I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

16 Folgen und Reihen

Aufgabe A1 Betrachten Sie die folgenden Zahlenfolgen:

(1) $a_0 = 7,\ a_1 = 9,\ a_2 = 11,\ a_3 = 13,\ a_4 = 15,\ \ldots$	(2) $32,\ 27,\ 22,\ 17,\ 12,\ \ldots$
(3) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$	(4) $\frac{4}{3},\ 2,\ \frac{8}{3},\ \frac{10}{3},\ 4,\ \ldots$
(5) $1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ \ldots$	(6) $0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots$
(7) $\frac{32}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{8}{27},\ \frac{4}{81},\ \ldots$	(8) $3,\ \frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{3}{2},\ -3,\ \ldots$
(9) $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$	(10) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$
(11) $800,\ 1200,\ 1400,\ 1500,\ 1550,\ \ldots$	(12) $12,\ 9,\ 7,\ 6,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 16,\ \ldots$

(a) Finden Sie jeweils die nächsten vier Folgeglieder.
(b) Finden Sie für jede Folge eine Formel, mit der man das n-te Folgeglied a_n aus dem vorhergehenden Folgeglied a_{n-1} berechnen kann (für beliebiges natürliches $n \geq 1$); in der Formel dürfen auch n oder weitere vorherige Folgeglieder vorkommen.
Beachten Sie: Alle Folgen beginnen mit dem nullten Folgeglied a_0.
(c) Finden Sie eine Formel, mit der man aus dem Index (= der Nummer) n das n-te Folgeglied a_n der Folge berechnen kann.
Bemerkung: Bei zwei der zwölf Folgen ist dies nicht so einfach; bei welchen?
(d) Acht der obigen 12 Folgen lassen sich in zwei Typen einteilen, die jeweils durch Formeln gleicher Bauart beschrieben werden können. Welche?

16.1 Notation und Definitionen

Definition 16.1.1 Folge

Eine umgangssprachliche Folge reeller Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots$$

wird auch in der Mathematik als **Folge** reeller Zahlen bezeichnet. Die gesamte Folge wird wie folgt abgekürzt:

$$(a_n) := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Die in der Folge auftretenden Zahlen heissen **Folgeglieder** oder **Glieder** der Folge, genauer wird das Folgeglied a_i mit dem Index (= der Nummer) i als **i-tes Folgeglied** bezeichnet; beispielsweise ist a_0 das nullte Folgeglied, a_1 das erste Folgeglied etc.

Warnung 16.1.2. In einigen Texten (z. B. unserer Formelsammlung) startet die Nummerierung von Folgen mit dem Index 1 statt mit dem Index 0, d. h. Folgen starten mit a_1 statt mit a_0 wie bei uns. Unsere Konvention führt zu schöneren Formeln und bietet auch auf lange Sicht viele Vorteile.

16.1.3. Eine Folge (a_n) ist nichts anderes als eine Zuordnung, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, also eine Funktion

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) := a_n \end{aligned}$$

In Worten ist jede Folge reeller Zahlen dasselbe wie eine reellwertige Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$.

Insbesondere:

- Begriffe, die wir für reellwertige Funktionen kennen, kann man unmittelbar auf Folgen übertragen, zum Beispiel die Begriffe «(streng) monoton wachsend» und «(streng) monoton fallend».
- Jede Folge kann durch ihren Graphen veranschaulicht werden (siehe Aufgaben A9 und A10).
- Es gibt sehr viele «wilde» Folgen: Zum Beispiel ist die Zuordnung $n \mapsto a_n := \sin(n^2 + \ln(n))$ eine Folge.

16.1.4. Folgen werden in der Regel «implizit», «explizit» oder «rekursiv» angegeben. Wir erklären dies zuerst an einem (idealisierten) Beispiel aus der Biologie.

Beispiel 16.1.5. Betrachte das folgende Modell einer Kaninchenpopulation:

- Im Monat $n = 0$ starten wir mit einem Jungtier-Kaninchenpaar.
- Jedes Kaninchenpaar lebt ewig, wird mit 1 Monat erwachsen und wirft ab dem Alter von 2 Monaten jeden Monat ein neues Jungtier-Kaninchenpaar.

Monat n	Anzahl der Jungtier-Paare	Anzahl erwachsener Paare
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Sei f_n die Anzahl der erwachsenen Kaninchenpaare im Monat n. Für alle $n \geq 2$ gilt dann die **Rekursionsformel** ✎

Fazit: Die Folge (f_n) ist **rekursiv** (etwa: «auf bekannte Werte zurückgehend», von lateinisch recurrere zurücklaufen) gegeben durch ✎

Man kann diese Folge auch **implizit** angeben: ✎

Man kann diese Folge auch **explizit** angeben, durch die **Formel von Moivre-Binet** ✎

Bemerkung: Setzt man $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldener Schnitt) so gilt $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right)$. Dass $-\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gilt, folgt aus $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$.

Diese Formel wurde unabhängig von Abraham de Moivre 1718 und von Jacques Philippe Marie Binet 1843 entdeckt.

Auf den ersten Blick mag es erstaunen,

- dass diese «komplizierte» Formel nur *natürliche* Zahlen liefert, wenn man natürliche Zahlen n einsetzt (warum «verschwinden» die Wurzeln $\sqrt{5}$?);
- dass überhaupt so «komplizierte» Zahlen wie $\sqrt{5}$ benötigt werden, um eine solch einfache Folge natürlicher Zahlen durch eine einzige Formel zu beschreiben.

Wie man selbst auf die Binet-Formel kommen kann, werden Sie in Aufgabe A12 lernen; dabei werden Sie verwenden, dass $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (der goldene Schnitt) und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$ sind (nach der Mitternachtsformel).

Man kann diese Formel auch mit Methoden der Linearen Algebra erhalten (über Eigenwerte und -vektoren der 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$); dies lernt man in der Vorlesung über Lineare Algebra an der Uni.

Definition 16.1.6 Fibonacci-Folge

Die Folge $(f_n) = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ aus Beispiel 16.1.5 heisst **Fibonacci-Folge**.

Aufgabe A2

(a) Überzeugen Sie sich von Hand, dass die Moivre-Binet-Formel für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ die gewünschten Werte liefert.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ gilt.

Aufgabe A3 Sie möchten eine Treppe aus 16 Stufen emporsteigen. Auf wie viele Möglichkeiten ist dies möglich, wenn sie bei jedem Schritt entweder eine oder zwei Treppenstufen auf einmal nehmen?

Hinweis: Sei p_n die Anzahl der Möglichkeiten, die Sie haben, um eine Treppe aus n Stufen emporzusteigen. Finden Sie eine Rekursionsformel für p_n und bestimmen Sie einige Startwerte von Hand. Beantworten Sie dann die eigentliche Frage.

Zusatzfrage: Was hat die Folge (p_n) mit der Fibonacci-Folge zu tun?

Definition 16.1.7 implizite, explizite, rekursive Angabe einer Folge

Eine Folge ist
- **implizit** definiert, wenn die anfänglichen Folgeglieder angegeben werden und dem Leser (hoffentlich) klar ist, wie die Folge weitergeführt wird.
- **explizit** definiert, wenn eine Formel angegeben ist, mit der man das n-ten Folgeglied berechnen kann (für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$).
- **rekursiv** definiert, wenn
  - das nullte Folgeglied a_0 der Folge angegeben ist und
  - eine Formel für a_n angegeben ist, mit der man a_n aus dem vorherigen Folgeglied a_{n-1} berechnen kann (für jede natürliche Zahl $n \geq 1$).

  oder wenn allgemeiner
  - einige anfängliche Folgeglieder angegeben sind und
  - eine Vorschrift angegeben ist, mit der man sukzessive (= nach und nach, der Reihe nach) alle weiteren Folgeglieder ausrechnen kann.

Beispiel 16.1.8. Alle Folgen in Aufgabe A1 sind implizit angegeben. In Teilaufgabe (b) haben Sie die Formel zur rekursiven Berechnung der Folgeglieder angegeben. In Teilaufgabe (c) haben Sie die Folge explizit angegeben.

Beispiel 16.1.9. Wir geben eine Folge auf alle drei Arten an: ✎

16.1.10. Das Problem bei der impliziten Angabe einer Folge ist, dass endlich viele Folgeglieder eine Folge ohne weitere Informationen nicht eindeutig festlegen. (Im Prinzip kann man die Folge beliebig fortsetzen; für je endlich viele Folgeglieder kann man stets eine polynomiale explizite Formel finden.)

Wie wir bei der Fibonacci-Folge gesehen haben, kann es bei einer rekursiv gegebenen Folge relativ schwierig sein, eine explizite Formel zu finden. Für gewisse Typen von Folgen gibt es aber Verfahren, solche Formeln zu finden.

16.1.11. Es gibt viele Folgen, die sich auf keine der drei Arten beschreiben lassen. Ein Beispiel ist die Folge der Startkurse einer Aktie (ab einem gewissen Börsentag).

Viele Folgen sind mathematisch auch kaum interessant. Ein Beispiel ist die Folge 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 4, 4, 4, 3, ... der Wortlängen der Zahlwörter «eins», «zwei», «drei», «vier», ... (im Deutschen).

16.2 Arithmetische und geometrische Folgen

16.2.1. Wir befassen uns nun mit den beiden einfachsten Typen von Folgen, den «arithmetischen» und den «geometrischen» Folgen. Diese beiden Folgentypen tauchen in Anwendungen sehr häufig auf.

Definition 16.2.2 Arithmetische Folge

Eine Folge (a_n) heisst **arithmetisch**, wenn bei jedem Schritt von einem Folgeglied zum nächsten stets dieselbe Zahl addiert wird, wenn es also ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit ✎

Man nennt a_0 den **Startwert** der Folge und d die **Schrittweite** oder die **Differenz** (zwischen benachbarten Folgegliedern).

Beispiel 16.2.3. Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

- Die Folge (a_n) ist arithmetisch mit Startwert $a_0 = 11$ und Schrittweite $d = 3$.
- Die Folge (b_n) ist arithmetisch mit Startwert $b_0 = 13$ und Schrittweite $d = -2$.
- Die Folge (s_n) beschreibt die von einem Velofahrer zurückgelegte Strecke, genauer ist s_i die nach i Stunden zurückgelegte Strecke in Kilometern. Der Velofahrer hat zur Zeit $i = 0$ bereits 33 km zurückgelegt und fährt konstant mit 16 km/h.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i										
b_i										
s_i										

Definition 16.2.4 Geometrische Folge

Eine Folge (g_n) heisst **geometrisch**, wenn bei jedem Schritt von einem Folgeglied zum nächsten stets mit derselben Zahl multipliziert wird, wenn es also ein $q \in \mathbb{R}$ gibt mit ✎

Man nennt g_0 den **Startwert** der Folge und q den **Wachstumsfaktor** oder den **Quotienten** (zwischen benachbarten Folgegliedern).

Beispiel 16.2.5. Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

- Die Folge (g_n) ist geometrisch mit $g_0 = 3$ und $q = 2$.
- Die Folge (h_n) ist geometrisch mit $h_0 = -\frac{1}{4}$ und $q = -\sqrt{2}$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i										
h_i										

Aufgabe A4 Vervollständigen Sie (mit Bleistift) die beiden Merkeboxen 16.2.6 und 16.2.7.

Merke 16.2.6

Eine arithmetische Folge (a_n) mit Startwert a_0 und Schrittweite d ist

- implizit gegeben durch ✎
- explizit gegeben durch ✎
- rekursiv gegeben durch den Startwert a_0 und die Rekursionsformel ✎

Merke 16.2.7

Eine geometrische Folge (g_n) mit Startwert g_0 und Wachstumsfaktor q ist

- implizit gegeben durch ✎
- explizit gegeben durch ✎
- rekursiv gegeben durch den Startwert g_0 und die Rekursionsformel ✎

Aufgabe A5 Für die Definition einer Folge haben wir die drei Möglichkeiten «implizit», «explizit» und «rekursiv» kennengelernt. Geben Sie jeweils die beiden anderen Definitionsmöglichkeiten an. Geben Sie auch an, ob die Folge arithmetisch oder geometrisch ist oder ob sie keine dieser Eigenschaften hat.

a) (a_n) gegeben durch $a_n = 8 - n$

b) $(a_n) = (3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$

c) $(a_n) = \begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_n &= a_{n-1} + 2n - 1 \end{cases}$

d) $a_n = \frac{16}{2^n}$

e) $(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\right)$

f) $(a_n) = \begin{cases} a_0 &= 100 \\ a_n &= a_{n-1} \cdot 1.02 \end{cases}$

Aufgabe A6 Bestimmen Sie das nullte Glied (= den Startwert) a_0 und die Schrittweite d einer arithmetischen Folge (a_n), wenn Folgendes gegeben ist (Gleichungssysteme dürfen mit dem Taschenrechner gelöst werden):

a) $a_2 = 5$ und $a_3 = 7$.

b) $a_5 = 17$ und $a_8 = 32$.

c) a_8 und a_{12}
Resultat als Formel, die a_8 und a_{12} enthält.

d) a_n und a_m, wobei $m > n$
Resultat als Formel, die a_n, a_m, n und m enthält.

e) $a_{15} + a_{20} = 300$ und $a_0 = 10$.

f) $a_2 \cdot a_3 = 24$ und $a_4 = 13$.

g) $a_2 = 4a_6$ und $a_2 + a_3 = 10$.

h) $a_{a_3} = 58$ und $a_{a_0} = 10$.

Aufgabe A7 Bestimmen Sie das nullte Glied (= den Startwert) g_0 und den Wachstumsfaktor q einer geometrischen Folge (g_n), wenn Folgendes bekannt ist (ohne Taschenrechner):

a) $g_5 = 24$ und $g_6 = 48$

b) $g_4 = 18$ und $g_6 = 162$

c) g_5 und g_{10}

d) g_n und g_m mit $m > n$

Aufgabe A8 Seien (a_n) und (b_n) arithmetische Folgen mit $(a_n) = 7, 5, 3, \ldots$ und $b_n = 5n + 1$.

a) Schreiben Sie die beiden Folgen implizit, explizit und rekursiv.

b) Sei die Folge (c_n) definiert durch $c_n = a_n + b_n$. Schreiben Sie (c_n) implizit, explizit und rekursiv. Ist (c_n) arithmetisch?

c) Sei die Folge (d_n) definiert durch $d_n = a_n \cdot b_n$. Schreiben Sie (d_n) implizit und explizit. Ist (d_n) arithmetisch?

d) Sei die Folge (e_n) definiert durch $e_n = a_{b_n}$. Schreiben Sie (e_n) implizit, explizit und rekursiv. Ist (e_n) arithmetisch?

Aufgabe A9 Sei (a_n) eine arithmetische Folge.

a) Im Fall $a_0 = \frac{5}{2}$ und $d = -\frac{1}{2}$: Veranschaulichen Sie die Folge (a_n) in einem Koordinatensystem, indem Sie (a_n) als Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen und deren Graphen zeichnen.
Hinweis: Mit anderen Worten: Für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ markiere man den Punkt (n, a_n).

b) Im Fall $a_0 = \frac{5}{2}$ und $d = -\frac{1}{2}$: Gibt es eine lineare Funktion $f(x) = mx + q$ mit der Eigenschaft, dass $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

c) Im allgemeinen Fall: Wie hängen der Startwert a_0, die Schrittweite d, der y-Achsenabschnitt q und die Steigung m zusammen?

d) Im allgemeinen Fall: Betrachten sie die drei Fälle $d > 0$, $d < 0$ und $d = 0$. Was lässt sich jeweils über die Werte a_n aussagen, wenn n immer grösser wird?

Aufgabe A10

(a) Veranschaulichen Sie die ersten zehn Folgeglieder der folgenden vier geometrischen Folgen wie in Aufgabe A9 in einem Koordinatensystem:
- Startwert $a_0 = 1$, Wachstumsfaktor $q = \frac{1}{2}$;
- Startwert $b_0 = 1$, Wachstumsfaktor $q = -\frac{1}{2}$;
- Startwert $c_0 = 1$, Wachstumsfaktor $q = 2$;
- Startwert $d_0 = 1$, Wachstumsfaktor $q = -2$;

(b) Man verwendet auch die Begriffe «gedämpft», «explosiv», «alternierend» und «monoton» um das Verhalten von Folgen zu beschreiben. Welche dieser Begriffe treffen auf welche dieser vier Folgen zu?

(c) Nennen Sie ein Beispiel einer monotonen und explosiven Entwicklung «aus dem normalen Leben».

Aufgabe A11 Gegeben sind zwei arithmetische Folgen (a_n) und (b_n) mit Schrittweiten d und e.

a) Zeigen Sie, dass die durch $c_n = a_n + b_n$ definierte Folge (c_n) ebenfalls arithmetisch ist und bestimmen Sie die zugehörige Schrittweite.

b) Sei (f_n) die durch $f_n = n \cdot a_n$ definierte Folge. Kann (f_n) arithmetisch ein? Falls ja, welche Bedingung muss die Folge (a_n) erfüllen?

c) Zeigen Sie, dass die durch $e_n = 2^{a_n}$ definierte Folge (e_n) geometrisch ist und bestimmen Sie den zugehörigen Wachstumsfaktor q.

Aufgabe A12 In dieser Aufgabe lernen Sie, wie man selbst auf die Moivre-Binet-Formel für die Fibonacci-Folge kommen kann (siehe Beispiel 16.1.5).

(a) Wir sagen, dass eine Folge (g_n) die *Fibonacci-Eigenschaft* hat, wenn $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ gilt. Bestimmen Sie alle geometrischen Folgen (g_n) mit $g_0 = 1$, die die Fibonacci-Eigenschaft haben.
Hinweis: Es gibt zwei solche Folgen; die eine hat einen positiven Wachstumsfaktor $\varphi > 0$, die andere hat einen negativen Wachstumsfaktor $\psi < 0$.

(b) «Jedes Vielfache einer Folge mit der Fibonacci-Eigenschaft hat die Fibonacci-Eigenschaft.»
Zeigen Sie: Wenn eine Folge (a_n) die Fibonacci-Eigenschaft hat, dann hat auch die durch $b_n = \lambda a_n$ definierte Folge (b_n) die Fibonacci-Eigenschaft, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige relle Zahl ist.

(c) «Jede Summe zweier Folgen mit der Fibonacci-Eigenschaft hat die Fibonacci-Eigenschaft.»
Zeigen Sie: Wenn zwei Folgen (a_n) und (b_n) die Fibbonaci-Eigenschaft haben, dann hat auch die durch $c_n = a_n + b_n$ definiert Folge (c_n) die Fibonacci-Eigenschaft.

(d) Seien (g_n) und (h_n) die beiden geometrischen Folgen aus Aufgabe (a). Zeigen Sie, dass die Summe geeigneter Vielfacher dieser beiden Folgen die Fibonacci-Folge ist.
Konkret: Bestimmen Sie zwei reelle Zahlen x und y so, dass $f_n = x \cdot g_n + y \cdot h_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ gilt. Dieselbe Gleichung gilt dann automatisch für alle $n \in \mathbb{N}$, denn beide Seiten haben die Fibonacci-Eigenschaft.

16.3 Sigma-Notation

Definition 16.3.1 Summenzeichen $\sum$, Sigma-Schreibweise

Um Summen aus mehreren ähnlich aufgebauten Summanden platzsparend aufzuschreiben, nutzt man in der Mathematik die sogenannte **Sigma-Schreibweise** mit dem **Summenzeichen** $\sum$, einem grossen griechisches Sigma. Diese Notation ist wie folgt definiert.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) := f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

wobei i als **Laufvariable** (oder **Summationsindex**) bezeichnet wird und $f(i)$ ein von dieser Laufvariablen abhängiger Ausdruck ist; der Ausdruck $i = m$ unter dem Summenzeichen deutet an, dass die Laufvariable mit dem **Startwert** m startet; die Laufvariable i wird dann jeweils um 1 erhöht, bis sie beim **Endwert** n angekommt.
Die Syntax der Sigma-Notation ist also stets wie folgt:

$$\sum_{\text{Name der Laufvariablen}=\text{Startwert}}^{\text{Endwert}} \text{Ausdruck, der von der Laufvariablen abhängt}$$

Beispiel 16.3.2.

$$\sum_{s=-2}^{5} s^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 60$$

Finden Sie heraus, wie man den Ausdruck $\sum_{s=-2}^{5} s^2$ in den TR eingeben kann und berechnen Sie so den Wert dieser Summe.

In Python gibt das folgende Programm die Liste aller Summanden aus und berechnet die Summe.

```
liste = [s**2 for s in range(-2, 6)]
print(liste)
summe = sum(liste)
print(summe)
```

Konvention 16.3.3. Das Summenzeichen $\sum$ «bindet stärker» als das Pluszeichen $+$, aber schwächer als das Multiplikationszeichen oder «hoch». Beispielsweise gilt

$$\sum_{k=1}^{3} 5 \cdot k^2 + 1 = \left(\sum_{k=1}^{3} 5 \cdot k^2\right) + 1 = 5\cdot 1^2 + 5\cdot 2^2 + 5\cdot 3^2 + 1 \quad \neq \quad \sum_{k=1}^{3} \left(5 \cdot k^2 + 1\right) = (5\cdot 1^2+1) + (5\cdot 2^2+1) + (5\cdot 3^2+1)$$

Konvention 16.3.4. Wenn die untere Grenze grösser ist als die obere Grenze, so ist die Summe **leer** und wird als 0 definiert. Zum Beispiel gilt $\sum_{i=42}^{23} i = 0$.

Aufgabe A13 Schreiben Sie jede der folgenden Summen ausführlich auf. Ausserdem sind die Summen wie angegeben auszurechnen. Beispiel: $\sum_{i=12}^{23} \sqrt{i+2} = \sqrt{12+2} + \sqrt{13+2} + \sqrt{14+2} + \ldots + \sqrt{22+2} + \sqrt{23+2}$. Der Taschenrechner berechnet dies zu ≈ 52.7792244079169.

a) $\sum_{x=4}^{18} (x^2 - 5)$ (per TR ausrechnen)

b) $\sum_{p=-2}^{2} \left(p^3 + \frac{1}{p}\right)$ (ohne TR ausrechnen)

c) $\sum_{q=15}^{20} \sqrt{10} - \pi$ (ohne TR ausrechnen)

d) $\sum_{t=-5}^{-1} 1$ (ohne TR ausrechnen)

e) $\sum_{b=3}^{11} a_{b-2}$ (nur ausführlich aufschreiben)

f) $\sum_{t=0}^{2} \left(\sum_{k=t-1}^{t+2} k^2 \right)$ (mit TR ausrechnen)

16.4 Teilsummen von Folgen

Definition 16.4.1 n-te Teilsumme einer Folge

Die **n-te Teilsumme** (oder **Partialsumme**) einer $\boxed{\text{beliebigen}}$ Folge (f_n) ist die Summe aller Folgeglieder mit Indizes vom Index 0 bis zum Index n. Sie wird oft als s_n notiert.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

Für Fibonacci-Folge habe s_4 als Beispiel ausgerechnet. Achtung: 5 Summanden.
Für beliebige Folgen gibt es oft keine allgemeine Formel für s_n. Für arithmetische und geometrische Folgen aber schon. Das Nahziel ist, diese Formeln kennenzulernen.

16.5 Teilsummen arithmetischer Folgen

Aufgabe A14 Finden Sie eine effiziente Methode, um die folgenden Summen zu berechnen.
(Das Summenzeichen Σ auf dem Taschenrechner darf nicht verwendet werden, höchstens zur Kontrolle.)

a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (jeweils einschliesslich).

b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 100 bis 200.

c) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. vgl. erste Klasse; wie heisst diese Formel?

d) Die Summe aller natürlichen Zahlen von n bis m (mit $n < m$).

e) Die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 204.

f) Die Summe aller ungeraden Zahlen von 101 bis 303.

g) Die Summe aller Folgeglieder einer arithmetischen Folge bis zum Folgeglied mit dem Index 10, wenn Startwert a_0 und Schrittweite d gegeben sind.

h) Die Summe aller Folgeglieder einer arithmetischen Folge bis zum Folgeglied mit dem Index n, wenn a_0 und d gegeben sind.

Schreiben Sie all diese Summen mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ (und eventuell Kontrolle mit TR).

Satz 16.5.1 n-te Teilsumme einer arithmetischen Folge

Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit Startwert a_0 und Schrittweite d. Ihre n-te Teilsumme lässt sich dann wie folgt berechnen:

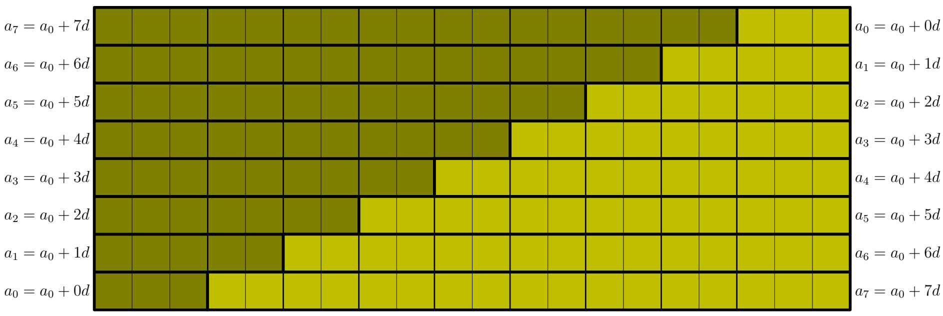
$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i =$$

In Worten: ✎

Beweis. Wir möchten eine Formel finden für ✎

Der Trick ist, diese Gleichung zweimal untereinanderzuschreiben, einmal mit umgekehrter Reihenfolge der Summanden rechts, dann die beiden Gleichungen zu addieren und das Ergebnis nach s_n aufzulösen.✎

Die Skizze illustriert den Beweis für $n = 7$ (und $a_0 = 3$ und $d = 2$). Zu berechnen ist die olivgrüne Fläche links (das ist s_n). Addiert man dieselbe Fläche «andersherum», so erhält man ein Rechteck der Seitenlängen $n + 1$ und $a_0 + a_n$. Für die Rechtecksfläche gilt also $2s_n = (n+1)(a_0+a_n)$, woraus sofort die gewünschte Formel folgt.



Beachte dabei: Jede Summe $a_i + a_{n-i}$ (= Fläche der i-ten Zeile von unten) ist genauso gross ist wie $a_0 + a_n$, denn wenn man eine Zeile nach oben geht, wächst die dunkelgrüne Fläche um d, während die hellgrüne Fläche um d schrumpft. □

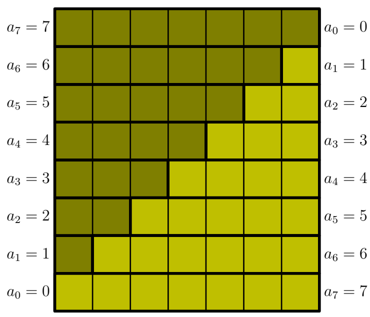
16.5.2. Wenn wir die arithmetische Folge $(a_n) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ betrachten, also $a_n = 0 + n1 = n$, so liefert Satz 16.5.1

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n+1) \cdot \frac{a_0 + a_n}{2} = (n+1)\frac{0+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dies ist die wohlbekannte **Gaußsche Summenformel** (siehe erste Kantiklasse; der Summand 0 spielt keine Rolle)

$$\sum_{i=0}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der obige Beweis ist eine naheliegende Verallgemeinerung unseres damaligen Beweises.
Die Zeichnung rechts illustriert die Gaußsche Summenformel für $n = 7$: Die gesuchte Summe ist die halbe Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $n = 7$ und $n + 1 = 8$.



16.5.3. Wir erklären zusätzlich, wie man Satz 16.5.1 direkt aus der Gaußschen Summenformel folgern kann. Nebenbei lernt man dabei, wie man mit dem Summenzeichen Σ rechnet. Sei (a_n) eine arithmetische Folge. ✎

Beispiel 16.5.4. Betrachte die arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = 2 + 3n$. Bestimme die Summe der ersten 50 Glieder dieser Folge.
Zu bestimmen ist also

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{49}$$

(Achtung, es wird nur bis a_{49} summiert, da wir mit dem Index 0 starten.) Mit Satz 16.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{49} &= (\text{Anzahl der Summanden}) \cdot (\text{Durchschnitt aus vorderstem und hinterstem Summanden}) \\ &= 50 \cdot \frac{a_0 + a_{49}}{2} = 50 \cdot \frac{2 + (2 + 3 \cdot 49)}{2} = 50 \cdot \frac{151}{2} = 25 \cdot 151 = 3775 \end{aligned}$$

Beispiel 16.5.5. Wir wollen die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 999 berechnen.
Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Folge (u_n) (warum?). Man ist nun versucht, direkt Satz 16.5.1 anzuwenden, und erhält

$$1 + 3 + 5 + \dots + 999 = (n + 1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n + 1) \underbrace{\frac{1 + 999}{2}}_{\text{Durchschnitt}} = 500(n + 1)$$

Aber was ist n?
Antwort: n ist der Index des letzten summierten Folgeglieds 999, d. h. die Zahl n mit $u_n = 999$.
Dazu benötigen wir die explizite Formel für n. Diese ist offensichtlich $u_n = u_0 + nd = 1 + 2n$. Aus $u_n = 1 + 2n = 999$ folgt $n = \frac{998}{2} = 499$.
Damit können wir die gesuchte Summe ausrechnen.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 999 = 500(n + 1) = 500 \cdot (499 + 1) = 500^2 = 5^2 \cdot 100^2 = 250'000$$

Anschaulicher kann man n wie folgt bestimmen: $n + 1$ ist die Anzahl der summierten Folgeglieder, d. h. n ist die Anzahl der «Schritte, um von 1 bis 999» zu kommen. Da die Schrittweite 2 ist, muss man $n = \frac{999-1}{2} = \frac{998}{2} = 499$ Schritte machen.

Beispiel 16.5.6 (Verallgemeinerung von Beispiel 16.5.5)**.** Bestimme die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis x, wobei x eine fixierte ungerade Zahl ist. (Gesucht ist eine Formel, in der nur x vorkommt.)
Mit $u_n = 2n + 1$ wie oben folgt aus $x = u_n = 2n + 1$, dass $n = \frac{x-1}{2}$. Also gilt

$$1 + 3 + 5 + \dots + (x - 2) + x \overset{\text{Satz 16.5.1}}{=} (n + 1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \left(\frac{x - 1}{2} + 1\right)\frac{1 + x}{2} = \frac{x - 1 + 2}{2} \cdot \frac{1 + x}{2} = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2$$

Probe durch konkrete Werte:

- Für $x = 999$ liefert diese Formel $\left(\frac{1000}{2}\right)^2 = 500^2$, also dasselbe Ergebnis wie im vorigen Beispiel 16.5.5.
- Für $x = 15$ liefert diese Formel $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \left(\frac{15+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 8^2$. Dies stimmt.

Merke 16.5.7 Summe ungerader Zahlen (startend bei 1) ist Quadratzahl

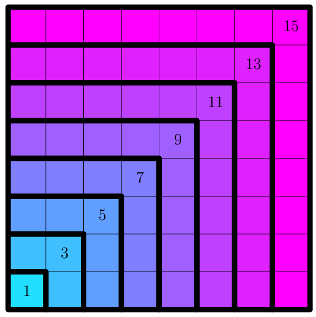
Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen ungeraden Zahl ist stets eine Quadratzahl.

In der Zeichnung rechts ist beispielhaft die Gleichheit

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8^2$$

illustriert.

(Diese Zeichnung ist auch eine gute Merkhilfe.)



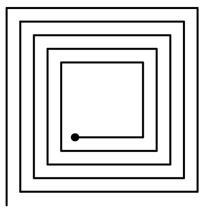
Beweis: Siehe Beispiel 16.5.6 für eine genauer Aussage.

16.5.8. Die (vermutlich recht überzeugende) graphische Illustration von Merke 16.5.7 kann man übrigens wie folgt in einen strengen Beweis verwandeln. Jedes Basisquadrat hat die Seitenlänge 1.
Beobachtungen:

- Von jedem «dick gezeichneten» Quadrat zum nächsten kommt (als Fläche) die «nächste» ungerade Zahl hinzu, denn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadrate ist $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.
  Wir nennen diese hinzukommenden Flächen «Winkel». Sie sind in der Zeichnung einfarbig dargestellt.
- Der «Winkel» aus 15 Boxen hat die Seitenlänge $\frac{15+1}{2} = 8$.
  Allgemein hat der Winkel aus x Boxen die Seitenlänge $\frac{x+1}{2}$.

Ordnet man nun alle Winkel bis zum Winkel mit x Boxen wie in der Zeichnung angedeutet an, so erhält man ein Quadrat. Die Fläche dieses Quadrats kann man auf zwei Arten berechnen: Zum einen über die übliche Formel zu $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$, zum anderen als Summe der Flächen aller beteiligten Winkel zu $1 + 3 + 5 + \cdots + x$. Dies zeigt die Formel $1 + 3 + 5 + \cdots + x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ aus Beispiel 16.5.6.

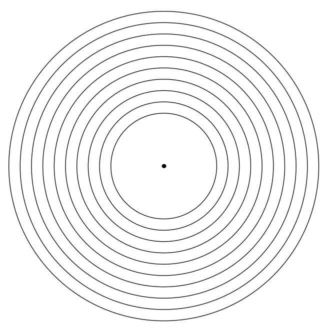
Aufgabe A15



(a) Berechne die Länge der rechts abgebildeten Spirale. Sie startet an dem markiertem Punkt innen. Die erste Strecke ist eine Einheit lang. Bei jedem Abbiegen wächst die Strecke um 0.1 Einheiten. Insgesamt besteht die Spirale aus 20 Strecken.
Lösung: 39

(b) Wie lang ist die allgemeine Spirale dieser Form aus m Teilstrecken, wenn die erste Strecke die Länge ℓ hat und die Streckenlänge beim Abbiegen jeweils um d wächst?
Lösung: $m\ell + \frac{m(m-1)}{2}d$

Aufgabe A16



(a) Gegeben sind 10 konzentrische Kreise (d. h. Kreise mit demselben Mittelpunkt). Der kleinste Kreis hat den Radius $r = 7$, der grösste Kreis hat den Radius $R = 20.5$. Die Kreisradien wachsen von einem Kreis zum nächsten Kreis um dieselbe Länge.
Bestimme die Summe der Umfänge aller Kreise. Lösung: 275π

(b) Gegeben sind m konzentrische Kreise. Der kleinste Kreis hat den Radius r, der grösste Kreis hat den Radius R. Die Kreisradien wachsen von einem Kreis zum nächsten Kreis um dieselbe Länge.
Bestimme die Summe der Umfänge aller Kreise als Formel in Abhängigkeit von m, r und R. Lösung: $\pi m(r+R)$

Aufgabe A17

Mit Hilfe von Satz 16.5.1:

(a) Berechne die Summe $2 + 4 + 6 + \cdots + 1000$. Lösung: $250'500$

(b) Sei x eine gerade Zahl. Berechne die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis x. Lösung: $\frac{x(x+2)}{4}$

Aufgabe A18 Berechnen Sie die fehlenden Grössen in der folgenden Tabelle. Dabei ist (a_n) eine arithmetische Folge mit Startwert a_0 und Schrittweite d und s_n ist ihre n-te Teilsumme.

Setzen Sie zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen den Taschenrechner ein.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a_0	1.2	404			1.8	207
d	2.1	-7	5.2		0.05	
n	19			60		45
a_n		-9	107	0		
s_n			123	2196	4059	207

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A16, S. 3, angepasst für mit dem Index Null startende Folgen

16.6 Teilsummen geometrischer Folgen

Satz 16.6.1 n-te Teilsumme einer geometrischen Folge

Sei $q \neq 1$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt: ✎ wichtig, bitte Formel oder besser Herleitung merken!

Insbesondere gilt: Sei (g_n) eine geometrische Folge mit Startwert g_0 und Wachstumsfaktor $q \neq 1$. Dann lässt sich ihre n-te Teilsumme wie folgt berechnen.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} g_i = ✎$$

Beweis. Wir möchten eine Formel finden für ✎

Der Trick ist, diese Gleichung und ihr q-Faches geeignet untereinanderzuschreiben, die Differenz zu bilden und das Ergebnis nach S aufzulösen.✎

Variation des Beweises: Man kann auch direkt $S = 1 + \cdots + q^n$ mit $(1-q)$m multiplizieren und erhält $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ (eine wissenswerte Faktorisierung der rechten Seite). ☐

Beispiel 16.6.2. Summe von Zweierpotenzen.

$$\begin{aligned}
1+2+4+8+\cdots+512+1024 &= 2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^9+2^{10} \\
&= \frac{1-2^{11}}{1-2} && \text{(nach Satz 16.6.1)} \\
&= \frac{1-2^{11}}{-1} \\
&= 2^{11}-1
\end{aligned}$$

Allgemeiner gilt (mit dem analogen Beweis) $1+2+4+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$.

In Worten: Die Summe der ersten Zweierpotenzen ist stets die nächste Zweierpotenz minus Eins.

Beispiel 16.6.3. Wir berechnen die 10-te Teilsumme (also 11 Summanden) der alternierenden geometrischen Reihe mit Startwert 1 und Wachstumsfaktor $-\frac{2}{3}$ mit Satz 16.6.1 («alternierende Folge» bedeutet: Folgeglieder abwechselnd positiv und negativ).

$$\begin{aligned}1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots-\frac{2^9}{3^9}+\frac{2^{10}}{3^{10}} &= \left(-\frac{2}{3}\right)^0+\left(-\frac{2}{3}\right)^1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}\\ &= \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{10+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\\ &= \frac{1-(-1)^{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1-(-1)\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}}{\frac{5}{3}}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\left(1+\frac{2^{11}}{3^{11}}\right) = \frac{3}{5}+\frac{2^{11}}{3^{10}\cdot 5} \approx 0.6069\end{aligned}$$

Aufgabe A19 (ohne Taschenrechner; Hilfen: $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$)

(a) Berechne die Summe aller Dreierpotenzen von 1 bis 729. 1093

(b) Berechne die Summe aller Dreierpotenzen von 1 bis 3^n. $\frac{3^{n+1}-1}{2}$

(c) Berechne die Summe aller Potenzen von $\frac{3}{2}$ von 1 bis $\frac{729}{64}$. $\frac{2059}{64}$

(d) Berechne die Summe aller Potenzen von $-\frac{3}{2}$ von 1 bis $\frac{729}{64}$. $\frac{463}{64}$

(e) Berechne die Summe aller Potenzen von $\frac{3}{2}$ von 1 bis $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. $\frac{3^{n+1}}{2^n}-2$

(f) Berechne die Summe aller Potenzen von $-\frac{3}{2}$ von 1 bis $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$. $\frac{2}{5}-(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{2^n\cdot 5}$

Aufgabe A20 (ohne Taschenrechner zu lösen; gute Übung zum Bruchrechnen)

Betrachten Sie die geometrische Folge $(g_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ der Potenzen von $\frac{1}{2}$.

(a) (i) Berechnen Sie die 10-te Partialsumme s_{10}. $2-\frac{1}{2^{10}}=\frac{2047}{1024}$

(ii) Berechnen Sie die n-te Partialsumme $s_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i$. $2-\frac{1}{2^n}=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}$

(iii) Was passiert mit s_n für $n \to \infty$ (d. h. wenn n immer grösser wird)?

(b) (i) Berechnen Sie die Summe aller «Einhalbpotenzen» von $\frac{1}{64}$ bis $\frac{1}{2048}$ auf die beiden folgenden Weisen. $\frac{63}{2048}$

- Als Differenz zweier geeigneter Teilsummen der obigen geometrischen Folge (g_n) (verwenden Sie dabei das Ergebnis von Teilaufgabe (a).(ii)).
- Als Teilsumme der geometrischen Folge mit Startwert $\frac{1}{64}$ und Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$.

(ii) Für beliebige natürliche Zahlen m, n mit $m < n$, berechnen Sie die Summe aller «Einhalbpotenzen» von $\frac{1}{2^m}$ bis $\frac{1}{2^n}$. $\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^n}$

Aufgabe A21

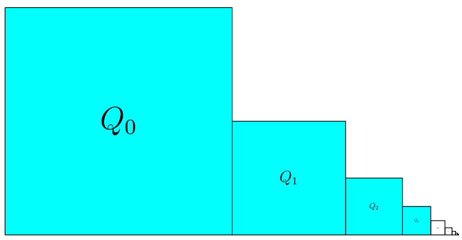
Berechnen Sie die fehlenden Grössen in der folgenden Tabelle. Dabei ist (g_n) eine geometrische Folge mit Startwert g_0 und Wachstumsfaktor q und s_n ist ihre n-te Teilsumme.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
g_0	1	6		4	40	
g_n		13122		5.8564	-625	0.16
n	7		11	4	3	5
q	2	3	-3			0.2
s_n			398580			

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A21, S. 3, angepasst für Null basierte Folgen.

Aufgabe A22

In der Zeichnung ist eine Folge $Q_0, Q_1, \ldots$ von nebeneinanderliegenden Quadraten dargestellt. Quadrat Q_0 hat die Seitenlänge 1. Von jedem Quadrat zum nächsten wird die Seitenlänge halbiert.



(a) Berechne die türkis gefärbte Fläche F_3. $\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 64}=\frac{85}{64}$

(b) Berechne die Fläche F_n der Quadrate von Q_0 bis Q_n. $\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}$
Was passiert mit F_n, wenn n immer grösser wird?

(c) Berechne den Umfang U_3 der türkis gefärbten Figur (die Strecken in denen sich aufeinanderfolgene Quadrate berühren, soll hierbei nicht mitgezählt werden). $6-\frac{1}{4}=\frac{23}{4}$

(d) Berechne den Umfang U_n der Figur, die von den Quadraten von Q_0 bis Q_n gebildet wird. $6-\frac{1}{2^{n-1}}$
Was passiert mit U_n, wenn n immer grösser wird?

16.7 Reihen

Definition 16.7.1 Reihe

Gegeben sei eine (beliebige) Folge (a_n).

- (Definition 16.4.1 wiederholt) Die **n-te Teilsumme** (oder n-te Partialsumme) dieser Folge ist ✎

  Beachte: Die Summe besteht aus $n+1$ Summanden, nämlich den Folgegliedern mit den Indizes $0, \dots, n$.
- Die **zugehörige Reihe** (s_n) ist die Folge dieser Teilsummen.

  Explizit: ✎

  Implizit: ✎

  Rekursiv: ✎

Beachte: Die Reihe (s_n) legt die Folge (a_n) fest, denn $a_0 = s_0$ und $a_n = s_n - s_{n-1}$ (Folge der Differenzen).

- Startet man mit einer arithmetischen Folge, so heisst die zugehörige Reihe **arithmetische Reihe**.
- Startet man mit einer geometrischen Folge, so heisst die zugehörige Reihe **geometrische Reihe**.

16.7.2. Beachte: Jede Reihe ist eine Folge. Das Wort Reihe soll deutlich machen, dass man mit einer Folge startet und dann an der Folge der Teilsummen dieser Folge (= der zugehörigen Reihe) interessiert ist.[1]

Beispiel 16.7.3 (Reihe zu Folge, die weder arithmetisch noch geometrisch)**.** Sei (p_n) die Folge der Primzahlen und (s_n) die zugehörige Reihe. Die Folge der Primzahlen ist weder arithmetisch noch geometrisch.

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8

Beispiel 16.7.4 (Reihe zu arithmetischer Folge = arithmetische Reihe)**.** Sei (a_n) die arithmetische Folge mit Startwert $a_0 = 10$ und Schrittweite 3 und (s_n) die zugehörige (arithmetische) Reihe.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\dots$	a_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$\dots$	s_n

[1] Was nun folgt, mag beim ersten Lesen verwirren: Umgekehrt ist jede Folge (f_n) auch eine Reihe: Sei (d_n) die «Differenzenfolge» von (f_n), definiert durch $d_0 = 0$ und $d_n = f_n - f_{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Dann ist f_n die n-te Teilsumme von (d_n), also ist (f_n) die Reihe zu (d_n).
Beispiel: Die Folge $(f_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ der Primzahlen ist die Reihe zur ihrer Differenzenfolge $(2, 1, 2, 2, 4, 2, \dots)$.

Beispiele 16.7.5.

- geometrische Folge (g_n) mit $g_0 = 1$ und (allgemeinem) q als Wachstumsfaktor und zugehöriger (geometrischer) Reihe (s_n).

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	$\dots$	g_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	$\dots$	s_n

- geometrische Folge (g_n) mit $g_0 = 1$ und $q = 2$ und zugehöriger (geometrischer) Reihe (s_n).

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	$\dots$	g_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$\dots$	s_n

- geometrische Folge (g_n) mit $g_0 = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ und zugehöriger (geometrischer) Reihe (s_n).

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	$\dots$	g_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$\dots$	s_n

- geometrische Folge (g_n) mit $g_0 = 1$ und $q = -\frac{1}{2}$ und zugehöriger (geometrischer) Reihe (s_n).

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	$\dots$	g_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$\dots$	s_n

- geometrische Folge (g_n) mit $g_0 = 1$ und $q = -2$ und zugehöriger (geometrischer) Reihe (s_n).

g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	$\dots$	g_n
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$\dots$	s_n

16.7.6. Wir werden uns später genauer mit der Konvergenz von Folgen (und Reihen, die ja auch Folgen sind) und dem Begriff des Grenzwerts beschäftigen und diesen auch exakt definieren. Hier vorerst eine etwas informelle Definition.

Definition 16.7.7 Konvergenz, Divergenz, Grenzwert – informelle Definition

Wenn sich eine Folge einer reellen Zahl immer besser nähert, so nennen wir diese Zahl den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge und sagen, dass die Folge gegen diese Zahl **konvergiert**.
Man sagt, dass eine Folge **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert. (Divergenz = Nicht-Konvergenz)
Da jede Reihe eine Folge ist (Erinnerung: Reihe = Teilsummenfolge) spricht man auch von der Konvergenz/Divergenz einer Reihe und dem Grenzwert einer Reihe.

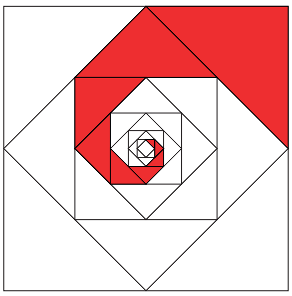
Satz 16.7.8 Konvergenzkriterium für geometrische Reihen

Betrachte die geometrische Reihe zu einer geometrischen Folge mit Wachstumsfaktor q (und Startwert $g_0 \neq 0$; der Fall $g_0 = 0$ ist langweilig). Dann gilt:

- im Fall $|q| < 1$ (also $-1 < q < 1$) konvergiert die geometrische Reihe gegen den Grenzwert $g_0 \cdot \frac{1}{1-q}$; man schreibt
$$\sum_{k=0}^{\infty} g_0 q^k = g_0 \cdot \frac{1}{1-q}$$
- im Fall $|q| \geq 1$ (also $q \leq -1$ oder $q \geq 1$) divergiert diese geometrische Reihe, es existiert also kein Grenzwert.

Beweis. Wir haben gesehen (Satz 16.6.1), dass das n-te Glied unserer geometrischen Reihe (im Fall $q \neq 1$) gegeben ist durch
$$s_n = g_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = g_0 \frac{1}{1-q} - g_0 \frac{1}{1-q} \cdot q^{n+1}$$
Wir möchten wissen, was mit diesem Ausdruck für $n \to \infty$ geschieht (für fixiertes q und g_0).
Beachte, dass $g_0 \frac{1}{1-q}$ unabhängig von n ist (dieser Ausdruck taucht als erster Summand und als Faktor im zweiten Summanden auf).
Im Fall $|q| < 1$ konvergiert q^{n+1} für $n \to \infty$ gegen Null. Damit konvergiert der zweite Summand ebenfalls gegen Null, und der erste Summand ist der gesuchte Grenzwert.
Im Fall $q > 1$ wird q^{n+1} beliebig gross («Grenzwert ist ∞»), weswegen der zweite Summand ebenfalls beliebig gross oder beliebig klein («Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$») wird; also hat s_n keinen Grenzwert.
Im Fall $q < -1$ wird q^{n+1} vom Betrag her beliebig gross (genauer wechselt dieser Ausdruck ständig sein Vorzeichen (alternierend) und somit existiert auch hier kein Grenzwert von s_n.
Die beiden Fälle $q = 1$ und $q = -1$ betrachtet man separat. Im Fall $q = 1$ ist klar, dass die Folge
$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + q = 1 + 1 = 2, \quad s_2 = 1 + q + q^2 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \ldots, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1), \quad \ldots$$
divergiert und dasselbe gilt dann auch, wenn man diese Folge mit $g_0 \neq 0$ multipliziert. Im Fall $q = -1$ ist die Folge
$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + q = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = 1 + q + q^2 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad s_3 = 1 + q + q^2 + q^3 = 0, \quad \ldots$$
abwechselnd $+1$ und 0 ist und deswegen divergiert. Multiplikation mit $g_0 \neq 0$ ändert nichts an der Divergenz. □

Aufgabe A23 Das äussere Quadrat in der Zeichnung habe eine Seitenlänge von 8 cm.



(a) Wie gross ist die rote/schraffierte Fläche? Das heisst, die Gesamtfläche der neun roten Dreiecke?
(b) Wie gross ist die Gesamtfläche dieser Dreiecke, wenn man statt neun Dreiecken unendlich viele in dieser Art gebildete Dreiecke betrachtet?
(c) Wie gross ist der Umfang dieser unendlich fortgesetzten Figur?

Quelle: Erhard Rhyn, Analysis, A107, S. 12

Aufgabe A24 Die Kochsche Schneeflocke ist wie folgt definiert:

- Man startet mit einem gleichseitigen Dreieck (3 Strecken) mit Seitenlänge $s = 1$ (Schritt 0).
- Man wiederholt folgenden Schritt:
  - Jede Strecke wird in 3 gleich lange Strecken unterteilt (Punkte A, B, C, D). Der mittlere Teil BC wird entfernt und durch zwei Strecken BE und EC ersetzt, wobei $\triangle BEC$ gleichseitig ist. Der Punkt E wird so gewählt, dass die Spitze E «nach aussen zeigt».

a) Skizzieren Sie die Figuren nach dem nullten, ersten, zweiten, dritten und vierten Schritt.
b) Berechnen Sie die Umfänge U_0, U_1, U_2, U_3 der ersten vier Figuren, d.h. die Gesamtlänge aller Strecken der ersten vier Figuren. Finden Sie dann eine Formel, um den Umfang U_n der Figur nach n Schritten zu berechnen.
c) Berechnen Sie die Flächeninhalte A_0, A_1, A_2, A_3 der ersten vier Figuren. Finden Sie dann eine Formel, um den Flächeninhalt A_n nach n Schritten zu berechnen.
d) Wenn die Anzahl Schritte n immer grösser wird, was passiert mit dem Umfang und dem Flächeninhalt? Finden Sie ein ähnliches Phänomen aus dem «Alltag»?

16.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-intro-klassifikation

(a)
- (1) 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...
- (2) 32, 27, 22, 17, 12, 7, 2, -3, -8, ...
- (3) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...
- (4) $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4, $\frac{14}{3}$, $\frac{16}{3}$, 6, $\frac{20}{3}$ ...
- (5) 1, −3, 9, −27, 81, −243, 729, −2187, 6561, −19683, ...
- (6) 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, , 49, 64, 81, 100, ...
- (7) $\frac{32}{3}, \frac{16}{9}, \frac{8}{27}, \frac{4}{81}, \frac{2}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{4374}, \frac{1}{26244}, \ldots$
- (8) $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3, -\frac{9}{2}, -6, -\frac{15}{2}, \ldots$
- (9) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...
- (10) 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...
- (11) 800, 1200, 1400, 1500, 1550, 1575, 1587.5 1593.75, 1596.875, ...
- (12) 12, 9, 7, 6, 6, 7, 9, 12, 16, 21, 27, 34, 42, 51, ...

(b) Berechnung von a_n aus dem vorherigen Folgenglied:
- (1) $a_n = a_{n-1} + 2$
- (2) $a_n = a_{n-1} - 5$
- (3) $a_n = a_{n-1} \cdot 2$
- (4) $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{3}$
- (5) $a_n = a_{n-1} \cdot (-3)$
- (6) $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$ oder $a_n = \left(\sqrt{a_{n-1}} + 1\right)^2$
- (7) $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{3} = a_{n-1} \cdot \frac{1}{6}$
- (8) $a_n = a_{n-1} - \frac{3}{2}$
- (9) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- (10) $a_n = a_{n-1} \cdot (-1)$
- (11) $a_n = a_{n-1} + 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- (12) $a_n = a_{n-1} + (n - 4)$

(c) Explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n:
- (1) $a_n = 7 + 2n$
- (2) $a_n = 32 - 5n$
- (3) $a_n = 2^n$
- (4) $a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot n$
- (5) $a_n = (-3)^n$
- (6) $a_n = n^2$
- (7) $a_n = \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$
- (8) $a_n = 3 - \frac{3}{2} \cdot n$
- (9) $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$
- (10) $a_n = (-1)^n$
- (11) $a_n = 1600 - 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- (12) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 12$

(d) Folgen (1), (2), (4) und (8): Bei jeder dieser Folgen wirst stets dieselbe Zahl addiert (oder subtrahiert). (Subtraktion einer Zahl d ist dasselbe wie Addition der Zahl $-d$.)
Folgen (3), (5), (7) und (10): Bei jeder dieser Folgen wird stets mit derselben Zahl multipliziert (oder durch dieselbe Zahl dividiert). (Division durch eine Zahl $q \neq 0$ ist dasselbe wie Multiplikation mit der Zahl $\frac{1}{q}$.)

Lösung zu A2 ex-binet-formel-nachrechnen

Moivre-Binet-Formel:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Für $n=0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $n=1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für $n=2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{4}\right) && \text{nach binomischen Formeln} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für $n=3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1-3\sqrt{5}+3\cdot 5-5\sqrt{5}}{8}\right) && \text{Formel für } (a+b)^3 \text{ aus Pascal-Dreieck, siehe unten} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{8} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Die «dritten» Zeile des Pascalschen Dreiecks ist $1,3,3,1$. Daraus erhält man die Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Diese wenden wir oben an für $a=1$ und $b=\sqrt{5}$ bzw. für $a=1$ und $b=-\sqrt{5}$. (Beim zweiten Term kann man auch $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ verwenden.)

Lösung zu A3 ex-treppensteigen-und-fibonacci

Bei jeder Besteigung einer Treppe aus n Stufen ist der letzte Schritt entweder ein Ein-Stufen-Schritt oder ein Zwei-Stufenschritt. Dies bedeutet, dass jede solche Besteigung entweder von einer Besteigung einer $n-1$-stufigen Treppe herkommt oder von einer Besteigung einer $n-2$-stufigen Treppe. Also gilt

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$$

Diese Formel stimmt natürlich nur für $n \geq 2$.
Sicherlich gelten $p_0 = 1$ (denn es gibt genau eine Möglichkeit, eine 0-stufige Treppe zu erklimmen) und $p_1 = 1$. (Wer $p_0 = 1$ nicht mag: Sicherlich gilt $p_2 = 2$.)
Damit erhalten wir sukzessive

$$p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 5, p_5 = 8, p_6 = 13, p_7 = 21, p_8 = 34, p_9 = 55, p_{10} = 89, p_{11} = 144, p_{12} = 233, p_{13} = 377, p_{14} =$$

oder kompakter aufgeschrieben

$$(p_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$$

Also gibt es 1597 Möglichkeiten, eine 16-stufige Treppe mit Einser- und Zweier-Schritten zu besteigen.
Zusammenhang zur Fibonacci-Folge: Es gilt $p_n = f_{n+1}$, die Folgen sind nur um eine Position verschoben.

Lösung zu A4 ex-arithmetische-und-geometrische-folgen-explizit-und-rekursiv-angeben

siehe Lehrerversion des Skripts

Lösung zu A5 ex-expl-impl-rek

a) $(a_n) = 8, 7, 6, 5, 4, 3, \ldots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = a_{n-1} - 1 & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist arithmetisch.

b) $a_n = 3 \cdot 2^n$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist geometrisch.

c) $(a_n) = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ und $a_n = n^2$. Diese Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch, denn die Differenzen bzw. Quotienten aufeinanderfolgender Folgeglieder sind nicht konstant. (Man sagt, dass diese Folge eine «arithmetische Folge 2. Ordnung» ist, weil ihre Differenzenfolge (= Folge der Differenzen) $1, 3, 5, 7, \ldots$ eine arithmetische Folge ist).

d) $(a_n) = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 16 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist geometrisch.

e) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und z.B. $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n} & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$. Die Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch. Sie ist die Folge der Teilsummen einer geometrischen Folge.

f) $(a_n) = 100, 102, 104.04, 106.1208, \ldots$ und $a_n = 100 \cdot (1.02)^n$. Die Folge ist geometrisch.

Lösung zu A6 ex-param-arithmetisch

Generell gilt $a_n = a_0 + nd$.
Setzt man die gegebenen Grössen ein, ergibt sich ein Gleichunggsystem für a_0 und d.

a) $5 = a_2 = a_0 + 2d$ und $7 = a_3 = a_0 + 3d$. Zieht man die erste von der zweiten Gleichung ab, erhält man $2 = d$. Nun löst man $a_2 = a_0 + 2d = a_0 + 4$ nach a_0 auf und erhält $a_0 = a_2 - 4 = 5 - 4 = 1$.

b) $3d = a_8 - a_5 = 15$, also $d = 5$. Dann ist $a_0 = a_5 - 5d = -8$.

c) $d = \frac{a_{12} - a_8}{4}$ und $a_0 = a_8 - 8d = a_8 - 2(a_{12} - a_8)$.

d) $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ und $a_0 = a_n - nd = a_n - n\frac{a_m - a_n}{m - n}$

e) $a_0 + 15d + a_0 + 20d = 300$, also $20 + 35d = 300$, also $35d = 280$, also $d = \frac{280}{35} = 8$.

f) $\begin{cases} (a_0 + 2d)(a_0 + 3d) & = 24 \\ a_0 + 4d & = 13 \end{cases}$
Wer dieses Gleichungssystem von Hand lösen will: Verwende das Substitutionsverfahren: Löse die zweite Gleichung nach a_0 auf und ersetze a_0 in der ersten Gleichung entsprechend. Dies liefert eine quadratische Gleichung für d, die man mit der Mitternachtsformel lösen kann.
Die Lösungen dieses Gleichungssystem sind $a_0 = -7$ und $d = 5$ oder $a_0 = -45$ und $d = \frac{29}{2}$.

g) $\begin{cases} (a_0 + 2d) & = & 4(a_0 + 6d) \\ (a_0 + 2d) + (a_0 + 3d) & = & 10 \end{cases}$
Lösung: $a_0 = \frac{220}{29}$, $d = -\frac{30}{29}$

h) Es gilt $a_n = a_0 + n \cdot d$. Für n wird nun a_3 eingesetzt, und dieses dann auch mit a_0 und d ausgedrückt (und für die zweite Gleichung a_0 für n eingesetzt): $\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 + a_3 \cdot d = a_0 + (a_0 + 3d) \cdot d & = & 58 \\ a_0 + a_0 \cdot d & = & 10 \end{array} \right.$
Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, erhält man $3d^2 = 48$, was $d = \pm 4$ ergibt. Also sind die Lösungen erstens $d = 4$ und $a_0 = 2$ und zweitens $d = -4$ und $a_0 = -\frac{10}{3}$. Die zweite Lösung ist streng genommen keine Lösung, weil $a_3 = -\frac{10}{3} + 3 \cdot (-4) = -\frac{46}{3}$ gilt und dann die Gleichung $a_{a_3} = 58$ in der Aufgabenstellung zu $a_{-\frac{46}{3}}$ wird, was keine sinnvolle Bedingung ist, denn eine Folgeglied mit dem Index $-\frac{46}{3}$ existiert nicht. Verallgemeinert man die Folge aber auf die rellen Zahlen (erlaubt also reelle Zahlen als Indizes), so erhält man ganz einfach eine lineare Funktion und auch die zweite Lösung ist sinnvoll.

Für das effiziente Lösen mit dem Taschenrechner wird zuerst die Funktion a wie folgt definiert:

$$a_0 + nd \to a(n)$$

Danach können die Gleichungen wie in der Aufgabe eingegeben werden und nach a_0 und d aufgelöst werden. Es muss einfach jeweils a_x durch $a(x)$ ersetzt werden.

Lösung zu A7 ex-param-geometrisch

a) $q = \frac{g_6}{g_5} = \frac{48}{24} = 2$ (denn es gilt $g_n = g_0 \cdot q^n$, also speziell $g_6 = g_0 \cdot q^6$ und $g_5 = g_0 \cdot q^5$ und dividiert man die erste durch die zweite Gleichung, erhält man die behauptete Gleichheit). Daraus folgt $g_0 = g_5 \cdot q^{-5} = 24 \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{4}$.

b) $q^2 = \frac{g_6}{g_4} = \frac{162}{18} = 9$, also $q = \pm 3$. Daraus folgt $g_0 = g_4 \cdot q^{-4} = 18 \cdot (\pm 3)^{-4} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.

c) Wenn $g_5 \neq 0$ gilt, so muss auch $g_{10} \neq 0$ gelten. Aus $q^5 = \frac{g_{10}}{g_5}$ folgt $q = \sqrt[5]{\frac{g_{10}}{g_5}}$ wenn $\frac{g_{10}}{g_5} > 0$ und $q = -\sqrt[5]{-\frac{g_{10}}{g_5}}$ wenn $\frac{g_{10}}{g_5} < 0$. Dann gilt $g_0 = g_5 \cdot q^{-5}$
Wenn $g_5 = 0$ gilt, so muss auch $g_{10} = 0$ gelten; in diesem Fall gilt $q = 0$ und der Startwert g_0 könnte beliebig sein.

d) Falls $g_n \neq 0$ gilt, folgt $q^{m-n} = \frac{g_m}{g_n}$. Wenn $m - n$ ungerade ist: q kann berechnet werden (ähnlich wie in der vorigen Aufgabe). Wenn $m - n$ gerade ist: q kann genau dann berechnet werden, wenn $\frac{g_m}{g_n} \geq 0$ gilt.
Wenn q berechnet werden kann, gilt $g_0 = g_n \cdot q^{-n}$.
Im Fall $g_n = 0$ folgt auch $g_m = 0$ und $q = 0$.

Lösung zu A8 ex-folgen-verknuepfen

a) Explizit: $a_n = 7 - n \cdot 2 = 7 - 2n$ und rekursiv: $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 7 \\ a_n = a_{n-1} - 2 & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$

Implizit: $(b_n) = 1, 6, 11, 16, 21, \ldots$ und rekursiv: $(b_n) = \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + 5 & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$

b) Implizit: $(c_n) = 8, 11, 14, 17, \ldots$. Explizit: $c_n = 8 + n \cdot 3 = 8 + 3n$ und rekursiv: $(c_n) = \begin{cases} c_0 = 8 \\ c_n = c_{n-1} + 3 & \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$

Die Folge ist arithmetisch mit Schrittweite 3.

c) Implizit: $(d_n) = 7, 30, 33, 16, -21, -78, \dots$ und explizit: $d_n = a_n \cdot b_n = (7-2n)\cdot(5n+1) = 35n + 7 - 10n^2 - 2n = -10n^2 + 33n + 7$. Die Folge ist nicht arithmetisch. Sie könnte als «quadratisch» bezeichnet werden (oder genauer als arithmetisch 2. Ordnung).
Zusatzinformation: Betrachtet man die Differenzfolge (Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder) erhält man $23, 3, -17, -37, -57, \dots$ also eine arithmetische Reihe mit $d = -20$ und $a_0 = 23$. Damit lässt sich eine rekursive Definition finden, indem man entweder die Differenz aus n berechnet oder aus den *zwei* Vorgängergliedern:

$$(d_n) = \begin{cases} d_0 = 7 \\ d_n = d_{n-1} + (23 - (n-1)\cdot 20) = d_{n-1} + 23 - 20n + 20 = d_{n-1} + 43 - 20n \end{cases} \quad \text{oder}$$

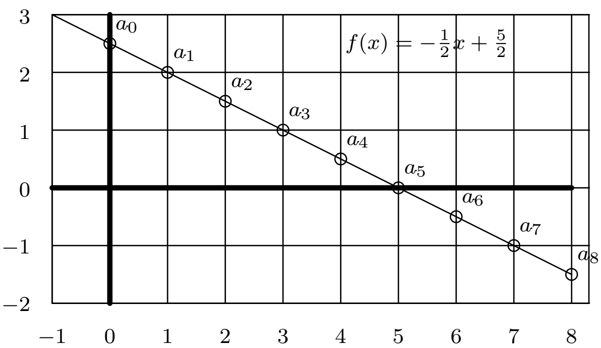
$$(d_n) = \begin{cases} d_0 = 7 \\ d_1 = 30 \\ d_n = d_{n-1} + (d_{n-1} - d_{n-2}) - 20 \quad \text{(hinzu kommt die um 20 verringerte Differenz der Vorgängerglieder)} \end{cases}$$

Alternative: Aus dem Ansatz $d_n = d_{n-1} + t$ erhält man $t = d_n - d_{n-1}$ und daraus mit der expliziten Formel $t = \left(-10n^2 + 33n + 7\right) - \left(-10(n-1)^2 + 33(n-1) + 7\right) = -20n + 43$, also die obige Lösung.

(unerwünschte) Alternative: Die explizite Angabe kann man auch als rekursive Angabe ansehen, bei der keine vorherigen Folgeglieder auftauchen.

d) Das einfachste ist die explizite Definition, indem man die expliziten Definitionen der Folgen (a_n) und (b_n) einsetzt:
$e_n = a_{b_n} = 7 - 2b_n = 7 - 2(5n+1) = 7 - 10n - 2 = 5 - 10n$
Implizit: $(e_n) = 5, -5, -15, -25, \dots$.
Rekursiv: $(e_n) = \begin{cases} e_0 = 5 \\ e_n = e_{n-1} - 10 \end{cases}$
Die Folge ist arithmetisch mit $d = -10$.

Lösung zu A9 ex-arithmetische-folge-lineare-funktion

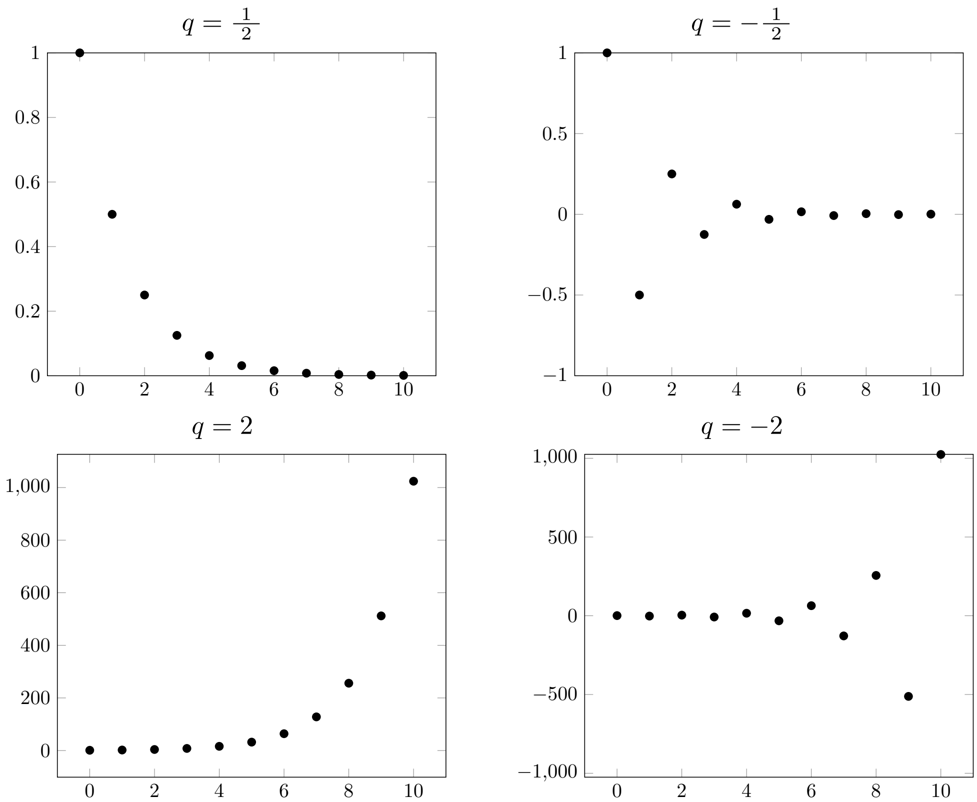
a)


b) Ja, nämlich $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

c) Es gelten $d = m$ und $a_0 = q$:
Die Schrittweite d ist gleich der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, denn wenn man zwei benachbarte Indizes anschaut, gelten $\Delta x = 1$ und $\Delta y = d$.
Der Startwert a_0 ist der y-Achsenabschnitt q.

d) Wenn $d > 0$ werden die Glieder beliebig gross.
Wenn $d < 0$ werden die Glieder beliebig klein.
Wenn $d = 0$ sind alle Glieder gleich.

Lösung zu A10 ex-visual-behavior

(a) 

(b) Für $|q| < 1$ spricht man von «gedämpften» Verhalten, für $|q| > 1$ von «explodierendem» Verhalten. Ebenso wird für $q < 0$ das Verhalten «alternierend» und für $q > 0$ «mononton» genannt. Die beiden linken Graphen sind monoton, die beiden rechten alternierend. Die beiden oberen Graphen sind gedämpft und die beiden unteren sind explosiv.

(c) Guthaben auf einem Sparkonto bei der Bank: Konstantes prozentuales Wachstum (Zinssatz $p > 0$, Wachstumsfaktor $q = 1 + p$) ist ein Beispiel von monotonem und explodierendem Verhalten.

Lösung zu A11 ex-folgen-verknuepfen-allgemein

Die Folgen sind explizit durch $a_n = a_0 + nd$ und $b_n = b_0 + ne$ gegeben.

a) $c_n = a_n + b_n = a_0 + nd + b_0 + ne = (a_0 + b_0) + n(d + e)$. Damit ist (c_n) arithmetisch mit Startwert $a_0 + b_0$ und Schrittweite $d + e$.

b) $f_n = n \cdot a_n = n \cdot (a_0 + n \cdot d) = n \cdot a_0 + n^2 \cdot d$.
Wenn f_n arithmetisch ist, müssen insbesondere der Schritt von f_0 zu f_1 und der Schritt von f_1 zu f_2 gleich gross sein, in Formeln

$$f_1 - f_0 = f_2 - f_1$$

Wegen $f_0 = 0$ und $f_1 = a_0 + d$ und $f_2 = 2a_0 + 4d$ muss also

$$f_1 - f_0 = a_0 + d \stackrel{!}{=} f_2 - f_1 = a_0 + 3d$$

gelten d. h. $a_0 + d = a_0 + 3d$, also $d = 0$. (In diesem Fall ist f_n die «Nullfolge» (= alle Folgeglieder sind Null). Die Nullfolge ist offensichtlich arithmetisch.)
Alternative Begründungen:
Saloppe Begründung: Im Allgemeinen ist (f_n) wegen des quadratischen Terms n^2 nicht arithmetisch. (Wird n um 1 erhöht, wächst die Folge nicht konstant, sondern umso mehr, je grösser n ist).
Damit die Folge arithmetisch ist, darf kein n^2 mehr vorkommen, d.h. es muss $d = 0$ gelten. Das ist der Fall, wenn die Folge (a_n) die konstante Folge $a_0, a_0, a_0, \ldots$ ist (d.h. alle Folgeglieder sind gleich).
Genaue Begründung: Genau dann ist (a_n) arithmetisch, wenn $f_{n+1} - f_n = (n+1) \cdot a_0 + (n+1)^2 \cdot d - (n \cdot a_0 + n^2 \cdot d) = a_0 + 2nd + d$ konstant, d.h. unabhängig von n sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $d = 0$ gilt.

c) $e_n = 2^{a_n} = 2^{a_0 + nd} = 2^{a_0} \cdot 2^{nd} = 2^{a_0} \cdot \left(2^d\right)^n$. Damit ist (e_n) geometrisch mit Startwert $e_0 = 2^{a_0}$ und Wachstumsfaktor $q = 2^d$.

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

Lösung zu A12 ex-binet-formel

(a) Gesucht ist der Quotient/Wachstumsfaktor q. Die Fibonacci-Eigenschaft muss natürlich auch für die Glieder $g_0 = 1$, $g_1 = q$ und $g_2 = q^2$ gültig sein, also

$$q^2 = q + 1$$

Die Lösungen (per Mitternachtsformel) sind $q_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $q_2 = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Beachte: Die Fibonacci-Eigenschaft allgemein ist $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$. Sie folgt aus $q^2 = q + 1$ durch Multiplikation mit q^{n-2}.

(b) Es gilt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Zu zeigen ist, dass dann auch $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ gilt. Es gilt aber

$$b_n = \lambda a_n = \lambda(a_{n-1} + a_{n-2}) = \lambda a_{n-1} + \lambda a_{n-2} = b_{n-1} + b_{n-2}$$

(c) Es gilt

$$c_n = a_n + b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2} = c_{n-1} + c_{n-2}$$

(d) Es gelten $g_0 = 1$, $g_1 = \varphi$ und $h_0 = 1$, $h_1 = \psi$ und $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Wir suchen x und y, so dass $f_n = xg_n + yh + n = f_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ gilt. Diese beiden Bedingungen liefern das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 0 &= x + y \\ 1 &= x\varphi + y\psi = x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + y\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Die Lösungen sind $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ und $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
Das Ergebnis ist die Moivre-Binet-Formel

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Lösung zu A13 ex-summen-implizit-schreiben

a) $\displaystyle\sum_{x=4}^{18}(x^2 - 5) = (4^2 - 5) + (5^2 - 5) + (6^2 - 5) + \ldots + (17^2 - 5) + (18^2 - 5)$

b) $\displaystyle\sum_{p=-2}^{2}\left(p^3 + \frac{1}{p}\right) = \left((-2)^3 + \frac{1}{-2}\right) + \left((-1)^3 + \frac{1}{-1}\right) + \left(0^3 + \frac{1}{0}\right) + \left(1^3 + \frac{1}{1}\right) + \left(2^3 + \frac{1}{2}\right)$
Taschenrechner: 2020
Die Summe ist wegen der Division durch Null nicht definiert.

c) $\displaystyle\sum_{q=15}^{20}\sqrt{10} - \pi = \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} - \pi = 6\sqrt{10} - \pi$. **Achtung:** Die Laufvariable nimmt die **sechs** ganzen Zahlen von 15 bis 20 an, somit wird der Summand $\sqrt{10}$ sechsmal addiert.

d) $\displaystyle\sum_{t=-5}^{-1} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$. **Achtung:** Von -5 bis -1 sind es 5 ganze Zahlen, also 5 Summanden!

e) $\displaystyle\sum_{b=3}^{11} a_{b-2} = a_{3-2} + a_{4-2} + a_{5-2} + \ldots + a_{10-2} + a_{11-2}$

f) $$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{2}\left(\sum_{k=t-1}^{t+2} k^2\right) &= \left(\sum_{k=0-1}^{0+2} k^2\right) + \left(\sum_{k=1-1}^{1+2} k^2\right) + \left(\sum_{k=2-1}^{2+2} k^2\right) = \\ &= \left((-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\right) + \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \end{aligned}$$
Taschenrechner: 50

Lösung zu A14 ex-summenformel-arithmetisch

a) Zu bestimmen ist $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$. Der Trick besteht darin, diese Summe «umgedreht» darunterzuschreiben und aufzusummieren:

	$S =$	1	$+2$	$+3$	$+\cdots$	$+998$	$+999$	$+1000$
	$S =$	1000	$+999$	$+998$	$+\cdots$	$+3$	$+2$	$+1$
aufsummiert	$2S =$	1001	$+1001$	$+1001$	$+\cdots$	$+1001$	$+1001$	$+1001$

Da rechts 1000 Mal der Summand 1001 steht, gilt $2S = 1000 \cdot 1001$ und Division durch 2 liefert

$$S = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 1001 = 500'500 \qquad \text{bzw. mit dem Summenzeichen} \qquad \sum_{i=1}^{1000} i = 500'500$$

b) Wenn man analog wie oben vorgeht, muss man an einer Stelle aufpassen: Zwischen 100 und 200 gibt es 101 ganze Zahlen!
Man erhält so $2S = 101 \cdot (100 + 200) = 101 \cdot 300$ und damit

$$S = \sum_{i=100}^{200} i = \frac{101 \cdot (100 + 200)}{2} = 101 \cdot 150 = 15'000 + 150 = 15'150$$

c) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

d) $\sum_{i=n}^{m} i = \frac{(m-n+1)\cdot(m+n)}{2}$ (die Anzahl der Summanden ist $(m - n + 1)$).
Wer mag, kann auch die vorige Teilaufgabe verwenden:

$$\sum_{i=n}^{m} i = \sum_{i=1}^{m} i - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{m \cdot (m+1)}{2} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{m \cdot (m+1) - n \cdot (n+1)}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 - n}{2}$$
$$= \frac{m^2 - n^2 + m - n}{2} = \frac{((m-n)+1) \cdot (m+n)}{2}$$

e) $\sum_{i=1}^{102} 2i = \frac{102\cdot(2+204)}{2} = 10'506$ oder $\sum_{i=1}^{102} 2i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{102} i = 2 \cdot \frac{102\cdot 103}{2} = 102 \cdot 103 = 10'506$

f) $\sum_{i=50}^{151}(2i + 1) = \frac{102\cdot(101+303)}{2} = 20'604$ oder mit Hilfe von (d)

$$\sum_{i=50}^{151}(2i+1) = 2 \cdot \sum_{i=50}^{151} i + \sum_{i=50}^{151} 1 = 2 \cdot \frac{(101+1)\cdot 201}{2} + 102 = 102 \cdot 201 + 102 = 20'604$$

g) $\sum_{i=0}^{10} (a_0 + i \cdot d) = \frac{11\cdot(a_0+(a_0+10d))}{2} = \frac{11\cdot(2a_0+10d)}{2} = 11 \cdot (a_0 + 5d)$

h) $\sum_{i=0}^{n} (a_0 + i \cdot d) = \frac{(n+1)\cdot(a_0+(a_0+nd))}{2} = (n + 1) \cdot \frac{(a_0+a_n)}{2}$ oder

$$\sum_{i=0}^{n} (a_0 + i \cdot d) = \sum_{i=0}^{n} a_0 + \sum_{i=0}^{n} i \cdot d = \sum_{i=0}^{n} a_0 + d \cdot \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) \cdot a_0 + d \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Lösung zu A15 ex-laenge-spirale

(a) Zu berechnen ist

$$1.0 + 1.1 + 1.2 + \cdots + 2.8 + 2.9$$

Diese Summe aus 20 Summanden ist die 19-te Teilsumme der arithmetischen Folge (a_n) mit $a_n = 1+n\cdot 0.1$.

Also gilt nach Satz 16.5.1

$$\begin{aligned}1.0+1.1+1.2+\cdots+2.8+2.9 &= (\text{Anzahl der Summanden})\cdot{\scriptstyle(\text{Durchschnitt aus vorderstem und hinterstem Summanden})}\\ &= 20\cdot\frac{1.0+2.9}{2}\\ &= 10\cdot 3.9\\ &= 39\end{aligned}$$

(b) Sei (ℓ_n) die Folge der Längen der einzelnen Strecken (in offensichtlicher Reihenfolge, mit $\ell_0=\ell$). Dies ist eine arithmetische Folge und es gilt

$$\ell_n=\ell+nd$$

Die Spirale aus m Teilstrecken hat die Länge

$$\ell_0+\ell_1+\cdots+\ell_{m-1}$$

Dies ist die $(m-1)$-te Teilsumme unserer Folge. Also gilt nach Satz 16.5.1

$$\begin{aligned}\ell_0+\ell_1+\cdots+\ell_{m-1} &= (m-1+1)\cdot\frac{\ell_0+\ell_{m-1}}{2}\\ &= m\cdot\frac{\ell+\ell+(m-1)d}{2}\\ &= m\cdot\frac{2\ell+(m-1)d}{2}\\ &= m\ell+\frac{m(m-1)}{2}d\end{aligned}$$

Lösung zu A16 ex-umfang-konzentrische-objekte

(a) Wir berechnen zuerst die Summe aller Kreisradien. Mit 2π multipliziert liefert das dann die Summe aller Umfänge.
Die Kreisradien $r_0<r_1<r_2<\cdots<r_9$, wobei $r_0=7$ und $r_9=20.5$, bilden den Anfang einer arithmetischen Folge. (Da wir mit dem Index 0 starten und 10 Kreise betrachten, hat der grösste Kreisradius den Index 9.) Folglich gilt gemäss der üblichen Formel (zur Berechnung der 9-ten Teilsumme einer arithmetischen Folge)

$$\begin{aligned}r_0+r_1+\cdots+r_9 &= (\text{Anzahl der Summanden})\cdot(\text{Durchschnitt aus vorderstem und hinterstem Summanden})\\ &= 10\cdot\frac{r_0+r_9}{2}\\ &= 10\cdot\frac{r+R}{2}\\ &= 10\cdot\frac{27.5}{2}\\ &= 137.5\end{aligned}$$

Die Summe aller Umfänge ist damit

$$\begin{aligned}2\pi r_0+2\pi r_1+\cdots+2\pi r_9 &= 2\pi(r_0+r_1+\cdots+r_9)\\ &= 2\pi\cdot 137.5\\ &= 275\pi\\ &\approx 863.9379797371931\end{aligned}$$

(b) Wir bezeichnen die aufsteigend sortierten Kreisradien mit $r_0<r_1<r_2<\cdots<r_{m-1}$, wobei $r_0=r$ und $r_{m-1}=R$. (Da wir mit dem Index 0 starten, hat der m-te Kreisradius den Index $r-1$.)
Zu berechnen ist die Summe der Umfänge, also

$$2\pi r_0+2\pi r_1+\cdots+2\pi r_{m-1}=2\pi(r_0+r_1+\cdots+r_{m-1})$$

Da die Radien $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ den Anfang einer arithmetischen Folge (r_n) bilden, ist $r_0 + r_1 + \cdots + r_{m-1}$ die $(m-1)$-te Teilsumme dieser arithmetischen Folge und kann mit der üblichen Formel berechnet werden.

$$\begin{aligned} r_0 + r_1 + \cdots + r_{m-1} = s_{m-1} &= (m-1+1) \cdot \frac{r_0 + r_{m-1}}{2} \\ &= m \cdot \frac{r+R}{2} \end{aligned}$$

Alternativ direkt:

$$\begin{aligned} r_0 + r_1 + \cdots + r_{m-1} &= (\text{Anzahl der Summanden}) \cdot (\text{Durchschnitt aus vorderstem und hinterstem Summanden}) \\ &= m \cdot \frac{r+R}{2} \end{aligned}$$

Die gesuchte Summe aller Umfänge ist somit

$$2\pi m \cdot \frac{r+R}{2}$$

Lösung zu A17 ex-summe-gerader-zahlen

(a)
- 1. Lösungsweg (mit Gaußscher Summenformel):

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+1000 &= 2(1+2+3+\cdots+500) \\ &2 \cdot \frac{500 \cdot 501}{2} && \text{Gaußsche Summenformel} \\ &500 \cdot 501 \\ &250500 \end{aligned}$$

- 2. Lösungsweg (mit Formel für n-te Teilsumme einer arithmetischen Folge):
  Die gesuchte Summe ist eine Teilsumme der arithmetischen Folge (e_n) mit $e_n = 2 + 2n = 2(n+1)$.
  Index des letzten summierten Folgenglieds bestimmen: $e_n = 2(n+1) = 1000$, also $n = 499$.
  Formel anwenden:

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+1000 &= (n+1) \cdot \frac{e_0 + e_n}{2} \\ &= 500 \cdot \frac{1002}{2} \\ &= 500 \cdot 501 \\ &= 250500 \end{aligned}$$

(b)
- 1. Lösungsweg (mit Gaußscher Summenformel):

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+x &= 2(1+2+3+\cdots+\frac{x}{2}) \\ &2 \cdot \frac{\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}+1\right)}{2} && \text{Gaußsche Summenformel} \\ &\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}+1\right) \\ &\frac{x}{2} \cdot \frac{x+2}{2} \\ &\frac{x(x+2)}{4} \end{aligned}$$

- 2. Lösungsweg (mit Formel für n-te Teilsumme einer arithmetischen Folge):
  Die gesuchte Summe ist eine Teilsumme der arithmetischen Folge (e_n) mit $e_n = 2 + 2n = 2(n+1)$.
  Index des letzten summierten Folgenglieds bestimmen: $e_n = 2(n+1) = x$, also $n = \frac{x}{2} - 1$.
  Formel anwenden:

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+x &= (n+1) \cdot \frac{e_0 + e_n}{2} \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{2+x}{2} \\ &= \frac{x(x+2)}{4} \end{aligned}$$

Lösung zu A18 ex-arithmetische-reihe-fehlende-groessen

a) $a_n = a_0 + nd = 1.2 + 19 \cdot 2.1 = 41.1$
$s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0+a_n}{2} = 20 \cdot \frac{1.2+41.1}{2} = 423$

b) $a_n = a_0 + nd$ also $n = \frac{a_n - a_0}{d} = \frac{-9-404}{-7} = 59$
$s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0+a_n}{2} = 60 \cdot \frac{404+(-9)}{2} = 11'850.$

c) $\begin{cases} a_n = a_0 + nd \\ s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0+a_n}{2} \end{cases}$
Einsetzen der gegebenen Grössen liefert:
$\begin{cases} 107 = a_0 + n \cdot 5.2 \\ 123 = (n+1) \cdot \dfrac{a_0+107}{2} \end{cases}$
Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen:
$a_0 = -101$ und $n = 40$.

d) $s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0+a_n}{2}$. Eingesetzt: $2196 = 61 \cdot \frac{a_0+0}{2}$. Aufgelöst nach $a_0 = 72$.
$d = \frac{a_{60}-a_0}{60} = -\frac{6}{5} = -1.2$.

e) $s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0+a_0+nd}{2}$. Eingesetzt: $4059 = (n+1) \cdot \frac{1.8+1.8+n \cdot 0.05}{2}$. Aufgelösen liefert $n = 368$ oder $n = -441$. Die negative Lösung $n = -441$ kann verworfen werden, da nur natürliche Zahlen als Indizes von Folgen zugelassen sind. Weiter gilt $a_{368} = a_0 + 368 \cdot 0.05 = 20.2$.

f) $s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0+a_0+nd}{2}$. Eingesetzt: $207 = 46 \cdot \frac{207+207+45 \cdot d}{2}$. Aufgelösen liefert $d = -9$.
$a_{45} = a_0 + 45 \cdot (-9) = -198$.

Lösung zu A19 ex-geometrische-reihe-einfach

(a)

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^6 &= \frac{1-3^7}{1-3} \\ &= \frac{1-2187}{1-3} \\ &= \frac{-2186}{-2} \\ &= 1093 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \\ &= \frac{1-3^{n+1}}{-2} \\ &= \frac{3^{n+1}-1}{2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis muss als Summe natürlicher Zahlen eine natürliche Zahl sein, auch wenn das Ergebnis auf den ersten Blick nicht unbedingt so aussieht. Aber 3^{n+1} ist stets ungerade, so dass der Zähler gerade ist, also durch 2 teilbar.

(c) Es gilt $\frac{729}{64} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$. Zu berechnen ist somit

$$\begin{aligned}
1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^6 &= \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^7}{1 - \frac{3}{2}} \\
&= \frac{1 - \frac{2187}{128}}{-\frac{1}{2}} \\
&= 2 \cdot \frac{2187}{128} - 2 \\
&= \frac{2187}{64} - 2 \\
&= \frac{2187 - 128}{64} \\
&= \frac{2059}{64}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
1 - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \pm \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^6 &= \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^7}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{1 + \frac{2187}{128}}{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \left(1 + \frac{2187}{128}\right) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \left(1 + \frac{2187}{128}\right) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{128 + 2187}{128} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{2315}{128} \\
&= \frac{463}{64}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n &= \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \\
&= \frac{1 - \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{-\frac{1}{2}} \\
&= 2 \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 2 \\
&= \frac{3^{n+1}}{2^n} - 2
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
1 + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \pm \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^n &= \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{1 - (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \left(1 - (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{2}{5} - (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot 5}
\end{aligned}$$

Lösung zu A20 ex-geometrische-reihe-potenzen-einhalb

(a) (i) Nach der allgemeinen Formel erhalten wir

$$s_{10} = \sum_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i = g_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)}{2\cdot\frac{1}{2}}$$
$$= 2 - 2\cdot\frac{1}{2^{11}} = 2 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2048-1}{1024} = \frac{2047}{1024}$$

(ii)

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

(iii) Es gilt $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ nach der vorherigen Teilaufgabe. Wenn n immer grösser wird, wird $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ immer kleiner und strebt gegen Null. Also strebt $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ gegen 2.

(b) (i)
- Erster Lösungsweg:
  Offensichtlich gelten $g_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ und $g_{11} = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$.
  Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \frac{1}{2048} = \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \frac{1}{2048} \\
& - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{32}\right) \\
&= s_{11} - s_5 \\
&= 2 - \frac{1}{2^{11}} - \left(2 - \frac{1}{2^5}\right) \quad \text{nach Teilaufgabe (a).(ii)} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{11}} - 2 + \frac{1}{2^5} \\
&= \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^{11}} \\
&= \frac{2^6 - 1}{2^{11}} \\
&= \frac{63}{2048}
\end{aligned}$$

- Zweiter Lösungsweg: Wir betrachten die geometrische Folge (h_n) mit $h_n = \frac{1}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Dann gelten $h_0 = \frac{1}{64}$ und $h_5 = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{2048}$. Zu berechnen ist also die 5-te Teilsumme von (h_n).

Wir bezeichnen diese mit t_5 und erhalten nach der allgemeinen Formel

$$
\begin{aligned}
t_5 = \sum_{i=0}^{5} h_i = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i
&= \frac{1}{64} \cdot \sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= \frac{1}{64} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{5+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{64} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{64} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^5}\right) \\
&= \frac{1}{64} \cdot \left(2 - \frac{1}{32}\right) \\
&= \frac{2}{64} - \frac{1}{32 \cdot 64} \\
&= \frac{64-1}{32 \cdot 64} \\
&= \frac{63}{2048}
\end{aligned}
$$

(ii) (Wie oben sei s_n die n-te Teilsumme von (g_n).) Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
& - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \\
&= s_n - s_{m-1}. \\
&= 2 - \frac{1}{2^n} - \left(2 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) \quad \text{nach Teilaufgabe (a).(ii)} \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Lösung zu A21 ex-geometrische-reihe-fehlende-groessen

(a)
- $g_n = g_0 \cdot q^n = 1 \cdot 2^7 = 128$
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 255$

(b)
- $g_n = g_0 \cdot q^n$ also $q^n = \frac{g_n}{g_0} = \frac{13122}{6} = 2187 = 3^n$. $n = 7$ erhält man durch «pröbeln», mit dem Taschenrechner oder später mit $\ln(2187)/\ln(3) = 7$
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 6 \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = 19680$

(c)
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ also $g_0 = s_n \frac{1-q}{1-q^{n+1}} = 398580 \frac{1-(-3)}{1-(-3)^{12}} = -3$
- $g_n = g_0 \cdot q^n = (-3) \cdot (-3)^{11} = 531441$

(d)
- $g_n = g_0 \cdot q^n$ also $q = \sqrt[n]{\frac{g_n}{g_0}} = \sqrt[4]{\frac{5.8564}{4}} \approx 1.1$
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \approx 4 \cdot \frac{1-1.1^5}{1-1.1} = \frac{61051}{2500} = 24.4204$

(e)
- $g_n = g_0 \cdot q^n$ also $q = -\sqrt[3]{\frac{625}{40}} = -\frac{5}{2} = -2.5$
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 40 \cdot \frac{1-(-2.5)^4}{1-(-2.5)} = -435$

(f)
- $g_n = g_0 \cdot q^n$ also $g_0 = \frac{g_n}{q^n} = \frac{0.16}{0.2^5} = 500$
- $s_n = g_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 500 \cdot \frac{1-0.2^6}{1-0.2} = \frac{15624}{25} = 624.96$

Lösung zu A22 ex-geometrische-reihe-quadrate

(a) Die Fläche verringert sich von jedem Quadrat zum nächsten um den Faktor $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} F_3 &= 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}-\frac{4}{3\cdot 256} \\ &= \frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 64} \\ &= \frac{255}{192} \end{aligned}$$

(b) Die Fläche verringert sich von jedem Quadrat zum nächsten um den Faktor $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} F_n &= 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}-\frac{4}{3\cdot 4^{n+1}} \\ &= \frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n} \end{aligned}$$

Wenn n immer grösser wird, strebt der Term $\frac{1}{3\cdot 4^n}$ gegen Null. Also strebt F_n gegen $\frac{4}{3}$.

(c) 1. Lösungsweg: Bei jedem Quadrat addieren wir die obere Seite, die untere Seite und die obere Hälfte der rechten Seite. Zusätzlich müssen wir bei Quadrat Q_0 die linke Seite addieren und beim Quadrat Q_3 die untere Hälfte der rechten Seite. Also gilt

$$\begin{aligned} U_3 &= 1+\Big[\underbrace{(2+\frac{1}{2})}_{\text{Seiten oben, unten, rechts oben von Quadrat } Q_0}+(1+\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})\Big]+\frac{1}{16} \\ &= 1+\left[\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}\right]+\frac{1}{16} \\ &= 1+\frac{1}{16}+\frac{5}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{17}{16}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{17}{16}+\frac{5}{2}\cdot\frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{17}{16}+\frac{5}{2}\cdot\frac{15}{16}\cdot 2 \\ &= \frac{17}{16}+\frac{75}{16} \\ &= \frac{92}{16} = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

2. Lösungweg: Man kann auch für jedes Quadrat dreimal die Seitenlänge addieren und zusätzlich für das

letzte Quadrat eine Seitenlänge (warum?). Dies liefert

$$
\begin{aligned}
U_3 &= 3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\frac{1}{8}\\
&= 3(2-\frac{1}{8})+\frac{1}{8}\\
&= 6-\frac{2}{8}\\
&= 6-\frac{1}{4}\\
&= \frac{23}{4}
\end{aligned}
$$

(d) Berechne den Umfang U_n der Figur, die von den Quadraten von Q_0 bis Q_n gebildet wird. Wir gehen wie beim zweiten Lösugsweg vor.

$$
\begin{aligned}
U_n &= 3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})+\frac{1}{2^n}\\
&= 3(2-\frac{1}{2^n})+\frac{1}{2^n}\\
&= 6-\frac{2}{2^n}\\
&= 6-\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Wenn n gegen unendlich strebt, strebt der zweite Summand gegen Null. Damit strebt U_n gegen 6.

Lösung zu A23 ex-reihen-geometrische-figur

(a) Sei s die Seitenlänge des (grössten) Quadrats. Dann hat das grösste rote Dreieck die Fläche $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}s\cdot\frac{1}{2}s = \frac{1}{8}s^2$.
Das «erste» einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge $\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{4}s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}s$. Das zweitgrösste rote Dreieck hat somit die Fläche $\frac{1}{8}\tilde{s}^2 = \frac{1}{16}s^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{16}s^2$, ist also halb so gross wie das vorherige rote Dreieck.
Dies geht so weiter (da immer «dieselbe» Konstruktion, Ähnlichkeit): Das nächstkleinere rote Dreieck ist stets halb so gross wie das vorherige.
Die Flächen der roten Dreiecke bilden also eine geometrische Reihe (g_n) mit $g_0 = \frac{1}{8}\cdot 8^2$ und $q = \frac{1}{2}$
Setzen wir dies in die Summenformel ein, so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{8} g_i = g_0\cdot\frac{1-q^9}{1-q} = 8\cdot\frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{511}{32}\approx 15.97$$

(b) Mit der gleichen Überlegung wie bei a) kommt man zur Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i = g_0\cdot\frac{1}{1-q} = 8\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 16$$

Die Figur hat also eine Fläche von $16\,\mathrm{cm}^2$
Dies ist auch anschaulich klar: Die rote «Spiral-Figur» und die drei gleich grossen, an den anderen Ecken des Quadrats startenden «Spiral-Figuren» füllen das gesamte Quadrat. Deswegen hat die rote Spiral-Figur ein Viertel der Fläche des Quadrats, also $\frac{64}{4} = 16$ Quadratzentimeter.

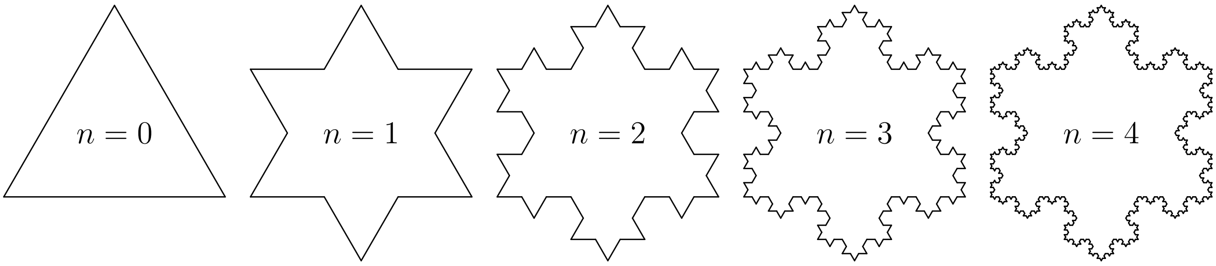
(c) Der Streckfaktor von einem Dreieck zum nächstkleineren Dreieck beträgt $q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ab dem zweiten Dreieck trägt jedes Dreieck zum Umfang eine Kathetenlänge und eine halbe Hypotenusenlänge bei. Beim ersten Dreieck kommt eine zusätzliche Kathete der Länge 4 cm dazu.
Die halbe Hypotenusenlänge vom ersten Dreieck ist $\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Damit ist der Umfang

$$4+\sum_{i=0}^{\infty}(4+2\sqrt{2})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i = 4+(4+2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 27.313708.$$

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

Lösung zu A24 ex-koch-schneeflocke

a) Die Anzahl ausgeführter Schritte wird hier mit n bezeichnet:



b) Bei jedem Schritt wird jede Strecke durch vier Teilstrecken der gedrittelten Länge ersetzt. Dies bedeutet, dass der Umfang bei jedem Schritt um den Faktor $\frac{4}{3}$ wächst.
Also gelten

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 3 \\
U_1 &= U_0 \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \\
U_2 &= U_1 \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} \\
U_3 &= U_2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}
\end{aligned}
$$

Allgemeine Formel:

$$U_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

c) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ (erhält man mit dem Satz von Pythagoras). Damit ist die Fläche der Anfangsfigur (mit $s = 1$):

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Im ersten Schritt kommen drei Dreiecke hinzu, die sich um den (Streck-/Ähnlichkeits)Faktor $\frac{1}{3}$ von der Anfangsfigur unterscheiden, also einen $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ Mal so grossen Flächeninhalt haben.
Also gilt

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_0 = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 = \frac{4}{3} \cdot A_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Die Anzahl neuer Dreiecke beim dritten Schritt ist $3 \cdot 4$ (Anzahl Strecken nach dem zweiten Schritt), deren Fläche ist $\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_0$, also

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_0 = A_1 + \frac{4}{27} \cdot A_0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

Beim vierten Schritt kommen 4 mal so viele Dreiecke mit $\frac{1}{9}$ der Fläche wie beim dritten Schritt hinzu. Also

$$A_3 = A_2 + 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{81} = \frac{31\sqrt{3}}{81}$$

Diesen Prozess kann man weiterführen und als Summe schreiben:

$$A_n = A_0 + \frac{1}{3}A_0 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}A_0 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}A_0 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}A_0 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}A_0$$

Mit dem Summenzeichen (der erste Schritt ist speziell):

$$A_n = A_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \cdot \frac{1}{3}A_0 = A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right)$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe mit $g_0 = 1$ und $q = \frac{4}{9}$. Die Teilsumme ist $s_{n-1} = g_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Und damit

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}\right) = A_0 \cdot \left(1 + 3\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{5}\right)$$

d) Der Umfang $U_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ wird beliebig gross für grösser werdendes n, d. h. die Folge (U_n) strebt gegen unendlich, wenn n gegen unendlich geht.
Die Fläche aber strebt gegen einen konstanten, endlichen Wert, weil der Term $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ gegen 0 strebt. D.h. die Fläche wird nie grösser als

$$A = A_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5}A_0,$$

kommt diesem Wert aber beliebig nahe.
Ein Beispiel aus dem Alltag betrifft die Fläche und Umfang einer Insel. Die Fläche ist klar endlich. Die Länge der Küstenlinie ist es aber nicht zwingend, wenn man sich vorstellt, dass sich die Küstenlinie um jeden Stein, Sandkorn, Stäubchen, etc. windet. (Ok, beim Atom ist dann irgendwann Schluss, oder spätestens bei der Planck-Länge, wenn dann auch der Raum quantisiert und unscharf werden soll).