufgabe-dreistellige-zahl

Wir nennen die Ziffern der dreistelligen Zahl x, y und z (von links gelesen). Die gesuchte Zahl ist dann $100x + 10y + z$ (denn x ist die Hunderterziffer, y die Zehnerziffer, z die Einerziffer).

Wir erhalten die folgenden drei Gleichungen:

- Quersumme:
$$x + y + z = 18$$
- Vertauschen der linken beiden Ziffern liefert die Zahl $100y + 10x + z$. Also
$$100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 180$$
- Vertauschen der rechten beiden Ziffern liefert die Zahl $100x + 10z + y$. Also
$$100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 18$$

Die Lösung dieses linearen 3×3-Gleichungssystems ist $x = 4$, $y = 6$, $z = 8$. Also ist die gesuchte Zahl 468.
Eine Probe ist empfohlen.

Lösung zu A14 ex-lineare-gleichungssysteme-spezialfaelle

Es sind Lösungsvideos online verfügbar.

a) Keine Lösung, $L = \{\}$
b) Unendlich viele Lösungen. Z.B. kann $x \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden und daraus y wie folgt berechnet werden:
$$y = -4x - 10$$
c) Keine Lösung (parallele, nicht-identische Ebenen).
d) Unendlich viele Lösungen. Eine Variable kann frei gewählt werden, die anderen beiden folgen daraus. (Punkte einer Gerade im Raum).
e) Unendliche viele Lösungen. Zwei Variablen können frei gewählt werden, die dritte folgt daraus. (Punkte einer Ebene im Raum).
f) Keine Lösung (parallele Schnittgeraden, Toblerone-Situation)
g) Unendlich viele Lösungen. Eine Variable kann frei gewählt werden, die anderen beiden folgen daraus. (Punkte einer Gerade im Raum).

11.6

a) $\begin{cases} 10x + 8y = -13 & (G_1) \\ 15x + 12y = -18 & (G_2) \end{cases}$ x eliminieren

$3(G_1) - 2(G_2)$: $0x + 0y = -3$

$0 = -3$

falsche Aussage $\mathbb{L} = \{\}$

11.6 b)

$\begin{cases} -12x - 3y = 30 & (G_1) \\ -16x - 4y = 40 & (G_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y = 10 & (G_1') \\ -4x - y = 10 & (G_2') \end{cases}$

$(G_1') - (G_2') \Rightarrow 0 = 0$

$x \in \mathbb{R}$ frei wählen, dann ist $y = -4x - 10$

11.6 c)

$\begin{cases} 2x + 5y - z = -8 & (G_1) \\ 15x - 10y - 20z = -26 & (G_2) \\ 9x - 6y - 12z = -15 & (G_3) \end{cases}$

x eliminieren:

$3(G_2) - 5(G_3)$: $0x + 0y + 0z = -3$

$0 = -3$

falsche Aussage, also keine Lösung $\mathbb{L} = \{\}$

11.6 d)

$$\begin{cases} 7x - 14y - 21z = 0 & (G_1) \\ 2x - 4y - 6z = 0 & (G_2) \\ 4x - 2y - z = 5 & (G_3) \end{cases}$$

$(G_1) : 7 \rightarrow \quad x - 2y - 3z = 0$

$(G_2) : 2 \rightarrow \quad x - 2y - 3z = 0 \quad (G_2')$

y eliminieren: $(G_3) - (G_2')$: $3x + 2z = 5 \quad (G_1'')$

$\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$ frei wählen $\Rightarrow$ $\underline{\underline{z = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}}$

für y setzen wir in (G_3) ein:

$$4x - 2y - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 5 \quad \Big| +2y - 5$$

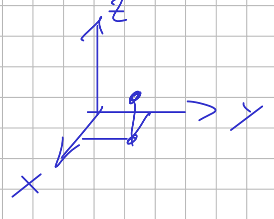
$$4x + \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} = 2y \quad \Big| : 2$$

$$\underline{\underline{\frac{11}{4}x - \frac{15}{4} = y}}$$

11.6. e)

$$\begin{cases} 28x - 28y + 7z = 0 & (G_1) \Leftrightarrow \\ -20x + 20y - 5z = 0 & (G_2) \Leftrightarrow \\ -8x + 8y - 2z = 0 & (G_3) \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 4x - 4y + z = 0 \\ 4x - 4y + z = 0 \\ 4x - 4y + z = 0 & (G_3') \end{cases}$$

Alle Gleichungen sind äquivalent.
Nur eine Gleichung für 3 Variablen, d.h.
2 frei wählen, z.B. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$
daraus ergibt sich aus (G_3') : $\underline{\underline{z = -4x + 4y}}$



11.6 f)

$$\begin{cases} 13x + 30y + 20z = -10 & (G_1) \\ 3x + y - 4z = 12 & (G_2) \\ x + 4y + 4z = -5 & (G_3) \end{cases}$$

z eliminieren:

$(G_2) + (G_3)$: $4x + 5y = 7$ (G_1')

$5(G_2) + (G_1)$: $28x + 35y = 50$ (G_2')

x eliminieren:

$7(G_1') - (G_2')$: $0 = -1$

falsche Aussage

Keine Lösung $\mathbb{L} = \{\}$

11.6. g)

$$\begin{cases} 12x - 32y - 33z = -23 & (G_1) \\ -3x + y - 4z = 11 & (G_2) \\ 3x - 5y - 3z = -8 & (G_3) \end{cases}$$

x eliminieren:

$(G_2) + (G_3)$: $\begin{cases} -4y - 7z = 3 & (G_1') \\ -28y - 49z = 21 & (G_2') \end{cases}$

$(G_2') : 7$ $\quad -4y - 7z = 3$ (G_2'')

$4(G_2) + (G_1)$:

$(G_2'') = (G_1')$ d.h. es bleibt nur noch eine Gleichung für zwei Variablen.

$z \in \mathbb{R}$ frei wählen, aus (G_1') folgt $y = \frac{-7}{4}z - \frac{3}{4}$

in (G_3) : $-3x + \left(-\frac{7}{4}z - \frac{3}{4}\right) - 3z = -8 \quad | +3x + 8$

$-\frac{7}{4}z - 3z - \frac{3}{4} + 8 = 3x \quad |\,TU$

$-\frac{19}{4}z + \frac{29}{4} = 3x \quad | :3$

$-\frac{19}{12}z + \frac{29}{12} = x$

Lösung zu A15 ex-lineare-gleichungssysteme-2var

a) $x = 2, \quad y = 5$

b) Elimination von x: $2(G_1) - (G_2): \quad 0 = 0$. D.h. man kann $y \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. x ergibt sich aus dieser Wahl wenn man z.B. (G_1) nach x auflöst: $x = \frac{7-y}{3}$.

c) $x = 10, \quad y = 5$

d) $x = -5, \quad y = 0$

Lösung zu A16 ex-lineare-gleichungssysteme-3var

a) x=7, y=10, z=-5

b) x=7, y=8, z=1

c) x=3, y=-6, z=4

d) x=5, y=4, z=5

Lösung zu A17 ex-lineare-gleichungssysteme-4var

a) a=0, b=5, c=-5, d=-5

b) a=5, b=10, c=-5, d=-10

Lösung zu A18 ex-lineare-gleichungssysteme-5var

a) a=1, b=-10, c=-9, d=2, e=5

b) a=-4, b=3, c=-7, d=-4, e=-4