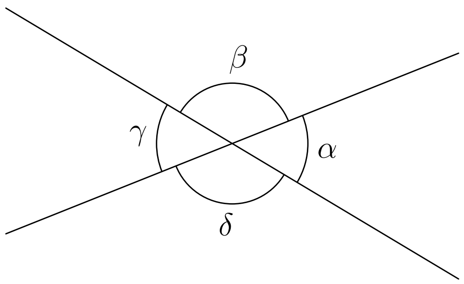
4 Winkelsätze

4.1 Winkelsätze an Geraden

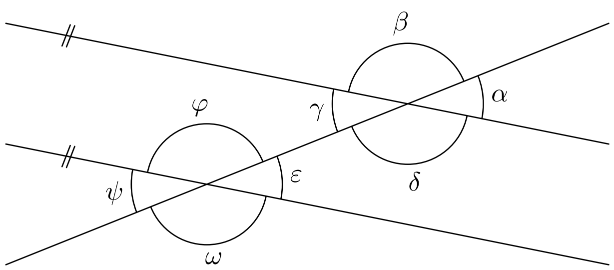
Scheitel- und Nebenwinkel



Scheitelwinkel sind ✎

Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎

Winkel an Parallelen



Stufenwinkel sind ✎

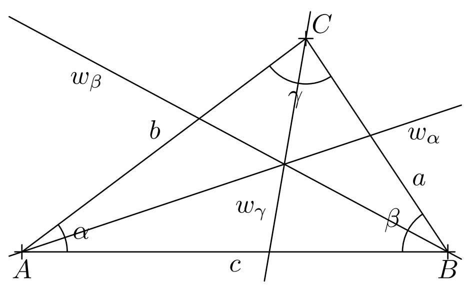
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎

Den Scheitelwinkel eines Stufenwinkels nennt man auch **Wechselwinkel** (z.B. $\alpha = \psi$).

Bezeichnungen und Winkel in Dreiecken

Für ein Dreieck ($\triangle ABC$) gelten folgende Notationen:

A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn.
a, b, c	**Seiten**, gegenüber der entsprechenden Eckpunkten.
α, β, γ	**Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten.
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte**.
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten.
s_a, s_b, s_c	**Schwerlinien**. Z.B. $s_a = AM_a$

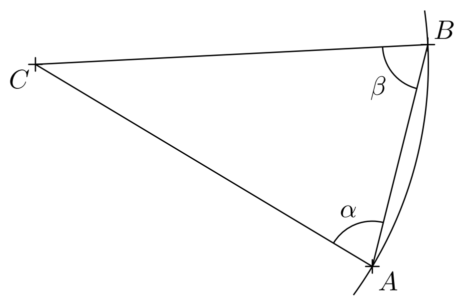


Aufgabe A1

Mit den Winkelsätzen an Parallelen beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck 180° ist.

Gleichschenklige Dreiecke

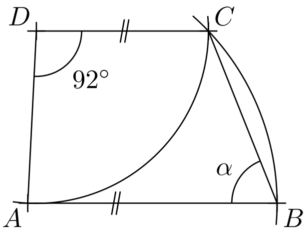
Ein Dreieck ist **gleichschenklig** wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind gleich.

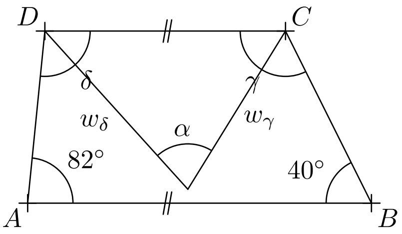


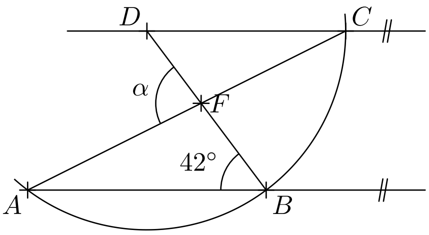
Gleichseitige Dreiecke

In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang und damit alle Innenwinkel gleich 60°.

Aufgabe A2 Wie gross ist der Winkel α? *Hinweis: Die Skizzen sind nicht massstabgetreu.*

a) 

b) 

c) 

Aufgabe A3 Zeigen Sie, dass die beiden Winkelhalbierenden eines Winkelhalbierendenpaares senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe A4 In einem gleichschenkligen Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist

a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$

Wie gross ist α?

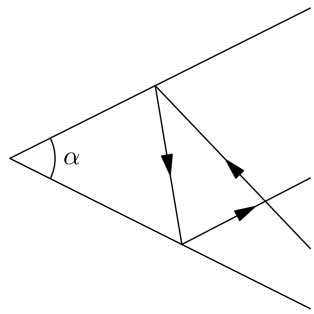
Aufgabe A5 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$. *Hinweis: Nehmen Sie an, die Winkel des Dreiecks sind gegebene Grössen, deren Zahlwerte man aber nicht kennt.*

Aufgabe A6

Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*

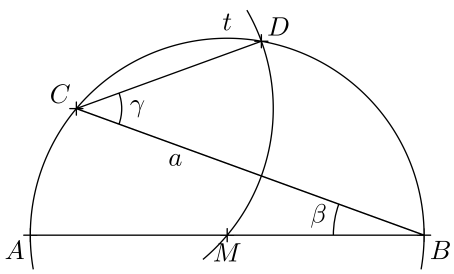


Aufgabe A7

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β. Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.
b) Für welchen Winkel β ist $CD \parallel AB$?

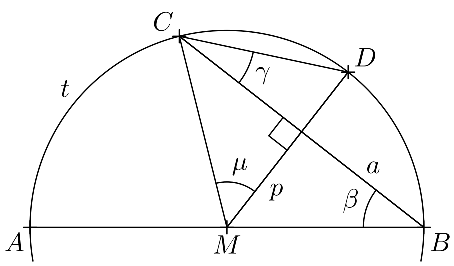


Aufgabe A8

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $\perp$ zu a durch M $\to p$
5. $p \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle CMD$ in Abhängigkeit von β.



4.2 Kreiswinkelsätze

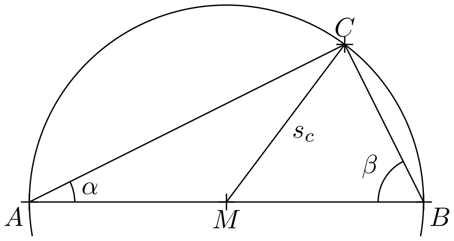
Thaleskreis

Theorem 4.2.1

Liegt in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$, dann ist $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ und umgekehrt.
Der Kreis über dem Durchmesser $[AB]$ heisst **Thaleskreis**.

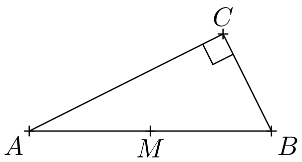
Beweis: $(C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}) \Rightarrow \gamma = 90°)$

✎



Beweis: $(\gamma = 90° \Rightarrow C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}))$

✎



Merke 4.2.2

Der Thaleskreis ist der geometrische Ort aller Punkte P, die über einer gegebenen Strecke $[AB]$ einen Winkel von $90°$ bilden.

Merke 4.2.3

Berührt eine Gerade g einen Kreis $k = k(Z, r)$ im Punkt G, nennt man diese Gerade eine **Tangente** and k mit Berührungspunkt G und es gilt:

$$ZG \perp g$$

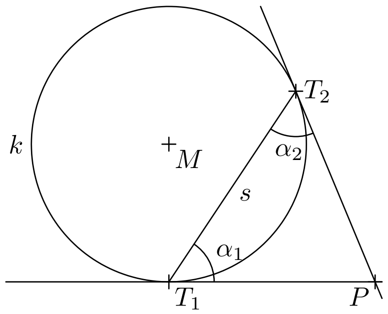
Aufgabe A9 Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie die Tangenten an k durch P.

Aufgabe A10 Eine Strecke $[AB]$ der Länge 6 hat den Punkt A irgendwo auf der x-Achse und B so auf der y-Achse, dass $\overline{AB} = 6$. Konstruieren Sie einige Punkte des geometrischen Ortes aller Punkte M_{AB}, stellen Sie eine Vermutung für diesen Ort auf und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe A11 Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.
Hinweis: Vergrössert oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.

Aufgabe A12 In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ seien H_a und H_b die Höhenfusspunkte der Höhen h_a und h_b auf den Seiten a, bzw. b. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB}H_aH_b$ gleichschenklig ist.

Sehnen-Tangenten-Winkel



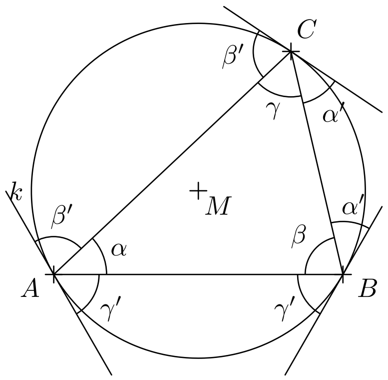
Merke 4.2.4

Sehnen-Tangenten-Winkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.

Aufgabe A13 Beweisen Sie mit Hilfe der Skizze oben, dass der **Zentriwinkel** $\sphericalangle T_1MT_2 = 2\alpha$.

Peripherie-Winkel

Ein Peripheriewinkel ist ein Winkel mit Scheitel auf der Kreislinie und Schenkeln durch die Endpunkte einer Kreissehne. Z.B. der Winkel γ über der Sehne $[AB]$ in der folgenden Skizze:



Da keine Annahmen über die Wahl der Punkte A, B, C auf dem Kreis k getroffen wurden, ist der Beweis allgemein gültig. Insbesondere gilt der Beweis, wenn $[BC]$ fix ist und A auf dem Kreis wandert. Die Winkel α' ändern sich dabei nicht, also bleibt auch der Winkel α immer gleich gross.

Aufgabe A14 Beweisen Sie mit Hilfe der Skizze oben, dass der **Zentriwinkel** $\sphericalangle T_1MT_2 = 2\alpha$.

Aufgabe A15 Was ist der Zusammenhang der Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne?

Merke 4.2.5

Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.
Und umgekehrt gilt auch, dass der geometrische Ort aller Punkte C, die über einer Strecke $[AB]$ einen Winkel γ bilden, einem Kreisbogenpaar über $[AB]$, dem sogenannten **Ortsbogenpaar** entspricht.

Aufgabe A16 Über einer gegebenen Strecke $[AB]$ konstruieren Sie den Ortsbogen für einen gegebenen Winkel $\gamma = 65°$.

Aufgabe A17 Von einem Dreieck ABC ist folgendes gegeben (Einheit jeweils 2 Häuschen (oder 1cm)):

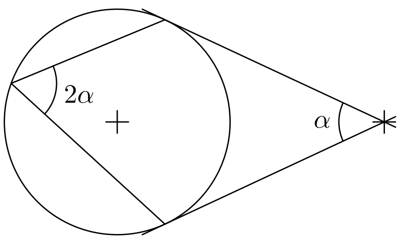
a) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $h_c = 4$.
b) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40°$.
c*) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70°$

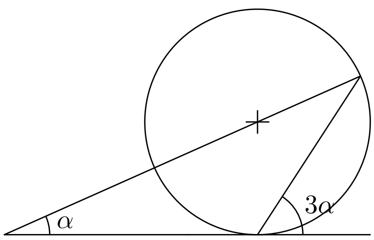
Aufgabe A18 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in einem Punkt B von aussen berühren. Durch den Punkt B wird eine Gerade g gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade g schneidet die Kreise k_1 und k_2 in je einem weiteren Punkt T_1 und T_2. Seien t_1 bzw. t_2 die Tangenten an k_1 bzw. k_2 im Punkt T_1 bzw. T_2.

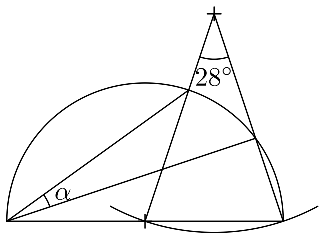
a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

Aufgabe A19 Berechnen Sie den Winkel α:

a)


b)


c)


Aufgabe A20 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten A und B schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade g durch A gegeben, die beide Kreise schneidet, nämlich in den Punkten $C = g \cap k_1$ und $D = g \cap k_2$.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie g durch A gelegt wird.

Aufgabe A21 Diese Aufgabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben ist ein Kreis k und zwei beliebige, sich nicht schneidende Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ (also $A, B, C, D \in k$). *Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt C auf k und gegebenem Radius. D ist dann ein Schnittpunkt der Kreise.*

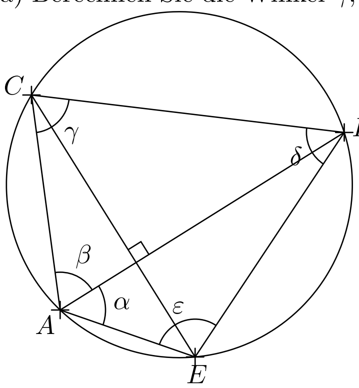
Sei X der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks, geformt durch die vier Punkte A, B, C, D.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf k wandert, wo liegen dann alle Punkte X? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

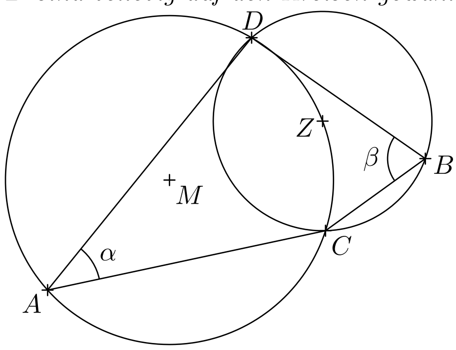
Aufgabe A22 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt A wird die Tangente t an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn α, β und γ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Das Resultat ist eine Formel, die gegebene Winkel enthält.*

Aufgabe A23

a) Berechnen Sie die Winkel γ, δ und ε aus α und β:



b) Wie hängen α und β zusammen? *Hinweis: A und B sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*



Aufgabe A24 Beweisen Sie, dass in jedem $\triangle ABC$ gilt: $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$, mit u der Umkreis des Dreiecks.

4.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A2 ex-winkelsaetze-geraden1

a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2} 42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu A3 ex-winkelsaetze-geraden2

Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g, h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w^2_{gh}, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, w^2_{gh}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu A4 ex-winkelsaetze-geraden3

a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.

b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.

c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.

d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu A5 ex-winkelsaetze-geraden4

Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

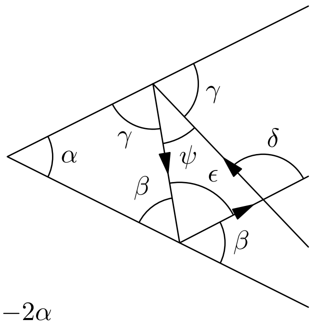
$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu A6 ex-winkelsaetze-geraden5
Für den Aussenwinkel δ gilt:



$$\delta = \varepsilon + \psi$$

Mit $\varepsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \varepsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu A7 ex-winkelsaetze-geraden6
a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich $60°$.
Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60° - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60° - \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\beta = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = 30°.$$

Lösung zu A8 ex-winkelsaetze-geraden7
Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

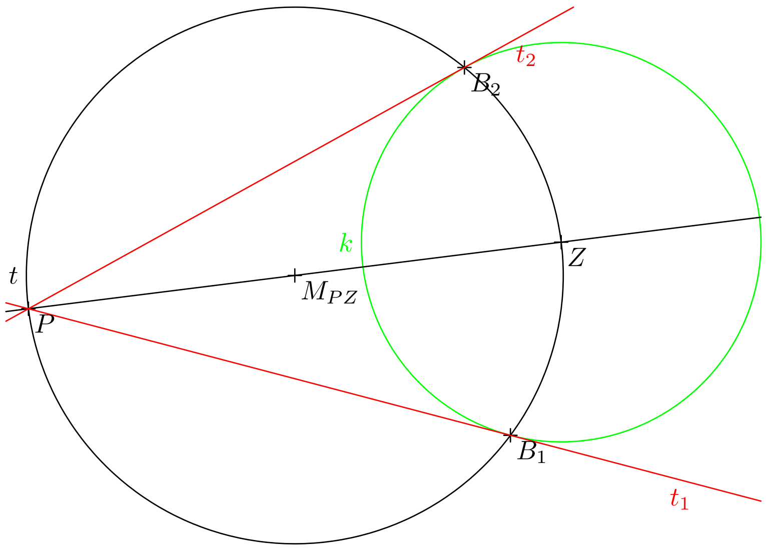
$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

Lösung zu A9 ex-tangente-an-kreis-durch-p

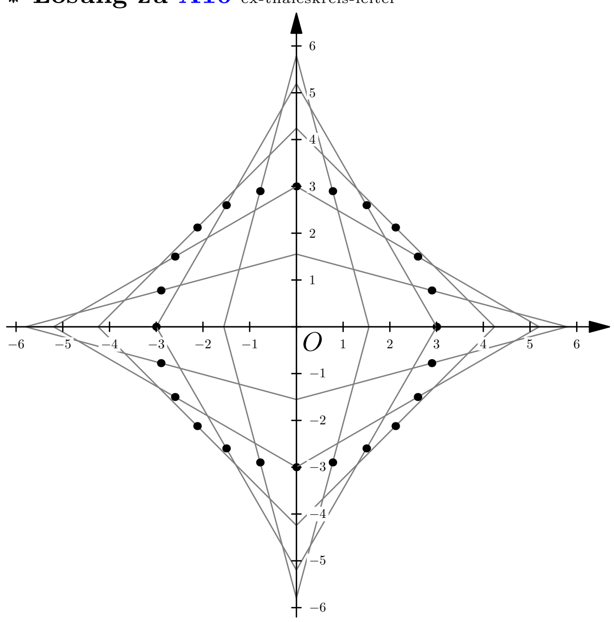
Wir konstruieren den Berührungspunkt $B \in k$ der Tangente. Es gilt

$$ZB \perp PB \quad \text{also} \quad B \in k(M_{PZ}, \frac{1}{2}\overline{PZ}) \quad \text{(Thaleskreis über PZ.}$$

1.	Thaleskreis über PZ	$\rightarrow t$
2.	$t \cap k$	$\rightarrow B_1, B_2$
3.	PB_1 und PB_2	$\rightarrow$ Gesuchte Tangenten t_1, t_2



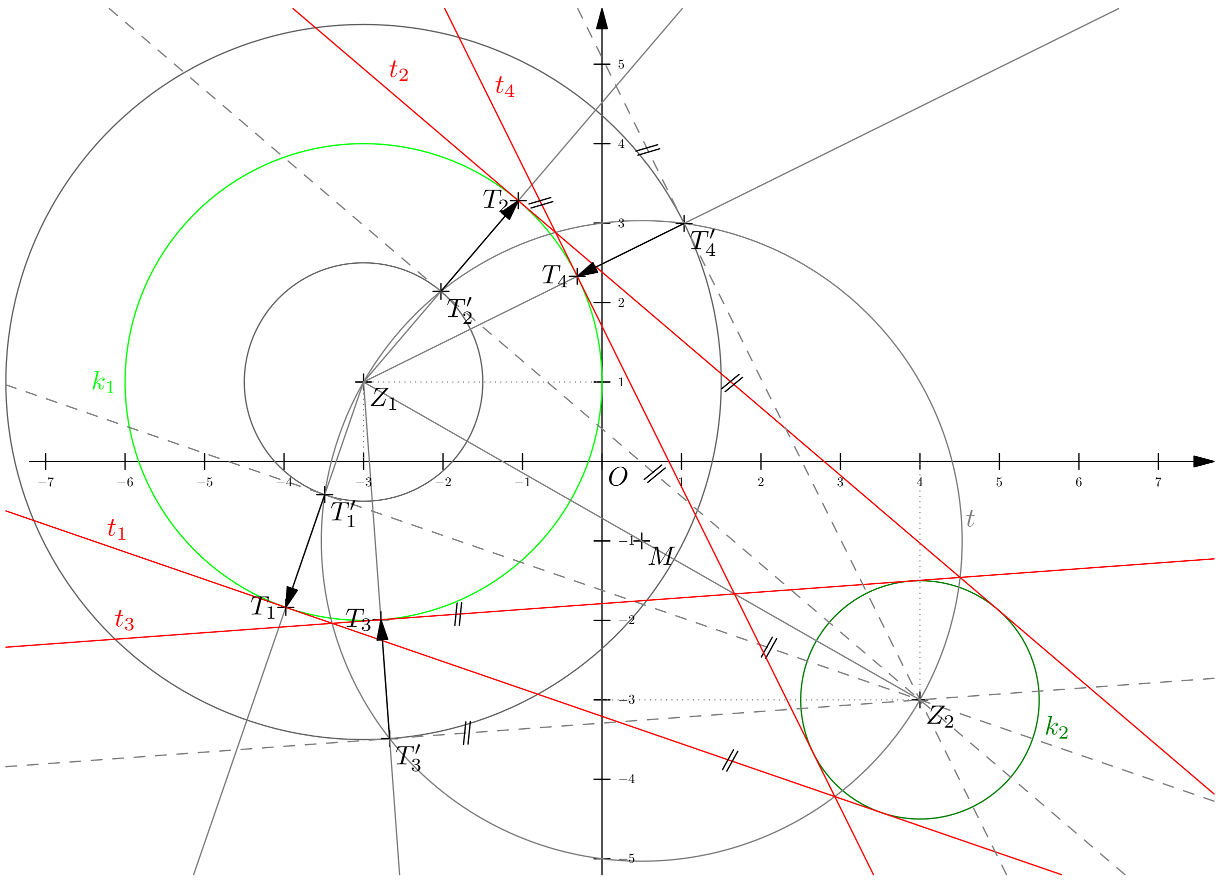
Lösung zu A10 ex-thaleskreis-leiter



M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem ein rechter Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thaleskreis über $[AB]$ und somit $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}}$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf einem Kreis um O liegen.

Lösung zu A11 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1.	Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$	$\rightarrow t$
2.	$k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$	$\rightarrow T_1', T_2'$
3.	$[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$	$\rightarrow T_{1,2}$
4.	$k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$	$\rightarrow T_3', T_4'$
5.	$[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$	$\rightarrow T_{3,4}$
6.	Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$	$\rightarrow t_{1,2,3,4}$



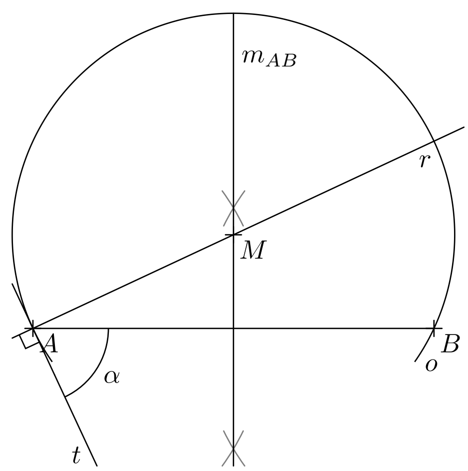
Lösung zu A12 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über $[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

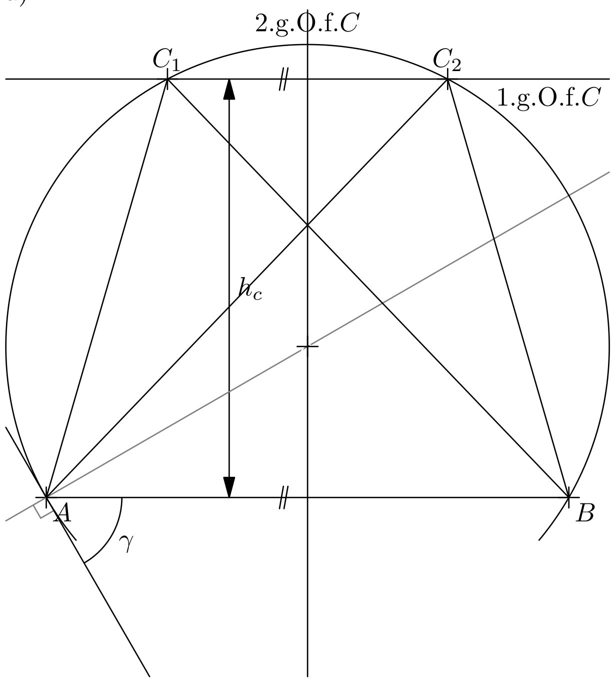
Lösung zu A16 ex-geom-ort-ortsbogen0

Es gilt: Der Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangenwinkel. Die Tangente kann also konstruiert werden, indem der Winkel γ an der Strecke $[AB]$ abgetragen wird. Das gesuchte Ortsbogenzentrum muss einerseits auf der Rechtwinkligen dazu liegen, andererseits auf der Mittelsenkrechte m_{AB}.

1.	Winkel α bei A abtragen	$\rightarrow$ Tangente t
2.	$\perp$ zu t durch A	$\rightarrow r$
3.	$m_{AB} \cap r$	$\rightarrow M$
4.	$k(M, \overline{MA})$	$\rightarrow$ Gesuchter Ortsbogen



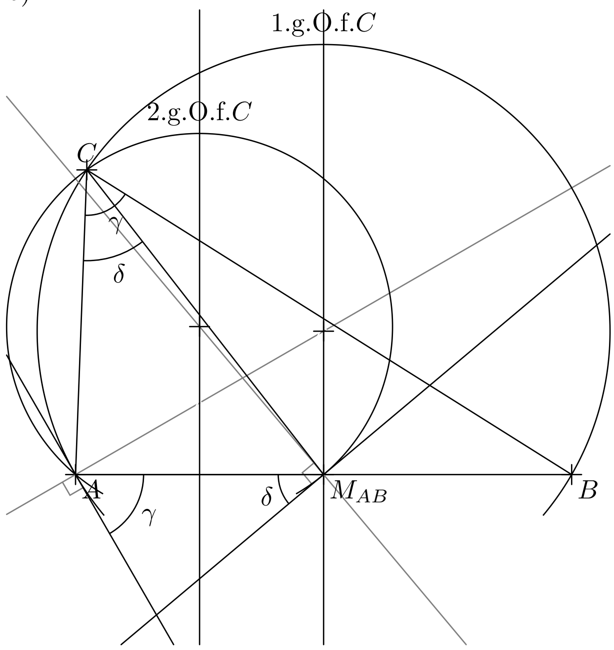
Lösung zu A17 ex-geom-ort-ortsbogen1 a)



1. $\parallel$ zu AB im Abstand h_c $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an AB gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

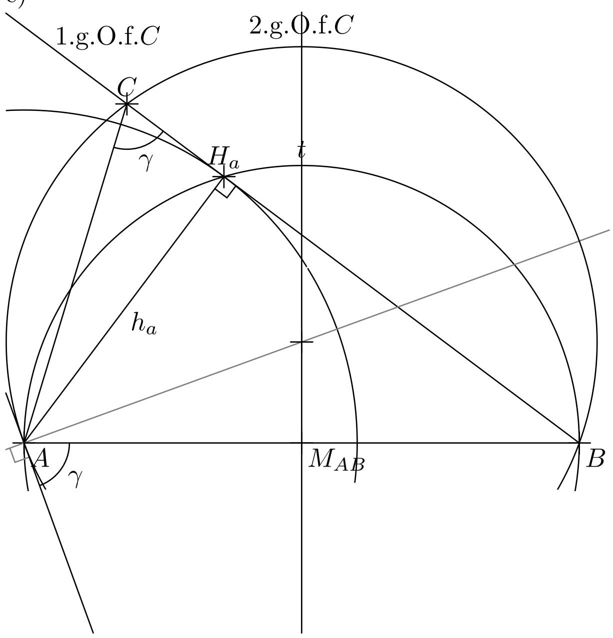
b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu δ über $[AM_{AB}]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

c)



Zuerst wird der Höhenfusspunkt H_a konstruiert, womit man die Lage der Seite a erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\to t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\to H_a$
3. BH_a $\to$ 1.g.O.f.C
4. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

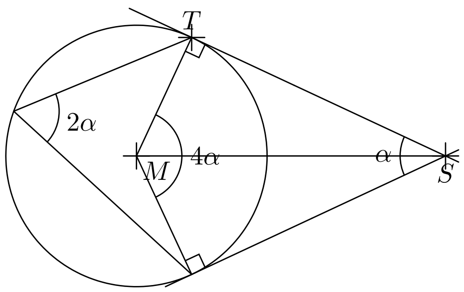
Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

Lösung zu A18 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei t die gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 im Punkt B. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie α. Damit haben wir in den Punkten T_1 und T_2 Wechselwinkel an der Geraden g und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

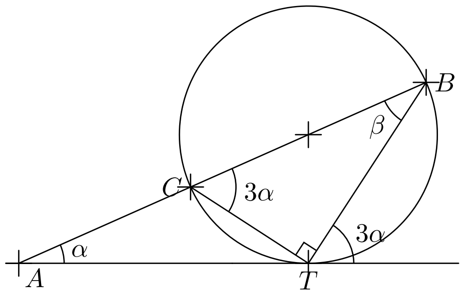
Lösung zu A19 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



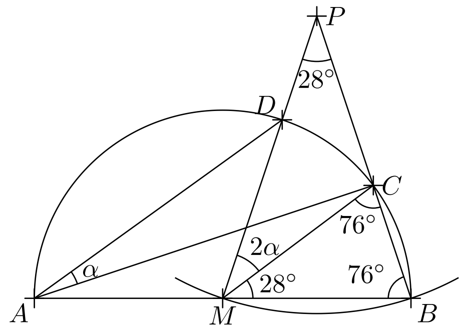
Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. MS halbiert die Winkel 4α und α.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)



$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in T.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) + (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach α aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)



$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

Lösung zu A20 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt:

Die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BDC$ sind Peripheriewinkel über $[AB]$ und damit, unabhängig von g immer gleich gross. Damit ist auch der dritte Winkel im $\triangle BDC$ immer gleich gross, was zu beweisen war.

Wenn $[AB]$ ausserhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt, ist der Peripheriewinkel das Komplement zu 180° und ein Aussenwinkel des Dreiecks, womit der Innenwinkel wieder gleich gross ist.

Lösung zu A21 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[AD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind C und D zu vertauschen).

Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle ADB$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen $[DC]$ und $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf k wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$ und damit ist der Winkel $\sphericalangle AXD$ auch immer gleich gross. Damit liegen alle möglichen Punkte X auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

Lösung zu A22 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Diese Lösung ist für den Fall $\beta > \gamma$.

Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle BAT = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel γ).

β ist Aussenwinkel im $\triangle ABT$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Im Falle $\gamma = \beta$ gibt es keinen Schnittpunkt (der Winkel zwischen den Geraden ist dann 0°). Wenn $\gamma > \beta$ ist $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

Lösung zu A23 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle CED = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AXE$). Und

damit:
$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$
Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.
Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie β und der Winkel bei C gleich gross wie α (Peripheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist
$\delta = 180° - \alpha - \beta$.

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β über der Sehne $[CD]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewnkel über $[CD]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel). Also gilt folgende Beziehung zwischen α und β:

$$2\beta = 180° - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach α oder β aufgelöst werden.

Lösung zu A24 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4
Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.
Es gilt: $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein, d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.