Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

20 Exponentialfunktionen und Logarithmen

20.1 Exponentialfunktionen

20.1.1. In Natur, Umwelt und Wirtschaft treten oft Wachstums- oder Abnahme-/Zerfallsprozesse auf, die die folgende grundlegende Eigenschaft haben: ✎

Beispiele sind die Ausbreitung von Epidemien (zumindest kurzfristig) oder der radioaktive Zerfall, aber auch die (kontinuierliche) Verzinsung eines Guthabens.

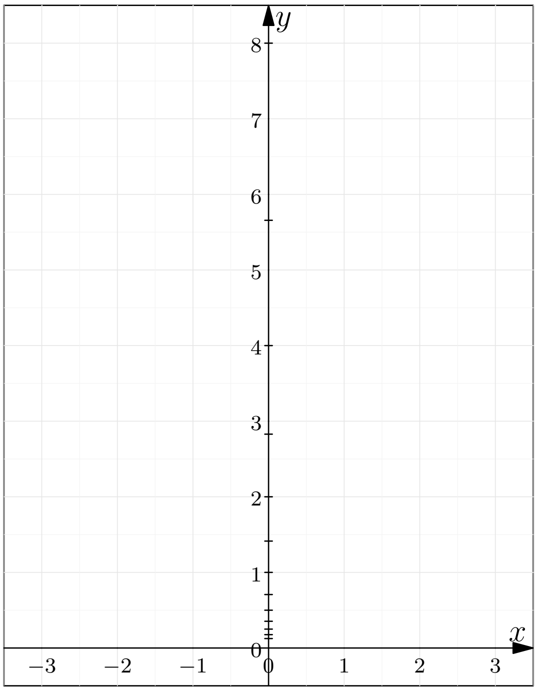
Man spricht dann von **exponentiellem Wachstum**. Schrumpft die betrachtete Grösse, so spricht man auch von **exponentieller Abnahme** oder **exponentiellem Zerfall**.

Solche Prozesse werden mathematisch durch Exponentialfunktionen beschrieben.

Beispiel 20.1.2 (Exponentielles Wachstum)**.**

Ein Forscher beobachtet das Wachstum von Bakterien. Ausgehend vom Grundbestand 1 verdoppelt sich jede Stunde der jeweilige Bestand. Wie lautet die Gleichung der Funktion, die die Bakterienmenge y [Grundbestand] in Abhängigkeit von der Zeit x [Stunden] beschreibt?

✎

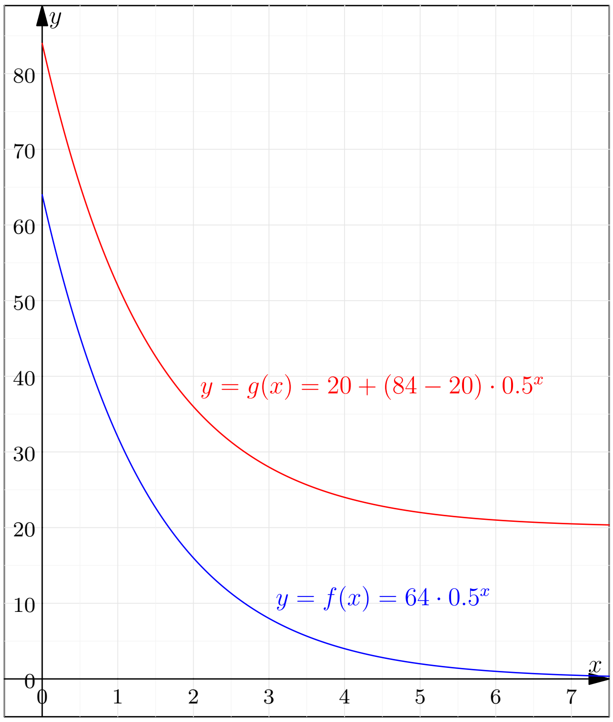


Beispiel 20.1.3 (Exponentieller Zerfall (= exponentielle Abnahme = exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor < 1)). Newtonsches Abkühlungsgesetz

Mit Hilfe einer Temperatursonde wird der Temperaturverlauf eines heissen Getränks beim Abkühlen aufgezeichnet. Fixiert man eine beliebige Zeitspanne (etwa 1 Minute oder 5 Minuten), so beobachtet man, dass die Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur in jeder solchen Zeitspanne um denselben Faktor kleiner wird.

Die Funktion, die die Temperatur des Getränks in Abhängigkeit von der Abkühlzeit beschreibt, ist in sehr guter Näherung eine Exponentialfunktion.

Wenn man etwa ein 64 °C warmes Getränk im Winter ins Freie stellt bei einer Aussentemperatur von 0 °C, so ergibt sich (näherungsweise) die blaue Kurve. Die Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur wird hier pro Zeiteinheit halbiert. Die blaue Kurve ist die Funktion✎



Die Rechnung✎

zeigt, dass die Temperatur (hier dasselbe wie die Temperaturdifferenz zur Aussentemperatur) pro Zeiteinheit mit dem Faktor 0.5 multipliziert wird.

Man kann auch die gesamte Situtation «um 20 °C nach oben verschieben»: Wenn man ein 84 °C warmes Getränk in einem Zimmer der Raumtemperatur 20 °C abkühlen lässt, so ergibt sich in etwa die rote Kurve (eine verschobene Exponentialfunktion). Sie ist der Graph der Funktion

$$g(x) = 20 + 64 \cdot 0.5^x = 20 + (84 - 20) \cdot 0.5^x$$

Definition 20.1.4 Exponentialfunktionen

Die **Exponentialfunktion zur Basis** $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion

$$f(x) = a^x \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

Oft erlaubt man auch einen konstanten Vorfaktor $c \in \mathbb{R}$ und nennt jede Funktion der Form

$$f(x) = c \cdot a^x$$

eine Exponentialfunktion.

20.1.5. Verwechsle nie Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen! ✎

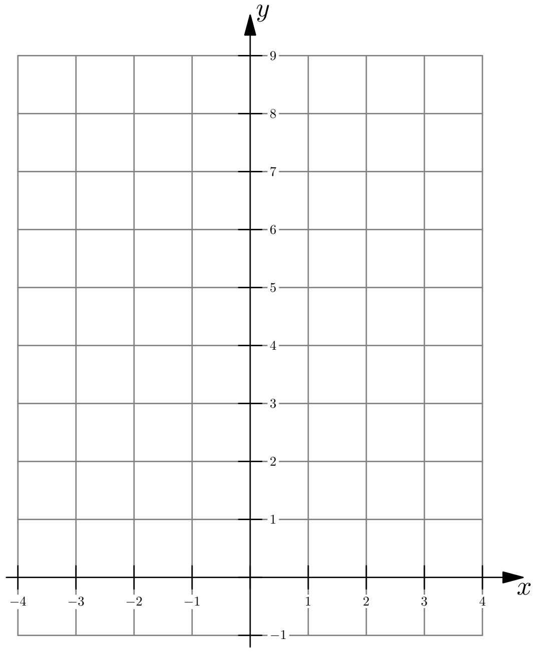
20.1.6. Wenn man sagt, dass eine Grösse y exponentiell von einer Grösse x abhängt (**exponentieller Zusammenhang**), so meint man, dass eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = a^x$ oder $y = f(x) = ca^x$ besteht.

Zum Beispiel hängt im obigen Beispiel 20.1.2 die Bakterienanzahl exponentiell von der Zeit ab.

20.1.7. Jede Funktion der Form $f(x) = ca^x$ beschreibt sogenanntes **exponentielles Wachstum** mit dem **Wachstumsfaktor** a pro (Zeit-)Einheit, denn es gilt

$$f(x+1) = ca^{x+1} = ca^x \cdot a = a \cdot ca^x = a \cdot f(x)$$

Bei exponentiellem Wachstum kann der Wachstumsfaktor a eine beliebige positive reelle Zahl sein.
Wachstum im eigentlichen Wortsinn hat man nur im Fall $a > 1$. Im Fall $0 < a < 1$ schrumpft die betrachtete Grösse und man spricht meist von **exponentieller Abnahme** oder **exponentiellem Zerfall**. Dies werden Sie in Beispielen in der folgenden Aufgabe A1 sehen.



Aufgabe A1

(a) Zeichnen Sie die Graphen der Exponentialfunktionen

$$x \mapsto a^x$$

für alle Basen $a \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ in das nebenstehende Koordinatensystem.

(b) Füllen Sie (mit Bleistift) die Lücken in Merke 20.1.8.

Merke 20.1.8 Eigenschaften der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$

Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Für die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gilt:

(a) Die Definitionsmenge von f ist ✎

(b) Der Graph von f geht durch den Punkt ✎

(c) Es gilt ✎

(d) Wachstumsverhalten:

- Im Fall $a > 1$ ist f ✎
- Im Fall $0 < a < 1$ ist f ✎
- Im Fall $a = 1$ ist f die konstante Funktion mit Wert 1, d. h. $f(x) = 1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(e) «Kurvenverhalten»: Der Graph von f ist ✎

(f) Falls $a \neq 1$, so ist die Bildmenge von f die Menge ✎

(g) Falls $a \neq 1$, so hat der Graph von f (= die Exponentialkurve) die x-Achse als ✎

- Im Fall ✎ kommt sie ihr für $x \to -\infty$ immer näher.
- Im Fall ✎ kommt sie ihr für $x \to +\infty$ immer näher.

(h) Spiegelt man den Graphen von $f(x) = a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen der Exponentialfunktion ✎

Merke 20.1.9 Exponentielles Wachstum

Man sagt, dass eine (meist zeitabhängige) Grösse $B(t)$ **exponentiell wächst**, wenn sie sich durch eine Exponentialfunktion darstellen lässt, wenn also gilt

$$B(t) = c \cdot a^t$$

für geeignete reelle Zahlen $c \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ (= der Wachstumsfaktor pro (Zeit-)Einheit).

Um Missverständnissen vorzubeugen: Der Fall $a < 1$ ist erlaubt:

(exponentielles Wachstum mit einem Wachstumsfaktor < 1) = exponentielle Abnahme = exponentieller Zerfall

20.1.10. Ist $B(t) = c \cdot a^t$ eine exponentiell wachsende Grösse, so gilt ✎

für alle reellen Zahlen/Zeiten t_0 und alle reellen Zahlen/Zeitdauern/Zeitspannen Δt.

In Worten wächst $B(t)$ also zwischen dem Zeitpunkt t_0 und dem Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ um den Faktor $a^{\Delta t}$.

Dieser Wachstumsfaktor $a^{\Delta t}$ hängt $\boxed{\text{nur von der Zeitspanne } \Delta t}$ ab, $\boxed{\text{nicht aber}}$ vom Zeitpunkt t_0. Mit anderen Worten $\boxed{\text{wächst } B(t) \text{ in jeder fixierten Zeitspanne } \Delta t \text{ um denselben Wachstumsfaktor } a^{\Delta t}.}$

Insbesondere wächst $B(t)$ pro Zeiteinheit $\Delta t = 1$ um den Faktor $a^1 = a$.

Satz 20.1.11

Wenn von einer exponentiell wachsenden Grösse $B(t)$ bekannt ist, dass

- sie sich in jedem Zeitintervall der Länge T_b um den Faktor b verändert,
- und wenn ausserdem der Anfangswert $A = B(0)$ zur Zeit $t = 0$ bekannt ist,

so gilt ✎

Beweis. Da $B(t)$ laut Voraussetzung exponentiell wächst, gilt $B(t) = c \cdot a^t$ für geeignete reelle Zahlen c und $a > 0$. Wir erklären nun, wie c und a sich aus A, b und T_b berechnen lassen. ✎

Aufgabe A2 Bei den folgenden Prozessen wächst die naheliegende Grösse exponentiell. Beschreiben Sie diese Grösse durch eine zeitabhängige Funktion und beantworten Sie damit die Fragen.

a) Hochgiftiges Plutonium 239 zerfällt radioaktiv. Während 2410 Jahren (Halbwertszeit) nimmt seine Masse um die Hälfte ab (es entstehen andere Elemente). Wie gross ist der Wachstumsfaktor pro Jahr? Wie gross ist der prozentuale Massenverlust pro Jahr?

b) Die Anzahl der Bakterien in einer Nährlösung verdoppelt sich alle drei Stunden. Zu Beginn befinden sich 10'000 Bakterien in der Nährlösung. Wie viele Bakterien sind nach 1 Stunde bzw. nach 2 Stunden bzw. nach 5 Stunden bzw. nach 24 Stunden in der Nährlösung?

c) Lässt man eine 90° C heisse Tasse Tee bei 0° C Lufttemperatur stehen, kühlt sich die Tasse pro 25 min um die Hälfte ab. Wie warm ist der Tee nach 10 min? Wie warm ist der Tee nach 2 h? Bestimmen Sie mit dem Taschenrechner, wie lange es dauert, bis der Tee 50° C warm ist (Ausprobieren oder per `solve`).

Die Zahlen sind erfunden, die Tasse ist wohl eher gut isoliert.

Merke 20.1.12 Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Bei jedem exponentiellen Zerfallsprozess ist die **Halbwertszeit** die zum Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$ gehörende Zeitspanne.
Bei jedem exponentiellen Wachstumsprozess ist die **Verdopplungszeit** die zum Wachstumsfaktor 2 gehörende Zeitspanne.

Aufgabe A3 Nach 10 Tagen sind von einem radioaktiven Stoff noch 10% übrig. Wie gross ist die Halbwertszeit dieses Stoffes? (Taschenrechner erlaubt)

Aufgabe A4 Bestimmen Sie jeweils die Exponentialfunktion, die die Situation beschreibt, und beantworten Sie mit Hilfe dieser Funktion und dem Taschenrechner die Frage(n).

(a) Auf einer Insel wird von Wissenschaftlern ein Atomtest durchgeführt; dabei wird Strontium 90 freigesetzt (Halbwertszeit 28 Jahre). Nach dem Test liegen die Strahlungswerte auf der Insel um 20% über der Toleranzgrenze. Nach wieviel Jahren kann man die Insel erstmals wieder «gefahrlos» betreten?

(b) Ken und Berry glauben, dass der Schaum bei alkoholischen Getränken (Bier) schneller zerfällt als bei nicht-alkoholischen Getränken (Karamalz). Bei beiden Getränken steht der Schaum anfänglich 5cm hoch. Beim Bier misst Ken 14 Sekunden, bis der Schaum bei 4.5cm steht. Berry misst nach einer Minute eine Schaumhöhe von 3.1cm im Glas mit Karamalz. Der Zerfall kann bei beiden Getränken angenähert als exponentieller Zerfall beschrieben werden.
  (i) Wie hoch steht der Schaum im Karamalz-Glas nach 3 Minuten?
  (ii) Bei welchem Getränk zerfällt der Schaum schneller?
  (iii) Zu welchem Zeitpunkt ist die prozentuale Abnahme pro Minute im Karamalz-Glas maximal?

20.1.13. In der folgenden Aufgabe lernen Sie eine physikalische Grösse kennen, die exponentiell abnimmt in Abhängigkeit von einer Distanz (statt in Abhängigkeit von der Zeit).

Aufgabe A5 Absorption radioaktiver Strahlung

Ernst Rutherford untersuchte als einer der ersten die Strahlung radioaktiver Präparate mit Hilfe von Magnetfeldern. Danach sind verschiedene Komponenten in der Strahlung enthalten; sie wurden nach den ersten Buchstaben im griechischen Alphabet benannt, weil ihre physikalische Natur zunächst nicht bekannt war.

Art der Strahlung	besteht aus	Eigenschaft
α-Strahlung	Heliumkernen	kann Papier nicht durchdringen
β-Strahlung	Elektronen	durchdringt Papier, wird von Metallen absorbiert
γ-Strahlung	elektromagnetischer Strahlung	durchdringt Aluminium und auch Blei

Die Absorption von γ-Strahlung wird in guter Näherung durch ein einfaches Gesetz beschrieben. Befindet sich eine Bleischicht zwischen einer Strahlungsquelle und dem Zählrohr eines Geiger-Müller-Zählers, so halbiert sich die Zählrate, wenn man die Dicke der Bleichschicht um $d_{\frac{1}{2}} = 0.6\,\text{cm}$ erhöht. (Die Zählrate nimmt exponentiell ab.)

(Diese **Halbwertsschichtdicke** $d_{\frac{1}{2}}$ hängt von der Art des absorbierenden Stoffs und der Art der Strahlung ab, vgl. Wikipedia: Halbwertsschicht.)

(a) Führe geeignete Grössen ein und bestimme das Absorptionsgesetz für Blei.
Hinweis: Übliche physikalische Notation: $R(d)$ = Zählrate hinter einer absorbierenden Bleischicht der Dicke d.

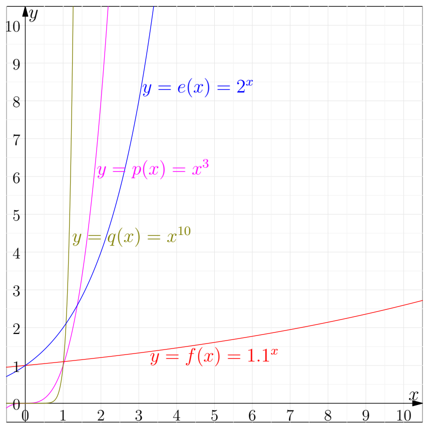
(b) Wie gross ist die Absorption in Prozent pro 1 cm bzw. pro 5 cm dicker Bleischicht?

Aufgabe A6 Vergleich von exponentiellem und polynomialem Wachstum.

In der Graphik rechts sind die folgenden vier Funktionen dargestellt.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 \\ q(x) &= x^{10} \\ e(x) &= 2^x \\ f(x) &= 1.1^x \end{aligned}$$

Die beiden (Exponential-)Funktionen e und f wachsen exponentiell, die beiden Potenzfunktionen p und q wachsen polynomial.



(a) Wenn das Argument immer grössere Werte annimmt («gegen Unendlich geht»), so werden die Funktionswerte aller vier Funktionen ebenfalls immer grösser.
Schätze: Für sehr grosse Werte von x, welcher der vier Funktionswerte $p(x)$, $q(x)$, $e(x)$, $f(x)$ ist der grösste? Der Zweitgrösste? Der Drittgrösste? Der Kleinste?

(b) Fülle die folgende Tabelle aus und bestätige oder widerlege so deine obigen Antworten.

Argument x	10	10^2	10^3	10^4	10^{10}
$p(x) = x^3$					
$q(x) = x^{10}$					
$e(x) = 2^x$					
$f(x) = 1.1^x$					

(c) Argumentiere (abstrakt, mit möglichst wenig Taschenrechnerhilfe), warum $f(x) = 1.1^x$ für sehr grosse x grösser ist als $q(x) = x^{10}$.

Merke 20.1.14 Vergleich von exponentiellem mit polynomialem Wachstum

Exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor $a > 1$ übertrifft jedes polynomiale Wachstum auf lange Sicht.
Mathematisch: Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Dann gilt: Für $x \to \infty$ («x geht gegen Unendlich») wächst $y = f(x) = a^x$ stärker als **jede** Potenzfunktion $y = g(x) = x^m$. Hier darf m beliebig gross sein.
(Hier ohne Beweis, siehe aber die vorherige Aufgabe A6, in der wir zum Beispiel gesehen haben, dass $f(x) = 1.1^x$ stärker wächst als $q(x) = x^{10}$.)

20.2 Logarithmen

20.2.1. Für jede Basis $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ ist die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto b^x \end{aligned}$$

bijektiv (= injektiv und surjektiv), wie leicht aus Merke 20.1.8 folgt (injektiv wegen strenger Monotonie (entweder wachsend oder fallend), surjektiv wegen der Wahl von $\mathbb{R}^+$ als Zielmenge), vgl. auch die in Aufgabe A1 gezeichneten Graphen.

Konkret bedeutet dies:

- Für **jedes** $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es **genau ein** $x \in \mathbb{R}$ mit $b^x = y$.

Da bijektive Funktionen Umkehrfunktionen haben, ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 20.2.2 Logarithmus zur Basis b

Für jedes $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist der **Logarithmus zur Basis** b (oder genauer die **Logarithmusfunktion zur Basis** b) definiert als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x) = b^x$. Diese Funktion wird als $\log_b$ notiert,

$$\log_b \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Konkret: Für jede positive reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ gilt also

$$\begin{aligned} \log_b(x) &= ✎ \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Beachte: $\log_b(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert.

20.2.3. Beachte: Laut Definition gilt ✎

Beispiel 20.2.4. Wir berechnen einige 3er-Logarithmen (= Logarithmen zur Basis 3).

z	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	
3^z								

Konkret gelten also beispielsweise: ✎

20.2.5. Letztes Jahr haben wir im Kunstmuseum eine Ausstellung über Jost Bürgi aus Lichtensteig (Toggenburg) besucht. Er ist einer der Ko-Erfinder der Logarithmen, vgl. Wikipedia: Jost Bürgi. Wenn ich mich recht erinnnere, war er sogar zuerst dran, hat aber als zweiter dazu publiziert (nach Napier).

Definition 20.2.6 Schreibweisen für Logarithmen zu speziellen Basen

Basis	**Name**	**Schreibweise**
10	Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus)	$\lg(c) := \log_{10}(c)$
2	Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)	$\mathrm{lb}(c) := \log_2(c)$
$e = 2.7182818\ldots$	natürlicher Logarithmus	$\ln(c) := \log_{\mathrm{e}}(c)$

Hier ist e die **Eulersche Zahl**, deren Definition im nächsten Abschnitt erklärt wird.

Aufgabe A7 Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a) $\lg(10'000)$ b) $\lg(0.1)$ c) $\lg\left(10^{23}\right)$ d) $\lg(0.0001)$

e) $\mathrm{lb}(1024)$ f) $\mathrm{lb}(0.125)$ g) $\ln(1)$ h) $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$

Aufgabe A8 Lösen Sie nach x auf (Resultat als Logarithmus). In Teilaufgaben (a) bis (c): Berechnen Sie x mit dem Taschenrechner; Teilaufgabe (a) kann auch ohne Taschenrechner exakt gelöst werden.

a) $8^x = 16$ b) $2^x = 7$ c) $10^x = \frac{1}{2}$

d) $a^x = 7$ e) $2^x = b$ f) $z^x = y$

Aufgabe A9 Berechnen Sie von Hand mit Hilfe der Definition des Logarithmus oder mit Hilfe von $\log_b(b^x) = x$.

a) $\log_2(32)$ b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ c) $\log_5(\sqrt{5})$

d) $\log_9(27)$ e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ f) $\log_7(1)$

Aufgabe A10 Berechnen Sie von Hand mit Hilfe der Definition des Logarithmus oder mit Hilfe von $b^{\log_b(c)} = c$.

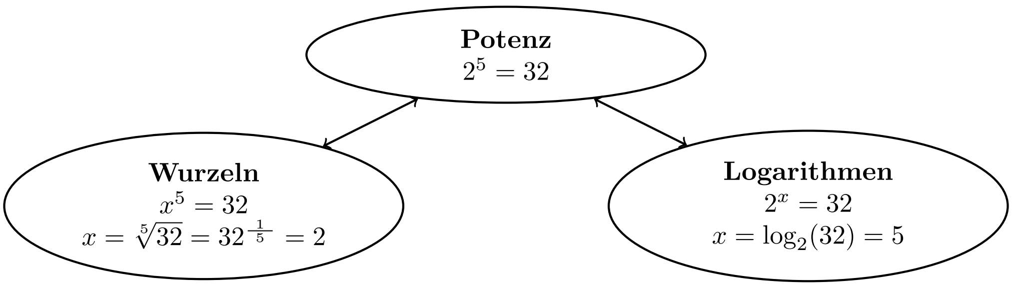
a) $3^{\log_3(7)}$ b) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$ c) $2^{-\log_8(125)}$

Aufgabe A11 Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

Hinweis: Denken Sie daran, dass der Graph der Umkehrfunktion aus dem Graph der ursprünglichen Funktion durch Spiegeln an der ersten Winkelhalbierenden entsteht!

a) $a(x) = \log_2(x)$ b) $b(x) = \log_{10}(x)$ c) $c(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ d) $d(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$

20.2.7. Hier eine Illustration, die den Unterschied zwischen Wurzelfunktionen (= Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen) und Logarithmenfunktionen (= Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen) verdeutlicht:



- Die Wurzel beantwortet die Frage nach der Basis bei einer Potenzgleichung.
- Der Logarithmus beantwortet die Frage nach dem Exponenten bei einer Exponentialgleichung.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Einschub: e – die Eulersche Zahl: Definition und Eigenschaften

Aufgabe A12 Unterjährige Verzinsung

Bank A bietet ein Sparkonto mit einem jährlichen Zinssatz von 12 % an.

Bank B bietet ein Sparkonto mit einem halbjährlichen Zinssatz von $\frac{12\%}{2} = 6\%$ an.

Bank C bietet ein Sparkonto mit einem dritteljährlichen Zinssatz von $\frac{12\%}{3} = 4\%$ an.

(a) Schätzen Sie: Welches Angebot ist für den Kunden am besten bei einer Anlagedauer von einem Jahr? Oder sind alle drei Angebote gleich gut?

(b) Finden Sie die korrekte Antwort, indem Sie den **jährlichen Zinsfaktor** für jedes der drei Angebote exakt bestimmen (ohne Taschenrechner).
Bemerkung: Der **jährliche Zinsfaktor** ist der Faktor, mit dem das Guthaben jedes Jahr multipliziert wird.

20.2.8 (Eulersche Zahl – stetige/kontinuierliche Verzinsung)**.** Verzinst man einen Franken

1 Mal im Jahr mit $100\% = 1$, so hat man nach 1 Jahr ✎

2 Mal im Jahr mit $\dfrac{100\%}{2} = \dfrac{1}{2}$, so hat man nach 1 Jahr ✎

4 Mal im Jahr mit $\dfrac{100\%}{4} = \dfrac{1}{4}$, so hat man nach 1 Jahr ✎

12 Mal im Jahr mit $\dfrac{100\%}{12} = \dfrac{1}{12}$, so hat man nach 1 Jahr ✎

365 Mal im Jahr mit $\dfrac{100\%}{365} = \dfrac{1}{365}$, so hat man nach 1 Jahr ✎

1'000'000 Mal mit $\dfrac{100\%}{1'000'000} = \dfrac{1}{1'000'000}$, so nach 1 Jahr ✎

n Mal im Jahr mit $\dfrac{100\%}{n} = \dfrac{1}{n}$, so hat man nach 1 Jahr ✎

Man kann zeigen, dass die Zahlen der Zahlenfolge ✎

Daraus ist zumindest anschaulich klar, dass diese Zahlen sich immer mehr einer bestimmten Zahl annähern, dem sogenannten **Grenzwert** oder **Limes** dieser Zahlenfolge. Dieser Grenzwert wird **Eulersche Zahl** genannt.

Definition 20.2.9 Eulersche Zahl

Die **Eulersche Zahl** e ist definiert als «Limes» (= «Grenzwert»)

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045\ldots$$

20.2.10. Wenn man einen Franken mit einem Zinssatz von $1 = 100\%$ «unendlich oft»/«kontinuierlich»/«stetig» verzinst, so hat man nach einem Jahr $e = 2.71\ldots$ Franken.

Statt mit einem Franken kann man auch mit einem beliebigen Geldbetrag g_0 starten. Bei kontinuierlicher Verzinsung mit einem Zinssatz von $1 = 100\%$ ist der Geldbetrag nach einem Jahr auf $e \cdot g_0 = 2.7182818\ldots \cdot g_0$ gewachsen.

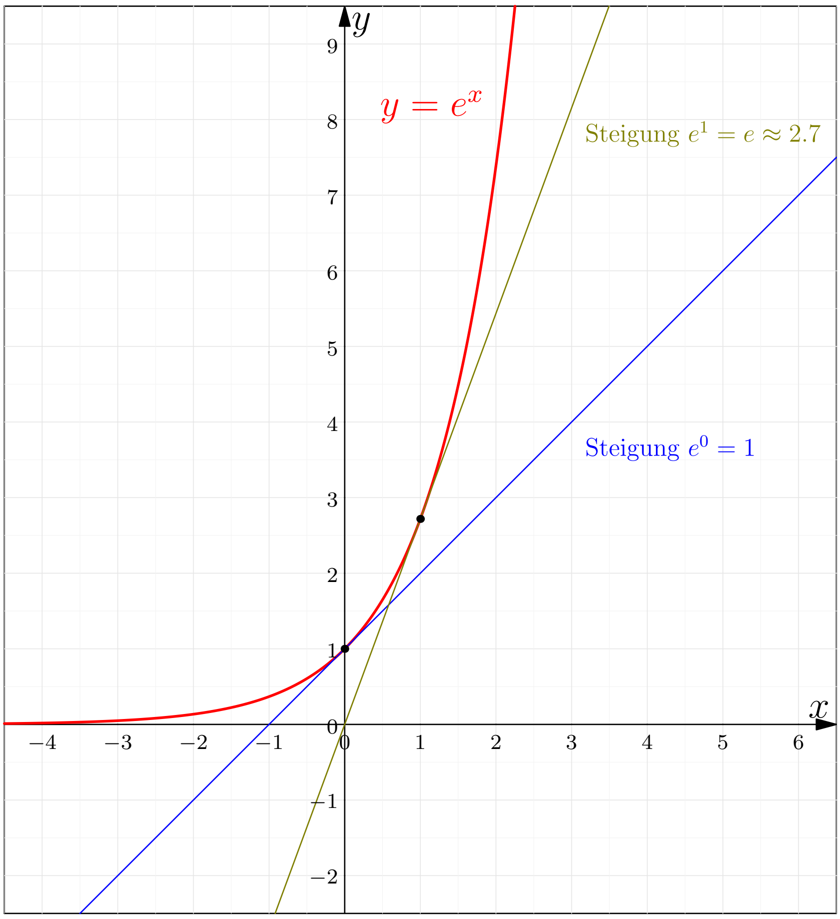
20.2.11. Die Eulersche Zahl ist eine zentrale Grösse in der Mathematik und in den Naturwissenschaften. Sie ist nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (geboren 1707 in Basel, gestorben 1783 in St. Petersburg) benannt, vgl. Wikipedia: Leonhard Euler.
20.2.12. Die Eulersche Zahl e hat eine ähnlich grosse Bedeutung in der Mathematik wie die Kreiszahl π.
20.2.13. Warum e in der Mathematik so wichtig ist, ist meiner Meinung nach aktuell (zweite Kanti-Klasse) nicht so leicht zu begründen.

Wir werden später zeigen, dass die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ zur Basis e die folgende äusserst wichtige Eigenschaft hat:

$$\boxed{\text{Die Steigung der Tangenten an den Graphen von } f(x) = e^x \text{ an jeder Stelle } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ist genau } e^{x_0}.}$$

In der Zeichnung ist der Graph von $f(x) = e^x$ rot dargestellt. Die obengenannte Eigenschaft ist an zwei Stellen x_0 illustriert:

- Stelle $x_0 = 0$: Die blaue Graph ist die Tangente an f bei $x_0 = 0$, also die Tangente durch den Punkt $(0, 1) = (0, e^0) = (x_0, e^{x_0})$.
  Diese Tangente hat die Steigung $1 = e^0 = e^{x_0}$.
- Stelle $x_0 = 1$: Die olivgrüne Graph ist die Tangente an f bei $x_0 = 1$, also die Tangente durch den Punkt $(1, e) = (1, e^1) = (x_0, e^{x_0})$.
  Diese Tangente hat die Steigung $e = e^1 = e^{x_0}$ (bitte per Abmessen mit dem Geodreieck experimentell bestätigen).



20.2.14. Neben der oben gegebenen Definition gibt es viele andere äquivalente Definitionen der Eulerschen Zahl e. Zum Beispiel ist e der Wert der folgenden wohldefinierten «unendlichen Summe».

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Wer mag, kann in Python die Eulersche Zahl näherungsweise auf die beiden beschriebenen Weisen ausrechnen.

Definition 20.2.15 algebraische Zahl, transzendente Zahl

Eine Zahl x heisst genau dann **algebraisch**, wenn sie eine Nullstelle eines geeigneten Polynoms vom Grad ≥ 1 mit rationalen Koeffizienten ist, d. h. wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_0 \neq 0$ gibt, so dass gilt

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Eine Zahl x heisst **transzendent** genau dann, wenn sie nicht algebraisch ist.

Beispiel 20.2.16. Alle Nullstellen des Polynoms $x^3 + 5x^2 - x - 3$ sind algebraisch.
20.2.17. Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist algebraisch, denn $\frac{p}{q}$ ist eine Nullstelle des Polynoms $X - \frac{p}{q}$ (oder des Polynoms $qX - p$.
20.2.18. Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist algebraisch als Nullstelle des Polynoms $X^2 - 2$.

Die Zahl $\sqrt[7]{3}$ ist als Nullstelle des Polynoms $x^7 - 3$ algebraisch.

Ähnlich ist jede m-te Wurzel $\pm\sqrt[m]{p}$ einer Primzahl p mit $m \geq 2$ eine irrationale, algebraische Zahl. Dasselbe stimmt, wenn p eine natürliche Zahl ist, die keine m-te Potenz einer natürlichen Zahl ist, oder allgemeiner eine rationale Zahl, die keine m-te Potenz einer rationalen Zahl ist.

Satz 20.2.19

Sowohl die Kreiszahl π als auch die Eulersche Zahl e sind irrational und sogar transzendent (ohne Beweis).

20.2.20. Die obigen Bemerkungen zeigen, dass wir die Inklusion $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ verfeinert haben zu einer Inklusion

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{A} \subsetneq \mathbb{R}$$

wobei $\mathbb{A}$ die Menge der reellen algebraischen Zahlen bezeichnet (denn $\sqrt{2}$ ist algebraisch, aber nicht rational; die reellen Zahlen e und π sind transzendent (= nicht algebraisch)).

Laut Definition von «transzendent»=«nicht algebraisch» bzw. (altbekannt) «irrational»=«nicht rational» gelten:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} = (\text{Menge der transzendenten Zahlen})$$
$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = (\text{Menge der irrationalen Zahlen})$$

✎

20.2.21 (Abgeschlossenheit der algebraischen Zahlen unter den elemenentaren Rechenoperationen)**.** Sind $a, b \in \mathbb{A}$ algebraische Zahlen, so sind auch $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $\frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$) algebraische Zahlen (ohne Beweis). (Die analoge Aussage für $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{A}$ ist offensichtlich.)
20.2.22. Etwas Mathematik-Geschichte und weitere Informationen (siehe Wikipedia, Ferdinand von Lindemann, Eulersche Zahl, Satz von Gelfond-Schneider).

- Leonhard Euler (1737): e ist irrational.
- Charles Hermite (1873): e ist transzendent.
- Ferdinand von Lindemann (ca. 1882 in Freiburg im Breisgau): π ist transzendent.
  Daraus folgt die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises (eines der berühmtesten Probleme der klassischen Geometrie): Es ist unmöglich, mit Zirkel und Lineal aus einem Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren (in endlich vielen Schritten).
- Lindemann: Für jede algebraische Zahl $a \neq 0$ ist e^a transzendent. Beispiele: e^5, $e^{\sqrt{2}}$, $e^{\sqrt[3]{7}}$ sind transzendent.
  Daraus folgt, dass $\ln(b)$ transzendent ist, wenn $b \neq 1$ algebraisch ist.
  Beweis: Sonst wäre $\ln(b) \neq 0$ algebraisch und somit nach der obigen Aussage $e^{\ln(b)} = b$ transzendent, im Widerspruch zur Annahme.
  Beispiele: $\ln(2)$, $\ln(\sqrt{2})$ sind transzendent.

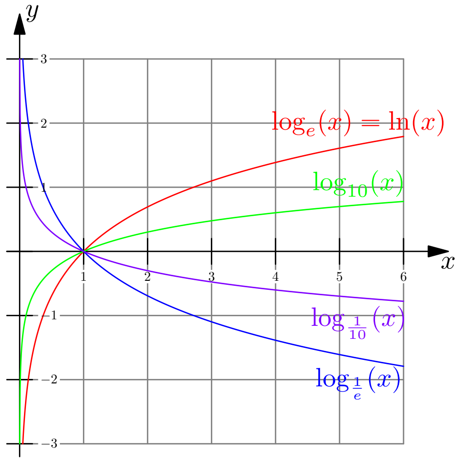
- Satz von Gelfond (1934) und Schneider (etwas später): Sind a und b algebraische Zahlen, mit $a \notin \{0, 1\}$ und b nicht rational. Dann ist a^b transzendent.
  Beispiele: $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^e$ sind transzendent. Dieses Resultat gilt auch für komplexe Zahlen und zeigt beispielsweise, dass $e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ und i^i transzendente Zahlen sind (die Zahl i^i ist reell wegen $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$).

20.3 Weiter mit Logarithmen

Merke 20.3.1 Eigenschaften der Logarithmusfunktionen

Sei $b > 0$ mit $b \neq 1$ eine positive reelle Zahl. Dann gilt für die Logarithmusfunktion $\log_b$ zur Basis b:

- Die Logarithmusfunktion $\log_b$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ und somit eine bijektive Funktion
  $$\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
  Insbesondere:
  - Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
  - Wertemenge = Bildmenge $\mathbb{B} = \mathbb{R}$.
  - Logarithmen kann man nur von positiven Zahlen bilden.
- Die Graphen aller Logarithmusfunktionen gehen durch $(1, 0)$, denn $\log_b(1) = 0$.



- Wachstumsverhalten:
  - Im Fall $b > 1$ ist $\log_b$ ✎
  - Im Fall $0 < b < 1$ ist $\log_b$ ✎

  Beide Aussagen folgen direkt aus dem Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, denn die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion ist (offensichtlich) ebenfalls streng monoton wachsend, und analog für «streng monoton fallend».
- «Kurvenverhalten»: Der Graph von $\log_b$ ist
  - im Fall $b > 1$ konkav (= Rechtskurve);
  - im Fall $0 < b < 1$ konvex (= Linkskurve).
- Asymptoten:
  - Im Fall $b > 1$ ist die negative y-Achse Asymptote des Graphen von $\log_b$.
  - Im Fall $b < 1$ ist die positive y-Achse Asymptote des Graphen von $\log_b$.
- Die Graphen von $\log_b(x)$ und $\log_{\frac{1}{b}}(x)$ gehen durch Spiegelung an der x-Achse auseinander hervor, denn es gilt $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$.
  Dies folgt aus den Logarithmengesetzen oder direkt wie folgt: $\log_{\frac{1}{b}}(x) = z \iff (\frac{1}{b})^z = x \iff b^{-z} = x \iff \log_b(x) = -z$.

20.3.2. Logarithmenfunktionen zu Basen > 1 wachsen streng monoton und übersteigen jeden noch so grossen vorgegebenen Wert, jedoch ist «logarithmisches Wachstum» extrem langsam.

Als Beispiel betrachten wir den Zehnerlogarithmus $\log_{10}(x) = \lg(x)$.

- Für welches x gilt $\lg(x) = 1$?
- Für welches x gilt $\lg(x) = 3$?
- Für welches x gilt $\lg(x) = 10$?
- Für welches x gilt $\lg(x) = 33$?
- Für welches x gilt $\lg(x) = 100$?
- Für welches x gilt $\lg(x) = 12345$?

20.4 Logarithmengesetze

Erst nach Bearbeitung der Aufgabe umblättern, da Logarithmengesetze auf der nächsten Seite.

Aufgabe A13 Richtig oder falsch? Jemand behauptet, dass jede der folgenden zehn Gleichheiten für alle «erlaubten» Werte von b, x und y korrekt ist.

Er hat jedoch nur in drei Fällen recht. Widerlegen Sie sieben der folgenden Gleichheiten mit einem expliziten (möglichst einfachen) Gegenbeispiel. Sie können für jedes Gegenbeispiel dieselbe Basis b wählen, etwa $b = 2$.

Wer mag, kann bereits jetzt versuchen, die drei korrekten Gleichheiten zu beweisen.

(a) $\log_b(x + y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(b) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) \cdot \log_b(y)$

(c) $\log_b(x - y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(d) $\log_b(\sqrt{x}) = \sqrt{\log_b(x)}$

(e) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(f) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_b(x)}$

(g) $\log_b(x^y) = (\log_b(x))^y$

(h) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(i) $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$

(j) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

Merke 20.4.1 Erinnerung: Potenzgesetze

Für alle positiven reellen Zahl a, $b \in \mathbb{R}^+$ und alle reellen Zahlen r und s gelten:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{und insbesondere} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r \quad \text{und insbesondere} \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

20.4.2. Die Gesetze $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $(a^r)^s = a^{rs}$ führen zu Logarithmengesetzen.

Meines Wissens aber nicht das mittlere Gesetz $a^r \cdot b^r = (ab)^r$; es scheint mir eher verwandt (über die Umkehrfunktion $\sqrt[r]{?} = (\ \ )^{\frac{1}{r}}$) bzw. identisch (indem man r durch $\frac{1}{r}$ ersetzt) zum Potenzgesetz $\sqrt[r]{ab} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}$.

Satz 20.4.3 Logarithmengesetze

Sei $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ beliebig. Dann gelten

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \text{für alle } x,\, y \in \mathbb{R}^+$$
$$\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } z \in \mathbb{R}$$

In Worten:

- Logarithmus eines Produkts = Summe der Logarithmen
- Logarithmus einer Potenz = Exponent mal Logarithmus der Basis

Aufgabe A14 Beweisen Sie das erste Logarithmengesetz

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Suchen Sie zunächst eigenständig einen Beweis. Versuchen Sie danach, möglichst viele der folgenden (nahe verwandten) Beweisvarianten durchzurechnen und auch den «besten Beweis» in 20.4.4 zu verstehen:

- 1. Beweismöglichkeit: Schreiben Sie $x = b^{\tilde{x}}$ und $y = b^{\tilde{y}}$ (was gleichbedeutend ist zu $\tilde{x} = \log_b(x)$ und $\tilde{y} = \log_b(y)$). Formen Sie damit die linke Seite der zu beweisenden Gleichung um, bis sie bei der rechten Seite ankommen.
- 2. Beweismöglichkeit: Die zu beweisende Gleichung gilt genau dann, wenn «$b^{\text{diese Gleichung}}$» gilt (da «$b$ hoch» bijektiv), wenn also $b^{\log_b(x \cdot y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$ gilt. Zeigen Sie diese Gleichung.
- 3. Beweismöglichkeit: Über **kommutative** Diagramme (kein üblicher Schulstoff, sondern «Kategorientheorie»):
  Sei $\exp_b$ die Funktion $\exp_b(x) = b^x$. Sei $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann hat das Diagramm von Mengen und Funktionen die folgende Eigenschaft: Startet man mit einem beliebigen Element $x \in \mathbb{R}$ der Menge links oben, so kann man es
    - entweder zuerst nach rechts und dann nach unten abbilden
    - oder zuerst nach unten und dann nach rechts,

  $$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] \arrow[d, "+\tilde{y}"] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "\cdot b^{\tilde{y}}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] & \mathbb{R}^+ \end{tikzcd}$$

  und man erhält **auf beiden Wegen** dasselbe Ergebnis. Man sagt dafür kurz, dass das Diagramm **kommutativ** ist. Überlegen Sie sich:
    - Das obige Diagramm ist kommutativ (also obige Behauptung nachrechnen).
    - Ersetzt man die beiden horizontalen Abbildungen/Pfeile $\exp_b$ durch Pfeile in der anderen Richtung und beschriftet diese durch $\log_b$, so ist das Diagramm immer noch kommutativ.
    - Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^+$ wähle man speziell $\tilde{y} = \log_b(y)$ und drücke damit die vertikalen Abbildungen durch y aus. (Das Diagramm bleibt dabei natürlich kommutativ, da $\tilde{y}$ beliebig wählbar war.)
    - Warum beweist das so entstandene kommutative Diagramm das erste Logarithmengesetz?

20.4.4. Der «beste» Beweis des ersten Logarithmengesetzes geht wie folgt:

Die Funktion $\exp_b$, definiert durch $\exp_b(x) = b^x$, ist «plus-mal-kompatibel» im dem Sinne, dass

$$\exp_b(x + y) = \exp_b(x) \cdot \exp_b(y)$$

gilt, denn $\exp_b(x + y) = b^{x+y} = b^x \cdot b^y = \exp_b(x) \cdot \exp_b(y)$ nach einem Potenzgesetz. Deswegen muss ihre Umkehrfunktion $\log_b$ «mal-plus-kompatibel» sein, also $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ erfüllen.

Aufgabe A15 Beweisen Sie das zweite Logarithmengesetz

$$\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$$

Suchen Sie zunächst eigenständig einen Beweis. Versuchen Sie danach, möglichst viele der folgenden Beweisvorschläge durchzuführen:

- 1. Beweismöglichkeit: Setzen Sie $\tilde{x} = \log_b(x)$, so dass $x = b^{\tilde{x}}$ gilt, und schreiben Sie die linke Seite um.
- 2. Beweismöglichkeit: Wenden Sie «b hoch …» auf beide Seiten der zu beweisenden Gleichung an und beweisen Sie die so erhaltene (äquivalente (warum?)) Gleichung.
- Finden Sie einen Beweis mit kommutativen Diagrammen.

Folgerung 20.4.5 aus Satz 20.4.3: weitere Logarithmengesetze

Für alle Logarithmenbasen $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gelten (als Konsequenzen der beiden obigen Logarithmengesetze):

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x) \qquad\qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

20.4.6. Bisweilen werden Addition und Subtraktion als Operationen erster Stufe, Multiplikation und Division als Operationen zweiter Stufe und Potenznehmen als Operation dritter Stufe bezeichnet.

In dieser Sprechweise zeigen die vier bisher bewiesenen Logarithmengesetze: Der Logarithmus «reduziert» Operationen zweiter Stufe auf Operationen erster Stufe und Operationen dritter Stufe auf Operationen zweiter Stufe.

Folgerung 20.4.7 aus Satz 20.4.3: Basiswechsel, ein weiteres Logarithmengesetz

Für alle Logarithmenbasen $b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt (als Konsequenz des zweiten Logarithmengesetzes)

Basiswechsel (zur Basis c) $$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

Die Bezeichung «Basiswechsel» kommt daher, dass man jeden Logarithmus zur Basis b ausdrücken kann durch Logarithmen zu einer (beliebig wählbaren) Basis c. Man wechselt also von der Basis b zur Basis c.
Eselsbrücke: $\log_{\blacksquare}(\blacksquare) = \frac{\log(\blacksquare)}{\log(\blacksquare)}$ und dann rechts dieselbe, beliebige Basis c bei den beiden Logarithmen im Index ergänzen.

Insbesondere: Jeder Logarithmus kann durch natürliche Logarithmen ausgedrückt werden:

Basiswechsel $$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

20.4.8. Basiswechsel ist insbesondere nützlich auf «einfachen» Taschenrechnern, die nur eine Logarithmustaste haben (die meist den natürlichen Logarithmus ln berechnet). Mit Basiswechsel kann man trotzdem Logarithmen zu beliebigen Basen berechnen.
20.4.9 (Alle Logarithmen sind proportional zueinander)**.** Das Basiswechselgesetz kann man auch äquivalent wie folgt schreiben (multipliziere mit $\log_c(b) \neq 0$ und vertausche die beiden Seiten):

$$\log_c(x) = \log_c(b) \cdot \log_b(x) \qquad \text{oder als Gleichheit von Funktionen} \qquad \log_c = \log_c(b) \cdot \log_b$$

Dies zeigt: Die Funktion $\log_c$ ist proportional zu (= ein Vielfaches von) der Funktion $\log_b$, der Proportionalitätsfaktor beträgt $\log_c(b)$.

Der Proportionalitätsfaktor in die andere Richtung beträgt $\log_b(c) = \frac{1}{\log_c(b)}$. Die letzte Gleichheit folgt zum Beispiel aus dem Basiswechsel, wenn man $x = c$ setzt.

Aufgabe A16 Folgern Sie aus den beiden Logarithmengesetzen in Satz 20.4.3

(a) die beiden Logarithmengesetze in Folgerung 20.4.5;
(b) das Basiswechselgesetz in Folgerung 20.4.7.

Aufgabe A17 Formen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze um, so dass der Logarithmus nicht mehr auf ein Produkt, einen Quotienten, eine Potenz oder eine Wurzel angewendet wird.

Bemerkung: Wir sind hier und im Folgenden manchmal etwas faul und schreiben log statt $\log_b$, wenn die Basis stets dieselbe, aber unwichtig ist.

(a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right)$

(b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right)$

(c) $\log_a\left(\frac{a\cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right)$

(d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{999}{1000}\right)$

Aufgabe A18 Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze so zusammen, dass das Ergbenis die Form «Logarithmus von ...» hat (insbesondere darf nur ein Logarithmus auftauchen).

(a) $\log(b)-\log(c+d)$

(b) $2\log(x)+3\log(y)-5\log(z)$

(c) $\frac{1}{3}(\log(b)+2\log(c))-\frac{1}{2}(5\log(d)+\log(f))$

(d) $\ln(a+b)+1$

Aufgabe A19

Beweisen Sie die folgenden Identitäten!

Hinweis: Am einfachsten geht es für meinen Geschmack mit Hilfe von Basiswechsel, siehe Folgerung 20.4.7. Es gibt aber auch andere Beweise.

(a) $\log_{\frac{1}{b}}(x)=-\log_b(x)$

(b) $\frac{1}{\log_x(y)}=\log_y(x)$

(c) $\frac{1}{\log_{ab}(x)}=\frac{1}{\log_a(x)}+\frac{1}{\log_b(x)}$ bzw. äquivalent $\log_{ab}(x)=\frac{1}{\frac{1}{\log_a(x)}+\frac{1}{\log_b(x)}}$

(d) $x^{\frac{\log_a(y)}{\log_a(x)}}=y$

Bemerkung: Wenn man $\log_a=\ln$ und $y=\ln(x)$ setzt, folgt daraus die wohl nicht so offensichtliche Formel $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}=\ln(x)$.

20.5 Beliebige Exponentialfunktionen und Logarithmen per $\exp(x)=e^x$ und $\ln(x)$

Definition 20.5.1 exp, wichtige Alternativschreibeweise, $\exp(x)=e^x$

Die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis wird sehr oft als exp notiert:

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}^+\\ x&\mapsto\exp(x)=e^x\end{aligned}\qquad\text{oder kurz}\qquad \exp(x)=e^x$$

Insbesondere sollte man sich dies merken, wenn man die Eulersche Zahl am Computer benötigt:

$$e=\texttt{exp(1)}\qquad\text{und}\qquad e^x=\texttt{exp(x)}$$

Merke 20.5.2

Wenn man von $\boxed{\textbf{der}}$ Exponentialfunktion spricht (ohne Angabe der Basis), so ist meist die Exponentialfunktion exp mit Basis e, gemeint. Ebenso ist mit $\boxed{\textbf{der}}$ Logarithmusfunktion (ohne Angabe der Basis) oft der natürliche Logarithmus $\ln=\log_e$ gemeint.
Die Exponentialfunktion exp und der (natürliche) Logarithmus ln sind Umkehrfunktionen voneinander:

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] & \mathbb{R}^+ \arrow[l, bend left, "\ln"]\end{tikzcd}$$

20.5.3. Mit dieser neuen Schreibweise $\exp(x)$ für e^x gelten:

$$\exp(\ln(x)) = x \qquad \ln(\exp(x)) = x$$
$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \qquad \ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$$

Die beiden Gleichungen in der ersten Zeile drücken aus, dass exp und ln sich gegenseitig rückgängig machen als Umkehrfunktionen. Sie wurden zuvor als $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$ geschrieben (als Spezialfälle von $b^{\log_b(x)} = x$ bzw. $\log_b(b^x) = x$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).

Die erste Gleichung in der zweiten Zeile ist wohl etwas gewöhnungbedürftig, bedeutet aber schlicht $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ (ein Potenzgesetz). Die zweite Gleichung der zweiten Zeile ist in traditioneller Notation das Logarithmengesetz $\log_e(xy) = \log_e(x) + \log_e(y)$.

Satz 20.5.4 Alle Potenzen und Logarithmen können durch exp und ln ausgedrückt werden.

- Wichtig!
  Jede Exponentialfunktion/Potenz b^x kann man per Eulerscher Zahl und natürlichem Logarithmus wie folgt ausdrücken:
  $$b^x = e^{x\ln(b)} = \exp(x\ln(b)) \qquad \text{für beliebige } b \in \mathbb{R}^+ \text{ und } x \in \mathbb{R}$$
- (altbekannt, Basiswechsel:) Jeder Logarithmenfunktion $\log_b$ kann man per natürlichem Logarithmus wie folgt ausdrücken:
  $$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \qquad \text{für beliebige } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}^+$$

Beweis. Die zweite Behauptung ist der wohlbekannte Basiswechsel. Die erste Behauptung folgt aus $z = \exp(\ln(z))$ (Umkehrfunktion) und $\ln(b^x) = x\ln(b)$ (Logarithmengesetz).

$$b^x = \exp(\ln(b^x)) = \exp(x\ln(b)) = e^{x\ln(b)}$$

Alternativbeweis: Aus $b = \exp(\ln(b)$ folgt $b^x = (\exp(\ln(b))^x = \left(e^{\ln(b)}\right)^x = e^{\ln(b)\cdot x} = e^{x\ln(b)} = \exp(x\ln(b))$.

□

Aufgabe A20 Schreibe die folgenden Ausdrücke so um, dass nur noch der natürliche Logarithmus ln und die Exponentialfunktion exp vorkommen (d. h. Logarithmen zu anderen Basen sind nicht erlaubt; Potenzen mit der Variablen x im Exponenten (ausser mit Basis e) sind nicht erlaubt).

Besser so formulieren: Man stelle sich vor, dass mein einen Taschenrechner hat, der nur die vier Grundrechenarten Plus, Minus, Mal, Geteilt hat (und Klammern) und die beiden Tasten exp und ln (aber keine Taste «x hoch y»). Wie kann man die folgenden Ausdrücke damit berechnen?

Ausserdem sind die Ausdrücke möglichst weit zu vereinfachen.

a) 5^x
b) a^b
c) x^x
d) $(x+3)^{x+5}$
e) $\cancel{(x+3)^{x+5}}$; war doppelt
f) $3^x \cdot 7^{2x}$
g) $\log_x(3)$
h) $\log_3(x)$
i) $\log_x(x)$
j) $\log_{x+3}(x+5)$
k) $c^{\log_c(a)}$ ist offensichtlich a (warum?). Beweise dies mit Satz 20.5.4.
l) $2^{5\log_2(5)} \cdot 3^{-4\log_3(5)}$. Das Ergebnis ist 5. Zeige dies einmal mit den «klassischen» Logarithmengesetzen und einmal mit Satz 20.5.4.

20.5.5. Es gilt natürlich auch $x^a = e^{a\ln(x))} = \exp(a\ln(x))$ bzw. konkret beispielsweise $x^5 = e^{5\ln(x)} = \exp(5\ln(x))$ oder $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \exp(\frac{1}{2}\ln(x))$. Diese Gleichheiten sind aber wohl eher selten nützlich.

Aufgabe A21 Zeige, dass die Aussagen von Satz 20.5.4 auch gelten, wenn man exp durch $\exp_c$ und die Eulersche Zahl e durch c und ln durch $\log_c$ ersetzt, wobei $c > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl ist (und $\exp_c$ definiert ist durch $\exp_c(z) = c^z$).

20.6 Nachtrag

Aufgabe A22 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass neben den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division und natürlichen Zahlen ausschliesslich $\ln(p)$ auftaucht, wobei p eine Primzahl ist. Ich betone: Nur der natürliche Logarithmus ist erlaubt!

(relativ kompliziertes) Beispiel (denken Sie an die Primzahlzerlegung):

$$\log_{\frac{1}{40}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{40}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{3+2}{6}\right)}{-\ln(40)} = -\frac{\ln(5)-\ln(6)}{\ln(2^3\cdot 5)}$$
$$= -\frac{\ln(5)-(\ln(2)+\ln(3))}{3\ln(2)+\ln(5)} = \frac{\ln(2)-\ln(5)+\ln(3)}{3\ln(2)+\ln(5)}$$

a) $\ln(\frac{3}{5}+\frac{1}{7})$ Lösung: $\ln(2)+\ln(13)-\ln(5)-\ln(7)$

b) $\ln(\frac{3}{5}e^{2025}+\frac{1}{7}e^{2025})$ Lösung: $\ln(2)+\ln(13)+2025-\ln(5)-\ln(7)$

c) $\log_{54}(2025)$ Lösung: $\frac{2\ln(5)+4\ln(3)}{\ln(2)+3\ln(3)}$

d) $\log_{\frac{1}{4}}(\frac{3}{4}-\frac{2}{3})$ Lösung: $1+\frac{\ln(3)}{\ln(4)}$

20.7 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Definition 20.7.1 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Kommt bei einer Gleichung die **Unbekannte in einem Exponenten** vor, so spricht man von einer **Exponentialgleichung**.
Kommt bei einer Gleichung die **Unbekannte in einem Logarithmus** vor, so spricht man von einer **Logarithmusgleichung**.

Merke 20.7.2 Lösen von Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen lassen sich häufig durch Logarithmieren lösen (d.h. man nimmt den Logarithmus beider Seiten (zu einer geeigneten/beliebigen Basis)). Dann kann man oft die Logarithmengesetze verwenden, um etwa Exponenten als Faktoren vor die Logarithmen zu ziehen oder um Logarithmen von Produkten umzuschreiben.
Allgemeines Prinzip (für beliebige **positive** Terme T_1 und T_2 und beliebiges $b>0$, $b\neq 1$):

$$T_1 = T_2 \iff \log_b(T_1) = \log_b(T_2)$$

Beispiel 20.7.3. Lösen der Gleichung $5^x = 10$. (Lösung eigentlich offensichtlich (warum?).)

- Erster Weg: Logarithmus mit Basis 5 anwenden:

$$\begin{aligned} 5^x &= 10 && \mid \log_5 \\ \log_5(5^x) &= \log_5(10) \\ x = x\log_5(5) &= \log_5(10) \end{aligned}$$

- Zweiter Weg: Logarithmieren bezüglich einer anderen Basis funktioniert auch (als Mathematiker nimmt man meist den natürlichen Logarithmus ln; das spart auch Schreibarbeit):

$$\begin{aligned} 5^x &= 10 && \mid \ln \\ \ln(5^x) &= \ln(10) \\ x\ln(5) &= \ln(10) && \mid :\ln(5) \\ x &= \frac{\ln(10)}{\ln(5)} \overset{\text{Basiswechsel}}{=} \log_5(10) \end{aligned}$$

Beispiel 20.7.4. Lösen der Gleichung $3^x \cdot 2^{x^2} = 5^{x+1}$

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 2^{x^2} &= 5^{x+1} && \mid \ln \\ \ln(3^x \cdot 2^{x^2}) &= \ln(5^{x+1}) && \\ x\ln(3) + x^2\ln(2) &= (x+1)\ln(5) && \text{quad. Gleichung} \\ \ln(2)x^2 + (\ln(3) - \ln(5))x - \ln(5) &= 0 && \text{Mitternachtsformel} \\ x_{1,2} &= \tfrac{-\ln(3)+\ln(5)\pm\sqrt{(\ln(3)-\ln(5))^2+4\cdot\ln(2)\cdot\ln(5)}}{2\ln(2)} && \end{aligned}$$

Taschenrechner: $x_1 \approx 1.93619$, $x_2 \approx -1.1992249775463237$

Abstrakt (ohne Taschenrechner): Es gibt zwei Lösungen, denn die Diskrimante ist positiv: Aus $x > 1$ folgt $\ln(x) > \ln(1) = 0$, also $\ln(2) > 0$ und $\ln(5) > 0$. Daraus folgt, dass die Diskriminante positiv ist (warum?).

⚒ **Aufgabe A23** Lösen Sie die folgenden Gleichungen. Vermutlich ist es sinnvoll, zunächst die Beispiele 20.7.3 und 20.7.4 zu verstehen.

a) $e^x = \pi$

b) $3^x = 5^{x+2}$

c) $3^x = 5^x$

d) $10^{\frac{x}{x+1}} = 0.8$

e) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$ Hinweis: 2^{4x} ausklammern

f) $2^{3x} = 3^{2x} \cdot 5$

g) $2^{x^2} = 5$

h) $5 \cdot 2^{x^2} = 1$

i) $2^{x^2} = 5 \cdot 3^x$

Merke 20.7.5 Lösen von Logarithmusgleichungen

Logarithmusgleichungen lassen sich häufig durch Exponenzieren lösen (d.h. man rechnet eine geeignete Basis hoch die beiden Seiten der Gleichung). Dann fallen oft die Logarithmen weg.

Achtung, Probe nötig: Am Ende die (vermeintlichen) Lösungen prüfen, denn in Logarithmenfunktionen $\log_b(\ )$ darf man nur **positive** reelle Zahlen als Argument einsetzen.

Allgemeines Prinzip (für beliebige Terme T_1 und T_2 und beliebiges $b > 0$, $b \neq 1$):

$$T_1 = T_2 \iff b^{T_1} = b^{T_2}$$

Beispiel 20.7.6. Lösen der Gleichung $\lg\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \lg(3 - x)$.

$$\begin{aligned} \lg\left(\frac{x}{2}\right) - 1 &= \lg(3-x) && \mid 10^{(\cdot)} \quad \text{da lg Zehnerlogarithmus} \\ 10^{\lg\left(\frac{x}{2}\right)-1} &= 10^{\lg(3-x)} && \\ 10^{\lg\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot 10^{-1} &= 3 - x && \\ \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{10} &= 3 - x && \text{lineare Gleichung, Lösung } x = \frac{20}{7} \end{aligned}$$

Probe: Sowohl $\frac{x}{2} = \frac{10}{7}$ als auch $3 - x = \frac{1}{7}$ sind positiv und damit als Argument der Logarithmusfunktion zugelassen.
Wie man auch vorgehen könnte: Grundannahme/Gesucht sind Lösungen x mit $0 < x < 3$ («Definitionsmenge der Gleichung», nur dann ist die Gleichung sinnvoll). Dann (zumindest hier) alles Äquivalenzumformungen.

⚒ **Aufgabe A24** Lösen Sie die folgenden Gleichungen ohne Taschenrechner. Vermutlich ist es sinnvoll, zunächst Beispiel 20.7.6 zu verstehen. **Denken Sie an die Probe!**

a) $\log_3(7x) = 2$

b) $\log_2(x+4) = \log_2(2x+2)$

c) $\log_7(x-42) = \log_7(2x-23)$

d) ✱ $\log_2(x+4) = \log_4(x+6)$ Hinweis: Basiswechsel, damit nur $\log_2$ auftaucht.

Aufgabe A25 Ist die Aufgabe richtig gelöst worden? Begründe und korrigiere!

Quelle: DMK Algebra, Aufgaben 9/10, 6.4.52

(a) $2\lg(x) = 2$, d. h. $\lg(x) = 1$, also $x = 10$.
(b) $2\lg(x) = 2$, d. h. $\lg(x^2) = 2$, also $x^2 = 100$, d. h. $x = \pm 10$.
(c) $\lg(x^2) = (\lg(x))^2$, d. h. $2\lg(x) = (\lg(x))^2$, also $2 = \lg(x)$, d. h. $x = 100$.

Aufgabe A26 Einige weitere (schwierigere?) Logarithmengleichungen (**Probe nicht vergessen!**) und eine Exponentialgleichung.

(a) $\log_{10}(x+3) + \log_{10}(x) = 1$
(b) $\log_6(\log_2(x)) = 1$
(c) $\log_2(x+9) = 4 + \log_2(x-6)$
(d) $3^{7-2x} = 243$
(e) $x = \log_4\left(\frac{1}{8}\right)$

20.8 Verständnisfragen

Aufgabe A27 Alle Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen.

(a) Was ist die Umkehrfunktion von $\log_2(x)$?
(b) Was ist die Umkehrfunktion von x^2? Was müsste man bei dieser Frage genaugenommen noch erwähnen?
(c) Was ist die Umkehrfunktion von e^x?
(d) Was ist grösser, $\log_{10}(7)$ oder $\log_{10}(8)$?
(e) Was ist grösser, $\log_{0.1}(7)$ oder $\log_{0.1}(8)$?
(f) Ist $\log_{13}(2)$ positiv oder negativ?
(g) Ist $\log_{0.8}(2)$ positiv oder negativ?
(h) Warum kann man alle Logarithmen berechnen, wenn man (etwa mit dem Taschenrechner) $\ln(x)$ berechnen kann?
(i) Was ist grösser, $\log_3(2)$ oder $\log_2(3)$?
(j) Wenn man auf eine Gleichung $\ln(\cdot)$ bzw. $\lg(\cdot)$ anwendet, wie unterscheiden sich die beiden erhaltenen Gleichungen?

20.9 Repetition und Anwendungen von Basiswechsel

Aufgabe A28 Berechnen Sie von Hand:

a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ b) $5^{\log_5(10)}$ c) $125^{\log_5(4)}$

Aufgabe A29 Löse ohne Taschenrechner. Alle Aufgaben können per Basiswechsel gelöst werden.

Einige Aufgaben kamen bereits oben vor; Basiswechsel war damals noch nicht bekannt(?); insofern liefert Basiswechsel neue Lösungswege.

a) $\log_{16}(8)$ b) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$ c) $5^{\log_{125}(8)}$

d) Löse $8^x = 16$. e) $\log_9(27)$ f) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$

g) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$ h) $2^{-\log_8(125)}$

20.10 Lösungen

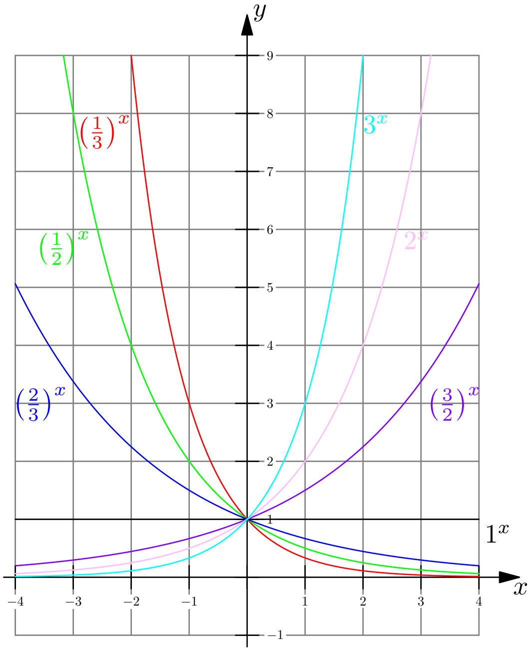
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-graphen-exponentialfunktionen

(a) 

(b) siehe Lehrerversion

Lösung zu A2 ex-modellierungs-aufgaben

a) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2410}}$ mit t in Jahren und m_0 die Ausgangsmasse (wird $m_0 = 1$ gewählt, kann die Funktion als Anteil der Ausgangsmasse interpretiert werden).
$m(1) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2410}} \approx 0.999712428 \cdot m_0$, d.h. der Wachstumsfaktor ist 0.999712428, der Massenverlust in Prozent ist $\approx 1 - 0.999712428 = 0.000287572 \approx 0.028752\%$.
Alternative: Wachstumsfaktor pro Jahr ist

$$\frac{m(t_0+1)}{m(t_0)} = \frac{m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t+1}{2410}}}{m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2410}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2410}} \approx 0.999712428$$

Rest wie zuvor.
2. Alternative: Sei c der Wachstumsfaktor pro Jahr. Dann muss gelten

$$c^{2410} = \frac{1}{2} \qquad \text{daraus folgt} \qquad c = \sqrt[2410]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2410}} \approx 0.999712428$$

Rest wie zuvor.

b) $a(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$ mit t in Stunden. Damit
$a(1) \approx 12600$, $a(2) \approx 15870$, $a(5) \approx 31750$, $a(24) = 2'560'000$.

c) $T(t) = 90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$ mit t in Minuten.
$T(10) \approx 68.21$ in $^\circ$ C und $T(120) \approx 3.231$ in $^\circ$ C.
Löst man die Gleichung $90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} = 50$ erhält man $t \approx 21.20$ in Minuten.

Lösung zu A3 ex-halbwertszeit-bestimmen

Sei $m(t)$ die Stoffmenge nach der Zeit t in Tagen. Sei m_0 die Anfangsstoffmenge. Dann gilt

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{10}}$$

Während der Zeitspanne Δt wächst $m(t)$ um den Faktor

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{\Delta t}{10}}$$

Gesucht ist die Halbwertszeit, also die Zeitspanne Δt, für die gilt

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{\Delta t}{10}} = 0.5$$

Der Taschenrechner liefert ✎

Lösung zu A4 ex-modellierungsaufgaben-teil2

(a) Lösungsvariante 1:

Sei q der Wachstumsfaktor pro Jahr. Dann gilt $q^{28} = \frac{1}{2}$ und damit $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{28}} \approx 0.975549$. Geht man von einem Toleranzlevel L aus, startet man bei $B_0 = (100\% + 20\%) \cdot L = 1.2 \cdot L$.
Wir suchen also t so, dass $L = 1.2 \cdot L \cdot q^t$. Kürzt man L ergibt sich $1 = 1.2q^t \Leftrightarrow q^t = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$. Löst man diese Gleichung (TR) nach t auf, erhält man $t \approx 7.36496$ Jahre.
Lösungsvariante 2: Sei L das Toleranzlevel (gemessen in einer sinnvollen physikalischen Einheit). Dann ist der Anfangswert nach dem Atomtest $1.2 \cdot L$.
Die Strahlung zur Zeit t (in Jahren) ist dann

$$S(t) = 1.2 \cdot L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

Gesucht ist die Zeit t, zu der gilt $S(t) = L$ (Toleranzlevel wiederum erreicht). Ausgeschrieben bedeutet diese Gleichung

$$\begin{aligned} & 1.2 \cdot L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} = L \\ \Longleftrightarrow \quad & 1.2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} = 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man mit dem Taschenrechner lösen oder vorher noch etwas umformen:

$$\begin{aligned}
\iff \quad && \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}} &= \frac{1}{1.2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \\
\iff \quad && \left(\frac{1}{2}\right)^{t} &= \left(\frac{5}{6}\right)^{28} \\
\iff \quad && \frac{1}{2^t} &= \frac{5^{28}}{6^{28}} \\
\iff \quad && 2^t &= \frac{6^{28}}{5^{28}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{28} = 1.2^{28}
\end{aligned}$$

Jetzt per Taschenrechner mit `solve`: $t \approx 7.365$
Lösung mit Logarithmen und Logarithmengesetze (hier eigentlich noch nicht bekannt): $t = \log_2(1.2^{28}) = 28 \cdot \log_2(1.2) \approx 7.365$

(b) Es empfiehlt sich, bei beiden Getränken mit der gleichen Zeiteinheit zu rechnen.

Lösungsvariante 1:

(i) Sei q der Karamalzschaumwachstumsfaktor pro Sekunde. Dann gilt $3.1 = 5 \cdot q^{60} \Leftrightarrow q = \left(\frac{3.1}{5}\right)^{\frac{1}{60}} \approx 0.992064$ und damit $K(180) = 5 \cdot q^{180} \approx 1.19164$. Der Schaum steht also bei ca. 1.2 cm.

(ii) Für q_{Bier} gilt $q_{\text{Bier}} = \left(\frac{4.5}{5}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 0.992502$. Es gilt $q_{\text{Bier}} \approx 0.992502 > 0.992064 = q_{\text{Karamalz}}$ und damit zerfällt der Schaum von Karamalz schneller.

(iii) Das ist eine «Fangfrage». Die prozentuale Änderung in einer Minute beträgt zum Zeitpunkt t: $\frac{K(t+60)}{K(t)} - 1 = \frac{K_0 \cdot q^{t+60}}{K_0 \cdot q^t} - 1 = \frac{K_0 \cdot q^t q^{60}}{K_0 \cdot q^t} - 1 = q^{60} - 1$. Das heisst, die prozentuale Abnahme ist konstant und unabhängig von der Zeit. Dies gilt für *alle* exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozesse.

Lösungsvariante 2:

(i) Sei $K(t)$ die Höhe des Karamalzschaums zur Zeit t (in Sekunden).
Laut Angabe schrumpft der Karamalzschaum in 60 Sekunden von (der Anfangshöhe) 5 auf 3.1 (jeweils in Zentimeter). Diese bedeutet, dass der Wachstumsfaktor in der Zeitspanne $T_b = 60$ [Sekunden] genau $\frac{3.1}{5} = \frac{31}{50}$ beträgt.
Damit ergibt sich (Satz 20.1.11)

$$K(t) = 5 \cdot \left(\frac{31}{50}\right)^{\frac{t}{60}} = 5 \cdot \left(\frac{62}{100}\right)^{\frac{t}{60}} = 5 \cdot 0.62^{\frac{t}{60}}$$

Also hat der Schaum im Karamalzglass nach 3 Minuten (= 180 Sekunden) eine Höhe von

$$K(180) = 5 \cdot 0.62^{\frac{180}{60}} = 5 \cdot 0.62^3 = 1.19164$$

(ii) Sei $B(t)$ die Höhe des Bierschaums zur Zeit t (in Sekunden).
Laut Angabe schrumpft der Bierschaum in 14 Sekunden von (der Anfangshöhe) 5 auf 4.5 (jeweils in Zentimeter). Diese bedeutet, dass der Wachstumsfaktor in der Zeitspanne $T_b = 14$ [Sekunden] genau $\frac{4.5}{5} = \frac{9}{10}$ beträgt.
Damit ergibt sich (Satz 20.1.11)

$$B(t) = 5 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{14}} = 0.9^{\frac{t}{14}}$$

Da wir oben bereits $K(180)$ berechnet haben, berechnen wir

$$B(180) = 5 \cdot 0.9^{\frac{180}{14}} = 5 \cdot 0.9^{\frac{90}{7}} \approx 1.2902$$

Der Bierschaum steht also nach 180 Sekunden etwas höher als der Karamalzschaum. Dies bedeutet, dass der Karamalzschaum schneller zerfällt.
Wer mag, kann auch den Wachstumfaktor pro Sekunde für beide Getränkearten ausrechnen: Sei q_{Bier} der Wachstumsfaktor für Bierschaum pro Sekunde:

$$q_{\text{Bier}} = \frac{B(1)}{B(0)} = \frac{5 \cdot 0.9^{\frac{1}{14}}}{5} = 0.9^{\frac{1}{14}} \approx 0.992592496$$

Sei q_{Karamalz} der Wachstumsfaktor für Karamalzschaum pro Sekunde:

$$q_{\text{Karamalz}} = \frac{K(1)}{K(0)} = \frac{5 \cdot 0.62^{\frac{1}{60}}}{5} = 0.62^{\frac{1}{60}} \approx 0.992064391$$

Wegen $q_{\text{Karamalz}} < q_{\text{Bier}}$ schrumpft der Karamalzschaum schneller.

(iii) Dies ist eine Fangfrage. Der Wachstumsfaktor pro Minute bei Karamalz ist konstant (dies ist die charakterisierende Eigenschaft von exponentiellem Wachstum; die Zeitspanne könnte beliebig, aber fix gewählt sein).
Wer rechnen mag: Zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t+60$ ist dieser Wachstumsfaktor

$$\frac{K(t+60)}{K(60)} = \frac{5 \cdot 0.62^{\frac{t+60}{60}}}{5 \cdot 0.62^{\frac{t}{60}}} = \frac{0.62^{\frac{t+60}{60}}}{0.62^{\frac{t}{60}}} = 0.62^{\frac{t+60}{60}-\frac{t}{60}} = 0.62^{\frac{t+60-t}{60}} = 0.62^{\frac{60}{60}} = 0.62^1 = 0.62$$

Diese Zahl ist unabhängig von t.

Lösung zu A5 ex-absorption-radioaktiver-strahlung

(a) Absorptionsgesetz für Blei:

$$R(d) = R_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{0.6}} = R_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10d}{6}}$$

Hier ist d die Dicke der Bleischicht in cm und R_0 ist die Zählrate vor der Bleischicht.

(b)
- Es gilt

$$R(1) = R_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{6}}}_{\approx 0.315}$$

Nach einer Bleischicht der Dicke 1 cm sind also noch etwa 31.5 % der Strahlung vorhanden.
Antwort: Die Bleischicht der Dicke 1 cm absorbiert etwa 68.5% der Strahlung.

- Es gilt

$$R(5) = R_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{6}}}_{\approx 0.0031}$$

Nach einer Bleischicht der Dicke 5 cm sind also noch etwa 0.31 % der Strahlung vorhanden.
Antwort: Die Bleischicht der Dicke 5 cm absorbiert etwa 99.69 % der Strahlung.

Lösung zu A6 ex-exponentielles-vs-polynomiales-wachstum

Bemerkung: Am Ende der Lösung dieser Aufgabe findet sich eine Darstellung der betrachteten Graphen in einem Koordinatensystem mit logarithmischen Skalen auf beiden Achsen, das erahnen lässt, dass die Exponentialfunktionen langfristig viel schneller wachsen als die Potenzfunktionen (leider kam auch mein Zeichenprogramm bei 10^{18} in Rechenschwierigkeiten).

(a) Die richtige Reihenfolge für grosses x ist $p(x) < q(x) < f(x) < e(x)$.

(b)

Argument x	10	10^2	10^3	10^4	10^{10}
$p(x)=x^3$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{30}
$q(x)=x^{10}$	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{100}
$e(x)=2^x$	$1024 \approx 10^3$	$\approx 1.27 \cdot 10^{30}$	$\approx 1.07 \cdot 10^{301}$	$(2^{10})^{1000} \approx (10^3)^{1000} = 10^{3000}$	$(2^{10})^{10^9} \approx (10^3)^{10^9} = 10^{3'000'000'000}$
$f(x)=1.1^x$	≈ 2.6	$\approx 13'780$	$\approx 2.47 \cdot 10^{41}$	$\approx 8.45 \cdot 10^{413}$	$(1.1^{10^4})^{10^6} \approx 8.45^{10^6} \cdot (10^{413})^{10^6} \approx ?$

(c) Man kann zeigen: Etwa ab $x = 686$ liegt die rote Funktion $f(x) = 1.1^x$ über der oliven Funktion $q(x) = x^{10}$. Es gelten $f(686) \approx 2.5 \cdot 10^{28}$ und $g(686) \approx 2.3 \cdot 10^{28}$.
Wir erklären hier elementar, warum die rote Funktion ab $x = 10^4 = 10'000$ über der oliven Funktion liegt. Sei $n \geq 4$ (eine natürliche oder auch reelle Zahl) und $x = 10^n$.
Dann gilt einerseits

$$f(x) = 1.1^x = 1.1^{10^n} = 1.1^{10^2 \cdot 10^{n-2}} = 1.1^{25 \cdot 4 \cdot 10^{n-2}} = \left(1.1^{25}\right)^{4 \cdot 10^{n-2}} \overset{\text{Erklärung folgt}}{>} 10^{4 \cdot 10^{n-2}}$$

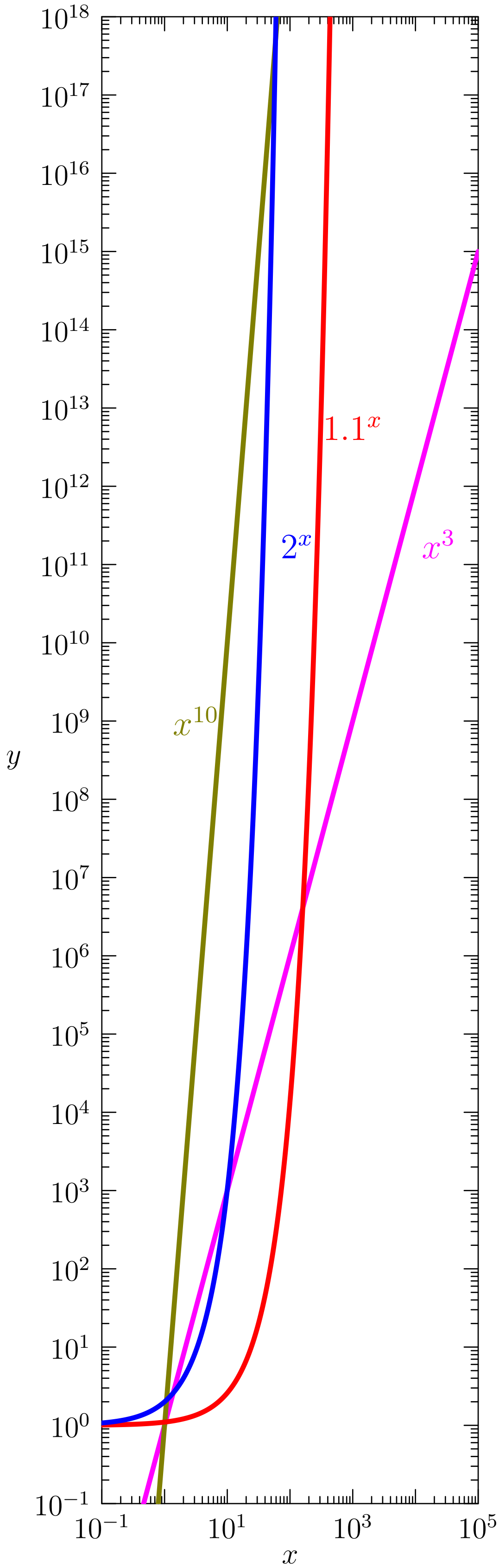
Die rechte Ungleichung gilt wegen $1.1^{25} \approx 10.8 > 10$ und streng monotonem Wachstum der Potenzfunktion $z \mapsto z^{4 \cdot 10^{n-2}}$. Rechts steht eine «Eins mit $4 \cdot 10^{n-2}$ Nullen».
Andererseits gilt

$$g(x) = x^{10} = (10^n)^{10} = 10^{10n}$$

Hier steht rechts eine «Eins mit $10n$ Nullen».
Um zu zeigen, dass $f(x) > g(x)$ gilt, genügt es also zu zeigen, dass $4 \cdot 10^{n-2} > 10n$ gilt. Dividiert man diese Ungleichung durch 10, so ist äquivalent zu zeigen, dass

$$4 \cdot 10^{n-3} > n$$

gilt. Dies ist aber klar nach unserer Annahme $n \geq 4$, denn die Zahl links ist eine «Vier mit $n-3$ Nullen» und rechts steht eine Zahl mit echt weniger Dezimalstellen. (Unsere Annahme $n \geq 4$ wurde natürlich genau so gewählt, dass dies gilt.)



Lösung zu A7 ex-spezielle-logarithmen-von-hand

a) $\lg(10'000) = 4$
b) $\lg(0.1) = -1$
c) $\lg\left(10^{23}\right) = 23$
d) $\lg(0.0001) = -4$

e) $\mathrm{lb}(1024) = 10$ f) $\mathrm{lb}(0.125) = -3$ g) $\ln(1) = 0$ h) $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

Lösung zu A8 ex-einfache-exponentialgleichungen

a) $8^x = 16 \iff x = \log_8(16) = \frac{4}{3}$ (man könnte die Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten die Basis 2 steht: $2^{3x} = 2^4$).

b) $2^x = 7 \iff x = \log_2(7) \approx 2.807$

c) $10^x = \frac{1}{2} \iff x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.3010$

d) $a^x = 7 \iff x = \log_a(7)$ e) $2^x = b \iff x = \log_2(b)$ f) $z^x = y \iff x = \log_z(y)$

Lösung zu A9 ex-logarithmen-von-hand

a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$

b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^4}\right) = \log_3\left(3^{-4}\right) = -4$

c) $\log_5(\sqrt{5}) = \log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\log_9(27) = \log_9\left(3^3\right) = \log_9\left(\left(\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) = \log_9\left(9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}$

e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{4}{3}$

f) $\log_7(1) = \log_7\left(7^0\right) = 0$

Lösung zu A10 ex-logarithmen-von-hand2

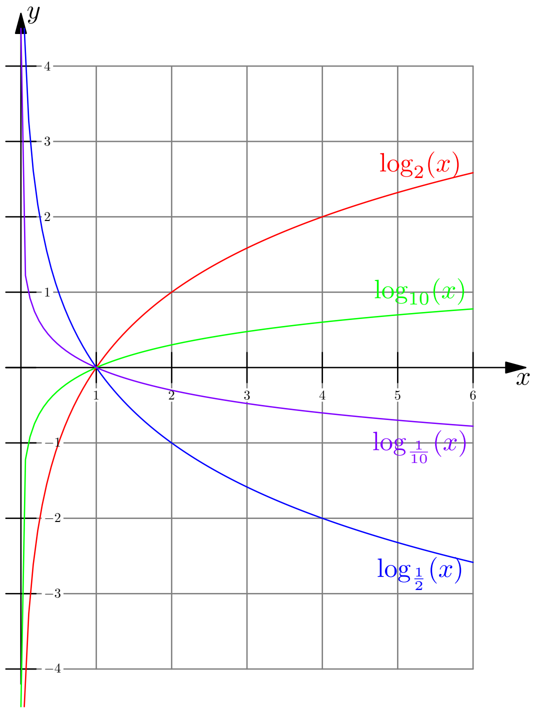
a) $3^{\log_3(7)} = 7$

b) $9^{\log_3(\sqrt{5})} = \left(3^2\right)^{\log_3(\sqrt{5})} = 3^{2\cdot\log_3(\sqrt{5})} = \left(3^{\log_3(\sqrt{5})}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

c) $2^{-\log_8(125)} = \left(2^{3\cdot\frac{1}{3}}\right)^{-\log_8(125)} = \left(\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\log_8(125)} = 8^{-\frac{1}{3}\cdot\log_8(125)} = \left(8^{\log_8(125)}\right)^{-\frac{1}{3}} = 125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

Lösung zu A11 ex-logarithmen-zeichnen

Wer mag, kann zuerst die Graphen der Funktionen 2^x, 10^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ und $\left(\frac{1}{10}\right)^x$ zeichnen und diese dann an der ersten Winkelhalbierenden spiegeln.



Lösung zu A12 ex-vorbereitung-eulersche-zahl

(a) Schätzen müssen Sie selbst.
(b) Sei g_0 das Grundkapital.
- Bei Angebot A hat man nach einem Jahr das Kapital
$$1.12 \cdot g_0$$
- Bei Angebot B hat man nach einem Jahr das Kapital
$$1.06^2 \cdot g_0 = 1.1236$$
- Bei Angebot C hat man nach einem Jahr das Kapital
$$1.04^3 \cdot g_0 = 1.124864$$

Die Wachstumsfaktoren pro Jahr (= jährlichen Zinsfaktoren) sind also 1.12 für Angebot A bzw. 1.1236 für Angebot B bzw. 1.124864 für Angebot C.
Also ist C das beste Angebot und A das schlechteste.

Lösung zu A13 ex-logarithmen-richtig-oder-falsch

(a) $\log_b(x+y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = y = 4$
(b) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) \cdot \log_b(y)$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = y = 2$
(c) $\log_b(x - y) = \log_b(x) - \log_b(y)$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = 8$, $y = 4$
(d) $\log_b\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\log_b(x)}$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = 4$
(e) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ ist korrekt: Beweis siehe Logarithmengesetze weiter unten.
(f) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_b(x)}$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = 2$
(g) $\log_b\left(x^y\right) = \left(\log_b(x)\right)^y$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = 2$, $y = 3$
(h) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$ ist korrekt: Beweis siehe Logarithmengesetze weiter unten.
(i) $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$ ist korrekt:

Die Lösung von Aufgabe A11 legt dies nahe.
1. Lösungsweg: Dies folgt sofort aus dem Basiswechsel-Gesetz, das wir bald kennenlernen werden:

$$\log_{\frac{1}{b}}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_{\frac{1}{b}}(b)} = \frac{\log_b(x)}{-1} = -\log_b(x)$$

2. Lösungsweg: Nach Definition ist $\log_{\frac{1}{b}}(x)$ diejenige (eindeutig bestimmte) Zahl e, für die $\left(\frac{1}{b}\right)^e = x$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass $-\log_b(x)$ ebenfalls diese Eigenschaft hat:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-\log_b(x)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right)^{\log_b(x)} = b^{\log_b(x)} = x$$

Dieses Gesetz ist wohl der Grund, dass man fast nur Logarithmen $\log_b$ zu Basen $b > 1$ sieht.

(j) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$ ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $b = 2$, $x = 4$, $y = 2$

Lösung zu A14

ex-beweis-erstes-logarithmengesetz

Einige Beweise des Logarithmengesetzes

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

- «Bester Beweis»: Siehe 20.4.4.
- 0. Beweismöglichkeit: Die Gleichheit behauptet, dass $\log_b(x) + \log_b(y)$ der Logarithmus von xy zur Basis b ist. Dies ist per Definition genau dann der Fall, wenn «b hoch $\log_b(x) + \log_b(y)$» das Ergebnis xy hat, was man einfach nachrechnet (mit einem Potenzgesetz):

$$b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)} = x \cdot y$$

- 1. Beweismöglichkeit: Setze $\tilde{x} = \log_b(x)$ und $\tilde{y} = \log_b(y)$. Dann gelten $x = b^{\tilde{x}}$ und $y = b^{\tilde{y}}$. Wir schreiben die linke Seite des zu beweisendes Gesetzes wie folgt um (unter Verwendung eines Potenzgesetzes und der Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion).

$$\begin{aligned}\log_b(x \cdot y) &= \log_b(b^{\tilde{x}} \cdot b^{\tilde{y}}) \\ &= \log_b(b^{\tilde{x}+\tilde{y}}) \\ &= \tilde{x} + \tilde{y} \\ &= \log_b(x) + \log_b(y)\end{aligned}$$

- 2. Beweismöglichkeit: Die zu beweisende Gleichung ist gleichbedeutend zu

$$b^{\log_b(x \cdot y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$$

(denn diese Gleichung entsteht aus der zu beweisenden per $b^?$ und die zu beweisende Gleichung entsteht aus dieser per $\log_b(?)$).
Es genügt also, diese Gleichung zu beweisen, was wie folgt geschieht (Gleichungskette eventuell von links und rechts bis xy lesen).

$$b^{\log_b(x \cdot y)} = x \cdot y = b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$$

- 3. Beweismöglichkeit:
  - Das Diagramm rechts ist kommutativ, denn für jedes x in $\mathbb{R}$ gilt

$$\exp_b(x) \cdot b^{\tilde{y}} = b^x \cdot b^{\tilde{y}} = b^{x+\tilde{y}} = \exp_b(x + \tilde{y})$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] \arrow[d, "+\tilde{y}"] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "\cdot b^{\tilde{y}}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] & \mathbb{R}^+ \end{tikzcd}$$

- Da die beiden horizontalen Pfeile bijektiv sind, kann man sie durch ihre Umkehrfunktionen ersetzen und erhält wieder ein bijektives Diagramm, das rechts dargestellt ist.
- In diesem Diagramm haben wir ausserdem (erlaubterweise) die vertikalen Abbildungen durch $y = b^{\tilde{y}}$ ausgedrückt (dieser Zusammenhang zwischen y und $\tilde{y}$ ist gleichbedeutend zu $\tilde{y} = \log_b(y)$).
  (Man kann hier also entweder $y \in \mathbb{R}^+$ oder $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig wählen und die andere Zahl entsprechend definieren.)
- Die Kommutativität dieses Diagramms besagt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ (also der Menge rechts oben) gilt

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "+\tilde{y}=+\log_b(y)"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[l, "\log_b"'] \arrow[d, "\cdot b^{\tilde{y}}=\cdot y"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}^+ \arrow[l, "\log_b"]
\end{tikzcd}
$$

$$\log_b(x) + \log_b(y) = \log_b(x \cdot y)$$

Das beweist das Logarithmengesetz, da x, $y \in \mathbb{R}^+$ (und $b \in \mathbb{R}^+$) beliebig sind.

Lösung zu A15 ex-beweis-zweites-logarithmengesetz

Einige Beweise des Logarithmengesetzes

$$\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$$

- 0. Beweismöglichkeit: Die Gleichheit behauptet, dass $z \log_b(x)$ der Logarithmus von x^z zur Basis b ist. Dies ist per Definition genau dann der Fall, wenn «b hoch $z \log_b(x)$» das Ergebnis x^z hat, was man wie folgt nachrechnet:

$$b^{z \log_b(x)} = b^{\log_b(x) z} = \left(b^{\log_b(x)}\right)^z = x^z$$

- 1. Beweismöglichkeit: Setze $\tilde{x} = \log_b(x)$, so dass $x = b^{\tilde{x}}$ gilt. Wir schreiben die linke Seite des zu beweisenden Gesetzes wie folgt um (unter Verwendung eines Potenzgesetzes und der Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion).

$$\begin{aligned}
\log_b(x^z) &= \log_b((b^{\tilde{x}})^z) \\
&= \log_b(b^{\tilde{x}z}) \\
&= \tilde{x}z \\
&= z\tilde{x} \\
&= z \log_b(x)
\end{aligned}$$

- 2. Beweismöglichkeit: Die zu beweisende Gleichung ist gleichbedeutend zu

$$b^{\log_b(x^z)} = b^{z \log_b(x)}$$

(denn diese Gleichung entsteht aus der zu beweisenden per $b^?$ und die zu beweisende Gleichung entsteht aus dieser per $\log_b(?)$).
Es genügt also, diese Gleichung zu beweisen, was wie folgt geschieht.

$$b^{\log_b(x^z)} = x^z = \left(b^{\log_b(x)}\right)^z = b^{\log_b(x) z} = b^{z \log_b(x)}$$

- Die zu beweisende Gleichheit ist gleichbedeutend dazu, dass das Diagramm rechts für alle $z \in \mathbb{R}$ und alle $b \in \mathbb{R}^+$ kommutativ ist (was zu beweisen ist).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "z\cdot"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[l, "\log_b"'] \arrow[d, "(\cdot)^z"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}^+ \arrow[l, "\log_b"]
\end{tikzcd}
$$

Da die beiden horizontalen Pfeile/Abbildungen im obigen Diagramm bijektiv sind, genügt es zu zeigen, dass das rechts dargestellte Diagramm kommutativ ist.
Dies rechnet man einfach nach: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ (der Menge links oben) gilt

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] \arrow[d, "z\cdot"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "(\cdot)^z"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\exp_b"] & \mathbb{R}^+
\end{tikzcd}
$$

$$(\exp_b(x))^z = (b^x)^z = b^{xz} = b^{zx} = \exp_b(z \cdot x)$$

Lösung zu A16 ex-beweis-der-folgerungen-aus-den-logarithmengesetzen

(a) «Linkes Gesetz»

$$\begin{aligned}\log_b\left(\frac{1}{x}\right) &= \log_b(x^{-1})\\ &= (-1)\cdot\log_b(x)\\ &= -\log_b(x)\end{aligned}$$

«Rechtes Gesetz»

$$\begin{aligned}\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(xy^{-1})\\ &= \log_b(x)+\log_b(y^{-1})\\ &= \log_b(x)+(-1)\log_b(y)\\ &= \log_b(x)-\log_b(y)\end{aligned}$$

Alternativ: Das linke Gesetz ist ein Spezialfall des rechten, denn

$$\log_b\left(\frac{1}{y}\right) = \log_b(1)-\log_b(y) = -\log_b(y)$$

(b)
- 1. Lösungsweg:
  Das zu beweisende Gesetz ist gleichbedeutend zu (per Multiplikation mit/Division durch $\log_c(b)$)

  $$\log_b(x)\cdot\log_c(b) = \log_c(x)$$

  Um diese Gleichheit zu beweisen, schreiben wir die linke Seite wie folgt um (mit dem Logarithmengesetz $z\log_b(x) = \log_b(x^z)$ und der Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion).

  $$\log_b(x)\cdot\log_c(b) = \log_c(b^{\log_b(x)}) = \log_c(x)$$

  Bemerkung/Achtung: Die linke Seite kann man auch schreiben als $\log_b(x)\cdot\log_c(b) = \log_b(x^{\log_c(b)})$, was aber nicht zielführend ist. Man muss also den richtigen der beiden Faktoren in den Logarithmus «hineinspringen» lassen.
- 2. Lösungsweg:
  Setze $z := \log_b(x)$. Auf diese Gleichung wenden wir diverse Äquivalenzumformungen an:

  $$\begin{array}{clll} & z = \log_b(x) & & \text{laut Definition}\\ \iff & b^z = x & & \log_c(?)\text{ anwenden}\\ \iff & \log_c(b^z) = \log_c(x) & & \text{Logarithmengesetz anwenden}\\ \iff & z\log_c(b) = \log_c(x) & & \text{nach } z \text{ auflösen}\\ \iff & z = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(b)} & & \end{array}$$

  Dies zeigt, dass $z = \log_b(x)$ gleichbedeutend zu $z = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$ ist, dass also das Basiswechselgesetz gilt.

Lösung zu A17 ex-logarithmen-zerlegen

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right) = \log(a)+\log(b)-\log(a+b)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{4}\log(x)-\log(x+y)-\log(x-y)$

c) $\log_a\left(\frac{a\cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right) = \log_a(a)+\log_a(b^c)-\log_a(a^{\frac{1}{n}}) = 1+c\log_a(b)-\frac{1}{n}\cdot\log_a(a) = 1+c\log_a(b)-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}+c\log_a(b)$
Die Lösung $1-\frac{1}{n}+c\log_a(b)$ ist natürlich auch korrekt.

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{999}{1000}\right) = (\ln(1)-\ln(2))+(\ln(2)-\ln(3))+\ldots+\ln(999)-\ln(1000) = \ln(1)-\ln(1000) = 0-\ln\left((2\cdot5)^3\right) = -3\cdot(\ln(2)+\ln(5))$
Die Lösung $\ln(1)-\ln(1000)$ ist natürlich auch korrekt.

Lösung zu A18 ex-logarithmen-zusammenfassen

a) $\log(b) - \log(c+d) = \log\left(\frac{b}{c+d}\right)$

b) $2\log(x) + 3\log(y) - 5\log(z) = \log\left(x^2\right) + \log\left(y^3\right) - \log\left(z^5\right) = \log\left(\frac{x^2 y^3}{z^5}\right)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2\log(c)) - \frac{1}{2}(5\log(d) + \log(f)) = \log\left(\frac{\sqrt[3]{b \cdot c^2}}{\sqrt{d^5 f}}\right)$

d) $\ln(a+b) + 1 = \ln(a+b) + \ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}(a+b))$

Lösung zu A19 ex-andere-identitaeten

(a)

$$\log_{\frac{1}{b}}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\ln(x)}{-\ln(b)} = -\frac{\ln(x)}{\ln(b)} = -\log_b(x)$$

Alternative: Die Umformung

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-\log_b(x)} = b^{\log_b(x)} = x$$

zeigt, dass $-\log_b(x)$ die (eindeutige) Antwort auf die Frage «$\frac{1}{b}$ hoch was ist x» ist. Daraus folgt die behauptete Gleichheit.

(b)

$$\frac{1}{\log_x(y)} = \frac{1}{\frac{\ln(y)}{\ln(x)}} = \frac{\ln(x)}{\ln(y)} = \log_y(x)$$

(c)

$$\frac{1}{\log_{ab}(x)} = \frac{1}{\frac{\ln(x)}{\ln(ab)}} = \frac{\ln(ab)}{\ln(x)} = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(x)} = \frac{\ln(b)}{\ln(x)} + \frac{\ln(b)}{\ln(x)} = \frac{1}{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} + \frac{1}{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = \frac{1}{\log_b(x)} + \frac{1}{\log_b(x)}$$

Lösung zu A20 ex-alles-per-exp-und-ln

a) $5^x = \exp(x\ln(5))$

b) $a^b = \exp(b\ln(a))$

c) $x^x = \exp(x\ln(x))$

d) $(x+3)^{x+5} = \exp((x+5)\ln(x+3))$

e) $\cancel{(x+3)^{x+5}}$; war doppelt

f) $3^x \cdot 7^{2x} = \exp(x\ln(3)) \cdot \exp(2x\ln(7)) = \exp(x\ln(3) + 2x\ln(7))$

g) $\log_x(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(x)}$

h) $\log_3(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$

i) $\log_x(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1$ (da $x^1 = x$)

j) $\log_{x+3}(x+5) = \frac{\ln(x+5)}{\ln(x+3)}$

k) $c^{\log_c(a)} = \exp(\log_c(a)\ln(c)) = \exp(\frac{\ln(a)}{\ln(c)}\ln(c)) = \exp(\ln(a)) = a$

l) $2^{5\log_2(5)} \cdot 3^{-4\log_3(5)}$. Das Ergebnis ist 5.
Klassisch:

$$\begin{aligned}2^{5\log_2(5)} \cdot 3^{-4\log_3(5)} &= 2^{\log_2(5^5)} \cdot 3^{\log_3(5^{-4})}\\ &= 5^5 \cdot 5^{-4}\\ &= 5^{5-4}\\ &= 5\end{aligned}$$

oder per $2^{5\log_2(5)} = (2^{\log_2(5)})^5 = 5^5$ und analog $3^{-4\log_3(5)} = (3^{\log_3(5)})^{-4} = 5^{-4}$.
«Neu»:

$$\begin{aligned}2^{5\log_2(5)} \cdot 3^{-4\log_3(5)} &= \exp(5\log_2(5)\ln(2)) \cdot \exp(-4\log_3(5)\ln(3))\\ &= \exp\left(5\frac{\ln(5)}{\ln(2)}\ln(2)\right) \cdot \exp\left(-4\frac{\ln(5)}{\ln(3)}\ln(3)\right)\\ &= \exp(5\ln(5)) \cdot \exp(-4\ln(5))\\ &= 5^5 \cdot 5^{-4}\\ &= 5^{5-4}\\ &= 5\end{aligned}$$

Lösung zu A21 ex-alles-per-expc-und-logc
Die zweite Aussage wird zu $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$, was der übliche Basiswechsel ist.

Die erste Aussage wird zu $b^x = c^{x\log_c(b)} = \exp_c(x\log_c(b))$ und wird so bewiesen:

$$b^x = \exp_c(\log_c(b^x)) = \exp_c(x\log_c(b))$$

Wer die Schreibweise $c^?$ der Schreibweise $\exp_c(?)$ vorzieht, beweist es so:

$$b^x = c^{\log_c(b^x)} = c^{x\log_c(b)}$$

Lösung zu A22 ex-umschreiben-so-dass-nur-ln-von-primzahlen
Lösung

a)

$$\begin{aligned}\ln(\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{7}) &= \ln(\tfrac{21+5}{35})\\ &= \ln(\tfrac{26}{35})\\ &= \ln(26) - \ln(35)\\ &= \ln(2) + \ln(13) - \ln(5) - \ln(7)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\ln(\tfrac{3}{5}e^{2025} + \tfrac{1}{7}e^{2025}) &= \ln(\tfrac{26e^{2025}}{35})\\ &= \ln(26) + \ln(e^{2025}) - \ln(35)\\ &= \ln(2) + \ln(13) + 2025\ln(e) - \ln(5) - \ln(7)\\ &= \ln(2) + \ln(13) + 2025 - \ln(5) - \ln(7)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\log_{54}(2025) &= \frac{\ln(2025)}{\ln(54)}\\ &= \frac{\ln(5\cdot 405)}{\ln(2\cdot 27)}\\ &= \frac{\ln(5^2\cdot 81)}{\ln(2\cdot 27)}\\ &= \frac{\ln(5^2\cdot 3^4)}{\ln(2\cdot 3^3)}\\ &= \frac{2\ln(5)+4\ln(3)}{\ln(2)+3\ln(3)}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{4}}(\tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{3}) &= \frac{\ln(\frac{9-8}{12})}{\ln(\frac{1}{4})}\\ &= \frac{\ln(\frac{1}{12})}{-\ln(4)}\\ &= \frac{-\ln(12)}{-\ln(4)}\\ &= \frac{-\ln(3)-\ln(4)}{-\ln(4)}\\ &= \frac{\ln(3)+\ln(4)}{\ln(4)}\\ &= 1+\frac{\ln(3)}{\ln(4)}\end{aligned}$$

Lösung zu A23 ex-expgleichungen-loesen

a)

$$\begin{aligned}e^x &= \pi && |\ln\\ x &= \ln(\pi)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3^x &= 5^{x+2} && |\ln\\ x\ln(3) &= (x+2)\ln(5)\\ x\ln(3)-x\ln(5) &= 2\ln(5)\\ x(\ln(3)-\ln(5)) &= 2\ln(5)\\ x &= \frac{2\ln(5)}{\ln(3)-\ln(5)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3^x &= 5^x && \mid \ln \\ x\ln(3) &= x\ln(5) \\ x\ln(3) - x\ln(5) &= 0 \\ x(\ln(3) - \ln(5)) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Gerne Probe durchführen.

d) Man kann auch ln anwenden.

$$\begin{aligned} 10^{\frac{x}{x+1}} &= 0.8 && \mid \lg \\ \frac{x}{x+1} &= \lg(0.8) \\ x &= \lg(0.8)(x+1) \\ x(1-\lg(0.8)) &= \lg(0.8) \\ x &= \frac{\lg(0.8)}{1-\lg(0.8)} \\ &\stackrel{\text{Basiswechsel}}{=} \frac{\frac{\ln(0.8)}{\ln(10)}}{1-\frac{\ln(0.8)}{\ln(10)}} \\ &= \frac{\ln(0.8)}{\ln(10)-\ln(0.8)} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 2^{4x} + 2^{4x+5} &= 99 \\ 2^{4x} + 2^{4x}\cdot 2^5 &= 99 \\ 2^{4x}(1+32) &= 99 \\ 2^{4x} &= \frac{99}{33} = 3 \\ 4x &= \log_2(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \\ x &= \frac{1}{4}\log_2(3) = \frac{1}{4}\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Gerne Probe durchführen.

f)

$$\begin{aligned} 2^{3x} &= 3^{2x}\cdot 5 && \mid \ln \\ 3x\ln(2) &= 2x\ln(3) + \ln(5) \\ x(3\ln(2) - 2\ln(3)) &= \ln(5) \\ x &= \frac{\ln(5)}{3\ln(2)-2\ln(3)} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
2^{x^2} &= 5 && \mid \ln\\
x^2\ln(2) &= \ln(5)\\
x^2 &= \frac{\ln(5)}{\ln(2)}\\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{\ln(5)}{\ln(2)}}\\
&\approx \begin{cases}\pm 1.523787417879332\end{cases}
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
5\cdot 2^{x^2} &= 1 && \mid \ln\\
\ln(5) + x^2\ln(2) &= 0\\
x^2 &= -\frac{\ln(5)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Wegen $\ln(5) > 0$ und $\ln(2) > 0$ ist die rechte Seite negativ, also gibt es keine Lösung (da keine Wurzel negativer Zahlen).

i)

$$\begin{aligned}
2^{x^2} &= 5\cdot 3^x && \mid \ln\\
x^2\ln(2) &= \ln(5) + x\ln(3)\\
\ln(2)x^2 - \ln(3)x - \ln(5) &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{\ln(3) \pm \sqrt{\ln(3)^2 + 4\ln(2)\ln(5)}}{2\ln(2)}\\
&\approx \begin{cases}2.5100244454681797\\ -0.9250619447470232\end{cases}
\end{aligned}$$

Lösung zu A24 ex-loggleichungen-loesen

a)

$$\begin{aligned}
\log_3(7x) &= 2 && 3^{(\cdot)}\\
7x &= 9 && \mid :7\\
x &= \frac{9}{7} && \text{Probe: ok}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\log_2(x+4) &= \log_2(2x+2) && \mid 2^{(\cdot)}\\
x+4 &= 2x+2 && \mid -x-2\\
2 &= x && \text{Probe: ok}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \log_7(x-42) &= \log_7(2x-23) && |7^{(\cdot)} \\ x-42 &= 2x-23 && |-x+23 \\ -19 &= x && \text{Probe: Logarithmus von negativer Zahl. Keine Lösung} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \log_2(x+4) &= \log_4(x+6) && |\text{Basiswechsel} \\ \log_2(x+4) &= \frac{\log_2(x+6)}{\log_2(4)} \\ \log_2(x+4) &= \frac{\log_2(x+6)}{2} && |2^{(\cdot)} \\ x+4 &= \left(2^{\log_2(x+6)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x+4 &= \sqrt{x+6} && |(\cdot)^2 \\ x^2+8x+16 &= x+6 && |-x-6 \\ x^2+7x+10 &= 0 && \text{quadratische Gleichung} \\ x_{1,2} &= \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7\pm 3}{2} \\ x_1 &= -2 && \text{Probe: ok} \\ x_2 &= -5 && \text{Probe: Logarithmus von negativer Zahl undefiniert.} \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $x=-2$.

Lösung zu A25 ex-log-richtig-gerechnet

(a) $2\lg(x)=2$, d. h. $\lg(x)=1$, also $x=10$.
Ist korrekt (höchstens Probe vergessen).

(b) $2\lg(x)=2$, d. h. $\lg(x^2)=2$, also $x^2=100$, d. h. $x=\pm 10$.
Nicht korrekt; widerspricht auch (a). Hier muss man die Probe machen: Die Lösung $x=10$ stimmt, aber $x=-10$ darf man nicht in die Ausgangsgleichung einsetzen, da das Argument einer Logarithmusfunktion stets positiv sein muss.

(c) $\lg(x^2)=(\lg(x))^2$, d. h. $2\lg(x)=(\lg(x))^2$, also $2=\lg(x)$, d. h. $x=100$.
Die Lösung stimmt, aber nicht alle Lösungen wurden gefunden. Dividieren durch $\lg(x)$ ist nur erlaubt, wenn $\lg(x)\neq 0$. Man muss deshalb noch den Fall $\lg(x)=0$ betrachten. Dieser führt direkt zu $x=1$, was auch eine Lösung ist (Probe!).

Lösung zu A26 ex-schwierigere-logarithmengleichungen

(a) 1. Lösungsweg:

$$\begin{aligned} \log_{10}(x+3)+\log_{10}(x) &= 1 && \text{Logarithmengesetz} \\ \log_{10}((x+3)x) &= 1 && \text{Definition des Logarithmus} \\ (x+3)x &= 10^1 \\ x^2+3x-10 &= 0 && \text{Mitternachtsformel} \\ x_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Achtung: $x = -5$ ist keine Lösung, denn wenn man in die Ausgangsgleichung $x = -5$ einsetzt, ist der erste Summand $\log_{10}(-5+2)$ nicht definiert. Wenn man $x = 2$ einsetzt, ist alles in Ordnung.
Statt diesen Test nachträglich zu machen, könnte man auch zuerst feststellen, dass die Gleichung nur sinnvoll ist, falls $x + 3 > 0$ und $x > 0$ gelten, also zusammengenommen $x > 0$. Dies bedeutet, dass die „maximale sinnvolle Definitionsmenge" der Gleichung $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ ist. In den obigen Umformungen ist dann stets $x > 0$ anzunehmen, weshalb man beim Anwenden der Mitternachtsformel die Lösung -5 weglassen sollte. Dann sind alle obigen Umformungen Äquivalenzumformungen.

2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
\log_{10}(x+3) + \log_{10}(x) &= 1 && \text{10 hoch ?}\\
10^{\log_{10}(x+3)+\log_{10}(x)} &= 10^1 &&\\
10^{\log_{10}(x+3)} \cdot 10^{\log_{10}(x)} &= 10 && b^{\log_b(z)} = z \text{ da Umkehrfunktion}\\
(x+3)x &= 10 &&\\
x^2 + 3x - 10 &= 0 && \text{Mitternachtsformel}\\
x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases} &&
\end{aligned}$$

Auch hier ist nur $x = 2$ eine Lösung der Ausgangsgleichung.

(b)

$$\begin{aligned}
\log_6(\log_2(x)) &= 1 && \text{Definition des Logarithmus oder } 6^?\\
\log_2(x) &= 6^1 = 6 && \text{Definition des Logarithmus oder } 2^?\\
x &= 2^6 = 64 &&
\end{aligned}$$

Dies ist wirklich eine Lösung (Probe $\log_6(\log_2(64)) = \log_6(6) = 1$ oder: Die Definitionsmenge der Ausgangsgleichung ist $\mathbb{R}^+$ und für alle $x > 0$ sind die obigen Umformungen Äquivalenzumformungen).

(c)

$$\begin{aligned}
\log_2(x+9) &= 4 + \log_2(x-6) && 2^?\\
x + 9 &= 2^{4+\log_2(x-6)} &&\\
x + 9 &= 2^4 \cdot 2^{\log_2(x-6)} &&\\
x + 9 &= 16(x-6) &&\\
x + 9 &= 16x - 96 &&\\
105 &= 15x &&\\
7 &= x &&
\end{aligned}$$

Dies ist wirklich eine Lösung (etwa per Probe).

(d)

$$\begin{aligned}
3^{7-2x} &= 243 &&\\
3^{7-2x} &= 3^5 && \text{3er-Logarithmus}\\
7 - 2x &= 5 &&\\
2 &= 2x &&\\
1 &= x &&
\end{aligned}$$

Dies ist wirklich eine Lösung (etwa per Probe).

(e) Per Basiswechsel $\log_b(z) = \frac{\log_c(z)}{\log_c(b)}$:

$$x = \log_4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{1}{8}\right)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2\left(2^{-3}\right)}{2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Alternative Lösung (Idee: Argument als Potenz mit Basis 4 schreibe):

$$x = \log_4\left(\frac{1}{8}\right) = \log_4\left(2^{-3}\right) = \log_4\left(2^{2\cdot\frac{-3}{2}}\right) = \log_4\left(\left(2^2\right)^{\frac{-3}{2}}\right) = \log_4\left(4^{\frac{-3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}$$

Alternative Lösung:

$$
\begin{aligned}
\log_4\left(\frac{1}{8}\right) &= x && 4^? \\
\frac{1}{8} &= 4^x && \text{kleine Idee} \\
\frac{1}{4\cdot\sqrt{4}} &= 4^x \\
\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} &= 4^x \\
4^{-\frac{3}{2}} &= 4^x && \text{4er-Logarithmus} \\
-\frac{3}{2} &= x
\end{aligned}
$$

Lösung zu A27 ex-log-verstaendnis

Alle Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen.

(a) Was ist die Umkehrfunktion von $\log_2(x)$?
$f(x) = 2^x$

(b) Was ist die Umkehrfunktion von x^2? Was müsste man bei dieser Frage genaugenommen noch erwähnen?
$f(x) = \sqrt{x}$. Genaugenommen muss man x^2 als Funktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ auffassen (also Definitions- und Wertebereich angeben).

(c) Was ist die Umkehrfunktion von e^x?
$\log_e(x) = \ln(x)$

(d) Was ist grösser, $\log_{10}(7)$ oder $\log_{10}(8)$?
Da $10 > 1$ gilt, ist $\log_{10}$ streng monoton wachsend, also folgt aus $7 < 8$, dass $\log_{10}(7) < \log_{10}(8)$.

(e) Was ist grösser, $\log_{0.1}(7)$ oder $\log_{0.1}(8)$?
Da $0.1 < 1$ gilt, ist $\log_{0.1}$ streng monoton fallend, also folgt aus $7 < 8$, dass $\log_{0.1}(7) > \log_{0.1}(8)$.
Könnte auch $\log_{\frac{1}{10}}(x) = -\log_{10}(x)$ verwenden und die vorherige Aufgabe.

(f) Ist $\log_{13}(2)$ positiv oder negativ?
$\log_{13}(x)$ ist streng monoton wachsend. Aus $1 < 2$ folgt $0 = \log_{13}(1) < \log_{13}(2)$, also ist $\log_{13}(2)$ positiv.

(g) Ist $\log_{0.8}(2)$ positiv oder negativ?
$\log_{0.8}(x)$ ist streng monoton fallend. Aus $1 < 2$ folgt $0 = \log_{0.8}(1) > \log_{0.8}(2)$, also ist $\log_{0.8}(2)$ negativ.

(h) Warum kann man alle Logarithmen berechnen, wenn man (etwa mit dem Taschenrechner) $\ln(x)$ berechnen kann?
Wegen Basiswechsel: $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

(i) Was ist grösser, $\log_3(2)$ oder $\log_2(3)$?
Wir erklären zwei Lösungswege:
Lösung 1: Sowohl $\log_3$ als auch $\log_2$ sind streng monoton wachsend. Aus $2 < 3$ folgen also $\log_3(2) < \log_3(3) = 1$ und $1 = \log_2(2) < \log_2(3)$, insgesamt also $\log_3(2) < 1 < \log_2(3)$, also $\log_3(2) < \log_2(3)$.

Lösung 2: Wegen Basiswechsel ist zu entscheiden ob $\log_3(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \boxed{\overset{?}{<}} \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \log_2(3)$ gilt oder nicht. Multiplikation dieser fraglichen Ungleichung mit $\ln(2)\cdot\ln(3)$ liefert äquivalent (beachte, dass $\ln(2) > 0$ und $\ln(3) > 0$ gilt, das Ungleichheitszeichen also nicht seine Richtung ändert) $\ln(2)^2 \boxed{\overset{?}{<}} \ln(3)^2$. Weil beide Seiten positiv sind, liefert Wurzelziehen die äquivalente fragliche Ungleichung $\ln(2) \boxed{\overset{?}{<}} \ln(3)$. Diese gilt aber, da $\ln(x) = \log_e(x)$ streng monoton wachsend ist (wegen $1 < e \approx 2.718\ldots$).
Fazit: Es gilt $\log_3(2) < \log_2(3)$. (Nun gerne per Taschenrechner testen.)

(j) Wenn man auf eine Gleichung ln oder lg anwendet, wie unterscheiden sich die beiden erhaltenen Gleichungen?
Wegen $\lg(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ unterscheiden sie sich um den Faktor $\frac{1}{\ln(10)}$ (bzw. den Faktor $\ln(10)$ in der anderen Richtung).

Lösung zu A28 ex-repe-logarithmen-von-hand

a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$

b) $5^{\log_5(10)} = 10$

c) $125^{\log_5(4)} = \left(5^3\right)^{\log_5(4)} = 5^{3\cdot\log_5(4)} = \left(5^{\log_5(4)}\right)^3 = 4^3 = 64$

Lösung zu A29 ex-log-basiswechsel-verwenden

a) $\log_{16}(8) = \log_{16}\left(2^3\right) = \log_{16}\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3\right) = \log_{16}\left(16^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$

Oder $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{3}{4}$.

b) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}\right) = \log_{27}\left(3^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(27^{-\frac{2}{9}}\right) = -\frac{2}{9}$

Oder: $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) = \frac{\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)}{\log_3(27)} = \frac{\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right)}{3} = \frac{\log_3\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}\right)}{3} = \frac{\log_3\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)}{3} = \frac{-\frac{2}{3}}{3} = -\frac{2}{9}$

c) $5^{\log_{125}(8)} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{125}(8)} = 125^{\frac{1}{3}\cdot\log_{125}(8)} = \left(125^{\log_{125}(8)}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

Oder: $5^{\log_{125}(8)} = 5^{\frac{\log_5(8)}{\log_5(125)}} = 5^{\frac{\log_5(8)}{3}} = \left(5^{\log_5(8)}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

d) $x = \log_8(16) = \frac{\log_2(16)}{\log_2(8)} = \frac{4}{3}$.

e) $\log_9(27) = \frac{\log_3(27)}{\log_3(9)} = \frac{3}{2}$

f) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \frac{\log_{16}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)}{\log_{16}(2)} = \frac{\log_{16}\left(16^{-\frac{1}{3}}\right)}{\frac{\log_2(2)}{\log_2(16)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$

g) $9^{\log_3(\sqrt{5})} = 9^{\frac{\log_9(\sqrt{5})}{\log_9(3)}} = \left(9^{\log_9(\sqrt{5})}\right)^{\frac{1}{\log_9(3)}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{\log_9(3)}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{\frac{\log_3(3)}{\log_3(9)}}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = (\sqrt{5})^2 = 5$

h) $2^{-\log_8(125)} = 2^{-\frac{\log_2(125)}{\log_2(8)}} = 2^{-\frac{\log_2(125)}{3}} = \left(2^{\log_2(125)}\right)^{-\frac{1}{3}} = 125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(125)}} = \frac{1}{5}$