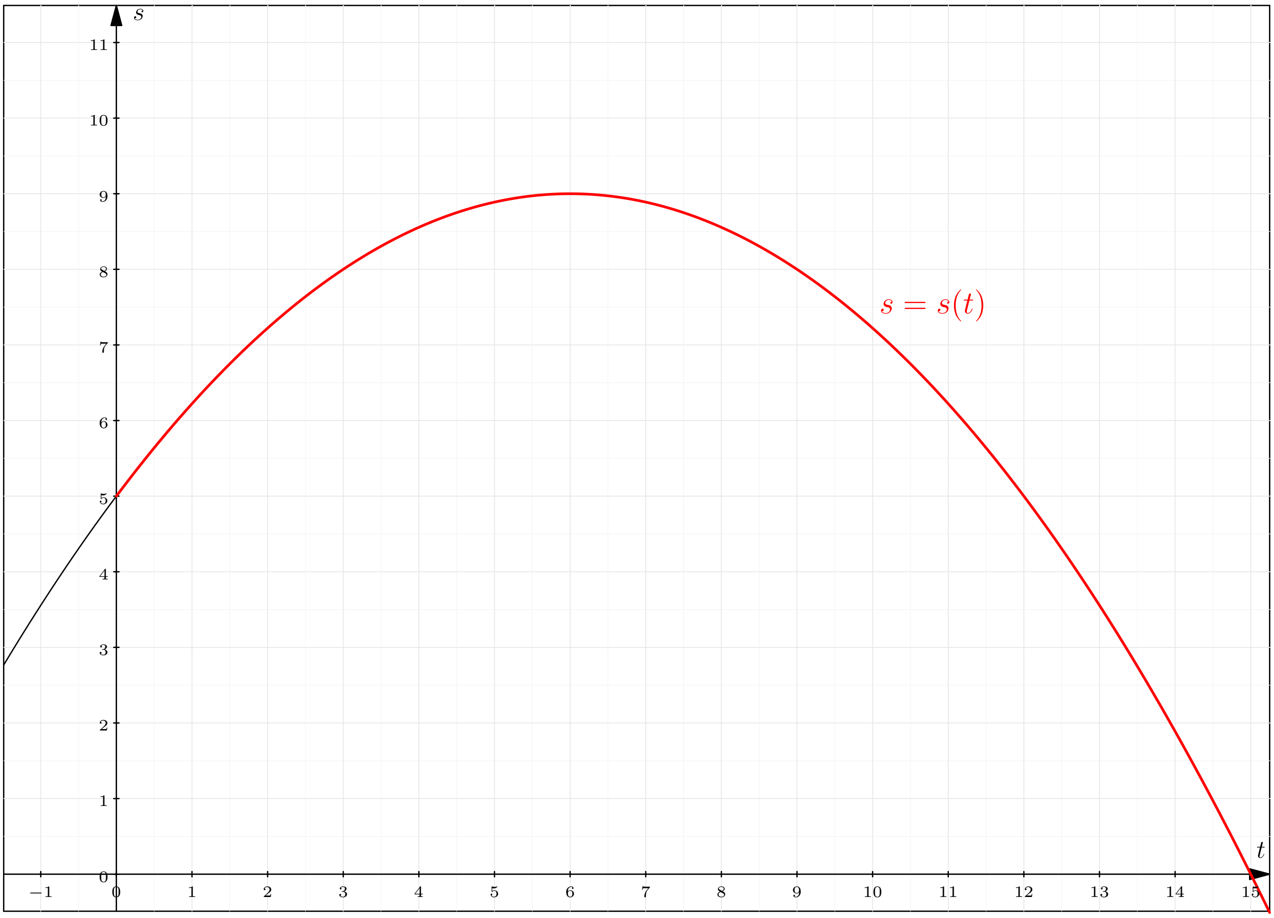
18 Differentialrechnung

18.1 Motivation

Aufgabe A1 Auf einem Planeten (mit geeigneter Fallbeschleunigung) wird ein Ball von einem Turm der Höhe 5 m senkrecht nach oben geworfen. Seine Höhe $s(t)$ (in Meter) zur Zeit t (in Sekunden) ist in dem folgenden s-t-Koordinatensystem dargestellt in Rot dargestellt.



Löse die folgenden Aufgaben durch möglichst genaues Ablesen und Rechnen.

(a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Ball während des Zeitintervalls $[0, 6]$, also in den ersten 6 Sekunden seines Flugs.)
Wie kann man diese Durchschnittsgeschwindigkeit mit Hilfe einer geeigneten Geraden interpretieren?

(b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Ball während des Zeitintervalls $[0, 2]$? Zeichne auch hier die entsprechende Gerade ein.

(c) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Ball während des Zeitintervalls $[0, 1]$? Zeichne auch hier die entsprechende Gerade ein.

(d) Welche (Momentan-)Geschwindigkeit hat der Ball beim Abwurf, also zur Zeit $t = 0$?
Wie kann man diese Geschwindigkeit geometrisch interpretieren?

Nutze ab jetzt die folgende Zusatzinformation: Der dargestellte Graph ist der Graph der Funktion

$$s(t) = -\frac{1}{9}(t-6)^2 + 9$$

(e) Berechne die zuvor abgelesene Durchschnittsgeschwindigkeit des Balls während des Zeitintervalls $[0, 1]$ exakt (ohne Taschenrechner).

(f) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $[0, 0.1]$ exakt (ab jetzt meinetwegen mit Taschenrechner).

(g) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $[0, 0.01]$ exakt.

(h) Wie gross ist (vermutlich) die Geschwindigkeit $v(0)$ des Balls zur Zeit $t = 0$?
Kannst du diese Geschwindigkeit als Grenzwert definieren?

(i) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Balls während der folgenden Zeitintervalle:
(Das Anlegen einer Tabelle (zurückgelegte Strecke, benötigte Zeit, Geschwindigkeit) ist erlaubt.)

$[3, 4]$ $\quad$ $[3, 3.1]$ $\quad$ $[3, 3.01]$ $\quad$ $[3, 3.001]$

(j) Wie gross ist (vermutlich) die Geschwindigkeit $v(3)$ des Balls zur Zeit $t = 3$?

(k) Zeichne die Tangente an den Graphen bei $t = 3$ ein. Welche Steigung hat sie?

(l) Welche Geschwindigkeit hat der Ball zur Zeit $t = 6$?

(m) Welche Geschwindigkeit hat der Ball zur Zeit $t = 12$? (Sie ist nun negativ.)

(n) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Ball im Zeitintervall $[0, 12]$? Sagt diese Durchschnittsgeschwindigkeit viel über die Bewegung des Balles aus?

(o) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Ball im Zeitintervall $[0, 15]$?

(p) Wenn die dargestellte Kurve die Temperatur $T(t)$ (in Grad Celsius) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) darstellt. Wie würdest du die zuvor berechneten Geschwindigkeiten in Worten beschreiben? In welcher Einheit werden sie gemessen?

(q) Beantworte dieselbe Frage, wenn die dargestellte Kurve den Luftdruck $p(t)$ (in hPa) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) darstellt.

(r) Beantworte dieselbe Frage, wenn die dargestellte Kurve die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) darstellt. Wie bezeichnet man in der Physik die «Geschwindigkeit der Geschwindigkeit»?

18.2 Ableitung (informell)

18.2.1. Die folgende Definition der Ableitung einer Funktion ist informell, denn sie beruht auf dem Begriff «Tangente» (= Berührgerade), den wir in diesem Kontext noch nicht kennen. Später werden wir umgekehrt vorgehen und zuerst die Ableitung definieren und darauf aufbauend die Tangente an einen Punkt eines Graphen.

Definition 18.2.2 Ableitung einer Funktion an einer Stelle (informell)

Die **Ableitung** $f'(7)$ **einer Funktion** f **an der Stelle** 7 ist die Steigung der Tangenten an den Graphen von f bei 7; diese Tangente berührt den Graphen von f im Punkt $(7, f(7))$.

Dieselbe Definition kann man für eine beliebige, fixierte reelle Zahl x_0 hinschreiben:
Die **Ableitung** $f'(x_0)$ **einer Funktion** f **an einer Stelle** x_0 ist die Steigung der Tangenten an den Graphen von f bei x_0.

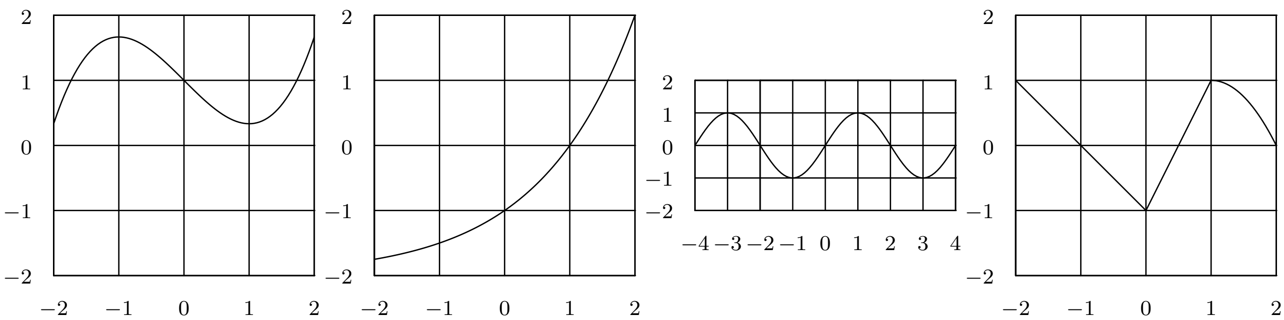
Definition 18.2.3 Ableitung einer Funktion (informell)

Die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$, die jeder reellen Zahl x die soeben definierte Ableitung $f'(x)$ zuordnet, ist wiederum eine Funktion. Sie heisst die **Ableitung von** f und wird als f' oder $f'(x)$ notiert.
Sprechweise: «f Strich».

Merke 18.2.4

Die Ableitung f' ist eine Funktion. Setzt man eine reelle Zahl x_0 ein, so ist $f'(x_0)$ ebenfalls eine reelle Zahl, nämlich die Steigung der Tangenten an die Funktion f bei x_0 an.
Beispiel: Die reelle Zahl $f'(2)$ ist die Steigung der Tangenten an f bei $x = 2$.

Aufgabe A2 Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

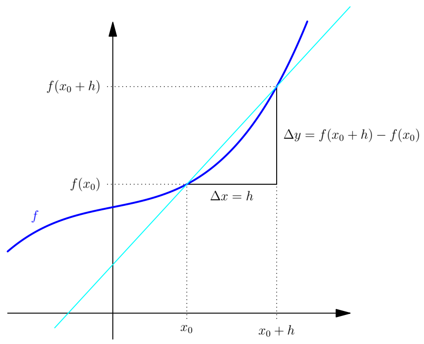


Definition 18.2.5 Sekante

Jede Gerade durch zwei verschiedene Punkte des Graphen einer Funktion (oder einer allgemeineren Kurve) heisst **Sekante**.
(lateinisch *secare* schneiden; die Gerade schneidet den Graphen)

Definition 18.2.6 Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, die auf einer Teilmenge X der reellen Zahlengeraden definiert ist.
Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt.



(a) Sei $h \neq 0$ eine reelle Zahl.
Dann hat die Sekante durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ des Graphen von f die Steigung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diese reelle Zahl heisst **Sekantensteigung** oder **Differenzenquotient**.

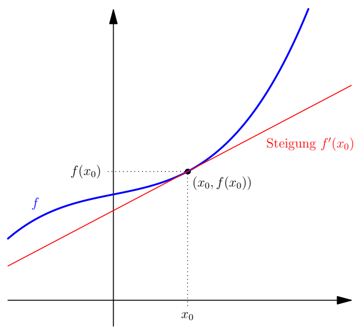
(b) Wenn der Grenzwert dieser Sekantensteigungen für h gegen 0 existiert, so notieren wir diesen als

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

und sagen, dass f **an der Stelle** x_0 **differenzierbar** ist.
In diesem Fall hat die reelle Zahl $f'(x_0)$ die folgenden Namen:

- **Ableitung von** f **an der Stelle** x_0 (häufigste Bezeichnung)
- **Steigung der Tangenten an** f **bei** x_0 (geometrisch anschaulich)
- **Steigung von** f **bei** x_0 (geometrisch anschaulich)
- **Differentialquotient von** f **bei** x_0 (eher selten)

(c) Wenn f bei x_0 differenzierbar ist, d. h. wenn $f'(x_0)$ existiert:
Die **Tangente an den Graphen von** f **im Punkt** $(x_0, f(x_0))$ oder kurz die **Tangente an** f **bei** x_0 ist per Definition die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$.



Schreibt man $y_0 = x_0 + h$, so gilt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}$, so dass der Differenzenquotient wirklich ein Quotient von Differenzen ist.
Damit oben nicht zu viele Voraussetzungen verwirren: Der Differenzenquotient ist nur definiert, falls $x+h \in X$ gilt; auch beim Limesbilden sind nur solche h zu betrachten.
Seltsamerweise definiere ich zuerst die Tangentensteigung und dann die Tangente. Der Grund ist, dass ich frühzeitig betonen will, dass $f'(x_0)$ diese geometrische Bedeutung hat.
Der oben verwendete Limes ist formal noch gar nicht definiert (wir kennen eigentlich nur Limiten von Folgen), aber hoffentlich intuitiv klar. Per Definition existiert er mit Wert a genau dann, wenn für jede gegen 0 konvergente Folge h_n die Folge $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ gegen a konvergiert.

18.2.7. Anschauung: Wenn h gegen Null strebt, nähern sich die zugehörigen Sekanten immer mehr der Tangenten an den Graphen von f bei x_0.

Insbesondere streben die Sekantensteigungen dabei gegen die Steigung dieser Tangenten.

Da nahe bei x_0 der Graph von f und diese Tangente kaum zu unterscheiden sind (nah heranzoomen, Situation «unter dem Mikroskop» betrachten), nennen wir diese Tangentensteigung auch die Steigung von f bei x_0.

18.2.8. Es wäre schöner, wenn man «ohne Umwege» definieren könnte, was die Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist. Leider scheint es diesen Königsweg nicht zu geben.

Deswegen beschreiten wir den Umweg über die (von h abhängigen) Sekanten und den Grenzwert zur Tangentensteigung und dann zur Tangenten.

18.2.9. Man beachte: Wenn man über eine Tangente (= Berührgerade) spricht, muss man immer dazusagen, um welche Kurve es geht («Tangente **an den Graphen**» oder «Tangenge **an den Kreis**») und in welchem Punkt die Tangente diese Kurve berühren soll («Tangente an die Kurve ... **im Punkt** ...»).

18.2.10. Man kann zeigen, dass die Tangente an f bei x_0 diejenige Gerade ist, die f in der Nähe von x_0 am besten approximiert.

Anschaulich sieht man das, indem man (etwa in Geogebra) eine Funktion f und die Tangente an f bei einer reellen Zahl x_0 einzeichnet und dann ganz nah heranzoomt am Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Beispiel 18.2.11. Wir berechnen die Ableitung $f'(3)$ der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$. ✎

Beispiel 18.2.12. Wir ersetzen nun in der obigen Rechnung die konkrete Zahl 3 durch eine beliebige, fix gewählte reelle Zahl x_0.

Wir berechnen also nun die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0. ✎

Aufgabe A3 Bestimmen Sie wie in den beiden obigen Beispielen.

(a) Für $f(x) = x^3$.
- Die Ableitung $f'(5)$ an der Stelle 5. Lösung: $f'(5) = 75$
- Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.

(b) Für $f(x) = x$.
- Die Ableitung $f'(2)$ an der Stelle 2. Lösung: $f'(2) = 1$
- Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.
- Interpretieren Sie ihre beiden Ergebnisse geometrisch.

(c) Für $f(x) = 3$.
- Die Ableitung $f'(1)$ an der Stelle 1. Lösung: $f'(1) = 0$
- Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.
- Interpretieren Sie ihre beiden Ergebnisse geometrisch.

(d) Für $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Die Ableitung $f'(3)$ an der Stelle 3. Lösung: $f'(3) = -\frac{1}{9}$
- Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.

(e) Für $f(x) = \sqrt{x}$.
- Die Ableitung $f'(5)$ an der Stelle 5. Lösung: $f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$
- Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0.

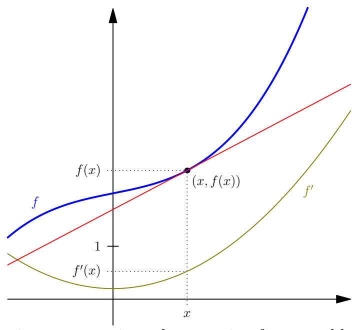
(f) Dasselbe für $f(x) = \sqrt[3]{x}$, also $f'(x_0)$ für allgemeines x_0 oder für eine konkrete Zahl.

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

Definition 18.2.13 Ableitung als Funktion

(Fortsetzung von 18.2.6 unter den dortigen Voraussetzungen)
Wir nehmen an, dass f an allen Stellen $x \in X$ differenzierbar ist. Dann ist die **Ableitung** f' von f diejenige Funktion, die jedem x die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x zuweist:

$$\begin{aligned} f' \colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$



Ich schreibe hier x (statt x_0 wie oben), denn ich stelle mir x hier als variabel vor. Die oben verwendete Schreibweise x_0 suggeriert, dass x_0 eine fest gewählte reelle Zahl ist. Man könnte aber in der aktuellen Definition genausogut alle x durch x_0 ersetzen.

Beispiele 18.2.14. Laut Beispiel 18.2.12 und Aufgabe A3 gelten:

$f(x) = c = \text{konstant}$	hat Ableitung	$f'(x) = 0$	Strich-Notation:	$(c)' = 0$
$f(x) = x$	hat Ableitung	$f'(x) = 1$	kurz:	$(x)' = 1$
$f(x) = x^2$	hat Ableitung	$f'(x) = 2x$	kurz:	$(x^2)' = 2x$
$f(x) = x^3$	hat Ableitung	$f'(x) = 3x^2$	kurz:	$(x^3)' = 3x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	hat Ableitung	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$	kurz:	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

Merke 18.2.15 Kurzschreibweise für Ableitungen: Strich-Notation

Die „Strich-Notation“

$$(a(x))' = b(x)$$

ist eine Kurzschreibweise für Ableitungen und bedeutet: bedeutet:
- Die Ableitung der Funktion $a(x)$ ist $b(x)$.
- Mit anderen Worten: Wenn $f(x) = a(x)$ gilt, so gilt $f'(x) = b(x)$.

Satz 18.2.16 Potenzregel: Ableitungen der Potenzfunktionen (hier mit natürlichem Exponenten)

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$f(x) = x^n \qquad \text{hat Ableitung} \qquad f'(x) = nx^{n-1} \qquad \text{Kurz:} \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

In Worten: Jede Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit natürlichem Exponenten n ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$.
Bemerkung: Dieselbe Aussage gilt nicht nur für natürliche, sondern für beliebige reelle Exponenten.

Beweis. Laut Definition gilt ✎

Satz 18.2.17 Konstante-Funktion-Regel, Konstanter-Faktor-Regel

Sei a eine beliebige reelle Zahl.

- Die konstante Funktion $f(x) = a$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 0$.
  Anschauung: Graph ist horizontale Gerade $y = a$, jede Tangente daran ist dieselbe Gerade und hat Steigung 0.
- Ist f eine differenzierbare Funktion, so ist ihr a-faches af differenzierbar mit Ableitung

$$(af)' = af' \qquad \text{Alternativschreibweise:} \qquad (a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

Beweis. Die erste Aussage haben Sie in Aufgabe A3.(c) im Fall $a = 3$ gezeigt, der allgemeine Fall geht vollkommen analog: $f'(x) = \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{a-a}{h} = \lim \frac{0}{h} = \lim 0 = 0$.

Zweite Behauptung. Setze $g(x) := a \cdot f(x)$. Zu zeigen ist ✎

Hier verwenden wir, dass a-fache einer konvergente Folge gegen das a-fache des Grenzwerts konvergiert. □

Beispiel 18.2.18. Die Ableitung der Funktion $g(x) = 7x^4$ ist ✎

Definition 18.2.19 Summen und Produkte von Funktionen

Sind f und g zwei Funktionen, so meint $f + g$ die Funktion mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Ähnlich meint $fg = f \cdot g$ die Funktion mit $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Beispiel 18.2.20. Die Funktion $f = \sin + \cos$ hat bei 2 den Wert $f(2) = (\sin + \cos)(2) = \sin(2) + \cos(2)$. Die Funktion $f = \sin \cdot \cos$ hat bei 2 den Wert $f(2) = (\sin \cdot \cos)(2) = \sin(2) \cdot \cos(2)$.

Satz 18.2.21 Summenregel

Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen, so ist auch ihre Summe $f + g$ differenzierbar und hat als Ableitung die Summe der Ableitungen:

$$(f + g)' = f' + g' \qquad \text{Alternativschreibweise:} \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel 18.2.22. Die Ableitung der Funktion $s(x) = x^{13} + 7x^4$ ist ✎

Aufgabe A4 Ableitungen von Polynomen: Leiten Sie mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln nach x ab.

a) $a(x) = x^{42}$
b) $b(x) = 5x^4$
c) $c(x) = x^3 + x^2$
d) $d(x) = 9x^2 + 3x^5$
e) $e(x) = x$
f) $f(x) = -12$
g) $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
h) $h(x) = 3x^4 - 4x$
i) $i(x) = 4 - 5x + 6x^2 - 7x^3 + 8x^4$
j) $j(x) = (x + 2)^3$ Hinweis: Ausmultiplizieren!

Beweis. Summenregel: ✎

□

Aufgabe A5

(a) An welchen Stellen hat die Funktion $f(x) = x^3$

- die Steigung 0;
- die Steigung 1;
- die Steigung 2;
- die Steigung 3;
- die Steigung -1?

(b) Betrachte die Funktion $f(x) = x^3 - x$.

- Wo hat sie eine horizontale Tangente?
- Was ist ihre Steigung in den drei Nullstellen (= Nullstellen von f), die man leicht durch Faktorisieren ermitteln kann?

(c) Bestimme den Scheitel der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 10x + 4$,

- indem du den Punkt auf dem Graphen ermittelst, an dem die Tangente an den Graphen horizontal ist;
- wie früher: durch quadratische Ergänzung.

(d) Wo hat die kubische Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ horizontale Tangenten?
Hinweis: Faktorisieren oder Mitternachtsformel.

Beispiel 18.2.23.

(a) Bestimme die Gleichung der Tangenten an $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x$ bei $x = 2$.

(b) Wo und unter welchem Winkel schneidet diese Tangente die x-Achse?

An Tafel erklären !

Aufgabe A6 Bestimme jeweils die Gleichung $y = mx + q$ der Tangente an den Graphen der Funktion an der angegebenen Stelle und den Steigungswinkel der Tangenten (= Winkel zwischen x-Achse und Tangente).
Guter Test: Funktion und Tangente mit GeoGebra oder Taschenrechner zeichnen.

(a) $f(x) = x^3$, Tangente bei $x = 2$

(b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$, Tangente bei $x = -2$

(c) $h(x) = -\frac{1}{5}x^3$, Tangente bei $x = 2.5$

(d) $k(x) = x^2 - x + 1$, Tangente bei $x = 1$.

(e) $k(x) = (x + 1)(x - 2)$, Tangente bei jeder Nullstelle.

Merke 18.2.24 Erinnerung: Geraden senkrecht $\iff$ Produkt der Steigungen minus Eins

Zwei Geraden $y = mx + q$ und $y = m'x + q'$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn

$$m \cdot m' = -1$$

Beispiel: Hat eine Gerade die Steigung $\frac{2}{5}$, so hat jede dazu senkrechte Gerade die Steigung $-\frac{5}{2}$.
Beweis (Handskizze selbst): Der Vektor $\binom{1}{m}$ hat die Steigung $\frac{m}{1} = m$. Seine Drehung um 90° Grad ist der Vektor $\binom{-m}{1}$ mit Steigung $\frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$.

Merke 18.2.25 Erinnerung: Gerade durch Punkt mit gegebener Steigung

Die Gerade durch $P = (x_P, y_P)$ mit Steigung m ist gegeben durch

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

Beispiel: Die Gerade durch $(3, 5)$ mit Steigung 7 ist $y = 7(x - 3) + 5 = 7x - 16$.

Grund: Die Steigung ist offensichtlich m; wenn man x_p für x einsetzt, erhält man y_P, die Gerade verläuft also durch P.

Aufgabe A7

(a) Bestimme die Gleichung der Geraden, die die Parabel $f(x) = x^2$ bei $x = \frac{3}{2}$ rechtwinklig (= senkrecht) schneidet. Test per GeoGebra

(b) Betrachte die Parabel $f(x) = \frac{2}{5}x^2$ und die Gerade $y = g(x) = x$.

- Bestimme den Punkt P auf der Parabel, für den gilt: Die Parallele p zu g durch P schneidet die Parabel rechtwinklig.
- Diese Parallele p schneidet f in einem weiteren Punkt Q. Bestimme diesen Punkt Q und den Schnittwinkel zwischen p und f an diesem Punkt (= der Winkel zwischen p und der Tangenten an f in Q).
  Hinweis: Mitternachtsformel. Test per GeoGebra

Aufgabe A8

Finde die reelle Zahl c und den Punkt $P = (x_0, y_0)$ so, dass sich die Standardparabel $f(x) = x^2$ und die nach unten offene Parabel $g(x) = -x^2 + 8x + c$ im Punkt P berühren (:= beide Graphen gehen durch diesen Punkt und haben dort dieselbe (Tangenten-)Steigung). Test per GeoGebra

Hinweis: Stelle dazu ein (sehr einfach zu lösendes) lineares 2×2-Gleichungssystem in x_0 und c auf.

- Die erste Gleichung kommt daher, dass beide Graphen durch den Punkt P gehen.
- Die zweite Gleichung kommt daher, dass die beiden Graphen bei x_0 dieselbe Steigung haben.

Aufgabe A9

Wie ist der Parameter a zu wählen, damit sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2$ und $g(x) = ax^2$ senkrecht = (rechtwinklig) schneiden? Test per GeoGebra

Hinweis: Zu lösen ist ein Gleichungssystem in a und x_0 (= x-Koordinate des Schnittpunkts). Das Gleichungssystem kann beispielsweise dadurch gelöst werden, dass beide Gleichungen nach x_0^2 aufgelöst werden und die Ergebnisse gleichgesetzt werden.

Aufgabe A10

Bestimme die quadratische Funktion, die

- durch den Punkt $P = (0, 1)$ mit Steigung 2 und
- durch den Punkt $Q = (1, 6)$ verläuft. Test per GeoGebra

Hinweis: Jede quadratische Funktion hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zu bestimmen sind also a, b und c. Die angegebenen Bedingungen liefern ein sehr einfaches Gleichungssystem in diesen drei Variablen.

Aufgabe A11

Bestimme die kubische Funktion, die

- im Punkt $P = (1, 1)$ eine horizontale Tangente hat und
- im Punkt $Q = (-1, 1)$ die Steigung 4. Test per GeoGebra

Hinweis: Jede kubische Funktion hat die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Die Bedingungen liefern ein 4×4-Gleichungssystem, das man leicht lösen kann, wenn man die richtigen Gleichungen addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel 18.2.26. Die Ableitung der Funktion $a(t) = t^4 - 3t^2 + 9t + 1$ ist ✎

Beachte, dass die unabhängige Variable der Funktion $a = a(t)$ mit dem Buchstaben t (statt normalerweise x) bezeichnet wurde. Um dies hervorzuheben, nennt man die Ableitung $a'(t)$ auch die Ableitung der Funktion a **nach der Variablen** t. Die zuvor betrachteten Ableitungen $f'(x)$ sind in dieser Sprechweise «Ableitungen nach der Variablen x».

Aufgabe A12 Betrachte wie in Aufgabe A1 die Funktion

$$s(t) = -\frac{1}{9}(t-6)^2 + 9$$

die die Höhe $s(t)$ eines Balles in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt; damals hast du die Geschwindigkeiten zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 3$ näherungsweise berechnet.

(a) Bestimme die Ableitung $s'(t)$ nach der Variablen t.

Diese Funktion $s'(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit des Balles in Abhängigkeit von der Zeit t.

(b) Berechne die Geschwindigkeit des Balles zur Zeit $t = 0$ und $t = 3$ und vergleiche deine Ergebnisse mit den näherungweisen Ergebnissen aus Aufgabe A1.

(c) Bestimme die Ableitung $s''(t)$ der Funktion $s'(t)$, die sogenannte **zweite Ableitung** von s.

Die Funktion $s''(t)$ beschreibt die Beschleunigung des Balles in Abhängigkeit von der Zeit t.

(d) Wenn man auf der Erde (Fallbeschleunigung $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) einen Ball aus der Höhe h_0 mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben wirft (idealisiert, ohne Luftwiderstand), welche Funktion $h(t)$ beschreibt die Höhe des Balls zur Zeit t?

18.2.27. Mathematisch beschreibt die Ableitung die «Änderungsrate» der Funktionswerte $y = f(x)$ in Abhängigkeit von der Variablen x.

In Physik, Biologie oder Chemie tauchen Ableitungen meistens als Änderungsraten konkreter Grössen auf.

In Aufgabe A12 haben Sie zum Beispiel diverse Geschwindigkeiten berechnet. Die Geschwindigkeit ist nichts anderes als die Änderungsrate der Position $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Genauer gibt es

- die Durchschnittsgeschwindigkeit (= durchschnittliche Änderungsrate der Position) während eines Zeitintervalls $[t_0, t_0 + h]$;
  geometrisch ist dies die Sekantensteigung $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$.
- die (Momentan-)Geschwindigkeit (= momentane Änderungsrate der Position) zu einem festen Zeitpunkt t_0; geometrisch ist dies die Tangentensteigung bei t_0, also die Ableitung $s'(t_0)$.

(Durch dieses Beispiel ist der Begriff «Änderungsrate» hoffentlich genügend präzisiert.)

Die Ableitung der Positionsfunktion $s = s(t)$ ist also die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$, d. h.

$$s'(t) = v(t)$$

Analog kann man sich überlegen, dass die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $s'(t) = v(t)$ die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ist, d. h.

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

Hier steht $s''(t)$ für die **zweite Ableitung von** s, also die Ableitung der Ableitung $s'(t)$.

Merke 18.2.28 Geschwindigkeit = Ableitung der Position, Beschleunigung = Ableitung der Geschwindigkeit

- Die Ableitung der Position/Strecke ist die Geschwindigkeit.
- Die Ableitung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung.

Mit den üblichen Bezeichnungen der Physik (s für Strecke bzw. Position, v für Geschwindigkeit, a für Beschleunigung) gelten also

$$v(t) = s'(t) \qquad\qquad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Satz 18.2.29 Produktregel

Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen, so ist auch ihr Produkt $fg = f \cdot g$ differenzierbar mit Ableitung

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad \text{Alternativschreibweise:} \qquad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beweis. ✎

□

Aufgabe A13

(a) In Aufgabe A3 wurde $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ gezeigt.
Verwenden Sie dies, um mit der Produktregel die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

zu berechnen.

(b) In der vorherigen Teilaufgabe haben Sie hoffentlich $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2\frac{1}{x^3}$ gezeigt.
Verwenden Sie dies, um mit der Produktregel die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$$

zu berechnen.

(c) In der vorherigen Teilaufgabe haben Sie hoffentlich $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -3\frac{1}{x^4}$ gezeigt.
Verwenden Sie dies, um mit der Produktregel die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x}$$

zu berechnen.

(d) Wenn man dies fortsetzt: Was ist die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^n}$?

(e) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = (2x+3)^2 = (2x+3) \cdot (2x+3)$ einmal mit der Produktregel und einmal wie zuvor per Ausmultiplizeren und anschliessendem Ableiten. Kommt dasselbe heraus?

(f) Die Produktregel für drei Faktoren besagt

$$(abc)' = a'bc + ab'c + abc'$$

wobei a, b und c Funktionen sind. Beweisen Sie diese, indem Sie das Produkt abc schreiben als $abc = a\cdot(b\cdot c)$ und zweimal die Produktregel anwenden.

(g) Wie lautet wohl die Produktregel für vier Faktoren a, b, c, d?

(h) Mit Hilfe der

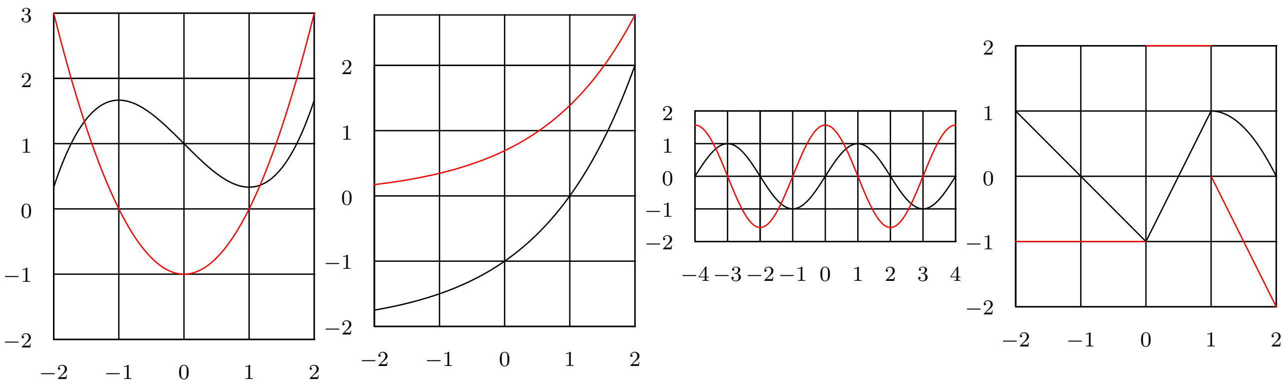
- Produktregel: Was ist die Ableitung von $(f(x))^2 = f(x) \cdot f(x)$?
- Produktregel für drei Faktoren: Was ist die Ableitung von $(f(x))^3 = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)$?
- Produktregel für vier Faktoren: Zeigen Sie, dass die vierte Potenz $(f(x))^4$ einer Funktion die Ableitung $4 \cdot (f(x))^3 \cdot f'(x)$ hat. Eleganter schreibt man dies als $(f^4)' = 4f^3 \cdot f'$.

18.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-motivation

Lösung zu A2 ex-ableitungenskizzieren



Lösung zu A3 ex-ableitungen-an-konkreter-stelle
Konkrete Stellen: Per Einsetzen in die Ergebnisse unten, Lösung steht bei Aufgabe.

(a) Für $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) \\
&= 3x_0^2
\end{aligned}$$

(b) Für $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Der Graph von f ist eine Gerade der Steigung 1. Jede Tangente an diese Gerade ist dieselbe Gerade mit derselben Steigung. Also $f'(x_0) = 1$.

(c) Für $f(x) = 3$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3-3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Der Graph von f ist eine (horizontale) Gerade der Steigung 0. Jede Tangente an diese Gerade ist dieselbe Gerade mit derselben Steigung. Also $f'(x_0) = 0$.

(d) Für $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x_0+h)x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} \\
&= -\frac{1}{x_0^2}
\end{aligned}$$

(e) Für $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Wir erledigen dies gleich für $f(x) = \sqrt[m]{x}$. Der Trick hier ist die Beziehung

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[m]{x_0+h}-\sqrt[m]{x_0}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[m]{x_0+h})^m-(\sqrt[m]{x_0})^m}{h((\sqrt[m]{x_0+h})^{m-1}+(\sqrt[m]{x_0+h})^{m-2}(\sqrt[m]{x_0})+\cdots+(\sqrt[m]{x_0+h})(\sqrt[m]{x_0})^{m-2}+(\sqrt[m]{x_0})^{m-1})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[m]{x_0+h})^{m-1}+(\sqrt[m]{x_0+h})^{m-2}(\sqrt[m]{x_0})+\cdots+(\sqrt[m]{x_0+h})(\sqrt[m]{x_0})^{m-2}+(\sqrt[m]{x_0})^{m-1}}\\
&= \frac{1}{m(\sqrt[m]{x_0})^{m-1}}\\
&= \frac{1}{m}x^{-\frac{m-1}{m}}\\
&= \frac{1}{m}x^{-1+\frac{1}{m}}\\
&= \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}
\end{aligned}$$

Lösung zu A4 ex-polynome-ableiten

a) $a'(x) = 42x^{41}$

b) $b'(x) = 20x^3$

c) $c'(x) = 3x^2 + 2x$

d) $d'(x) = 18x + 15x^4$

e) $e'(x) = 1$

f) $f'(x) = 0$

g) $g'(x) = 0+1+2x+3x^2+4x^3 = 1+2x+3x^2+4x^3$

h) $h'(x) = 12x^3 - 4$

i) $i'(x) = 0 - 5 + 12x - 21x^2 + 32x^3 = -5 + 12x - 21x^2 + 32x^3$

j) $j(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)' = 3x^2 + 12x + 12$

Lösung zu A5 ex-punkte-mit-gegebener-steigung

(a)

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$

- Steigung 0: $f'(x) = 0$, d. h. $3x^2 = 0$, d. h. $x = 0$.
- die Steigung 1: $f'(x) = 1$, d. h. $3x^2 = 1$, d. h. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- die Steigung 2: $f'(x) = 2$, d. h. $3x^2 = 2$, d. h. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- die Steigung 3: $f'(x) = 3$, d. h. $3x^2 = 3$, d. h. $x = \pm 1$.
- die Steigung -1: $f'(x) = -1$, d. h. $3x^2 = -1$, keine Lösung.

(b)

$$f(x) = x^3 - x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

- horizontale Tangente: $f'(x) = 0$, d. h. $3x^2 - 1 =$, d. h. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Steigung in den drei Nullstellen: $f(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, also Nullstellen $-1, 0, 1$. Steigungen dort sind $f'(-1) = 2$, $f'(0) = -1$, $f'(1) = 2$.

(c) Scheitel der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 10x + 4$:
- horizontale Tangente: $f'(x) = 0$, d. h. $2x - 10 = 0$, d. h. $x = 5$. Also Scheitel $S = (5, f(5)) = (5, -21)$.
- quadratische Ergänzung: $f(x) = x^2 - 10x + 25 - 25 + 4 = (x-5)^2 - 21$ (Scheitelform), also Scheitel $S = (5, -21)$.

(d) kubische Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$, horizontale Tangenten:

Dazu ist $f'(x) = 0$ zu lösen.

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

Also bei $x = -3$ und $x = 2$.

Per Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Lösung zu A6 ex-tangente-in-punkt-angeben

Genauso zu lösen wie Beispiel 18.2.23. (In der Lehrerversion steht die Lösung in sehr kleiner Schrift.)

Test per Geogebra!

Lösung zu A7 ex-senkrechte-gerade-zu-graph

(a) Die Steigung von f bei $\frac{3}{2}$ ist $f'(\frac{3}{2}) = 3$ (wegen $f'(x) = 2x$).
Die Steigung «senkrecht dazu» ist $-\frac{1}{3}$. Also hat die gesuchte Gerade die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + q$. Da sie durch den Punkt $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ geht, muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} + q \\ \frac{11}{4} &= q \end{aligned}$$

Die gesuchte Gerade ist also $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{4}$.

(b) Die Gerade $y = x$ hat die Steigung 1. Die «dazu senkrechte» Steigung ist -1 (denn das Produkt der beiden Steigungen ist -1). Wenn x_0 die x-Koordinate von P ist, muss gelten $f'(x_0) = -1$. Wegen $f'(x) = \frac{4}{5}x$ muss also $\frac{4}{5}x_0 = -1$ gelten, d. h. $x_0 = -\frac{5}{4}$.
Der gesuchte Punkt ist $P = (x_0, f(x_0)) = (-\frac{5}{4}, \frac{5}{8})$.

(c) Die Gleichung von p ist

$$y = 1\cdot(x - (-\frac{5}{4})) + \frac{5}{8} = x + \frac{15}{8}$$

Gleichsetzen mit $f(x)$ liefert die Koordinaten der Schnittpunkte (wobei wir einen bereits kennen).

$$\begin{aligned} x + \frac{15}{8} &= \frac{2}{5}x^2 \\ 40x + 75 &= 16x^2 \\ 16x^2 - 40x - 75 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 4\cdot 16\cdot 75}}{32} \\ &= \frac{40 \pm 4\sqrt{100 + 4\cdot 75}}{32} \\ &= \frac{40 \pm 4\sqrt{400}}{32} \\ &= \frac{40 \pm 80}{32} \\ &= \frac{5 \pm 10}{4} \\ &= \begin{cases} \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Die neue Lösung $\frac{15}{4}$ liefert den Punkt $Q = (\frac{15}{4}, f(\frac{15}{4})) = (\frac{15}{4}, \frac{45}{8})$.
Die Gerade p hat die Steigung 1, also den Steigungswinkel 45°.
Der Graph hat bei Q die Steigung $f'(\frac{15}{4}) = \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{4} = 3$. Der Steigungswinkel von f bei Q ist also $\arctan(3) \approx 71.565°$.
Der gesuchte Winkel ist $\arctan(3) - 45° = 26.565°$.

Lösung zu A8 ex-sich-beruehrende-parabeln

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) && \text{beide Funktion schneiden sich bei } x_0 \\ f'(x_0) &= g'(x_0) && \text{beide Funktionen haben dieselbe Steigung bei } x_0 \end{aligned}$$

Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ g'(x) &= -2x+8 \end{aligned}$$

Also ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_0^2 &= -x_0^2 + 8x_0 + c \\ 2x_0 &= -2x_0 + 8 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $x_0 = 2$.
Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man $\boxed{c = -8}$.
Der Berührpunkt ist $\boxed{P = (x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0)) = (2, 4)}$.

Lösung zu A9 ex-sich-senkrecht-schneidende-parabeln

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) && \text{die beiden Funktionen schneiden sich bei } x_0 \\ f'(x_0) \cdot g'(x_0) &= -1 && \text{die Tangenten an die beiden Graphen stehen bei } x_0 \text{ senkrecht aufeinander} \end{aligned}$$

Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{3}x \\ g'(x) &= 2ax \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird zu

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3}x_0^2 &= ax_0^2 \\ -\frac{2}{3}x_0 \cdot 2ax_0 &= -1 \end{aligned}$$

Auflösen beider Gleichungen nach x_0^2:

$$\begin{aligned} \frac{3}{3a+1} &= x_0^2 \\ x_0^2 &= \frac{3}{4a} \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} \frac{3}{3a+1} &= \frac{3}{4a} \\ 4a &= 3a+1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Alternativlösung: Die zweite Gleichung des obigen Gleichungssystems liefert $ax_0^2 = \frac{3}{4}$, was genau die rechte Seite der ersten Gleichung ist. Also wird die erste Gleichung zu

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3}x_0^2 &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{3}x_0^2 \\ \frac{3}{4} &= x_0^2 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} &= x_0 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} &= a\frac{3}{4} \\ 4 - 1 &= 3a \\ 1 &= a \end{aligned}$$

Lösung zu A10 ex-quadratische-funktion-durch-punkt-und-punkt-samt-steigung

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$f'(x) = 2ax + b$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 2 \\ f(1) &= 6 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ b &= 2 \\ a + b + c &= 6 \end{aligned}$$

Sofort folgt $a = 3$. Die gesuchte Funktion ist also

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

Lösung zu A11 ex-kubische-funktion-durch-zwei-punkte-samt-steigung

Ansatz und erste Ableigung davon:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Vier Gleichungen müssen gelten:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(1) &= 0 \\ f(-1) &= 1 \\ f'(-1) &= 4 \end{aligned}$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ 3a + 2b + c &= 0 \\ -a + b - c + d &= 1 \\ 3a - 2b + c &= 4 \end{aligned}$$

Zweite minus vierte Gleichung liefert $4b = -4$, also $\boxed{b = -1}$. Setzt man dieses Ergebnis in das Gleichungssystem ein und bringt die Zahlen nach rechts, so erhält man (letzte Gleichung weggelassen, da bereits verwendet/keine neue Information/kommt eh doppelt vor)

$$\begin{aligned} a + c + d &= 2 \\ 3a + c &= 2 \\ -a - c + d &= 2 \end{aligned}$$

Addition der ersten und dritten Gleichung liefert $2d = 4$, also $\boxed{d = 2}$. Einsetzen vereinfacht das Gleichungssystem zu (letzt Gleichung weglassen)

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ 3a + c &= 2 \end{aligned}$$

Zweite minus erste Gleichung $2a = 2$, also $\boxed{a = 1}$ und somit $\boxed{c = -1}$. Die gesuchte Funktion ist

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$

Lösung zu A12 ex-motivation-nun-per-ableitung

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{1}{9}(t-6)^2 + 9 \\ &= -\frac{1}{9}(t^2 - 12t + 36) + 9 \\ &= -\frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{3}t + 5 \end{aligned}$$

(a)

$$s'(t) = -\frac{2}{9}t + \frac{4}{3}$$

(b) Geschwindigkeit des Balles zur Zeit $t = 0$ und $t = 3$:

$$\begin{aligned} s'(0) &= \frac{4}{3} \\ s'(3) &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(c) Bestimme die Ableitung $s''(t)$ der Funktion $s'(t)$, die sogenannte **zweite Ableitung** von s.

$$s''(t) = -\frac{2}{9}$$

(d) Wenn man auf der Erde (Fallbeschleunigung $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) einen Ball aus der Höhe h_0 mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben wirft (idealisiert, ohne Luftwiderstand), welche Funktion $h(t)$ beschreibt die Höhe des Balls zur Zeit t?

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Probe:

$$\begin{aligned} h'(t) &= v_0 - gt \\ h''(t) &= -g \end{aligned}$$

Setzt man $t = 0$ ein, so erhält man wie gewünscht $h(0) = h_0$ und $h'(0) = v_0$ und $h''(0) = -g$.

Lösung zu A13 ex-produktregel-erste-anwendungen