1 Robotik

1.1 Vorwärts-Fahren = Geradeaus-Fahren

1.1.1. Unsere Roboter haben zwei Räder, die man durch Motoren drehen kann (und zusätzlich eine Art Stützrad). Der Roboter versteht Befehle der Art

- «Drehe dein rechtes/linkes Rad um den Winkel α (in Grad)».

Die Raddrehung erfolgt mit einer gewissen Drehgeschwindigkeit = Winkelgeschwindigkeit = Rotationsgeschwindigkeit (in Grad pro Sekunde), die man ebenfalls angeben kann. Ein vernünftige Wert für die Drehgeschwindigkeit der Räder ist 120 (Grad pro Sekunde).

Ziel der folgenden Aufgabe ist herauszufinden, um wieviel Grad man die Räder drehen muss, damit der Roboter eine gewisse Strecke x (etwa 100 cm) fährt.

⚒ Aufgabe A1 Wir nehmen an, dass der Durchmesser der beiden Räder unseres Roboters 7 cm beträgt (was nicht dem wahren Wert entspricht). Ergänze die fehlenden Einträge in der folgenden Tabelle (auf zwei Nachkommastellen genau). Links ist jeweils der Drehwinkel der beiden Räder angegeben, rechts die dabei zurückgelegte Strecke (in Zentimeter). Die Variable d taucht in Lehrerversion der Tabelle auf, Schüler sollen aber erstmal nur Zahlen eintragen.

Drehwinkel der Räder	zurückgelegte Strecke in cm
$360°$	$\pi \cdot d \approx 21.99$
$\frac{360°}{\pi \cdot d} \approx 16.37$	1
$100 \cdot \frac{360°}{\pi \cdot d} \approx 1637.02$	100
$x \cdot \frac{360°}{\pi \cdot d} \approx 16.37x$	x

⚒ Aufgabe A2 Und nun dasselbe abstrakt (Variable d statt 7 cm):
Der Durchmesser der beiden Räder unseres Roboters beträgt d (in Zentimeter). Ergänze die fehlenden Einträge in der folgenden Tabelle (bei jedem ✎-Symbol ist etwas einzutragen).

Drehwinkel der Räder	zurückgelegte Strecke in cm
$360°$	✎ $\pi \cdot d$
✎ $\frac{360°}{\pi \cdot d}$	1
✎ $100 \cdot \frac{360°}{\pi \cdot d}$	100
✎ $x \cdot \frac{360°}{\pi \cdot d}$	x

1.2 Auf-der-Stelle-Drehen

1.2.1. Wenn man die beiden Räder des Roboters gleichzeitig mit derselben Drehgeschwindigkeit **in unterschiedliche Richtungen** drehen lässt, dreht sich der Roboter auf der Stelle (um die Mitte der Verbindungsachse seiner beiden Räder).
Beachte, dass es zwei Drehwinkel gibt:

- den Drehwinkel des Roboters (um die vertikale Achse durch den Radachsenmittelpunkt);
- den Drehwinkel der Räder.

Die folgende Aufgabe bereitet die *Definition* der Funktion `drehe(delta)` im Python-Programm vor. Der Parameter `delta` gibt den Drehwinkel des Roboters an. Beispielsweise soll der *Funktionsaufruf* `drehe(60)` dann dafür sorgen, dass sich der Roboter auf der Stelle um 60° dreht.

Variablen

Im Rest dieses Textes haben die beiden Variablen d und a die folgende Bedeutung:

- d=Raddurchmesser (in cm);
- a=Radabstand (in cm).

Aufgabe A3 Die folgenden, aufeinander aufbauenden Teilaufgaben helfen dir beim Umrechnen des Drehwinkels des Roboters in den Drehwinkel der Räder beim Auf-der-Stelle drehen.

(a) Wenn sich der Roboter auf der Stelle um 360° dreht, welche Distanz legt jedes seiner beiden Räder zurück? ✎

$$2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi \cdot a$$

(b) Wenn sich der Roboter auf der Stelle um 1° dreht, welche Strecke legt jedes seiner beiden Räder zurück? ✎

$$\frac{\pi \cdot a}{360}$$

(c) Wenn sich der Roboter auf der Stelle um den Winkel δ (in Grad) dreht, welche Distanz legt jedes seiner beiden Räder zurück? ✎

$$\delta \cdot \frac{\pi \cdot a}{360}$$

(d) Wenn sich der Roboter um den Winkel δ dreht, um welchen Winkel (in Grad) dreht sich jedes seiner beiden Räder?

Hinweis: Verwende neben der vorigen Teilaufgabe (c) auch die letzte Zeile der Tabelle in Aufgabe A2. ✎

$$\delta \cdot \frac{\pi \cdot a}{360} \cdot \frac{360}{\pi \cdot d} = \delta \cdot \frac{a}{d}$$

1.3 Auf-einem-Kreisbogen-Fahren

1.3.1. Der Roboter soll nun auf einem Kreisbogen fahren. Dabei sind vorgegeben:

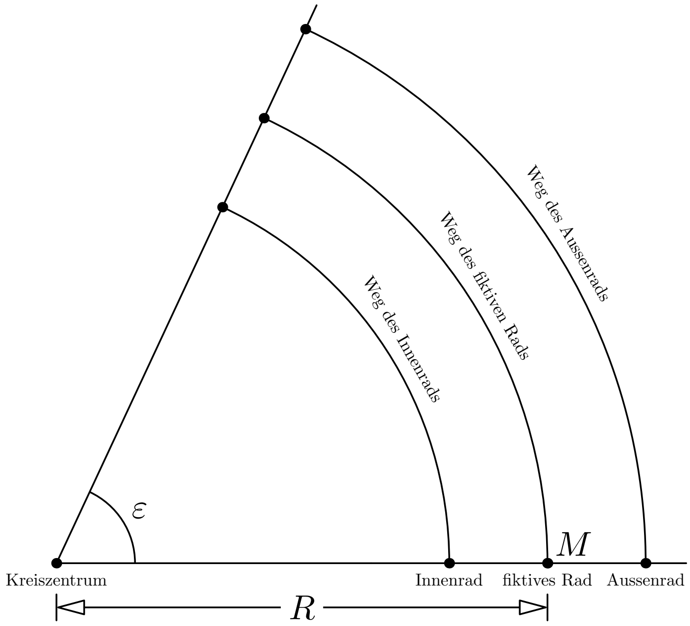
- der Radius R des Kreises (in Zentimetern);
- der Öffnungswinkel ε des Kreisbogens (in Grad).
- $\omega = 120$ (Grad pro Sekunde) als Drehgeschwindigkeit des fiktiven mittleren Rads (Erklärung unten).

Genauer soll sich die Mitte zwischen den beiden Rädern auf diesem Kreisbogen bewegen. Die beiden Räder (Innen- und Aussenrad) müssen sich währenddessen unterschiedlich schnell drehen.

Die folgende Aufgabe bereitet die *Definition* der Funktion `biege_ab(kreisradius, epsilon, drehsinn)` im Python-Programm vor. Der Parameter `kreisradius` steht für den Kreisradius R. Der Parameter `epsilon` steht für den Winkel ε. Der Parameter `drehsinn` gibt an, ob der Roboter nach links oder nach rechts abbiegen soll (also den Kreisbogen im mathematisch positiven oder negativen Drehsinn abfahren soll).

Aufgabe A4

Sei M die Mitte der Verbindungsachse der beiden Räder unseres Roboters. Wir stellen uns vor, dass bei M ein fiktives Rad auf der Achse befestigt ist (mit demselben Umfang wie die beiden anderen Räder).
Zuerst berechnen wir einige Werte für dieses fiktive Rad.



(a) Wenn der Roboter den gesamten Kreis mit Radius R abfährt (Öffnungswinkel 360°), welche Strecke legt das fiktive Rad zurück? ✎

$$2\pi R$$

(b) Wenn der Roboter den Kreisbogen mit Öffnungswinkel 1° und Radius R abfährt, welche Strecke legt das fiktive Rad zurück? ✎

$$\frac{2\pi R}{360}$$

(c) Wenn der Roboter den Kreisbogen mit Öffnungswinkel ε und Radius R abfährt, welche Strecke legt das fiktive Rad zurück? ✎

$$\varepsilon \cdot \frac{2\pi R}{360}$$

(d) Um welchen Drehwinkel dreht sich das fiktive Rad dabei?
Hinweis: Verwende neben der vorigen Teilaufgabe (c) auch die letzte Zeile der Tabelle in Aufgabe A2.

✎
$$\varepsilon \cdot \frac{2\pi R}{360} \cdot \frac{360}{\pi \cdot d} = \varepsilon \cdot \frac{2R}{d}$$

(Statt die letzte Zeile der Tabelle zu verwenden, kann man auch direkt argumentieren: Teile die Strecke des fiktiven Rades durch πd, um die Anzahl der Drehungen des fiktiven Roboterrades zu erhalten. Multipliziere das Ergebnis mit 360, um den Winkel (in Grad) zu erhalten.)

Wir erinnern daran, dass sich das fiktive Rad mit $\omega = 120$ (Grad pro Sekunde) drehen soll.

Mit dem Strahlensatz kann man nun sowohl den Drehwinkel des fiktiven Rades als auch seine Drehgeschwindigkeit auf das Aussen- und Innenrad umrechnen (denn diese beiden Werte sind für jedes Rad proportional zu der von diesem Rad zurückzulegenden Strecke; beachte dabei, dass sich alle Räder gleich lang drehen).

(e) Nach dem Strahlensatz erhält man die Werte des Aussenrades aus den Werten des fiktiven Rades durch Multiplikation mit dem Faktor ✎
$$\frac{R + \frac{a}{2}}{R} = \frac{2R + a}{2R}$$
Also dreht sich das Aussenrad um den Winkel ✎
$$\frac{2R + a}{2R} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2R}{d} = \varepsilon \cdot \frac{2R + a}{d}$$
mit der Drehgeschwindigkeit ✎
$$\frac{2R + a}{2R} \cdot \omega = \frac{2R + a}{2R} \cdot 120$$

(f) Analog erhält man die Werte des Innenrades aus den Werten des fiktiven Rades durch Multiplikation mit dem Faktor ✎
$$\frac{R - \frac{a}{2}}{R} = \frac{2R - a}{2R}$$
Also dreht sich das Innenrad um den Winkel ✎
$$\frac{2R - a}{2R} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2R}{d} = \varepsilon \cdot \frac{2R - a}{d}$$
mit der Drehgeschwindigkeit ✎
$$\frac{2R - a}{2R} \cdot \omega = \frac{2R - a}{2R} \cdot 120$$