Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

16 Flächen und Volumina

16.1 Kollinearität (Nachtrag)

Definition 16.1.1 Kollineare Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ (in der Ebene oder im Raum) heissen **kollinear** (= «parallel»), wenn einer der beiden Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist. In Formeln bedeutet dies, dass

$$\vec{v} = \lambda\vec{w} \qquad \text{oder} \qquad \vec{w} = \lambda\vec{v} \qquad \text{für eine geeignete reelle Zahl } \lambda \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

lateinisch *collineare* geradeaus zielen; aus *com* gemeinsam, zusammen und *linea* Linie, Gerade

16.1.2. Die Kollinearität zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bedeutet, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe Ursprungsgerade (= Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems) definieren.

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist laut Definition kollinear zu jedem anderen Vektor $\vec{u}$, denn es gilt $\vec{0} = 0\vec{w}$.

🛠 Aufgabe A1

(a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1400 \\ 2100 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtig oder falsch?

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch
- $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch
- $\vec{a}$ und $\vec{d}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch
- $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch
- $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch
- $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind kollinear ☐ wahr ☐ falsch

(b) Für welches d sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ d \end{pmatrix}$ kollinear?

(c) Unter welcher Bedingung an die Komponenten sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ kollinear? Die Bedingung ist möglichst so zu formulieren, dass sie für alle Werte von a, b, c und d gilt.

(d) Richtig oder falsch: Wenn sowohl $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als auch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, dann sind auch $\vec{u}$ und $\vec{w}$ kollinear. ☐ wahr ☐ falsch

- Wenn «wahr»: Begründen Sie!
- Wenn «falsch»: Finden Sie ein Gegenbeispiel. Überlegen Sie sich auch, unter welcher sinnvollen Zusatzbedingung die Folgerung stimmt.

Satz 16.1.3 Kollinearität von Vektoren in der Ebene

Zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sind genau dann kollinear, wenn ✎

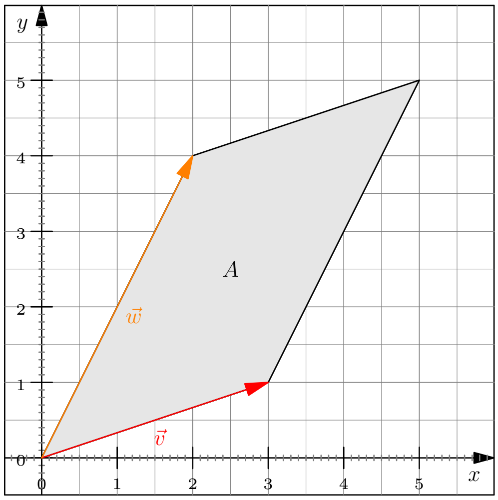
16.2 Inhalte von Flächen

16.2.1. In diesem Abschnitt werden Sie einige elegante Methoden zur Flächenberechnung kennenlernen. Um diese später wertzuschätzen, dürfen Sie zunächst selbst eine Dreiecksfläche berechnen:

Aufgabe A2 Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (3, 6)$.

Satz 16.2.2 ✎

Betrachte das von zwei beliebigen Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm. Die Fläche A dieses Parallelogramms ist ✎



Offensichtlich sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ genau dann kollinear, wenn $A = 0$ gilt. Nach Satz 16.2.2 bedeutet dies, dass die Determinante verschwindet (= Null ist). Dies beweist noch einmal Satz 16.1.3.

Beispiel 16.2.3. In der Illustration gelten ✎

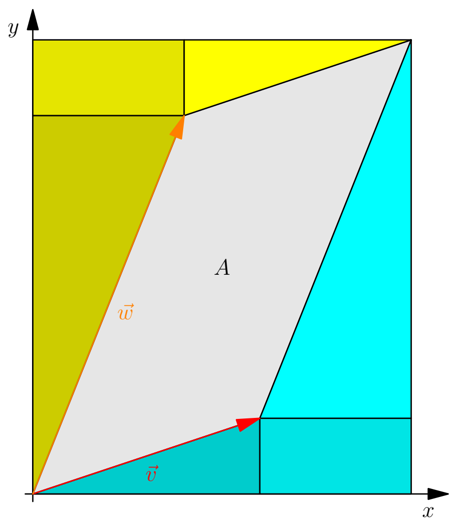
Aufgabe A3 Lösen Sie Aufgabe A2 mit Hilfe des Satzes 16.2.2.

Aufgabe A4 Versuchen Sie, den unten teilweise aufgeschriebenen Beweis von Satz 16.2.2 zu vollenden! (Falls auf dem Blatt, zuerst mit Bleistift.)

Erster Beweis *mit einem Nachteil*. Die gesuchte graue Fläche kann man berechnen, indem man von der Fläche des «umgebenden Rechtecks» die farbigen Flächen subtrahiert. Dazu ist es sinnvoll, zuerst die Längen aller Strecken am Rand in der Skizze einzutragen. Wer mag, kann den Beweis nun selbst führen!

$$A = \text{graue Fläche}$$
$$= \text{Rechtecksfläche} - \text{farbige Flächen}$$

✎



✎

Satz 16.2.4 Erinnerung: Heronsche Formel/Satz des Heron; Heron von Alexandria, ca. 1. oder 2. Jhdt. n. Chr.

Der Flächeninhalt A eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c ist

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang ist.

Aufgabe A5 Ergänzen Sie das folgende Python-Programm so, dass es den Flächeninhalt eines Dreicks ABC einerseits

- mit Hilfe der Heronschen Formel (siehe Satz 16.2.4) und andererseits
- mit Hilfe der Interpretation der Determinante als Parallelogrammfläche (siehe Satz 16.2.2) berechnet.

Die Koordinaten des Punktes A sind in den Variablen `Ax` und `Ay` gespeichert. Analoges gilt für die beiden anderen Punkte. Ändert man diese sechs Koordinaten, so soll das Programm **ohne Änderungen in den restlichen Zeilen** den Flächeninhalt weiterhin korrekt berechnen.

```
# Koordinaten der Punkte A, B, C
Ax = 2
Ay = 1

Bx = 7
By = 3

Cx = 3
Cy = 6

# Längen der Dreiecksseiten:
a = ((Bx-Cx)**2 + (By-Cy)**2)**0.5
b = # Code zu ergänzen
c = # Code zu ergänzen

# halber Umfang des Dreiecks
s = # Code zu ergänzen

# Dreiecksfläche nach der Heronschen Formel
flaeche_heron = # Code zu ergänzen

print("Dreiecksfläche nach Heron: ", flaeche_heron)

# Komponenten des Verbindungsvektors v=AB
vx = Bx - Ax
vy = # Code zu ergänzen

# Einträge des Verbindungsvektors w=AC
wx = # Code zu ergänzen
wy = # Code zu ergänzen

# Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms (Satz "Determinante als Fläche")
F = # Code zu ergänzen

# Dreiecksfläche aus Parallelogrammfläche
flaeche_per_determinante = # Code zu ergänzen

print("Dreiecksfläche per halber Determinante = ", flaeche_per_determinante)
```

16.2.5. Im zweiten, allgemeingültigen Beweis von Satz 16.2.2 benötigen wir das folgende Resultat.

Satz 16.2.6 Erinnerung: Abstand Punkt-Gerade

Sind $P = (x_P, y_P)$ ein Punkt der Zeichenebene und $g : ax + by = c$ die Koordinatenform einer Geraden in der Ebene, so gilt

$$\text{Abstand}(P, g) = \frac{|ax_P + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{16.1}$$

Dies ist die zweidimensionale Version des (letzten) Satzes **??** im Skript «3D-Vektorgeometrie»: Der Abstand eines Punktes $P = (x_P, y_P, z_P)$ zu einer in Koordinatenform $E : ax + by + cz = d$ gegebenen Ebene ist

$$\text{Abstand}(P, E) = \frac{|ax_P + by_p + cz_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\langle \overrightarrow{n}, P\rangle - d|}{|\overrightarrow{n}|}$$

Der Beweis im 2-Dimensionalen geht genauso wie im 3-Dimensionalen. (Er findet sich auch am Ende des Skripts «2D-Vektorgeometrie», Satz **??**; was dort Normalenform heisst, wird mittlerweile Koordinatenform genannt).

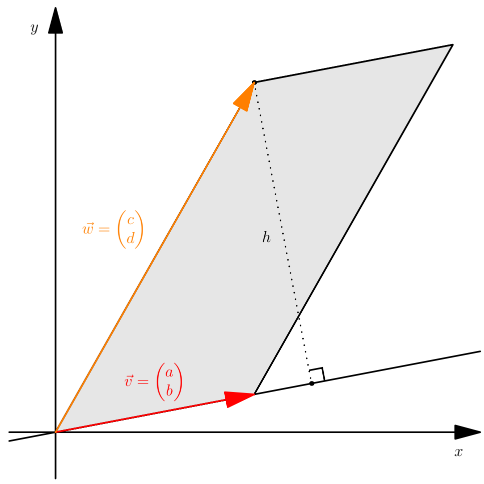
Aufgabe A6 In Aufgabe A2 haben Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (3, 6)$ berechnet. Ziel dieser Aufgabe ist, dieselbe Fläche mit Hilfe der Dreiecksflächenformel

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

zu bestimmen.

(a) Wählen Sie $c = \overline{AB}$ als Grundseite mit zugehöriger Höhe h_c und gehen Sie wie folgt vor.
  (i) Berechnen Sie $c = \overline{AB}$.
  (ii) Bestimmen Sie die Koordinatenform der Geraden $g = (AB)$.
  (iii) Mit Hilfe von Satz 16.2.6: Berechnen Sie die Höhe h_c.
  (iv) Berechnen Sie die Fläche.
(b) Berechnen Sie die Fläche noch einmal, nun mit $a = \overline{BC}$ als Grundseite.

Zweiter, allgemeingültiger Beweis von Satz 16.2.2. Wenn $\vec{v}$ der Nullvektor ist, stimmt die behauptete Formel, denn sowohl Fläche als auch Determinante sind dann Null. Gelte a



Die Fläche A unseres Parallelogramms kann mit der Formel «Grundseite mal Höhe» berchnet werden. Mit der «Grundseite $\vec{v}$» und der zugehörigen Höhe h (siehe Zeichnung) erhalten wir

✎

Die Höhe h ist der Abstand des «Endpunktes $P = (c, d)$ von $\vec{w}$» zur von $\vec{v}$ aufgespannten Ursprungsgeraden g, d. h.

✎

Diesen Abstand berechnen wir mit Satz 16.2.6; hierfür ist die Koordinatenform von g zu bestimmen.

Der naheliegende Normalenvektor von g ist ✎

Damit hat g die Koordinatenform

✎

(rechts steht Null, da g eine Ursprungsgerade ist). Nach dem zitierten Satz gilt

✎ 16.1

Damit können wir die Fläche berechnen:

✎ $\square$

16.2.7. Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Vektoren in der Zeichenebene, so haben wir in Satz 16.1.3 Folgendes gelernt.

$$\vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ kollinear} \iff \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Nach Satz 16.2.2 gilt

$$(\text{Fläche des von } \vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ aufgespannten Parallelogramms}) = |\det(\vec{v}, \vec{w})|$$

Der zweite Satz impliziert den ersten, denn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind genau dann kollinear, wenn das Parallelogramm die Fläche Null hat, was nach dem zweiten Satz bedeutet, dass $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ gilt.

16.2.8. Die Gleichheiten $\frac{1}{2} c \cdot h_c = \text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} |\det(\vec{v}, \vec{w})|$ (mit den offensichtlichen Bezeichnungen) liefern eine nette Methode, die Höhe h_c bzw. alle Höhen in einem Dreieck auszurechnen. Löse die Gleichung nach h_c auf.

Definition 16.2.9 Polygon = Vieleck, Gitterpolygon

Ein **Polygon** oder **Vieleck** ist eine ebene Figur, die durch einen geschlossenen Streckenzug gebildet wird. Die beteiligten Strecken heissen **Seiten** oder **Kanten** des Polygons. Die Endpunkte der beteiligten Strecken heissen **Ecken** oder **Eckpunkte** des Polygons.
Ein Polygon im $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heisst **Gitterpolygon**, wenn all seine Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, d. h. im **Gitter** $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ liegen. Die Elemente dieses Gitters heissen **Gitterpunkte**.

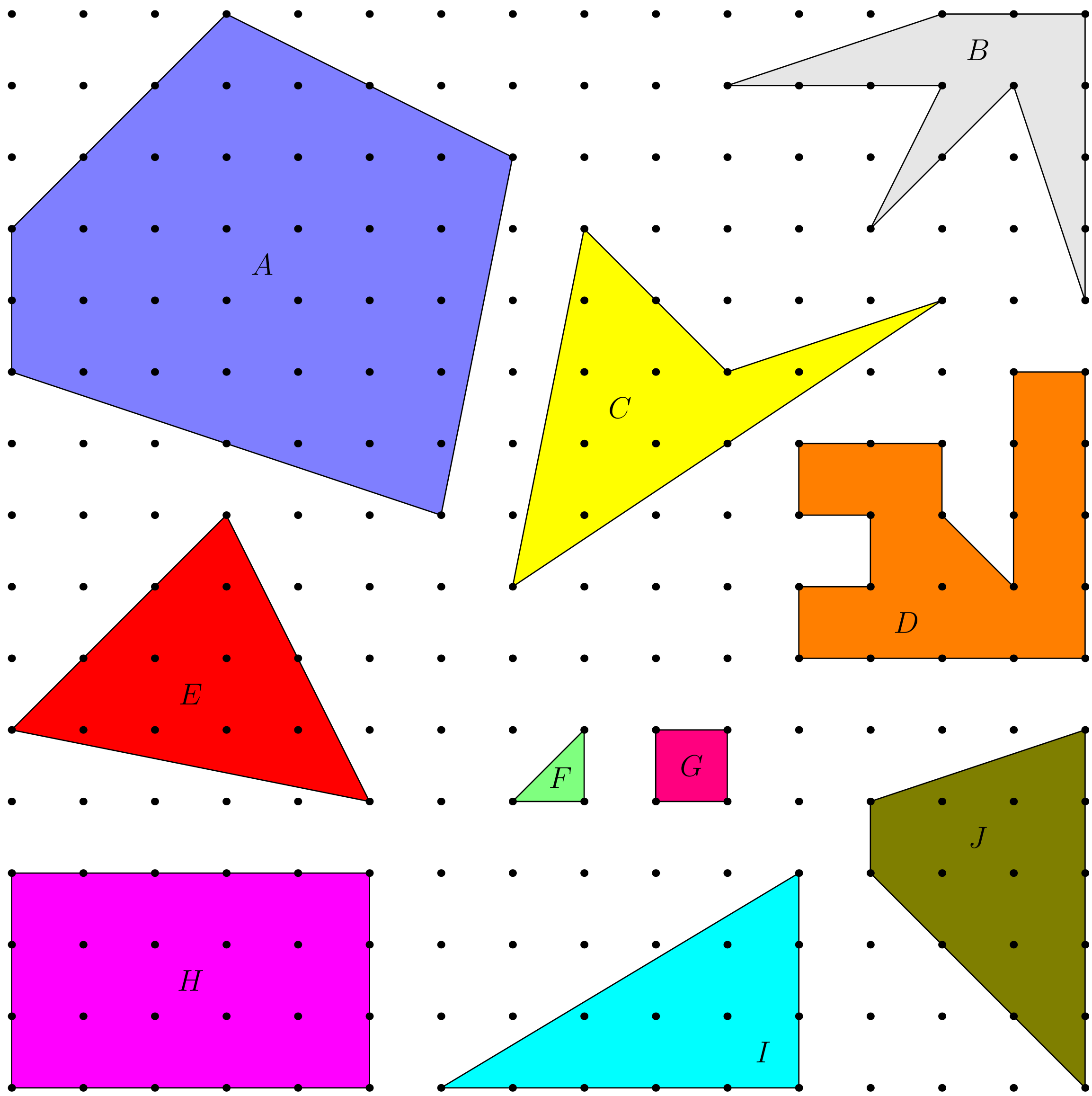
Aufgabe A7

(a) Berechnen Sie die Fläche von jedem der zehn unten abgebildeten Gitterpolygone.
(Die schwarzen dargestellten Punkte sind die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im abgebildeten Ausschnitt der Zeichenebene.)

(b) Legen Sie eine Tabelle an, in der sie für jedes Gitterpolygon die folgenden Werte angeben:
- seine Fläche;
- die Anzahl I der Gitterpunkte, die ganz in seinem **I**nneren liegen;
- die Anzahl R der Gitterpunkte, die auf seinem **R**and liegen (Eckpunkte liegen auch auf dem Rand).

Ihre Tabelle hat also vier Spalten, die wie folgt zu beschriften sind: Polygon, Fläche, I, R.

(c) Interessanterweise gibt es eine relativ einfache Formel, mit der man die Fläche der gezeigten Polygone aus I und R berechnen kann. Versuchen Sie, diese Formel zu finden!
Hinweis: Welchen Beitrag zur Fläche sollte jeder innere Punkt bzw. jeder Randpunkt etwa liefern?



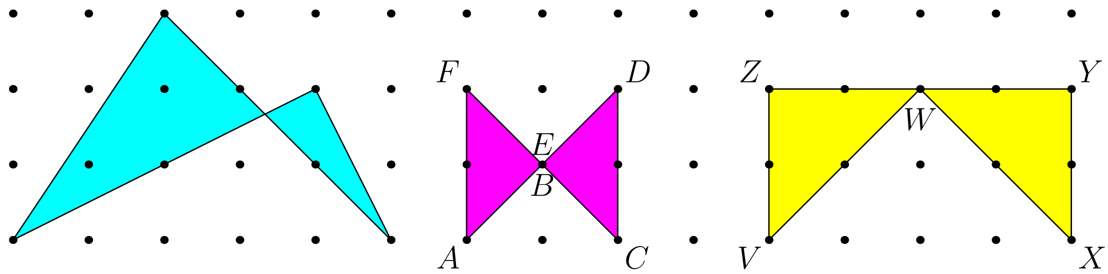
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Definition 16.2.10 einfaches Polygon

Ein Polygon heisst **einfach**, wenn sich nur direkt aufeinanderfolgende Strecken des Streckenzugs schneiden und dies nur in den Eckpunkten geschieht.

Beispiel 16.2.11. Alle in Aufgabe A7 abgebildeten (Gitter-)Polygone sind einfach.

Die folgenden drei (Gitter-)Polygone sind nicht einfach. Das linke Polygon ist ein «überschlagenes» Polygon. Der Streckenzug, der das mittlere Polygon definiert, ist $ABCDEF$. Der Streckenzug, der das rechte Polygon definiert, ist $VWXYZ$. aber auch andere, dieselben Figuren definierende Streckenzüge (etwa $ADCBF$) sind nicht einfach.



Satz 16.2.12 Georg Pick (10. August 1859 in Wien; 26. Juli 1942 im KZ Theresienstadt)

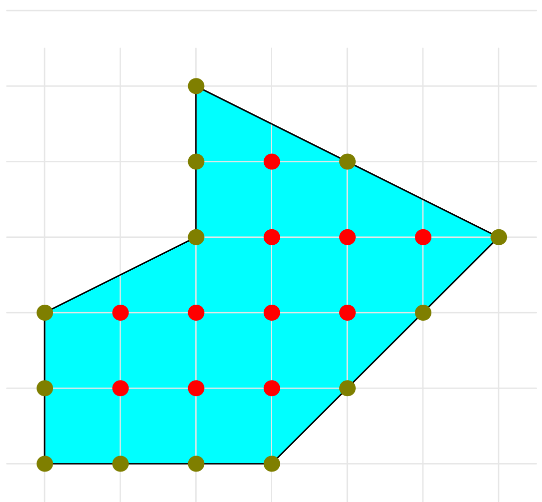
Der Flächeninhalt F eines einfachen Gitterpolygons ist

$F =$ ✎

Dabei sind
- I die Anzahl der Gitterpunkte im **I**nneren des Polygons und
- R die Anzahl der Gitterpunkte auf seinem **R**and.

Beweis. Aus Zeitgründen leider weggelassen. Interessierte können etwa Wikipedia: Satz von Pick konsultieren oder englische Wikipedia: Pick's theorem, wo Beweise zumindest skizziert werden. □

Beispiel 16.2.13.
Für das Gitterpolygon rechts gelten ✎



Nach dem Satz von Pick hat das Polygon die Fläche✎

Man prüft leicht, dass dies stimmt. In diesem Beispiel gilt «1 Häuschen = 1 cm^2».

16.2.14 (Bitte beachten). Wenn man übliches 5 mm-Häuschenpapier verwendet und als Einheit 1 cm wählt, kann man als Gitter auch alle Kreuzungspunkte verwenden. Dann liefert der Satz von Pick jedoch die Fläche in der Flächeneinheit «Häuschen»; um zur Einheit cm^2 zu wechseln, beachte man «4 Häuschen = 1 cm^2».

⚒ Aufgabe A8

(a) Berechnen Sie mit dem Satz von Pick die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (3, 6)$. (Das ist dasselbe Dreieck wie in Aufgabe A2).

(b) Prüfen Sie, ob Ihre in Aufgabe A7 erstellte Tabelle mit dem Satz von Pick kompatibel ist. Wenn nicht: Korrigieren Sie Ihre Tabelle.

(c) Zeigen Sie, dass die Formel im Satz von Pick für die Polygone in Beispiel 16.2.11 nicht gilt. Warum ist der Satz nicht anwendbar?

Definition 16.2.15 Kreiszahl π

Die **Kreiszahl** π ist wie folgt definiert: Wähle einen beliebigen Kreis und definiere π als das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser. Wenn wir den Umfang unseres Kreise als U und den Kreisradius als r notieren, gilt also

✎ $= 3{,}14159\ 26535\ \ldots$

Man beachte: Unabhängig davon, welchen Kreis wir wählen, kommt dieselbe Zahl heraus. Dies liegt daran, dass beim Strecken mit einem Streckfaktor λ alle Längen, also insbesondere Radius und Umfang, mit dem Faktor λ multpliziert werden.

Der Buchstabe π kommt von griechisch $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\sigma$, perimetros, Umfang = Perimeter.

Genaugenommen haben wir dies nur für «gerade» Strecken gezeigt, es gilt aber auch für Kreise und alle anderen Kurven, die man «ohne bösen Willen» konstruiert. Genauer gilt diese Aussage für alle Kurven, denen man sinnvoll eine Länge zuordnen kann, indem man sie durch Streckenzüge immer genauer annähert. Solche Kurven heissen **rektifizierbar**.

Satz 16.2.16

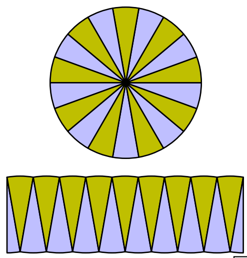
Für Umfang U und Fläche A eines beliebigen Kreises mit Radius r gelten: ✎

Mit der Fläche ist natürlich die Fläche des von dem Kreis (= der Kreislinie) eingeschlossenen Gebiets gemeint.

Beweis. Die erste Aussage ist klar: Man löse die π definierende Gleichung $\pi = \frac{U}{2r}$ nach U auf.

Die zweite Aussage folgt aus dem Bild rechts. Man zerschneide die Kreisscheibe in geradzahlige viele Tortenstücke und setze diese wie rechts gezeigt zu einem «Fast-Rechteck» zusammen. Dieses hat dieselbe Fläche wie der Kreis.

Wenn man die Anzahl der Tortenstücke immer grösser werden lässt, wird unser Fast-Rechteck immer mehr zu einem Rechteck mit Grundseite $\frac{1}{2}U$ und Höhe r. Also gilt



$$A = \frac{1}{2}U \cdot r = \frac{1}{2}2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

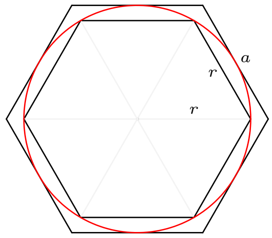
□

16.2.17. Einige Bemerkungen:

- Die Kreiszahl π ist irrational, d. h. $\pi \notin \mathbb{Q}$ (Johann Heinrich Lambert 1761); ihre Kommadarstellung ist also unendlich lang und nicht-periodisch.
- Stärker gilt: π ist transzendent (Ferdinand von Lindemann, 1882). Dies bedeutet, dass π die Nullstelle keines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.
  Anders formuliert: Wählt man ein beliebiges Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Q}$, so gilt $p(\pi) \neq 0$. [1]
- Man kann π näherungsweise bestimmen, indem man die Strecke abmisst, die ein Rad (etwa eines Velos) beim einmaligen Abrollen zurücklegt, und diese durch den Durchmesser des Rades dividert.
  Animation: https://en.wikipedia.org/wiki/Pi#/media/File:Pi-unrolled-720.gif
  In der Animation ist der Raddurchmesser 1, also der Radius $\frac{1}{2}$. Der Radumfang ist $U = 2\pi r = 2\pi\frac{1}{2} = \pi$.
- Es gibt einige Merkhilfen für die Nachkommastellen von π, siehe etwa Wikipedia: π-Sport, Merkregeln.

[1] Die Elemente von $\mathbb{R}$, die nicht transzendent sind, heissen **algebraisch** (über $\mathbb{Q}$). Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, aber algebraich (= nicht transzendent), denn $\sqrt{2}$ ist Nullstelle von $x^2 - 2$. Jede m-te Wurzel $\sqrt[m]{q}$ einer rationalen Zahl q ist Nullstelle von $X^m - q$ und somit algebraisch. Man kann zeigen: Jede(s/r) Summe/Differenz/Produkt/Quotient algebraischer Zahlen und jede m-te Wurzel einer algebraischen Zahl ist wiederum algebraisch: Mit anderen Worten: Alle Zahlen, die man ausgehend von den rationalen Zahlen mit den Rechenzeichen $+, -, \cdot, :$ und $\sqrt[m]{\ }$ (für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) hinschreiben kann, ist algebraisch.

- Erste grobe Bestimmung/Eingrenzung von π: Die Abbildung zeigt einen roten Kreis mit Radius r, dem ein regelmässiges Sechseck einbeschrieben und ein regelmässiges Sechseck umbeschrieben wurde. Die Seitenlänge des äusseren Sechsecks ist
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$$
wie Sie in Aufgabe A9 zeigen werden. Offensichtlich ist der Umfang des inneren Sechsecks kleiner als der Kreisumfang (denn die Strecke zwischen zwei Punkten ist ihre kürzeste Verbindung) und es ist zumindest anschaulich klar, dass der Kreisumfang kleiner ist als der Umfang des äusseren Sechsecks, d. h.✎



- Archimedes gelang es bereits 250 v. Chr., die Kreiszahl π deutlich genauer einzugrenzen (mit Hilfe eines 96-Ecks, ausgehend von obiger 6-Eckfigur durch viermaliges Verdoppeln der Eckenzahl; später mehr):
$$3{,}1408450 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}1428571$$
- Der Bruch $\frac{22}{7}$ ist eine sehr gute Annäherung an π, die lange Zeit von Handwerkern verwendet wurde. Der Fehler beträgt nur 0.04%. genauer: $\frac{\frac{22}{7}}{\pi} = 1.00040\ldots$

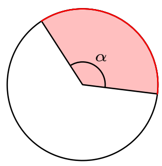
⚒ Aufgabe A9

Zeigen Sie, dass das einem Kreis mit Radius r umbeschriebene Sechseck die Seitenlänge $a = \frac{2}{\sqrt{3}} r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$ hat (siehe die Zeichnung oben auf dieser Seite).

⚒ Aufgabe A10

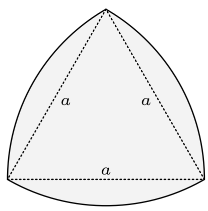
Der rechts in rot dargestellte Teil eines Kreises wird **Kreisbogen** genannt. Der zugehörige Winkel α heisst **Mittelpunktswinkel** oder **Zentriwinkel**. Die rot gefärbte Fläche ist ein **Kreissektor**. In einem Kreis mit Radius r:

- Wie lang ist ein Kreisbogen mit Mittelpunktswinkel α?
- Welche Fläche hat ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α?



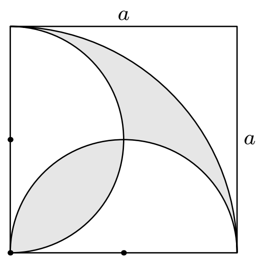
⚒ Aufgabe A11

Berechnen Sie Flächeninhalt und Umfang der grauen Figur.
Bemerkung: Diese Figur heisst **Reuleaux-Dreieck** und ist ein Beispiel eines «Gleichdicks», also einer Kurve konstanter Breite: Ein Brett, dass auf zwei Radpaaren dieser Form direkt aufliegt, ändert seine Höhe nicht, wenn die Räder auf dem horizontalen Boden abrollen.



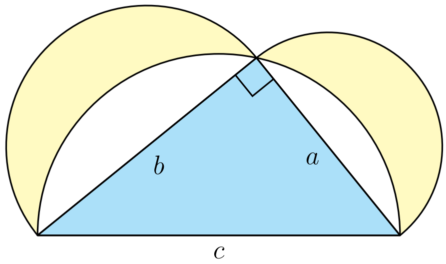
⚒ Aufgabe A12

Berechnen Sie Flächeninhalt und Umfang der grauen Figur.



Aufgabe A13 Möndchen des Hippokrates

Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Halbkreisen über den Katheten und der Hypotenuse wie rechts dargestellt. Bestimmen Sie die gelbe Fläche der beiden «Möndchen» in Abhängigkeit von a und b und vergleichen Sie Ihr Resultat mit der blauen Dreiecksfläche.

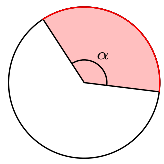


Bemerkung: Die Möndchen des Hippokrates sind die ersten *krummlinig* begrenzten Flächenstücke, deren Inhalt exakt berechnet werden konnte (laut Wikipedia: Lune of Hippocrates).

Merke 16.2.18

In jedem Kreis mit Radius r gelten:

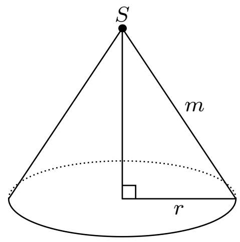
- Die Länge jedes Kreisbogens mit Innenwinkel α beträgt $\dfrac{\alpha}{360°} \cdot U_{\text{Kreis}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$
- Die Fläche jedes Kreissektors mit Innenwinkel α beträgt $\dfrac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{Kreis}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$.



(siehe Aufgabe A10)

Aufgabe A14

Bestimmen Sie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit Grundkreisradius r und Mantellinie m. Die Mantelfläche ist die Fläche, die die Spitze S des Kreiskegels mit dem Grundkreis verbindet (die Grundfläche gehört nicht dazu).
Hinweis: Schneiden Sie die Mantelfläche entlang einer Mantellinie m auf. Wenn sie die Mantelfläche nun «plattdrücken», erhalten Sie einen Kreissektor. Bestimmen Sie den Radius des Kreissektors und die Länge des zugehörigen Kreisbogens. Daraus können Sie den zugehörigen Zentriwinkel α bestimmen und dann die Fläche des Kreissektors (= die Mantelfläche) ausrechnen.



Definition 16.2.19 einige geometrische Körper (= dreidimensionale Gebilde): Prisma, Kegel, Pyramide

(Bitte Bilder auf Wikipedia anschauen: Prisma, Kegel, Pyramide)

- **Prisma**: «Parallelverschiebung eines Polygons»: Körper, der entsteht, wenn man ein ebenes Polygon im Raum parallel verschiebt und jeden Punkt des Polygons mit seiner Verschiebung verbindet.
  Häufiger Spezialfall: **gerades Prisma**: Die Verschiebung erfolgt senkrecht zur Ebene des Polygons; oft ist die Grundfläche ein Dreieck.
- **Kegel**: Körper, der entsteht, wenn man alle Punkte eines ebenen Flächenstücks mit einem nicht in der Grundfläche liegenden Punkt S (der Spitze) verbindet.
  Häufiger Spezialfall: **gerader Kreiskegel**: Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist und dessen Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises liegt.
- **Pyramide**: Wie beim Kegel, nur muss das Flächenstück ein Polygon sein.
  Häufiger Spezialfall: **gerade quadratische Pyramide**: Die Grundfläche ist ein Quadrat und die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrates.

Jede Pyramide ist ein Kegel. Die Seitenfläche eines Kegels/einer Pyramide wird als Mantelfläche bezeichnet (= die Oberfläche ohne die Grundfläche).

Satz 16.2.20 Volumen Prisma

Das Volumen jedes Prismas ist das Produkt von Grundfläche (meint: Flächeninhalt der Grundfläche) und Höhe:

$$V_{\text{Prisma}} = A \cdot h$$

Beweis. Klar für gerade Prismen; für alle anderen («gescherten») folgt es dann aus Cavalieris Prinzip: □

Satz 16.2.21 Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben. Anschaulich klar; Beweis per Integralrechnung.

Veranschaulichung durch einen Stapel Kopierpapier. Man dürfte während des Verschiebens auch noch die Form jedes Blattes ändern, solange die Fläche gleichbleibt.
Nette Animation: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/Cavalieri_gold.gif`. Eine Internet-Bildersuche liefert viele nette Beispiele.

Satz 16.2.22 (Hilfsaussage für den nächsten, stärkeren Satz)

Wenn zwei Kegel dieselbe Höhe haben und ihre Grundflächen flächengleich sind, so haben Sie dasselbe Volumen. Insbesondere gilt diese Aussage für Pyramiden.

Beweis. Man stelle die beiden Kegel mit ihren Grundflächen auf dieselbe Ebene. Dann ist anschaulich klar, dass die beiden Schnittflächen der Kegel mit jeder zu dieser Ebene parallelen Ebene dieselbe Fläche haben. Cavalieri liefert dann das Resultat.

Formal argumentiert man so: Die beiden Schnittflächen entstehen aus der jeweiligen Grundfläche durch eine zentrische Streckung mit demselben Streckfaktor (Streckzentrum in der jeweiligen Kegelspitze): Wenn die schneidende Ebene beispielsweise auf $\frac{1}{2}$-ber Höhe über den Grundflächen liegt, so haben die beiden Schnittflächen jeweils die $\left(\frac{1}{2}\right)^2$-fache Fläche der Grundfläche; dasselbe gilt für beliebiges $\lambda \in [0,1]$ statt $\frac{1}{2}$. □

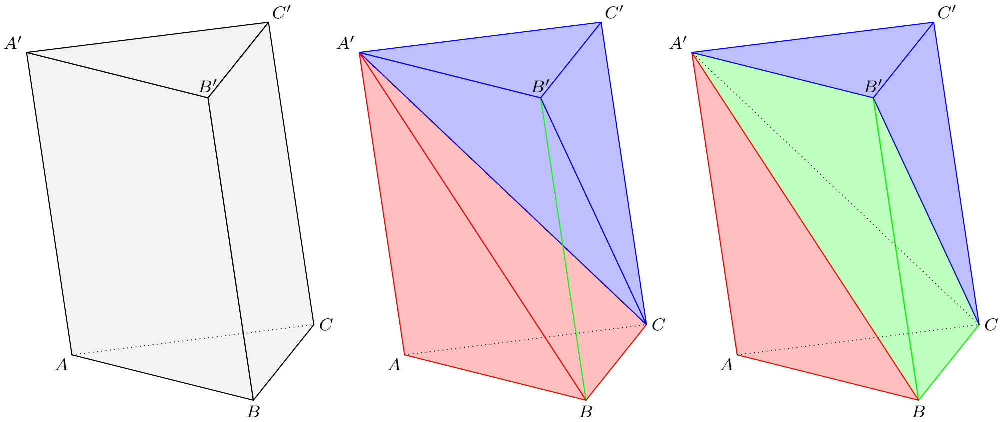
Satz 16.2.23

Das Volumen jeder Pyramide und allgemeiner jedes Kegels beträgt

$$V_{\text{Pyramide}} = V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

Satz 16.2.22 folgt offensichtlich aus Satz 16.2.23. Letzterer wird aber nun im Beweis des ersteren verwendet.

Beweis. Nach Satz 16.2.22 genügt es, die Aussage für ein beliebige Pyramide mit dreieckiger Grundfläche zu zeigen (etwa die rote in der folgenden Diskussion).



Man betrachte ein Prisma mit beliebiger dreieckiger Grundfläche wie das graue Prisma in der Abbildung. Dieses kann man wie ganz rechts gezeigt in drei Pyramiden zerlegen. (Modell in Mathe-Sammlung) (Die mittlere Darstellung dient der besseren geometrischen Anschauung. In ihr ist die grüne Pyramide entfernt, damit man die anderen beiden Pyramiden besser sieht.)

Nun sind rote und grüne Pyramide volumengleich nach Satz 16.2.22: Wenn man sie als Pyramiden mit Grundflächen ABA' und $A'BB'$ auffasst, so haben diese Grundflächen denselben Flächeninhalt (jeweils die Hälfte der Rechtecksfläche $ABB'A'$) und die Höhen der beiden Pyramiden sind gleich gross (beide haben denselben Punkt C als Spitze und ihre Grundflächen befinden sich in derselben Ebene).

Dasselbe Argument zeigt, dass grüne und blaue Pyramide volumengleich sind (Grundflächen BCB' und $B'CC'$ betrachten).

Also haben alle drei Pyramiden dasselbe Volumen. Da sie das Prisma vollständig und überschneidungsfrei ausfüllen (wie ein dreidimensionales Puzzle), ist dieses Volumen ein Drittel des Volumens Ah des Prismas, also $\frac{1}{3}Ah$. □

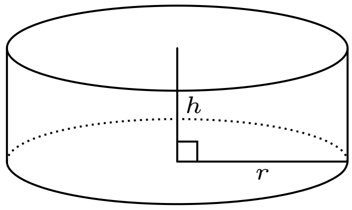
Dasselbe als Video: https://www.youtube.com/watch?v=WnqW6meEPSE

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Für die Aufgaben A16 und A17: Strahlensatz wiederholen oder vielleicht besser gleich für eine der beiden Aufgaben erklären, wie man damit die Höhe des abgeschnittenen Kegels ermittelt.
Die meisten Resultate der Aufgaben auf dieser Seite sollten sich in einer Formelsammlung finden. Suchen Sie diese und prüfen Sie so Ihre Ergebnisse.

Aufgabe A15 (Zylinder)

Berechnen Sie für einen Zylinder der Höhe h mit Radius r

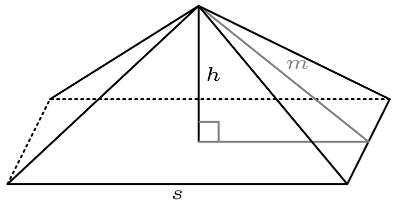


- das Volumen V;
- die Mantelfläche M (= Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche); Hinweis: Schneidet man die Mantelfläche entlang einer Mantellinie m auf und «drückt» sie «platt», so erhält man ein Rechteck.
- die Oberfläche O.

Volumen, Mantelfläche und Oberfläche sind in Abhängigkeit von h und r anzugeben.

Aufgabe A16 (Pyramide und Pyramidenstumpf)

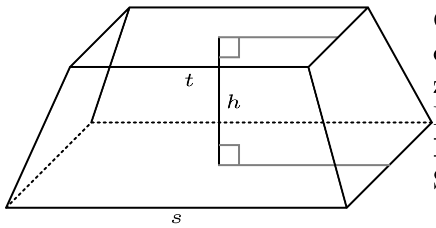
(a) Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide der Höhe h und Seitenlänge s der Grundfläche (siehe Skizze). Bestimmen Sie



- das Volumen V;
- die Länge von m;
- die Mantelfläche M (also die Oberfläche ohne die Grundfläche);
- die Oberfläche O.

Volumen, Mantelfläche und Oberfläche sind in Abhängigkeit von s und h anzugeben; die angegebenen Ausdrücke sind möglichst weit zu vereinfachen.

(b)



Gegeben ist ein Stumpf einer geraden quadratischen Pyramide (ein solcher Pyramidenstumpf entsteht, indem man von einer Pyramide parallel zur Grundfläche eine kleinere Pyramide abschneidet).
Die Höhe des Stumpfes ist h, die Grundfläche hat Seitenlänge s, die **Deckfläche** hat Seitenlänge t (siehe Skizze); es gelte $t < s$. Bestimmen Sie zuerst

- die Höhe ℓ der «abgeschnittenen Pyramide» mit Hilfe des Strahlensatzes

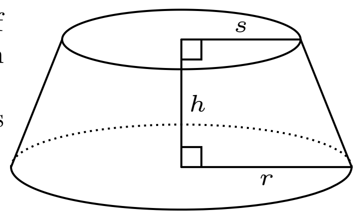
und bestimmen Sie dann mit Hilfe von Teilaufgabe (a) für den Kegelstumpf

- das Volumen V;
- die Mantelfläche M (= Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche);
- die Oberfläche O.

(c) Eine Art Probe: Falls man in Ihre Formeln aus (b) auch $s = t$ einsetzen darf: Liefern die Formeln die korrekten Werte für einen Quader der Höhe h mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge s?

Aufgabe A17 (Kegelstumpf)

(a) Gegeben ist ein Stumpf eines geraden Kreiskegels (ein solcher Kegelstumpf entsteht, indem man von einem Kegel parallel zur Grundfläche einen kleineren Kegel abschneidet).
Die Höhe des Stumpfes ist h, der Radius des unteren Kreises ist r, der Radius des oberen Kreises s; es gelte $s < r$. Bestimmen Sie



- das Volumen V;
- die Mantelfläche M (= Oberfläche ohne Grund- und Deckfläche);
- die Oberfläche O.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe A14. In der Lösung findet sich eine Zusatzbemerkung zum Volumen eines Kegelstumpfs mit beliebiger Grundfläche.

(b) Eine Art Probe: Falls man in Ihre Formeln aus (a) auch $r = s$ einsetzen darf: Liefern die Formeln die korrekten Werte für Zylinder der Höhe h mit Radius $r = s$?

Aufgabe A18 Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen eines Tetraeders der Seitenlänge a.

(Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge a.)

Bonus: Gelte $A = (0, 0, 0)$ und $B = (1, 0, 0)$. Bestimmen Sie (die Koordinaten von) C und D so, dass $ABCD$ ein Tetraeder ist, C positive x-Koordinate und z-Koordinate 0 hat und D positive z-Koordinate hat.

Satz 16.2.24 Archimedes, ca. 225 v. Chr.

Volumen V_K und Oberfläche O_K einer Kugel K mit Radius r sind wie folgt gegeben.

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad\qquad O_K = 4\pi r^2$$

Sei Z ein Zylinder mit Radius r und Höhe $2r$ (dies bedeutet, dass der Zylinder die Kugel genau umfasst, siehe Zeichnung). Dann stimmen die Verhältnisse «Kugelvolumen zu Zylindervolumen» und «Kugeloberfläche zu Zylinderoberfläche» überein und betragen $2:3$, in Formeln

$$\frac{V_K}{V_Z} = \frac{O_K}{O_Z} = \frac{2}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad V_K = \frac{2}{3}V_Z \qquad O_K = \frac{2}{3}O_Z$$

Merkhilfe: Die Formeln für V_Z und O_Z sind leicht zu finden. (Man muss jedoch daran denken, dass die gesamte Oberfläche des Zylinders gemeint ist und nicht nur die Mantelfläche.) Wenn man sich an den Faktor $\frac{2}{3}$ und genauer an $V_K = \frac{2}{3}V_Z$ und $O_K = \frac{2}{3}O_Z$ erinnert, kann man so die Formeln für V_K und O_K leicht rekonstruieren.

16.2.25. Archimedes schätzte seine Erkenntnisse zu Kugeln und Zylinder hoch ein, weshalb er laut Plutarch auf seinem Grab eine Darstellung von Kugel und Zylinder wünschte.

Beweis. Wir betrachten zunächst (siehe Illustration)

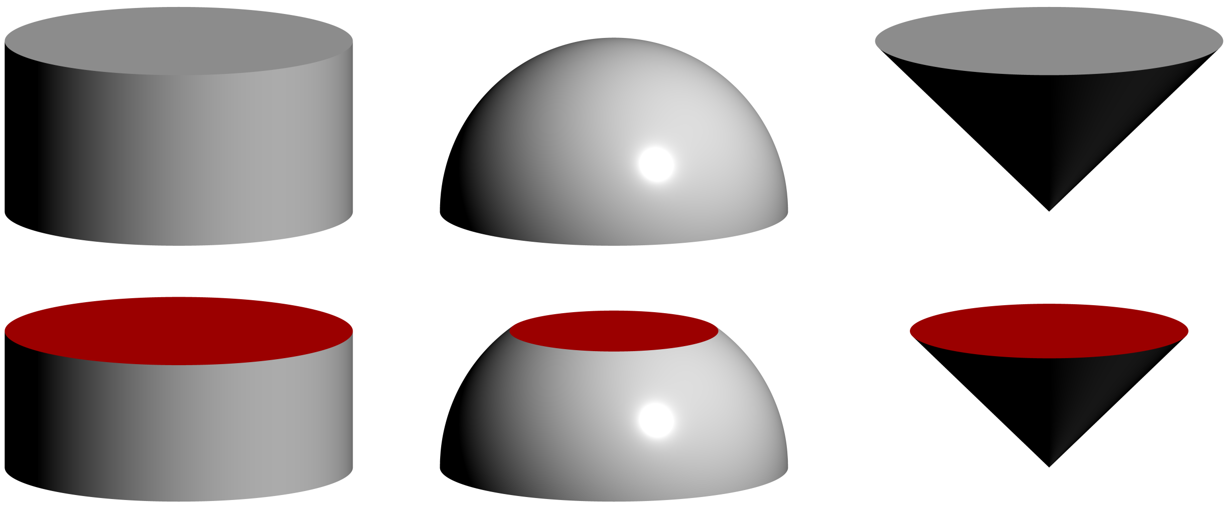
- einen Zylinder mit Radius r und Höhe r
- eine Halbkugel mit Radius r
- einen «auf der Spitze stehenden» Kegel mit Radius r und Höhe r (Radius = Radius des Basiskreises)

und stellen uns vor, dass all diese Körper auf einer horizontalen Ebene stehen.

1. Schritt: Dann gilt für die Volumina dieser Körper:

✎

Beweis der Behauptung:

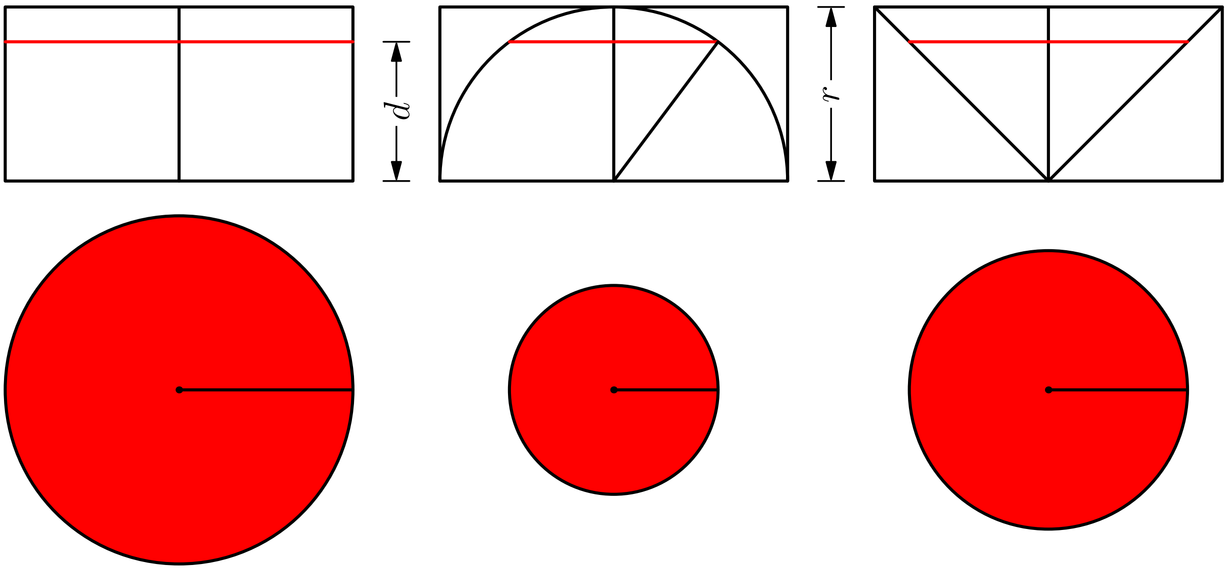


Nach dem Prinzip von Cavalieri genügt es zu zeigen, dass die rot dargestellten Schnittflächen mit jeder zur Grundebene parallelen Ebene die folgende Gleichung erfüllen:

✎

Dazu betrachten wir den in der folgenden Illustration dargestellten vertikalen Querschnitt durch unsere drei Körper (die roten Strecken sind die Schnittflächen); darunter sind die Schnittflächen (von oben gesehen) dargestellt. Sei d der Abstand der schneidenen Fläche von der Grundfläche.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer



✎

2. Schritt: Berechnung des Kugelvolumens.

Da Zylinder- und Kegelvolumen bereits bekannt sind, können wir aus der im 1. Schritt bewiesenen Gleichung

$$V_{\text{Zylinder}} = V_{\text{Halbkugel}} + V_{\text{Kegel}}$$

das Kugelvolumen berechnen: ✎

Das zeigt übrigens auch $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Halbkugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1$

3. Schritt: Berechnung der Kugeloberfläche.

Ähnlich, wie wir die Kreisfläche in «unendlich viele» Tortenstücke zerlegt haben, um die Beziehung $A = \frac{1}{2} U \cdot r$ zu erhalten, zerlegen wir nun die Kugel in «kegelförmige Kugeltortenstücke».

Man stelle sich zum Beispiel die Zerlegung der Erdoberfläche durch Breitenkreise und Längenkreise zu Vielfachen von 15° vor (wie auf einem Globus) und verbinde jedes so erhaltene Gebiet der Erdoberfläche zum Erdmittelpunkt zu einem Kugeltortenstück.

Jedes Tortenstück ist angenähert ein Kegel (mit nicht ganz ebener Grundfläche) und Höhe r. Es gilt also

$$\begin{aligned}
V_{\text{Kugel}} &= \text{Summe der Volumina aller Tortenstücke} \\
&\approx \text{Summe}_{\text{ über alle Tortenstücke}} \ \frac{1}{3} \cdot (\text{Grundfläche des Tortenstücks}) \cdot r \\
&= \frac{1}{3} \cdot r \cdot \Big(\text{Summe}_{\text{ über alle Tortenstücke}} \ (\text{Grundfläche des Tortenstücks})\Big) \\
&= \frac{1}{3} \cdot r \cdot O_{\text{Kugel}}
\end{aligned}$$

Wenn man die Kugel in immer mehr Tortenstücke zerlegt (also «zum Grenzwert übergeht») gilt exakt ✎

bzw. nach der Oberfläche aufgelöst und unter Verwendung der oben bewiesenen Formel für das Kugelvolumen ✎

4. Schritt: Verhältnisse von Volumen bzw. Oberfläche zwischen Kugel K und umbeschriebenem Zylinder Z.

Alle Volumina sind bekannt und wir berechnen✎

Alle Flächen sind bekannt und wir berechnen✎

□

Aufgabe A19 Betrachten Sie die beiden folgenden geometrischen Körper:

- eine Kugel mit Radius r;
- einen Würfel mit Seitenlänge $2r$.

Vorstellung: Die Kugel passt genau in den Würfel hinein.

(a) Schätzen Sie die folgenden Verhältnisse der Volumina bzw. Oberflächen.

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Würfel}}} = \qquad\qquad \frac{O_{\text{Kugel}}}{O_{\text{Würfel}}} =$$

(b) Berechnen Sie diese Verhältnisse und geben Sie sie in Prozent an.

$$V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Würfel}} \approx \qquad\qquad O_{\text{Kugel}} : O_{\text{Würfel}} \approx$$

(c) Sicherlich fällt Ihnen etwas auf. Können Sie dies erklären?

Aufgabe A20 Betrachten Sie die beiden folgenden geometrischen Körper:

- eine Kugel mit Radius r;
- einen Zylinder mit Radius r und Höhe $2r$.

Vorstellung: Die Kugel passt genau in den Zylinder hinein.

(a) Schätzen Sie die folgenden Verhältnisse der Volumina bzw. Oberflächen.

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Zylinder}}} = \qquad\qquad \frac{O_{\text{Kugel}}}{O_{\text{Zylinder}}} =$$

(b) Berechnen Sie diese Verhältnisse.
Ergebnis:

$$V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Zylinder}} = \qquad\qquad O_{\text{Kugel}} : O_{\text{Zylinder}} =$$

Aufgabe A21 In dieser Aufgabe wird die Erde idealisiert als Kugel betrachtet.

Die Längeneinheit 1 m wurde ursprünglich als zehn-millionster Teil des Viertels des Erdumfangs definiert, der durch den Nordpol und Paris verläuft (Wikipedia: Urmeter). Mit anderen Worten ist die Entfernung vom Nordpol zum Äquator 10 000 000 m (entlang jedes Längenkreises).

(a) Berechnen Sie den Erdradius in km.

(b) St. Gallen hat die Koordinaten $47°25'27''$ N, $9°22'15''$ E (laut Wikipedia: St. Gallen). Rechnen Sie gerundet mit den Koordinaten 47° N, 9° E.
- Wie gross ist die Distanz von St. Gallen zum Nordpol? (Weg entlang des Längenkreises nach Norden)
- Wie gross ist die Distanz von St. Gallen zum Äquator?

(c) Wie gross ist die Erdoberfläche (Land- und Wasserfläche)?
- Welchen Anteil an der Erdoberfläche in Prozent hat
  - die Schweiz als 132-grösstes Land mit einer Fläche von ca. $41\,290\,\mathrm{km}^2$?
  - Russland als grösstes Land mit einer Fläche von ca. $17\,100\,000\,\mathrm{km}^2$?

(d) Wenn man die Erdkugel entlang des Äquators aufschneidet:
- Wie gross ist die Schnittfläche («Äquatorkreisscheibe»)?
- Was ist das Verhältnis von Erdoberfläche zu Schnittfläche?
- Was ist allgemein das Verhältnis $\frac{\text{Kugeloberfläche}}{\text{Kreisfläche}}$, wenn Kugel und Kreis denselben Radius r haben?

(e) Flächen als Kreis- bzw. Kugelflächen:
- Wenn die Schweiz eine (flache) Kreisscheibe wäre: Welchen Radius R hat der Kreis?
- Wenn die Schweiz ein Planet/eine Kugelfläche wäre (also die Oberfläche einer Kugel, der «Schweizkugel»): Welchen Radius r hat die Kugel?
- Was ist das Verhältnis $\frac{R}{r}$? Hat nur die Schweiz dieses Verhältnis oder gilt dies für jedes Land?

Aufgabe A22 Gegeben ist ein Würfel der Seitenlänge a. Auf der Oberseite des Würfels wird wie folgt ein gerader Kreiskegel errichtet: Der Kreiskegel hat die Höhe h. Sein Grundkreis ist der «Innkreis» der Würfelseite, d. h. er hat Radius $\frac{a}{2}$ und als Mittelpunkt den Mittelpunkt der Würfelseite.

Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des so erhaltenen Körpers.

Merke 16.2.26

Die Oberfläche einer Kugel ist 4-mal so gross wie eine Kreisscheibe desselben Radius. siehe Aufgabe A21

Aufgabe A23 Gegeben ist ein Kreis k mit Radius r. Zu dem Kreis betrachte man ein umbeschriebenes gleichseitiges Dreieck D und ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck d.

(a) Bestimmen Sie die Umfänge U_D und U_d der beiden Dreiecke und den Kreisumfang U_k in Abhängigkeit von r.
Hinweise:
- Die Höhe des grossen Dreiecks D ist $3r$, da in jedem gleichseitigen Dreick Höhen und Seitenhalbierende (und Winkelhalbierende) übereinstimmen und deswegen dasselbe für Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt gilt; die Seitenhalbierenden schneiden sich aber im Verhältnis $2 : 1$.
- Das kleine Dreieck d «passt viermal» in das grosse Dreieck D. Welcher Streckfaktor?

(b) Zeigen Sie, dass die «offensichtlichen» Ungleichungen
$$U_d < U_k < U_D$$
die folgende Abschätzung für π liefern.
$$\frac{3}{2}\sqrt{3} < \pi < 3\sqrt{3}$$
Also sicherlich: $2.5980\ldots < \pi < 5.1962$.

(c) Seien A_d, A_D und A_k die Flächen der Dreiecke und des Kreises. Welche Abschätzung für π folgt aus der Abschätzung

$$A_d < A_k < A_D$$

Ist sie besser oder schlechter als die vorherige Abschätzung?

16.2.27. Zur Sprechweise:

- Wenn man von einem Kreis spricht, meint man manchmal die **Kreislinie** und manchmal die **Kreisscheibe**.
- Wenn man von einer Kugel spricht, meint man manchmal die **Kugelfläche** (oder **Sphäre**) und manchmal die **Vollkugel**.

Aus dem Kontext ist meistens klar, was gemeint ist.

Definition 16.2.28 Kugelsegment, Kugelsektor, Kugelkappe

Schneidet man eine Vollkugel durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile, so heissen die neu entstandenen Teile **Kugelsegmente**.
Verbindet man all Punkte eines Kugelsegments (das kleiner als eine Halbkugel ist) mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entsteht ein **Kugelsektor**. Jeder Kugelsektor ist also die Vereinigung aus einem Kugelsegment und einem geraden Kreiskegel (mit Spitze im Kugelmittelpunkt).
Eine **Kugelkappe** ist der gekrümmte Teil der Oberfläche eines Kugelsegments.

16.2.29. Ein Spezialfall eines Kugelsegments ist eine Halbkugel.

Wenn man die Erde entlang eines beliebigen Breitenkreises zerschneidet, entstehen zwei Kugelsegmente.

Jedes Kugelsegment wird von einer Kreisscheibe und einem Teil der Oberfläche der ursprünglichen Kugel (der zugehörigen Kugelkappe) begrenzt.

16.2.30. Wenn die Antarktis «kreisförmig» wäre, wäre ihre Oberfläche eine Kugelkappe. In der Geographie wird der Begriff «Polkappe» oder «polare Eiskappe» verwendet.

Folgerung 16.2.31 aus Satz 16.2.24

Für jede Kugel mit Radius r gelten:
Das Volumen jedes Kugelsegments der Dicke h ist $\qquad 0 \leq h \leq 2r$

$$V_{\text{Kugelsegment}} = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$

Das Volumen jedes Kugelsektors über einem Kugelsegment der Dicke h ist $\qquad 0 \leq h \leq 2r$
(falls die Dicke des Kugelsegments grösser als der Radius ist, muss man einen Kegel wegnehmen)

$$V_{\text{Kugelsektor}} = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

Die Fläche jeder Kugelkappe der Höhe h ist $\qquad 0 \leq h \leq 2r$

$$O_{\text{Kugelkappe}} = 2\pi r h$$

16.2.32. Interssant: Die Kugelkappe ist genauso gross wie die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius r und Höhe h.

Spezialfall (schon vorher klar): Im Fall $h = 2r$ ist die Kugelkappe = Kugelfläche genauso gross wie die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius r und Höhe $h = 2r$: Beide haben die Fläche $4\pi r^2$.

Diese Aussage überträgt sich sofort auf Mantelflächen von Kugelschichten der Dicke/Höhe h (da man sie als Differenzen von Kugelkappen darstellen kann). Dabei ist es unerheblich, wo die Kugelschicht liegt: Nur die Dicke der Schicht zählt (und natürlich der Radius der Kugel).

Beweis. Siehe Appendix A. □

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Zylinder-Aufgabe

Eine zylindrische Regentonne hat einen Innendurchmesser von 60 cm und ist innen 85 cm hoch.

(a) Wieviel Liter fasst die Tonne?
(b) Wie hoch stehen 150 l in ihr?

Pyramiden-Aufgabe

(a) Zeichne das Netz (= den «Faltplan») einer geraden quadratischen Pyramide mit Grundkante $a = 3\,\mathrm{cm}$ und Seitenkante $s = 4\,\mathrm{cm}$.
(b) Berechne die Höhe h_1 einer Seitenfläche, die Mantelfläche M und die Oberfläche O.
(c) Berechne die Höhe h und das Volumen V der Pyramide.

Kegel-Aufgabe

Ein Kelchglas (= ein kegelförmiges Glas) hat am oberen Rand einen Innendurchmesser von 8.0 cm und ist innen 9.0 cm hoch.

Wie viel Flüssigkeit befindet sich im Glas, wenn es bis 2.0 cm unter den Rand gefüllt ist?

Kugel-Aufgabe

Ein Basketball von 76 cm Umfang besteht aus 0.5 cm dickem Kunststoff der Dichte $\rho = 0.72\,\mathrm{g/cm^3}$. Welche Masse in Gramm hat der Ball.

Lösungen (vermutlich alles gerundet):

Zylinder/Regentonne

- Fassvermögen: 240.33 l
- 150 l stehen 53.1 cm hoch

Pyramide

(a) Netz hoffentlich klar
(b) $h_1 = 3.71\,\mathrm{cm}$
$M = 22.25\,\mathrm{cm}^2$
$O = 31.25\,\mathrm{cm}^2$
(c) $h = 3.39\,\mathrm{cm}$
$V = 10.17\,\mathrm{cm}^3$

Kegel/Kelchglas

- $7.1\,\mathrm{cl} = 7.1 \cdot 10\,\mathrm{cm}^3 = 71\,\mathrm{cm}^3$

Kugel/Basketball

- 634.9 g

16.3 Numerische Mathematik: Approximation der Kreiszahl π

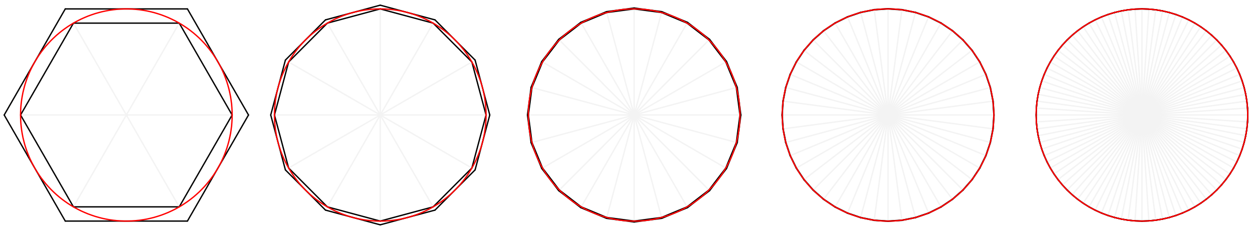
Die Methode von Archimedes

16.3.1. Auf Seite 8 haben wir die Abschätzung

$$3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3} = 3.464\ldots$$

gezeigt, indem wir den Umfang eines Kreises mit dem Umfang eines ein- bzw. umbeschriebenen regelmässigen Sechsecks verglichen haben. Es ist zu erwarten, dass man bessere Abschätzungen für π erhält, wenn man regelmässige Polygone mit mehr Ecken verwendet.

Archimedes hat mit dem 6-Eck begonnen und dann mehrfach die Eckenzahl verdoppelt, also das 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck und 96-Eck betrachtet.

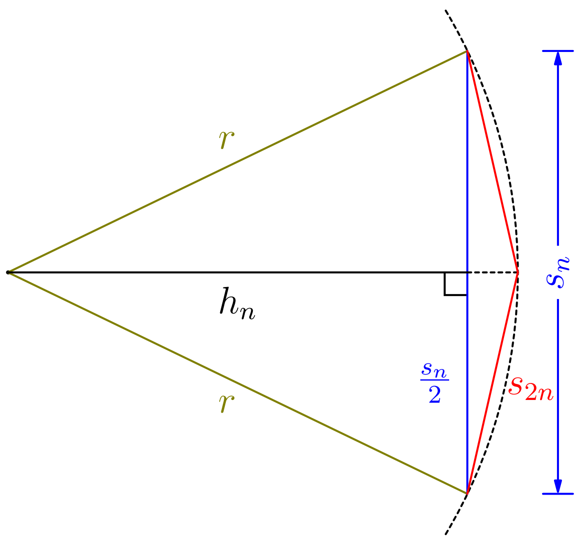


Der Vorteil beim Verdoppeln der Eckenanzahl ist, dass man aus der Seitenlänge des n-Ecks relativ leicht die Seitenlänge des «nachfolgenden» $2n$-Ecks berechnen kann.

Wir erklären dies für die einbeschriebenen Polygone (die Überlegungen für die umbeschriebenen Polygone sind ähnlich, vgl. Aufgabe A25).

Wir wollen aus der Seitenlänge s_n eines einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seitenlänge s_{2n} des einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks berechnen. Dabei ist der Kreisradius r gegeben.

Als Hilfsgrösse verwenden wir die Höhe h_n. Nach Pythagoras gelten ✎



und

Wir wählen im Folgenden den Radius $r = 1$ und erhalten

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Merke 16.3.2 Zusammenfassung der obigen Diskussion

In einem Kreis mit Radius $r = 1$ bezeichne s_n die Seitenlänge eines einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks. Dann ändert sich die Seitenlänge beim Verdoppeln der Eckenzahl wie folgt.✎

Wenn man mit ✎ startet, kann man mit dieser Formel die folgenden Seitenlängen ausrechnen✎

Damit kann man π nach unten abschätzen:✎

Aufgabe A24 Schreiben Sie ein Python-Programm, das π approximiert, indem es nacheinander die halben Umfänge der folgenden (dem Einheitskreis einbeschriebenen) regelmässigen n-Ecke berechnet.

- 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck, 96-Eck, $\ldots$, $6 \cdot 2^9$-Eck

Das folgende Programm-Gerüst mag helfen:

```
import math

iterationen = 10

n =                          # Eckenzahl am Anfang
s =                          # Seitenlänge am Anfang

for i in range(iterationen):
    umfang_n_eck =           # Umfang des n-Ecks berechnen
    pi_kandidat =            # Approximation an pi berechnen

    print(f'Iteration {i+1:4}, {n:12}-Eck:   {pi_kandidat:>20.15f}      {math.pi=}')

    n =                      # Eckenanzahl verdoppeln
    s =                      # Neue Seitenlänge berechnen
```

Aufgabe A25 Zeigen Sie: Ist S_n die Seitenlänge eines umbeschriebenen n-Ecks (um einen Kreis mit Radius r), so hat das «nachfolgende» umbeschriebene $2n$-Eck die Seitenlänge

$$S_{2n} = \frac{2rS_n}{2r + \sqrt{4r^2 + S_n^2}}$$

16.3.3. Sicherlich hat jemand im Python-Programm die Variable `iterationen` erhöht und festgestellt, dass die Approximationen von π bis etwa zur 13. Iteration immer besser werden. Ab der 17. Iteration werden sie aber deutlich schlechter und ab der 29. Iteration wird sogar 0 als Approximation ausgegeben.

Der Grund hierfür sind Rundungsfehler und die sogenannte **Auslöschung**. Zitat von Wikipedia: Auslöschung (numerische Mathematik):

> Unter Auslöschung (engl. «cancellation») versteht man in der Numerik den Verlust an Genauigkeit bei der Subtraktion fast gleich großer Gleitkommazahlen.

Statt Auslöschung wird auch der Begriff **Subtraktionskatastrophe** verwendet.

Um dies zu verstehen, betrachte man unsere Iterationsformel.

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Python rechnet nicht mit den exakten Werten, sondern mit gerundeten Werten (genauer rechnet Python mit **Gleitkommazahlen** (im Binärsystem); im Zehnersystem entspricht dies Zahlen in wissenschaftlicher Notation mit etwa 16 gültigen Ziffern). Genauer verwendet Python 64 Bit zur Speicherung einer Gleitkommazahl (1 Bit für dsa Vorzeichen, 11 Bits für den Exponenten, 52 Bit für 53 gültige Binärziffern.

Die Seitenlängen s_n nähern sich mit steigendem n immer mehr der Null. Wenn s_n sehr nahe bei Null ist, ist s_n^2 noch näher bei Null, $4 - s_n^2$ sehr nahe bei 4 und $\sqrt{4 - s_n^2}$ sehr nahe bei 2 (und wird womöglich schon als `2.000000000000000` gespeichert). Das Ergebnis der Subtraktion

$$2 - \sqrt{4 - s_n^2}$$

zweier fast gleich grosser Gleitkommazahlen ist dann sehr nahe bei Null und wird vom Computer möglicherweise zu `0.000000000000000` berechnet. Die Wurzel daraus,

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

ist dann ab der 29. Iteration laut Computer Null.

16.3.4. Der folgende Erweiterungs-Trick vermeidet solche Fehler.✎

Mathematisch gesehen sind alle Ausdrücke gleich, jedoch ist der letzte Ausdruck «numerisch stabiler», wird also weniger von Rundungsfehlern beeinflusst.

Wenn im letzten Ausdruck s_n gegen Null tendiert ist, strebt der Ausdruck im Nenner gegen $\sqrt{2 + \sqrt{4}} = 2$ und im Computer wird dieser Ausdruck irgendwann zu `2.0000000000000000`. Ab dann wird der Computer die Seitenlänge bei jedem Iterationsschritt halbieren, während die Eckenzahl (= Kantenzahl) verdoppelt wird. Dabei bleibt der Umfang und damit die Approximation an π konstant.

Aufgabe A26 Lösen Sie Aufgabe A24 erneut, nun aber mit der neuen Iterationsformel (am besten das alte Programm abspeichern und ein neues Programm schreiben; Code aus dem alten Programm darf natürlich kopiert werden).

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

16.3.5. Genaue numerische Analysen werden rasch sehr aufwändig (Fehlerrechnung). Im Prinzip muss man bei jeder Rechnung überlegen, wie sich Ungenauigkeiten der Eingangswerte auf das Ergebnis auswirken.

Man sollte aber deswegen keine Angst vor numerischen Verfahren haben, denn «meistens» geht alles gut. Man sollte sich aber bewusst sein, dass Rechnungen am Computer mit Gleitkommazahlen stets von Rundungen beeinflusst sein können.

16.3.6. In Appendix B findet sich ein Python-Programm, das π nach dem Archimedes-Verfahren mit höherer Genauigkeit berechnet und eine vernünftige Ausgabe produziert.

16.3.7. Es gibt viele numerische Verfahren, um π möglichst genau zu berechnen, siehe etwa Wikipedia: Approximations of π.

Im Abschnitt über Archimedes' Methode auf Wikipedia: Approximations of π stehen die beiden Beziehungen $P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$ und $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$ für die Umfänge P_n bzw. p_n von umbeschriebenem bzw. einbeschriebenem n-Eck. (Noch zu prüfen, eventuell zu Aufgabe machen.)

Probabilistische Methode (Monte-Carlo-Simulation)

Aufgabe A27 Folgender Python-Code erzeugt Zufallszahlen zwischen 0 und 1:

```
from random import random
n = 6
while n>0:
    z = random()
    print(z)
    n = n-1
```

```
0.8696981969050243
0.7626787554309876
0.6196171861591572
0.17116177170210767
0.3170744431396274
0.49269143898456613
```

In dieser Aufgabe sollen Sie die Kreiszahl π mit einem Zufallsexperiment annähern. Schreiben Sie dafür ein Python-Programm wie folgt:

- Bestimmen Sie zwei Zufallszahlen x und y zwischen 0 und 1.
- Dann ist (x, y) ein Punkt im Einheitsquadrat. Stellen Sie fest, ob dieser Punkt auch im Einheitskreis liegt.
- Wiederholen Sie obiges Experiment 1000 oder 1'000'000 mal und zählen Sie die Anzahl der Punkte im Kreis.
- Berechnen Sie den Anteil der Punkte, die im Kreis liegen.
- Wie gross müsste dieser Anteil theoretisch sein? Wie lässt sich somit π näherungsweise berechen? Wie genau ist das Resultat? Hinweis: Die Kreiszahl π kann man wie folgt ausgeben:

```
from math import pi
print(pi)
```

Gitter-Methode

Aufgabe A28 Man betrachte den Einheitskreis (= Kreis mit Radius 1 um den Ursprung des Koordinatensystems) und stelle sich das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ als Schachbrett vor. Wenn man zählt, wie viele Mittelpunkte von Schachbrettfeldern im (rechten oberen Viertel-)Kreis liegen, kann man daraus näherungsweise π berechnen. Die Näherung wird besser, wenn man statt eines 8×8-Schachbretts ein $n \times n$-Schachbrett für grosses n wählt.

Schreiben Sie ein Python-Programm, das auf diese Weise π approximiert. Als Hilfe folgendes Programm-Gerüst:

```
from math import pi

n = 100
schrittweite = 1/n

im_kreis = 0            # Zählt, wie viele Punkte
                        # im Einheitskreis sind.

x = schrittweite/2
while x <= 1:
    y = schrittweite/2
    while y <= 1:
                        # erhöhe die Variable im_kreis um 1,
                        # falls der Punkt (x, y)
                        # im Einheitskreis ist
        y = y+schrittweite
    x = x+schrittweite
pi_kandidat =           # zu ergänzen
print(pi_kandidat)
print(pi)
```

A Beweis zu Kugelsektor, -segment und -kappe

Beweis von Folgerung 16.2.31. **Volumen Kugelsegment:** Das Argument aus dem Beweis zeigt sogar: Schneidet man von Zylinder, Halbkugel und auf dem Kopf stehenden Kegel von oben her eine Schicht der Höhe h ab, so gilt

$$\begin{pmatrix}\text{Volumen des Zylinders mit}\\ \text{Radius } r \text{ und Höhe } h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Volumen des Kugelseg-}\\ \text{ments der Höhe } h \text{ aus einer}\\ \text{Kugel mit Radius } r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Volumen des Kegelstumpfs der}\\ \text{Höhe } h\text{, entstanden aus einem}\\ \text{Kegel mit Radius } r \text{ und Höhe } r\end{pmatrix}$$

Zylinder- und Kegelstumpfvolumen sind bekannt (nach vorherigen Aufgaben) und wir erhalten

$$\begin{aligned}
V_{\text{Kugelsegment}} &= \pi r^2 \cdot h - \left(\frac{1}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi (r-h)^3\right)\\
&= \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi\Big(r^3 - (r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3)\Big)\\
&= \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi\Big(3r^2h - 3rh^2 + h^3)\Big)\\
&= \pi r^2 \cdot h - \pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3\\
&= \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3\\
&= \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)\\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)
\end{aligned}$$

Probe: Für $h = r$ kommt $\frac{\pi}{3}r^2(3r-r) = \frac{2}{3}\pi r^3$ heraus, also das Volumen der Halbkugel.

Probe: Für $h = 0$ kommt Null heraus.

Beachte: Die Formel gilt a priori nur für $0 \leq h \leq r$.

Für $r < h \leq 2r$ erhält man das gesuchte Volumen, wenn man vom Kugelvolumen das Volumen des Kugelsegments der Höhe $(2r-h)$ abzieht, also (unter Verwendung der gerade gezeigten Formel für das Volumen des Kugelsegments)

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{3}(2r-h)^2(3r-(2r-h)) &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{\pi}{3}(4r^2 - 4rh + h^2)(r+h)\\
&= \frac{\pi}{3}\Big(4r^3 - (4r^2 - 4rh + h^2)(r+h)\Big)\\
&= \frac{\pi}{3}\Big(4r^3 - (4r^3 - 4r^2h + rh^2 + 4r^2h - 4rh^2 + h^3)\Big)\\
&= \frac{\pi}{3}\Big(4r^3 - 4r^3 + 4r^2h - rh^2 - 4r^2h + 4rh^2 - h^3\Big)\\
&= \frac{\pi}{3}\Big(3rh^2 - h^3\Big)\\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)
\end{aligned}$$

Dies zeigt: Unsere ursprüngliche Formel gilt sogar für alle $0 \leq h \leq 2r$.

Volumen Kugelsektor: Das Volumen ist das Volumen des Kugelsegments plus das Volumen eines Kegels mit Radius

$$\rho = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{r^2 - (r^2 - 2rh + h^2)} = \sqrt{2hr - h^2} = \sqrt{2hr - h^2}$$

(obiges gilt für alle h mit $0 \leq h \leq 2r$) also (untiges gilt zuerst einmal nur für alle h mit $0 \leq h \leq r$)

$$\begin{aligned}
V_{\text{Kugelsektor}} &= V_{\text{Kugelsegment}} + V_{\text{Kegel}} \\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h) + \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot (r-h) \\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h) + \frac{1}{3}\pi(2hr-h^2) \cdot (r-h) \\
&= \frac{\pi}{3}\Big(h^2(3r-h) + (2hr-h^2)\cdot(r-h)\Big) \\
&= \frac{\pi}{3}\Big(3h^2r - h^3 + 2hr^2 - 2h^2r - h^2r + h^3\Big) \\
&= \frac{2}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}$$

Was passiert im Falla $r < h \leq 2r$? Dann ist $r-h$ negativ und der Kugelsektor sollte wohl definiert werden als Kugelsegment minus Kegel, d. h.

$$\begin{aligned}
V_{\text{Kugelsektor}} &= V_{\text{Kugelsegment}} - V_{\text{Kegel}} \\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h) - \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot (h-r) \\
&= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h) + \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot (r-h) \\
\text{(siehe oben)} &= \frac{2}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Wenn man den Kugelsektor in naheliegender Weise definiert, stimmt die Formel auch sogar für alle $0 \leq h \leq 2r$.

Probe: $h = r$ liefert korrektes Halbkugelvolumen.

Probe: $h = 0$ liefert Volumen 0.

Probe: $h = 2r$ liefert korrektes (Voll-)Kugelvolumen.

Fläche Kugelkappe = Kugelhaube = Kugelkalotte:

Wie beim Übergang vom Kugelvolumen zur Kugeloberfläche müssen wir das Volumen des Kugelsektors durch $\frac{1}{3}r$ teilen, um die Fläche zu erhalten (zerlege den Kugelsektor in Tortenstücke). Es gilt also

$$\begin{aligned}
O_{\text{Kugelkappe}} &= \frac{V_{\text{Kugelsektor}}}{\frac{1}{3}r} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}r} \\
&= 2\pi r h
\end{aligned}$$

□

B Python-Programm zur Approximation von π nach Archimedes

```
# Wer erklärt mir, warum ab der 26. Iteration
# die untere Abschätzung plötzlich alle verfügbaren Nachkommastellen korrekt hat,
# die obere sich aber nicht mehr verbessert?

import math
import numpy

iterationen =30
nachkommastellen = 48

n = 6

# Seitenlänge einbeschriebenes n-Eck
s = numpy.double(1.0)            # mit Auslöschung
t = numpy.double(1.0)            # ohne Auslöschung
```

```
# Seitenlänge umbeschriebenes n-Eck
S = numpy.double(2/3**0.5)

print()
pi_python_string = f'{math.pi:.{nachkommastellen}f}'
print(f'pi laut python math library: {pi_python_string}')

# Von Wikipedia:pi kopiert
print(f"pi von Wikipedia:            3.14159265358979323846264338327950288419716939937510")
print()

# https://stackoverflow.com/questions/287871/how-do-i-print-colored-text-to-the-terminal
class bcolors:
    OKCYAN = '\033[96m'
    ENDC = '\033[0m'

def fehlerposition_pi(kandidat):
    kandidat_string = f'{kandidat:.{nachkommastellen}f}'
    i = 0
    while i < len(kandidat_string):
        if kandidat_string[i] != pi_python_string[i]:
            break
        i += 1
    return i, kandidat_string

def ausgabe(seite, n):
    umfang_n_eck = n * seite
    pi_kandidat = umfang_n_eck / 2
    fp, s = fehlerposition_pi(pi_kandidat)
    ausgabe_string = bcolors.OKCYAN + s[:fp]  + bcolors.ENDC + s[fp:]
    return ausgabe_string

print(f'                                       untere Schranke (schlechte Iterationsformel)         untere Schranke
    ↪ (gute Formel)                             obere Schranke')

for i in range(iterationen):
    print(f'{f'Iteration {i + 1:2}: {n:11}-Eck':30} ' + ausgabe(s, n) + "    " + ausgabe(t, n) + "    " +
        ↪ ausgabe(S, n))

    # mit Subtraktionskatastrophe/Auslöschung
    s = math.sqrt(2 - math.sqrt(4-s**2))

    # ohne Subtraktionskatastrophe/Auslöschun
    t = t/math.sqrt(2 + math.sqrt(4-t**2))

    S = 2*S/(2+(4+S**2)**0.5)
    n = 2*n
```

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

B.1 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you'll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-kollinear-einfach

(a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix}-1400\\2100\end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear — [ ] wahr [X] falsch
- $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear — [X] wahr [ ] falsch
- $\vec{a}$ und $\vec{d}$ sind kollinear — [X] wahr [ ] falsch
- $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear — [ ] wahr [X] falsch
- $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind kollinear — [X] wahr [ ] falsch
- $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind kollinear — [X] wahr [ ] falsch

(b) Für welches d sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}-7\\d\end{pmatrix}$ kollinear?

$d = \frac{-7}{3} \cdot 5$

(c) Unter welcher Bedingung an die Komponenten sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ kollinear?

- Wir nehmen zunächst an, dass $a \neq 0$ gilt: Dann sind die beiden Vektoren genau dann kollinear, wenn $d = \frac{c}{a} \cdot b$ gilt, d.h. wenn $da = cb$ bzw. gleichbedeutend $ad - bc = 0$.
- Fall $b \neq 0$: Dann sind die beiden Vektoren genau dann kollinear, wenn $c = \frac{d}{b} \cdot a$ gilt, d.h. wenn $cb = da$ bzw. gleichbedeutend $ad - bc = 0$.
- Fall $c \neq 0$: Dann sind die beiden Vektoren genau dann kollinear, wenn $b = \frac{a}{c} \cdot d$ gilt, d.h. wenn $bc = ad$ bzw. gleichbedeutend $ad - bc = 0$.
- Fall $d \neq 0$: Führt ähnlich zur Bedingung $ad - bc = 0$.

In allen Fällen, in denen mindestens eine der Variablen a, b, c, d von Null verschieden ist, sind die beiden Vektoren also genau dann kollinear, wenn $ad - bc = 0$ gilt.
Im Fall, dass $a = b = c = d = 0$ gilt sind die beiden Vektoren kollinear und es gilt $ad - bc = 0$.
Folglich gilt allgemein: Die beiden Vektoren sind genau dann kollinear, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

(d) Richtig oder falsch: Wenn sowohl $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als auch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, dann sind auch $\vec{u}$ und $\vec{w}$ kollinear. — [ ] wahr [X] falsch

Gegenbeispiel: $\vec{u}$ und $\vec{w}$ nicht kollinear und $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. stimmt.

Verbesserung: Unter der Zusatzbedingung $\vec{v} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gilt die Folgerung.

Lösung zu A2 ex-dreiecksflaeche-von-hand

Mehrere Lösungen:

(a) Zeichne das kleinste Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen, das das Dreieck enthält. Dann ist die Dreiecksfläche die Rechtecksfläche minus die Flächen einiger rechtwinkliger Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Sowohl die Rechtecksfläche als auch die Flächen dieser rechtwinkligen Dreiecke sind leicht zu berechnen.

(b) Zeichne
- Parallele zur x-Achse durch A
- Parallele zur y-Achse durch B
- Parallele zur y-Achse durch C
- Parallele zur y-Achse durch B

Nun geeingete rechtwinklige Dreiecke verwenden, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen sind, denn die Flächen solcher Dreiecke sind einfach zu berechnen.
Fläche = rechtwinkliges Dreieck + rechtwinkliges Dreieck + Rechteck - rechtwinkliges Dreieck

(c) Gerade durch A und B in Koordinatenform $-2x + 5y = 1$
Abstand von C zu dieser Geraden
Dann Fläche $= \frac{1}{2}ch_c$

(d) Heron-Formel: Gute Übung, das selbst auszumultiplizieren! (Dritte binomische Formel)
Sonst: Python-Programm, siehe spätere Aufgabe.

(e) Mit dem Wissen über die Determinante, nächster Satz im Skript.

(f) Mit dem Satz von Pick, auch im Skript.

Lösung zu A3 ex-dreiecksflaeche-mit-determinante

Die Dreiecksfläche ist die Hälfte der Fläche des Parallelogramms, das von zwei beliebigene, verschiedenen «Seitenvektoren» aufgespannt wird, die beim selben Punkt starten. Die letzte Bedingung ist nicht einmal nötig, aber wohl anschaulich besser.

Wir wählen zum Beispiel $\vec{v} = \overrightarrow{CA} = \binom{2}{1} - \binom{3}{6} = \binom{-1}{-5}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{CB} = \binom{2}{1} - \binom{7}{3} = \binom{-5}{-2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot \text{Parallelogrammfläche} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(-1) \cdot (-2) - (-5) \cdot (-5)| = |-23| = \frac{23}{2} = 11.5\end{aligned}$$

Lösung zu A4 ex-determinante-als-flaeche-selbst-beweisen

Siehe Lehrerversion.

Lösung zu A5 ex-dreiecksflaeche-python

```
# Koordinaten der Punkte A, B, C
Ax = 2
Ay = 1

Bx = 7
By = 3

Cx = 3
Cy = 6

# Längen der Dreiecksseiten:
a = ((Bx-Cx)**2 + (By-Cy)**2)**0.5
b = ((Ax-Cx)**2 + (Ay-Cy)**2)**0.5
c = ((Ax-Bx)**2 + (Ay-By)**2)**0.5

# halber Umfang des Dreiecks
s = (a+b+c)/2

# Dreiecksfläche nach der Heronschen Formel
flaeche_heron = (s*(s-a)*(s-b)*(s-c))**0.5

print("Dreiecksfläche nach Heron: ", flaeche_heron)

# Komponenten des Verbindungsvektors v=AB
vx = Bx - Ax
vy = By - Ay

# Einträge des Verbindungsvektors w=AC
wx = Cx - Ax
wy = Cy - Ay

# Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms (Satz "Determinante als Fläche")
F = abs(vx * wy - wx * vy)
```

```
# Dreiecksfläche aus Parallelogrammfläche
flaeche_per_determinante = F / 2

print("Dreiecksfläche per halber Determinante = ", flaeche_per_determinante)
```

Lösung zu A6 ex-dreiecksflaeche-per-hoehe

(a) (i) Aus $\overrightarrow{AB} = \binom{7}{3} - \binom{2}{1} = \binom{5}{2}$ erhalten wir

$$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

(ii) Die Gerade $g = (AB)$ steht senkrecht auf dem um 90° gedrehten Vektor $\overrightarrow{A}$, also senkrecht auf $\binom{-2}{5}$, hat also die Koordinatenform

$$g\colon\ -2x + 5y = c$$

für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.
Da A auf g liegen soll, muss $-2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = c$ gelten, also $c = 1$ und

$$g\colon\ -2x + 5y = 1$$

Probe: Auch B liegt auf g.

(iii) Es gilt

$$h_c = \text{Abstand}(C, g) = \frac{|-2x_C + 5y_C - 1|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-6+30-1|}{\sqrt{29}} = \frac{23}{\sqrt{29}}$$

(iv) Die Fläche unseres Dreiecks ist also

$$\frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2}\sqrt{29} \cdot \frac{23}{\sqrt{29}} = \frac{23}{2} = 11.5$$

(b) Dem Leser überlassen.

Lösung zu A7 ex-pick-selbst-entdecken
(Anzahl innerer Punkte bzw. Randpunkte noch zu ergänzen)

Die Flächeninhalte sind:

- A 32
- B 6
- C 9
- D 10.5
- E 9
- F 0.5
- G 1
- H 15
- I 7.5
- J 9

Lösung zu A8 ex-dreiecksflaeche-mit-pick

(a)
(b)

(c)
- Linkes Polygon: Fläche: zwei offensichtliche Dreiecke mit horizontaler Grundseite minus zweimal die Fläche des doppelt gezählten Dreiecks.

$$\begin{aligned}\text{Fläche} &= \frac{1}{2}(5\cdot 3+5\cdot 2)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(1+\frac{2}{3})\\ &= \frac{25}{2}-\frac{25}{3}\\ &= \frac{75}{6}-\frac{50}{6}\\ &= \frac{25}{6}=4.1\overline{6}\end{aligned}$$

  Picks Formel liefert aber $2+3.5-1=4.5$.
- Mittleres Polygon: Fläche ist offensichtlich 2, Picks Formel liefert aber $0+3.5-1=2.5$ oder $0+4-1=3$ (wenn man den Schnittpunkt $B=E$ doppelt zählt).
- Rechtes Polygon: Fläche ist 4, Picks Formel liefert $0+5.5-1=4.5$ oder $0+6-1=5$ (wenn man den Punkt W doppelt zählt).

Lösung zu A9 ex-seitenlaenge-umbeschriebenes-sechseck

Das umbeschriebene Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken der Höhe r mit zu bestimmender Seitenlänge a. In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe das $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache der Seitenlänge (nach Pythagoras), es gilt also

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{bzw. nach } a \text{ aufgelöst} \quad a=\frac{2}{\sqrt{3}}r=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot r=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot r$$

Lösung zu A10 ex-kreisbogen-und-kreissektor

Der Bogen ist ein $\frac{\alpha}{360°}$-stel des Kreisumfangs (wer will, kann das per Dreisatz überlegen)

Der Sektor isr ein $\frac{\alpha}{360°}$-stel der Kreisfläche.

So kommt man auf die Formeln im Merke 16.2.18.

Lösung zu A11 ex-gleichdick

Der Umfang ist die Summe dreier Kreisbögen zu Innenwinkeln 60° mit Radius a, also so lang wie ein Halbkreis mit Radius a, d. h. $U=\pi a$.

Die Fläche eines Kreissektors mit Radius a und Innenwinkel 60° ist $\frac{1}{6}$-tel der Kreisfläche, also $S=\frac{\pi a^2}{6}$.

Das gleichseitige Dreieck hat die Fläche $A=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Jedes der drei Kreissegmente (die drei kleinen Flächen über den Dreiecksseiten) hat die Fläche $S-A$.

Damit hat unsere Figur die Fläche

$$A+3\cdot(S-A)=3S-2A=3\cdot\frac{\pi a^2}{6}-2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})a^2$$

Bemerkung: Der Satz von Barbier sagt allgemein, dass der Umfang U jedes Gleichdicks das Produkt der Kreiszahl π mit der Breite des Gleichdicks ist.

In unserem Fall hat das Gleichdick die Breite a, der Umfang ist nach Barbier πa. Das haben wir oben auch herausbekommen.

Lösung zu A12 ex-rundpilz

Seien

- V die Fläche des Viertelkreises mit Radius a;
- H die Fläche des Halbkreises mit Radius $\frac{a}{2}$;
- L der linke Teil der grauen Fläche.

Dann ist die gesuchte Fläche

$$F = V - 2H + 2L$$

Offensichtlich gelten $V = \frac{1}{4}\pi a^2$ und $H = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = \frac{1}{8}\pi a^2$.

Die graue Fläche kann man wie folgt berechnen: Betrachte das Quadrat mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$ in der linken unteren Ecke des grossen Quadrats. Der Rand der grauen Fläche besteht aus zwei Bögen von Viertelkreisen. Addiert man die Fläche der beiden Viertelkreise, so erhält man die Summe der Quadratfläche und der grauen Fläche, denn der graue Teil wurde doppelt gezählt. Das ergibt die Gleichung

$$2 \cdot \frac{1}{2}H = \frac{a^2}{4} + L$$

und nach L aufgelöst

$$L = 2 \cdot \frac{1}{2}H - \frac{a^2}{4} = H - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{a^2}{4}$$

Nun können wir die gesuchte Fläche berechnen:

$$\begin{aligned} F &= V - 2H + 2L \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\pi a^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{a^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{4}a^2(\pi - 2) \end{aligned}$$

Lösung zu A13 ex-moendchen-des-hippokrates-nochmal

$$\begin{aligned} \text{gelbe Fläche} &= \text{blaues Dreieck} + \text{Halbkreise über den Katheten} - \text{Halbkreis über der Hypotenuse} \\ &= \frac{1}{2}ab + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}ab + \pi\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \\ &= \frac{1}{2}ab \end{aligned}$$

Also haben die beiden gelben Möndchen dieselbe Fläche wie das blaue Dreieck.

Lösung zu A14 ex-gerader-kreiskegel-mantelflaeche

Die aufgefaltete Mantelfläche ist ein Kreissektor mit Radius m und Bogenlänge $2\pi r$.

Sei α der Innenwinkel der aufgefalteten Mantelfläche und sei M die Mantelfläche. Dann gelten

$$\begin{aligned} 2\pi r &= \frac{\alpha}{360°}2\pi m \\ M &= \frac{\alpha}{360°}\pi m^2 \end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach α liefert

$$\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360°$$

und Einsetzen dieses Ausdrucks für α in die zweite Gleichung liefert

$$M = \frac{\alpha}{360°}\pi m^2 = \frac{\frac{r}{m} \cdot 360°}{360°}\pi m^2 = \frac{r}{m}\pi m^2 = \pi rm$$

Lösung zu A15 ex-zylinder

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ M &= 2\pi r h \\ O &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Lösung zu A16 ex-gerade-quadratische-pyramide-und-stumpf

(a)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} s^2 h \\ m &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \\ M &= 4 \cdot \frac{1}{2} s m = 2s\sqrt{h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = s\sqrt{4h^2+s^2} \\ O &= M + s^2 = s\sqrt{4h^2+s^2} + s^2 \end{aligned}$$

(b) Nach dem Strahlensatz gilt

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{t} &= \frac{\ell + h}{s} \\ \ell s &= \ell t + t h \\ \ell(s-t) &= th \\ \ell &= \frac{t}{s-t} h \end{aligned}$$

Volumen Pyramidenstumpf (erster Lösungsweg, Ursprungspyramide minus abgeschnittene Pyramide, wobei die abgeschnittene Pyramide per zentrischer Streckung berechnet wird, Streckfaktor $\frac{t}{s}$)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} s^2 (h+\ell) - \frac{1}{3} s^2 (h+\ell) \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^3 \\ &= \frac{1}{3} s^2 \left(h + \frac{t}{s-t} h\right) \cdot \left(1 - \frac{t^3}{s^3}\right) \\ &= \frac{1}{3} s^2 h \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) \cdot \frac{s^3 - t^3}{s^3} \\ &= \frac{1}{3} s^2 h \frac{s-t+t}{s-t} \cdot \frac{s^3-t^3}{s^3} \\ &= \frac{1}{3} s^2 h \frac{s}{s-t} \cdot \frac{s^3-t^3}{s^3} \\ &= \frac{1}{3} h \frac{1}{s-t} \cdot (s^3 - t^3) \\ &= \frac{1}{3} h (s^2 + st + t^2) \end{aligned}$$

Volumen Pyramidenstumpf (zweiter Lösungsweg, Ursprungspyramide minus abgeschnittene Pyramide)

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}s^2(h+\ell) - \frac{1}{3}t^2\ell \\
&= \frac{1}{3}\left(s^2h + s^2\ell - t^2\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(s^2h + (s^2-t^2)\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(s^2h + (s^2-t^2)\cdot\frac{t}{s-t}h\right) \\
&= \frac{1}{3}h(s^2+(s+t)t) \\
&= \frac{1}{3}h(s^2+st+t^2)
\end{aligned}$$

Mantelfläche (erster Lösungsweg, viermal die Fläche der Trapeze auf den Seiten; jedes dieser Trapeze hat die Höhe $\sqrt{h^2+\left(\frac{s-t}{2}\right)^2}$ nach Pythagoras)

$$\begin{aligned}
M &= 4\cdot\text{Trapezfläche} \\
&= 4\cdot\frac{s+t}{2}\cdot\sqrt{h^2+\left(\frac{s-t}{2}\right)^2} \\
&= 2(s+t)\cdot\sqrt{h^2+\left(\frac{s-t}{2}\right)^2} \\
&= (s+t)\cdot\sqrt{4h^2+(s-t)^2}
\end{aligned}$$

Mantelfläche (zweiter Lösungsweg, Mantelfläche der Ursprungspyramide minus Mantelfläche der abgeschnittenen Pyramide, wobei die Mantelfläche der abgeschnittenen Pyramide per zentrischer Streckung berechnet wird, Streckfaktor $\frac{t}{s}$)

$$\begin{aligned}
M &= s\sqrt{4(h+\ell)^2+s^2} - s\sqrt{4(h+\ell)^2+s^2}\cdot\left(\frac{t}{s}\right)^2 \\
&= s\sqrt{4\left(h+\frac{t}{s-t}h\right)^2+s^2}\cdot\left(1-\left(\frac{t}{s}\right)^2\right) \\
&= s\sqrt{4h^2\left(1+\frac{t}{s-t}\right)^2+s^2}\cdot\left(1-\frac{t^2}{s^2}\right) \\
&= s\sqrt{4h^2\left(\frac{s}{s-t}\right)^2+s^2}\cdot\frac{s^2-t^2}{s^2} \\
&= s\sqrt{4h^2\frac{s^2}{(s-t)^2}+s^2}\cdot\frac{s^2-t^2}{s^2} \\
&= s^2\sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1}\cdot\frac{s^2-t^2}{s^2} \\
&= \sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1}\cdot(s^2-t^2) \\
&= (s+t)(s-t)\cdot\sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1} \\
&= (s+t)\cdot\sqrt{4h^2+(s-t)^2}
\end{aligned}$$

Mantelfläche (dritter Lösungsweg, Mantelfläche der Ursprungspyramide minus Mantelfläche der abgeschnittenen Pyramide)

$$\begin{aligned}
M &= s\sqrt{4(h+\ell)^2+s^2} - t\sqrt{4\ell^2+t^2} \\
&= s\sqrt{4\left(h+\frac{t}{s-t}h\right)^2+s^2} - t\sqrt{4\left(\frac{t}{s-t}h\right)^2+t^2} \\
&= s\sqrt{4h^2\left(1+\frac{t}{s-t}\right)^2+s^2} - t\sqrt{4h^2\left(\frac{t}{s-t}\right)^2+t^2} \\
&= s\sqrt{4h^2\left(\frac{s}{s-t}\right)^2+s^2} - t\sqrt{4h^2\left(\frac{t}{s-t}\right)^2+t^2} \\
&= s^2\sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1} - t^2\sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1} \\
&= (s^2-t^2)\sqrt{4h^2\frac{1}{(s-t)^2}+1} \\
&= (s^2-t^2)\sqrt{\frac{4h^2+(s-t)^2}{(s-t)^2}} \\
&= \frac{s^2-t^2}{s-t}\sqrt{4h^2+(s-t)^2} \\
&= (s+t)\sqrt{4h^2+(s-t)^2}
\end{aligned}$$

Oberfläche

$$O = s^2+t^2+M = s^2+t^2+(s+t)\sqrt{4h^2+(s-t)^2}$$

Lösung zu A17 ex-gerader-kreiskegelstumpf

Sei ℓ die Höhe des abgeschnittenen Kegels. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\ell}{s} &= \frac{\ell+h}{r} \\
\ell r &= \ell s + sh \\
\ell(r-s) &= sh \\
\ell &= \frac{s}{r-s}h
\end{aligned}$$

Volumen Kegelstumpf (erster Lösungsweg, Ursprungskegel minus abgeschnittener Kegel, wobei der abgeschnittene Kegel per zentrischer Streckung berechnet wird, Streckfaktor $\frac{s}{r}$)

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2(h+\ell) - \frac{1}{3}\pi r^2(h+\ell)\cdot\left(\frac{s}{r}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2(h+\ell)\cdot\left(1-\frac{s^3}{r^3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2\left(h+\frac{s}{r-s}h\right)\cdot\frac{r^3-s^3}{r^3} \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 h\left(1+\frac{s}{r-s}\right)\cdot\frac{r^3-s^3}{r^3} \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 h\frac{r}{r-s}\cdot\frac{r^3-s^3}{r^3} \\
&= \frac{1}{3}\pi h\frac{1}{r-s}\cdot(r^3-s^3) \\
&= \frac{1}{3}\pi h(r^2+rs+s^2)
\end{aligned}$$

Volumen Kegelstumpf (zweiter Lösungsweg, Ursprungskegel minus abgeschnittene Kegel)

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2(h+\ell) - \frac{1}{3}\pi s^2 \ell \\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r^2(h+\ell) - s^2\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r^2 h + (r^2 - s^2)\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r^2 h + (r^2 - s^2)\frac{s}{r-s}h\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + (r+s)s\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rs + s^2)
\end{aligned}$$

Für die Mantelfläche verwenden wir Aufgabe A14: $M = \pi r m = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

Mantelfläche (erster Lösungsweg, Mantelfläche des Ursprungskegel minus Mantelfläche des abgeschnittenen Kegels, wobei der abgeschnittene Kegel per zentrischer Streckung berechnet wird, Streckfaktor $\frac{s}{r}$)

$$\begin{aligned}
M &= \pi r\sqrt{r^2+(h+\ell)^2} - \pi r\sqrt{r^2+(h+\ell)^2}\cdot\left(\frac{s}{r}\right)^2 \\
&= \pi r\sqrt{r^2+\left(h+\frac{s}{r-s}h\right)^2}\cdot\left(1-\frac{s^2}{r^2}\right) \\
&= \pi r\sqrt{r^2+h^2\left(1+\frac{s}{r-s}\right)^2}\cdot\frac{r^2-s^2}{r^2} \\
&= \pi\frac{r^2-s^2}{r}\sqrt{r^2+h^2\left(\frac{r}{r-s}\right)^2} \\
&= \pi(r+s)\frac{r-s}{r}\sqrt{r^2+h^2\frac{r^2}{(r-s)^2}} \\
&= \pi(r+s)\sqrt{\frac{(r-s)^2}{r^2}\left(r^2+h^2\frac{r^2}{(r-s)^2}\right)} \\
&= \pi(r+s)\underbrace{\sqrt{(r-s)^2+h^2}}_{\text{Länge einer jeden Mantellinie}}
\end{aligned}$$

Mantelfläche (zweiter Lösungsweg, Mantelfläche des Ursprungskegel minus Mantelfläche des abgeschnittenen

Kegels)

$$\begin{aligned}
M &= \pi r\sqrt{r^2+(h+\ell)^2} - \pi s\sqrt{s^2+\ell^2} \\
&= \pi r\sqrt{r^2+\left(h+\frac{s}{r-s}h\right)^2} - \pi s\sqrt{s^2+\left(\frac{s}{r-s}h\right)^2} \\
&= \pi r\sqrt{r^2+h^2\left(1+\frac{s}{r-s}\right)^2} - \pi s\sqrt{s^2+h^2\left(\frac{s}{r-s}\right)^2} \\
&= \pi r\sqrt{r^2+h^2\left(\frac{r}{r-s}\right)^2} - \pi s\sqrt{s^2+h^2\left(\frac{s}{r-s}\right)^2} \\
&= \pi r\sqrt{r^2+r^2h^2\frac{1}{(r-s)^2}} - \pi s\sqrt{s^2+s^2h^2\frac{1}{(r-s)^2}} \\
&= \pi r^2\sqrt{1+h^2\frac{1}{(r-s)^2}} - \pi s^2\sqrt{1+h^2\frac{1}{(r-s)^2}} \\
&= \pi(r^2-s^2)\sqrt{1+h^2\frac{1}{(r-s)^2}} \\
&= \pi(r+s)(r-s)\sqrt{1+h^2\frac{1}{(r-s)^2}} \\
&= \pi(r+s)\sqrt{(r-s)^2+h^2}
\end{aligned}$$

Oberfläche

$$O = \pi r^2 + \pi s^2 + \pi(r+s)\sqrt{(r-s)^2+h^2}$$

Zusatzbemerkung: Man betrachte einen Kegelstumpf mit Grundfläche A_1 und Deckfläche A_2 der Höhe h.

Dann entsteht A_2 aus A_1 durch eine zentrische Streckung mit Zentrum in der (abgeschnittenen) Kegelspitze. Der Streckfaktor dieser Streckung sei λ.

Weil bei Streckungen Flächen mit dem Streckfaktor λ^2 multipliziert werden, gilt $A_2 = \lambda^2 A_1$ bzw.

$$\lambda = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$$

Sei ℓ die Höhe des abgeschnittenen Kegels. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(h+\ell) &= \ell \\
\lambda h + \lambda\ell &= \ell \\
\lambda h &= \ell - \lambda\ell \\
\lambda h &= \ell(1-\lambda) \\
\frac{\lambda}{1-\lambda}h &= \ell
\end{aligned}$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Nun berechnen wir das Volumen des Kegelstumpfs (erste Weg (zweiter Weg wohl besser)):

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}A_1(h+\ell) - \frac{1}{3}A_2\ell \\
&= \frac{1}{3}\left(A_1 h + A_1\ell - A_2\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(A_1 h + (A_1 - A_2)\ell\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(A_1 h + (A_1 - A_2)\frac{\lambda}{1-\lambda}h\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + (A_1 - A_2)\frac{\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + (A_1 - A_2)\frac{\lambda+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + (A_1 - A_2)\frac{\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \frac{A_2}{A_1}}{1-\frac{A_2}{A_1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + (A_1 - A_2)\frac{\left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \frac{A_2}{A_1}\right)\cdot A_1}{\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)\cdot A_1}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + (A_1 - A_2)\frac{\sqrt{A_1A_2} + A_2}{A_1 - A_2}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2\right)
\end{aligned}$$

Zweiter Weg:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}A_1(h+\ell) - \frac{1}{3}A_1(h+\ell)\cdot\lambda^3 \\
&= \frac{1}{3}A_1(h+\ell)(1-\lambda^3) \\
&= \frac{1}{3}A_1\left(h + \frac{\lambda}{1-\lambda}h\right)(1-\lambda^3) \\
&= \frac{1}{3}A_1 h\left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)(1-\lambda^3) \\
&= \frac{1}{3}A_1 h\frac{1}{1-\lambda}(1-\lambda^3) \\
&= \frac{1}{3}A_1 h(1+\lambda+\lambda^2) \\
&= \frac{1}{3}A_1 h\left(1 + \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \frac{A_2}{A_1}\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + \sqrt{A_1^2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + A_2\right) \\
&= \frac{1}{3}h\left(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2\right)
\end{aligned}$$

Lösung zu A18 ex-tetraeder

Nach Aufgabe **??** im Pythagoras-Skript ist die Höhe m jeder Seite $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und die Höhe h des Körpers ist $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Jede Seite hat also die Fläche

$$A = \frac{1}{2}am = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Damit lassen sich Oberfläche und Volumen berechnen:

$$O = 4A = \sqrt{3}a^2$$
$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{18}}{36}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Bonus: Gegeben $A = (0, 0, 0)$ und $B = (1, 0, 0)$.

Wenn wir für $a = 1$ die beiden Höhen m und h wie oben berechnen, erhalten wir

$$C = (\tfrac{1}{2}, m) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$
$$D = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{m}{3}, h) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3})$$

Lösung zu A19 ex-kugel-vs-wuerfel

(a) Den Würfel zerlegt man in offensichtlicher Weise in 8 Teilwürfel der Seitenlänge r. In jedem Teilwürfel liegt eine «Achtelkugel». Anschaulich ist klar, dass jede Achtelkugel etwa halb so gross wie der Teilwürfel ist. (Wenn man den Teilwürfel senkrecht zu einer Raumdiagonalen in der Mittte durchschneidet (Schnittfläche ist ein regelmässiges Sechseck), ist jeder der beiden Teile etwa so gross wie die Achtelkugel.)

(b)

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Würfel}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 = 52.36\%$$
$$\frac{O_{\text{Kugel}}}{O_{\text{Würfel}}} = \frac{4\pi r^2}{6 \cdot (2r)^2} = \frac{4\pi r^2}{24r^2} = \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 = 52.36\%$$

(c) Die beiden Verhältnisse sind gleich.
Das liegt daran, dass sowohl beim Würfel wie bei der Kugel das Volumen das $\frac{1}{3}r$-fache der Oberfläche ist.
Das ist klar nach den expliziten Formeln.
Man kann übrigens beim Würfel alternativ auch das Argument verwenden, mit dem wir die Kugeloberfläche aus dem Kugelvolumen berechnet haben (Zerlegung in kegelförmige Kuchenstücke).
Man kann jede Seitenfläche des Würfels in viele kleine Dreieck (oder Vielecke) zerlegen und dann jedes dieser Dreiecke (oder Vielecke) mit dem Mittelpunkt zu einer Pyramide verbinden (einem Tortenstück). (Es genügt übrigens bereits, jede Seite des Würfels mit dem Mittelpunkt als Spitze zu einer Pyramide zu machen.)
Wichtige Beobachtung: Alle Tortenstücke haben **dieselbe Höhe** r.
Deshalb gilt (in der vorletzten Gleichung wird die Höhe r nach vorne gezogen; dies funktioniert nur, da alle Höhen gleich sind)

$$\begin{aligned} V_{\text{Würfel}} &= \text{Summe der Volumina aller Tortenstücke} \\ &= \text{Summe}_{\text{ über alle Tortenstücke }} \frac{1}{3} \cdot (\text{Grundfläche des Tortenstücks}) \cdot r \\ &= \frac{1}{3} \cdot r \cdot \Big(\text{Summe}_{\text{ über alle Tortenstücke }} (\text{Grundfläche des Tortenstücks})\Big) \\ &= \frac{1}{3} \cdot r \cdot O_{\text{Würfel}} \end{aligned}$$

Also ist das Würfelvolumen das $\frac{1}{3}r$-fache der Würfeloberfläche.

Lösung zu A20 ex-vergleich-kugel-zylinder

(a) Anschaulich ist klar, dass beide Verhältnisse kleiner als 1 sind. (Für das Volumen ist dies klar, für die Oberfläche mag man sich etwa einen Papierzylinder vorstellen, den man «auf die Kugel» faltet.)

(b)

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Zylinder}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 \cdot 2r} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{O_{\text{Kugel}}}{O_{\text{Zylinder}}} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Lösung zu A21 ex-erde

(a) Erdradius:

$$r_{\text{Erde}} = \frac{U}{2\pi} = \frac{40\,000\,\text{km}}{2\pi} \approx 6336\,\text{km}$$

(b)

$$\text{Distanz(St. Gallen, Nordpol)} = \frac{43}{90} \cdot 10\,000\,\text{km} \approx 4777.8\,\text{km}$$
$$\text{Distanz(St. Gallen, Äquator)} = \frac{47}{90} \cdot 10\,000\,\text{km} \approx 5222.2\,\text{km}$$

(c) Erdoberfläche:

$$O_{\text{Erde}} = 4\pi r_{\text{Erde}}^2 \approx 509\,295\,817.9\,\text{km}^2$$

- Anteil an der Erdoberfläche in Prozent
  - Schweiz:
  $$\frac{O_{\text{Schweiz}}}{O_{\text{Erde}}} = \frac{41\,290\,\text{km}^2}{509\,295\,817.9\,\text{km}^2} \approx 0.000081 = 0.0081\%$$
  - Russland:
  $$\frac{O_{\text{Schweiz}}}{O_{\text{Erde}}} = \frac{41\,290\,\text{km}^2}{509\,295\,817.9\,\text{km}^2} \approx 0.0336 = 3.36\%$$

(d)
- «Äquatorkreisscheibe»
$$A = \pi r_{\text{Erde}}^2 = 127\,323\,954.5\,\text{km}^2$$
- Verhältnis von Erdoberfläche zu Schnittfläche:
$$\frac{O_{\text{Erde}}}{A} = 4$$
- allgemein
$$\frac{O_{\text{Kugel mit Radius } r}}{A_{\text{Kreis mit Radius } r}} = \frac{4\pi r^2}{pr^2} = 4$$

(e) Flächen als Kreis- bzw. Kugelflächen:
- Schweiz als Kreisscheibe, Radius
$$R = \sqrt{\frac{O_{\text{Schweiz}}}{\pi}} \approx 114.6\,\text{km}$$
- «Schweizkugel», Radius
$$r = \sqrt{\frac{O_{\text{Schweiz}}}{4\pi}} \approx 57.3\,\text{km}$$
- $$\frac{R}{r} = 2$$

  Das gilt für jedes Land und jede Fläche: Ist F eine Fläche, so hat der Kreis mit dieser Fläche den Radius $\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, während die Kugel mit dieser Oberfläche den Radius $\sqrt{\frac{F}{4\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi}}$ hat. Das Verhältnis von Kreisradius zu Kugelradius ist also stets $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
  Mit anderen Worten: Ein Kugel hat dieselbe Oberfläche wie ein Kreis des doppelten Radius.

Lösung zu A22 ex-wuerfel-mit-kegeln

- Volumen und Oberfläche des Würfels:

$$V_{\text{Würfel}} = a^3 \qquad\qquad O_{\text{Würfel}} = 6a^2$$

- Nach Aufgabe A14 ist die Mantelfläche M eines geraden Kreiskegels $M = \pi r m$, wenn m die Länge einer Mantellinie ist.
  Mantellinie m des Kegels (Pythagoras):

$$m = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$$

  Volumen und Mantelfläche des Kegels:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{12}\pi a^2 h$$
$$M_{\text{Kegel}} = \pi r m = \pi r \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$$

- Volumen des «zusammengebauten» Körpers:

$$V = V_{\text{Würfel}} + V_{\text{Kegel}} = a^3 + \frac{1}{12}\pi a^2 h$$

- Oberfläche des «zusammengebauten» Körpers (Würfeloberfläche plus Kegelmantelfläche minus «Kreisfläche, wo zusammengeklebt»):

$$\begin{aligned} O &= O_{\text{Würfel}} + M_{\text{Kegel}} - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= 6a^2 + \pi r \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2} - \pi\frac{a^2}{4} \\ &= \left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2 + \pi r \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2} \end{aligned}$$

Lösung zu A23 ex-kreis-vs-gleichseitiges-dreieck

(a) Zum grossen Dreieck D.
Sei h eine Höhe dieses Dreiecks. Da der Mittelpunkt des Kreises auch der Schwerpunkt des Dreiecks ist und h eine Seitenhalbierende ist, teilt der Mittelpunkt die Höhe h im Verhältnis $2:1$. Der kürzere Teil ist r, der längere also $2r$ und somit die gesamte Höhe $h = 3r$.
Sei a die Seitenlänge des grossen Dreiecks D. Dann gilt nach Pythagoras

$$\begin{aligned} & a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \Longrightarrow\quad & a^2 = (3r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{3}{4}a^2 = (3r)^2 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3r \\ \Longrightarrow\quad & a = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}r = 2\sqrt{3}r \end{aligned}$$

Also

$$U_D = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{3}r = 6\sqrt{3}r$$

Zum kleinen Dreieck. Sei b seine Seitenlänge. Das kleine Dreieck d «passt viermal» in das grosse Dreieck D (Streckfaktor $\frac{1}{2}$), hat also die halbe Seitenlänge, d. h. $b = \frac{a}{2} = \sqrt{3}r$. Also

$$U_d = 3b = 3\sqrt{3}r$$

(b) Die offensichtlichen Ungleichungen sind

$$U_d = 3\sqrt{3}r < U_k = 2\pi r < U_D = 6\sqrt{3}r$$

Division durch $2r$ liefert

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} < \pi < 3\sqrt{3}$$

(c) Die Fläche des grossen Dreiecks ist ($\frac{1}{2}$ mal Grundseite mal Höhe)

$$A_D = \frac{1}{2}a \cdot h_D = \frac{1}{2}2\sqrt{3}r \cdot 3r = 3\sqrt{3}r^2$$

Die Fläche des kleinen Dreiecks beträgt $\frac{1}{4}$-tel davon (wegen Streckfaktor $\frac{1}{2}$ ändert sich die Fläche mit Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ bzw. sowohl Grundseite als auch Höhe ändern sich mit Faktor $\frac{1}{2}$)

$$A_d = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$$

(d) Die Ungleichungskette $A_d < A_k < A_D$ wird so zu

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}r^2 < \pi r^2 < 3\sqrt{3}r^2$$

und nach Division durch r^2 zu

$$\frac{3}{4}\sqrt{3} < \pi < 3\sqrt{3}$$

Die Abschätzung nach unten ist schlechter geworden, die nach oben ist gleich geblieben.

Lösung zu A24 ex-pi-archimedes-mit-python

Lösung zu A25 ex-pi-archimedes-seitenlaenge-umbeschriebenes-n-eck-bei-verdopplung

Die Lösung ist

$$S_{2n} = \frac{2rS_n}{2r + \sqrt{4r^2 + S_n^2}}$$

Zwei Lösungswege (skizziert):

(a) erster Lösungsweg, geometrisch: (eventuell Skizze ergänzen.)
Sei t_n der Abstand vom Kreismittelpunkt zum Eckpunkt des umbeschriebenen n-Ecks. Dann gilt

$$t_n^2 = r^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

Zeichnet man zusätzlich das umbeschriebene $2n$-Eck ein, indem man die Ecken des n-Ecks «abschneidet», so ist die «Hälfte des abgeschnittenen Dreiecks» ein rechtwinkliges Dreieck. Pythagoras liefert

$$(t_n - r)^2 + \left(\frac{S_{2n}}{2}\right)^2 = \left(\frac{S_n}{2} - \frac{S_{2n}}{2}\right)^2$$

Auflösen nach S_{2n} liefert die obige Lösung.

(b) zweiter Lösungsweg, Strahlensatz und Verwenden der Formel $s_{2n} = \ldots$ aus dem Skript:
Der Strahlensatz liefert

$$\frac{S_n}{r} = \frac{s_n}{h_n} = \frac{2s_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

Diese Gleichung kann man sowohl nach S_n als auch nach s_n auflösen.

$$S_n = \frac{2s_n r}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

$$s_n = \frac{2S_n r}{\sqrt{4r^2 + S_n^2}}$$

Die erste Formel liefert

$$S_{2n} = \frac{2s_{2n}r}{\sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}}$$

Ersetze nun $s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$ (was im Skript gezeigt wurde). Dies liefert eine Formel für S_{2n} in Abhängigkeit von s_n. Nun ersetzt man s_n durch die obige Formel $s_n = \frac{2S_n r}{\sqrt{4r^2+S_n^2}}$. Mit etwas Rechenarbeit kommt man auch zu der obigen Lösung.

Lösung zu A26 ex-pi-archimedes-mit-python-besser

Lösung zu A27 ex-pi-probabilistisch-mit-python

```
from random import random

n = 1000        # Anzahl Punkte = Experimente
i = 0           # Laufvariable für Wiederholung
drinnen = 0     # Zählvariable für Anzahl der Punkte im Kreis

while i<n:
    i += 1          # Kurzform für i = i + 1
    x = random()
    y = random()
    # Pythagoras lässt grüssen
    r = (x*x+y*y)**0.5
    if (r<1):
        drinnen +=1  # Kurzform für drinnen = drinnen + 1

print("Drinnen", drinnen, "von", n)
anteil = drinnen/n;
print("Anteil", anteil)
# Viertelkreisfläche ist pi/4, Quadratfläche ist 1
print("Pi ist ungefähr", anteil*4)
```

Lösung zu A28 ex-pi-gitter-mit-python

```
from math import pi

n = 100
schrittweite = 1/n

im_kreis = 0

x = schrittweite/2
while x <= 1:
    y = schrittweite/2
    while y <= 1:
        if x**2+y**2 <= 1:
            im_kreis = im_kreis + 1
        y = y+schrittweite
    x = x+schrittweite
pi_kandidat = 4*im_kreis/n**2
print(pi_kandidat)
print(pi)
```