

## 7 Ungleichungen und Intervalle

✂ **Aufgabe A1** Lösen Sie folgende Ungleichungen:

a)  $2x - 4 > 2$

b)  $3x + 8 < 2$

c)  $5x + 2 \leq 3x$

d)  $2x - 3 \geq x + 1$

✂ **Aufgabe A2** Lösen Sie folgende Ungleichungen. Überprüfen Sie dann Ihr Resultat durch Einsetzen einiger Zahlen.

a)  $-5x > 5$

b)  $-\frac{x}{2} \leq -6$

c)  $-x < 2$

### Umformungen von Ungleichungen

✂ **Aufgabe A3** Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (eine Seite schwerer als die andere), warum bei Ungleichungen addieren und subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist.

✂ **Aufgabe A4** Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).

✂ **Aufgabe A5** Lösen Sie folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

#### Merke 7.0.1

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer

### 7.1 Intervalle

Um ganze Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird die Schreibweise mit **Intervallen** verwendet. Beispiele:

$[\sqrt{2}, \pi]$	Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit $\pi$ .
$]3, 8.5]$	Alle Zahlen grösser als 3 (ohne die 3) bis und mit 8.5.
$[-4, -\frac{1}{2}[$	Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$ ).
$]0, 1[$	Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.
$] - \infty, 5.13]$	Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.
$] - 3.57, \infty[$	Alle Zahlen grösser als $-3.57$ (ohne $-3.57$ ).

#### Merke 7.1.1

Intervalle sind **Mengen von reellen Zahlen** und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer «richtig herum», gehört die Grenze dazu, das Intervall ist **geschlossen**. Andernfalls ist das Intervall **offen**. Da  $-\infty$  und  $\infty$  keine Zahlen sind, gehören diese nie zum Intervall und die Klammern sind immer «offen».

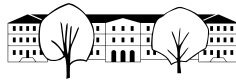
✂ **Aufgabe A6** Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe **A1** als Intervall an.

a)  $x > 3$ , also  $\mathbb{L} =$

b)  $x < -2$ , also  $\mathbb{L} =$

c)  $x \leq -1$ , also  $\mathbb{L} =$

d)  $x \geq 4$ , also  $\mathbb{L} =$



✂ **Aufgabe A7** Was ist die kleinste Zahl im Intervall  $[3, 4[$ ? Was ist die grösste Zahl im Intervall  $[3, 4[$ ?

## 7.2 Rechnen mit Bruchtermen

### Merke 7.2.1

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**.

### Merke 7.2.2

Es darf nur aus Produkten gekürzt werden. Die Faktoren selbst dürfen aber beliebig kompliziert sein.

✂ **Aufgabe A8** Falls möglich, faktorisieren Sie erst die Nenner! Machen Sie dann gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} & \text{b) } \frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{z^2-1} & \text{c) } \frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1} \\ \text{d) } \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{(a-b)^2} & \text{e) } \frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} & \text{f) } \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2} \end{array}$$

### Merke 7.2.3

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.  
Es wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

✂ **Aufgabe A9** Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).*

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \left( \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v} \right) & \text{b) } \left( \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} \right)^2 \\ \text{c) } \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) : \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) & \text{d) } \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) : \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ \text{e) } \left( a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) : \left( a^2 - \frac{1}{a^2} \right) & \text{f) } \frac{1}{n^2+2n+1} \cdot \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) \\ \text{g) } \left( \frac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12 \right) : (n^2+4) - \frac{2}{n+1} + \frac{1-n^2}{n^2+n} \end{array}$$



### 7.3 Vorzeichen von Produkten und Quotienten

#### Merke 7.3.1

Hat eine Ungleichung die Form «Produkt  $<, \leq, \geq, > 0$ », reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen. Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren negativ sind, ist auch das Produkt negativ.

**Beispiel:**  $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$

Wir untersuchen die einzelnen Faktoren  $(x-4)$ ,  $(4-2x)$  und  $(x-1)$  auf die Vorzeichen und zeichnen die Grenzen auf dem Zahlenstrahl auf:

Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist:

#### Merke 7.3.2

Die Grenzen von Termen im Nenner sind **immer** auszuschliessen (Division durch Null). Sonst sind die Grenzen einzuschliessen, wenn das Vergleichszeichen  $\leq 0$  oder  $\geq 0$  ist.

✂ **Aufgabe A10** Geben Sie die Lösungsmengen für das Beispiel an, wenn das Zeichen zu a)  $\leq$ , b)  $\geq$  und c)  $>$  geändert wird.

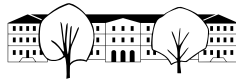
✂ **Aufgabe A11** Lösen Sie folgende Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einen Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie.

a)  $\frac{(x^4 - 4)}{(3 - x)(x^2 + 1)} \geq 0$

b)  $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 1} \leq 0$

c)  $\frac{x + 8}{x + 6} + \frac{x}{2} < 0$

d)  $\frac{1}{x + 2} > \frac{4x - 3}{5x + 3}$



## 7.4 Faktorisieren

Insbesondere bei Bruchgleichungen oder Gleichungen der Form «Produkt=Null» ist es nützlich, quadratische Polynome faktorisieren zu können.

Wir beschränken uns hier auf quadratische Polynome der Form

$$x^2 + ax + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ziel ist es, folgende Faktorisierung zu finden, falls diese existiert:

$$(x + c)(x + d) \quad \text{mit } c, d \in \mathbb{Z}$$

✂ **Aufgabe A12** Multiplizieren Sie das Produkt oben aus und vergleichen Sie es mit dem quadratischen Polynom. Beschreiben Sie den Zusammenhang der Parameter  $a$  und  $b$  in Abhängigkeit von  $c$  und  $d$ .

### Merke 7.4.1

Ganzzahliges Faktorisieren Ist ein quadratische Polynom der Form  $x^2 + ax + b$  zu faktorisieren, sucht man zwei Zahlen so, dass 🐾

✂ **Aufgabe A13** Faktorisieren Sie:

- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $x^2 + 18x + 72$  | b) $x^2 + 24x + 135$ | c) $x^2 + 24x + 135$ |
| d) $x^2 + 27x + 180$ | e) $x^2 + 18x + 72$  | f) $x^2 + 22x + 120$ |
| g) $x^2 + 17x + 72$  | h) $x^2 + 24x + 135$ | i) $x^2 + 16x + 60$  |

✂ **Aufgabe A14** Faktorisieren Sie:

- |                     |                      |                     |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 64$       | b) $x^2 + x - 72$    | c) $x^2 - 20x + 96$ |
| d) $x^2 - 17x + 72$ | e) $x^2 - 23x + 120$ | f) $x^2 - 7x - 120$ |
| g) $x^2 - 18x + 80$ | h) $x^2 - 20x + 96$  | i) $x^2 - 5x - 150$ |

✂ **Aufgabe A15** Faktorisieren Sie:

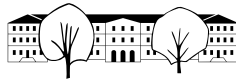
- |                                 |                                  |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $-3x^2y^3 - 51xy^3 - 216y^3$ | b) $-5w^3x^2 - 105w^3x - 450w^3$ | c) $-2nx^2 + 2nx + 180n$         |
| d) $-7ax^2 + 42ax + 945a$       | e) $-2cx^2 - 8cx + 192c$         | f) $-7e^2x^2 + 140e^2x - 672e^2$ |
| g) $-2bx^2 + 200b$              | h) $-5f^2x^2 - 105f^2x - 450f^2$ | i) $-3a^3x^2 + 27a^3x + 270a^3$  |

✂ **Aufgabe A16** Lösen Sie folgende Gleichungen:

- |  |  |
|--|--|
| a) $(x^2 - 16)(x^2 - x - 30)(x^2 - 4x + 4) = 0$                        | b) $(x - 2) \cdot 4x^2 - 8(x - 2) = 0$ |
| c) $(x^2 - 9) \cdot 7x^3 - 42x^2 \cdot (x^2 - 9) = 945x(x - 3)(x + 3)$ |  |

✂ **Aufgabe A17** Lösen Sie folgende Ungleichungen:

a)  $\frac{x}{x^2 - 11x - 42} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} \leq 0$



## 7.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

✪ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

### ✂ Lösung zu A1 ex-ungleichungen-einfacher-einstieg

a) $\begin{aligned} 2x - 4 > 2 & \quad   + 4 \\ 2x > 6 & \quad   : 2 \\ x > 3 & \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} 3x + 8 < 2 & \quad   - 8 \\ 3x < -6 & \quad   : 3 \\ x < -2 & \end{aligned}$	c) $\begin{aligned} 5x + 2 \leq 3x & \quad   - 3x - 2 \\ 2x \leq -2 & \quad   : 2 \\ x \leq -1 & \end{aligned}$	d) $\begin{aligned} 2x - 3 \geq x + 1 & \quad   - x + 3 \\ x \geq 4 & \end{aligned}$
---	---	--	---

### ✂ Lösung zu A2 ex-ungleichungen-aufgepasst

a) $\begin{aligned} -5x > 5 & \quad   : -5 \quad \triangle \\ x < -1 & \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} -\frac{x}{2} \leq -6 & \quad   \cdot -2 \quad \triangle \\ x \geq 12 & \end{aligned}$	c) $\begin{aligned} -x < 2 & \quad   \cdot (-1) \quad \triangle \\ x > -2 & \end{aligned}$
--	--	---

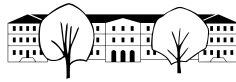
### ✂ Lösung zu A8 ex-bruchterme-addition

a) 
$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{(x+y)(x-y)}$$

b) 
$$\frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{z^2-1} = \frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{(z+1)(z-1)} = \frac{4(z+1) + z-9}{(z+1)(z-1)} = \frac{4z+4+z-9}{(z+1)(z-1)} = \frac{5z-5}{(z+1)(z-1)} = \frac{5(z-1)}{(z+1)(z-1)} = \frac{5}{z+1}$$

c) 
$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1} &= \frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \\ \frac{n(n-1) - (2n+1)(n+1) + (n^2+5n)}{(n+1)(n-1)} &= \frac{n^2 - n - (2n^2 + 3n + 1) + n^2 + 5n}{(n+1)(n-1)} = \\ \frac{n^2 - n - 2n^2 - 3n - 1 + n^2 + 5n}{(n+1)(n-1)} &= \frac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

d) 
$$\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{(a-b)^2} = \frac{a}{(a+b)(a-b)} + \frac{b}{(a-b)^2} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)^2} + \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a(a-b) + b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a^2 - ab + ab + b^2}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)(a-b)^2}$$



$$\begin{aligned}
 \text{e) } \frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} &= \frac{b-c}{a(a+c)} - \frac{a-b}{c(a+c)} + \frac{a^2+c^2}{ac(a+c)} = \\
 \frac{c(b-c) - a(a-b) + (a^2+c^2)}{ac(a+c)} &= \frac{cb - c^2 - (a^2 - ab) + a^2 + c^2}{ac(a+c)} = \frac{cb - a^2 + ab + a^2}{ac(a+c)} = \frac{cb + ab}{ac(a+c)} = \\
 \frac{b(c+a)}{ac(a+c)} &= \frac{b}{ac}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2} &= \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{s(2-s)} = \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} - \frac{s+4}{s(s-2)} = \\
 \frac{3s^2 - 2(s-2)^2 - (s+4)(s-2)}{s(s-2)^2} &= \frac{3s^2 - 2(4 - 4s + s^2) - (s^2 + 2s - 8)}{s(s-2)^2} = \\
 \frac{3s^2 - (8 - 8s + 2s^2) - s^2 - 2s + 8}{s(s-2)^2} &= \frac{3s^2 - 8 + 8s - 2s^2 - s^2 - 2s + 8}{s(s-2)^2} = \frac{6s}{s(s-2)^2} = \frac{6}{(s-2)^2}
 \end{aligned}$$

Hinweis: Anstatt Vorzeichenakrobatik  $(2-s) = -(2-s)$ , könnte man auch einfach  $(2-s)^2 = (-(s-2))^2 = (s-2)^2$  verwenden.

✂ Lösung zu A9 ex-bruchterme-querbeet

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \left( \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v} \right) &= \frac{(u+v)(u-v)}{u^2 + v^2} \left( \frac{u(u-v)}{(u+v)(u-v)} + \frac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)} \right) = \\
 \frac{(u+v)(u-v)}{u^2 + v^2} \left( \frac{u^2 - uv + uv + v^2}{(u+v)(u-v)} \right) &= \frac{(u+v)(u-v)}{u^2 + v^2} \cdot \frac{u^2 + v^2}{(u+v)(u-v)} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left( \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} \right)^2 &= \left( \frac{r+s}{(r-s)(r+s)} - \frac{r-s}{(r+s)(r-s)} \right)^2 = \left( \frac{r+s - (r-s)}{(r-s)(r+s)} \right)^2 = \\
 \left( \frac{2s}{(r-s)(r+s)} \right)^2 &= \frac{4s^2}{(r-s)^2(r+s)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) : \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{ad - bc}{bd} : \frac{ad + cb}{bd} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{bd}{ad + cb} = \frac{ad - bc}{ad + cb}$$

$$\text{d) } \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) : \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{n^2 - 1}{n^2} : \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \left( a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) : \left( a^2 - \frac{1}{a^2} \right) &= \left( a + \frac{1}{a} \right)^2 : \left( a + \frac{1}{a} \right) \left( a - \frac{1}{a} \right) = \left( a + \frac{1}{a} \right) : \left( a - \frac{1}{a} \right) = \\
 \frac{a^2 + 1}{a} : \frac{a^2 - 1}{a} &= \frac{a^2 + 1}{a} \cdot \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 1}{(a+1)(a-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \cdot \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left( \frac{n^2 + n + n^2 + 3n + 2}{2} \right) = \\
 \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left( \frac{2n^2 + 4n + 2}{2} \right) &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left( \frac{2(n^2 + 2n + 1)}{2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot (n+1)^2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \left( \frac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12 \right) : (n^2+4) - \frac{2}{n+1} + \frac{1-n^2}{n^2+n} &= \\
 \left( 3n^2 - \frac{2n(n^2+4)}{n+1} + 12 \right) : (n^2+4) - \frac{2}{n+1} + \frac{(1+n)(1-n)}{n(n+1)} &= \\
 \frac{3n^2}{n^2+4} - \frac{2n}{n+1} + \frac{12}{n^2+4} - \frac{2}{n+1} + \frac{1-n}{n} &= \frac{3n^2+12}{n^2+4} - \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1-n}{n} = \\
 \frac{3(n^2+4)}{n^2+4} - \frac{2(n+1)}{n+1} + \frac{1-n}{n} &= 3 - 2 + \frac{1-n}{n} = 1 + \frac{1-n}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1-n}{n} = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

✂ Lösung zu A11 ex-ungleichungen-vorzeichen



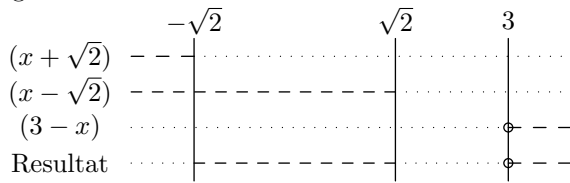
a)

$$\frac{(x^4 - 4)}{(3 - x)(x^2 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2)}{(3 - x)(x^2 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{(3 - x)(x^2 + 1)} \geq 0$$

$(x^2 + 2)$  und  $(x^2 + 1)$  sind immer positiv (weil  $x^2$  immer positiv oder Null ist) und können daher ignoriert werden.



$$\mathbb{L} = ] -\infty, -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, 3[$$

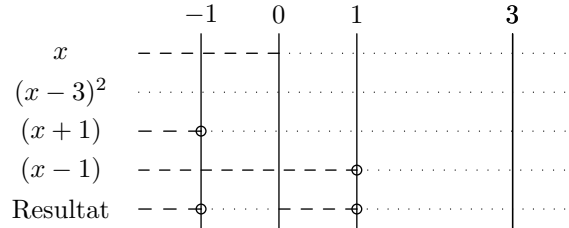
$x = 3$  ist nicht Teil der Lösungsmenge, weil  $(x - 3)$  im Nenner vorkommt.

b)

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 1} \leq 0$$

$$\frac{x(x - 3)^2}{(x + 1)(x - 1)} \leq 0$$

$(x - 3)^2$  ist zwar nie negativ wird aber 0 (für  $x = 3$ ).



$$\mathbb{L} = ] -\infty, -1[ \cup ]0, 1[ \cup \{3\}$$

$x = 3$  ist Teil der Lösungsmenge weil  $(x - 3)^3$  dort 0 ist. Anstatt  $\{3\}$  könnte auch  $[3, 3]$  geschrieben werden.

c)

$$\frac{x + 8}{x + 6} + \frac{x}{2} < 0$$

$$\frac{2(x + 8)}{2(x + 6)} + \frac{x(x + 6)}{2(x + 6)} < 0$$

$$\frac{2x + 16}{2(x + 6)} + \frac{x^2 + 6x}{2(x + 6)} < 0$$

$$\frac{2x + 16 + x^2 + 6x}{2(x + 6)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{2(x + 6)} < 0$$

$$\frac{(x + 4)^2}{2(x + 6)} < 0$$

$(x + 4)^2$  ist nie negativ, es reicht also  $(x + 6)$  zu betrachten.

$$\mathbb{L} = ] -\infty, -6[$$

d)

$$\frac{1}{x + 2} > \frac{4x - 3}{5x + 3} \quad | - \frac{4x - 3}{5x + 3}$$

$$\frac{1}{x + 2} - \frac{4x - 3}{5x + 3} > 0$$

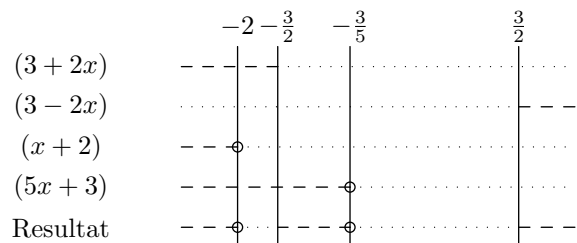
$$\frac{5x + 3}{(x + 2)(5x + 3)} - \frac{(x + 2)(4x - 3)}{(x + 2)(5x + 3)} > 0$$

$$\frac{5x + 3 - (4x^2 + 5x - 6)}{(x + 2)(5x + 3)} > 0$$

$$\frac{5x + 3 - 4x^2 - 5x + 6}{(x + 2)(5x + 3)} > 0$$

$$\frac{-4x^2 + 9}{(x + 2)(5x + 3)} > 0$$

$$\frac{(3 + 2x)(3 - 2x)}{(x + 2)(5x + 3)} > 0$$



$$\mathbb{L} = ] -2, -\frac{3}{2}[ \cup ] -\frac{3}{5}, \frac{3}{2}[$$

✂ Lösung zu A13 ex-faktorisieren-nur-positiv

a)  $(x + 12) \cdot (x + 6)$

b)  $(x + 9) \cdot (x + 15)$

c)  $(x + 9) \cdot (x + 15)$

d)  $(x + 12) \cdot (x + 15)$

e)  $(x + 12) \cdot (x + 6)$

f)  $(x + 10) \cdot (x + 12)$

g)  $(x + 9) \cdot (x + 8)$

h)  $(x + 15) \cdot (x + 9)$

i)  $(x + 10) \cdot (x + 6)$



✂ Lösung zu A14 ex-faktorisieren-auch-negativ

- |                             |                             |                              |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $(x - 8) \cdot (x + 8)$  | b) $(x - 8) \cdot (x + 9)$  | c) $(x - 8) \cdot (x - 12)$  |
| d) $(x - 8) \cdot (x - 9)$  | e) $(x - 15) \cdot (x - 8)$ | f) $(x - 15) \cdot (x + 8)$  |
| g) $(x - 8) \cdot (x - 10)$ | h) $(x - 8) \cdot (x - 12)$ | i) $(x - 15) \cdot (x + 10)$ |

✂ Lösung zu A15 ex-faktorisieren-zusatzfaktor

- a)  $-3y^3(x^2 + 17x + 72) = -3y^3(x + 9) \cdot (x + 8)$   
 b)  $-5w^3(x^2 + 21x + 90) = -5w^3(x + 6) \cdot (x + 15)$   
 c)  $-2n(x^2 - x - 90) = -2n(x - 10) \cdot (x + 9)$   
 d)  $-7a(x^2 - 6x - 135) = -7a(x + 9) \cdot (x - 15)$   
 e)  $-2c(x^2 + 4x - 96) = -2c(x + 12) \cdot (x - 8)$   
 f)  $-7e^2(x^2 - 20x + 96) = -7e^2(x - 12) \cdot (x - 8)$   
 g)  $-2b(x^2 - 100) = -2b(x + 10) \cdot (x - 10)$   
 h)  $-5f^2(x^2 + 21x + 90) = -5f^2(x + 15) \cdot (x + 6)$   
 i)  $-3a^3(x^2 - 9x - 90) = -3a^3(x - 15) \cdot (x + 6)$

✂ Lösung zu A16 ex-ungleichungen-produkt-gleich-null

a)

$$(x + 4)(x - 4)(x - 6)(x + 5)(x - 2)^2 = 0$$

Alle  $x$ , die einen der Faktoren zu Null machen, sind eine Lösung der Gleichung. Damit ist  $\mathbb{L} = \{-4, 4, 6, -5, 2\}$ .

b)

$$(x - 2)(4x^2 - 8) = (x - 2) \cdot 4 \cdot (x^2 - 2) = 4(x - 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

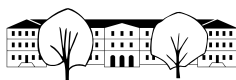
$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}.$$

c)

$$\begin{aligned} (x + 3)(x - 3) \cdot 7x^3 - 42x^2 \cdot (x + 3)(x - 3) &= 945x(x - 3)(x + 3) && | - 945x(x - 3)(x + 3) \\ (x + 3)(x - 3) \cdot 7x^3 - 42x^2 \cdot (x + 3)(x - 3) - 945x(x - 3)(x + 3) &= 0 && | \text{TU} \\ (x + 3)(x - 3)(7x^3 - 42x^2 - 945x) &= 0 && | \text{TU} \\ 7x(x + 3)(x - 3) \cdot (x^2 - 6x - 135) &= 0 && | \text{TU} \\ 7x(x + 3)(x - 3)(x + 9)(x - 15) &= 0 && \end{aligned}$$

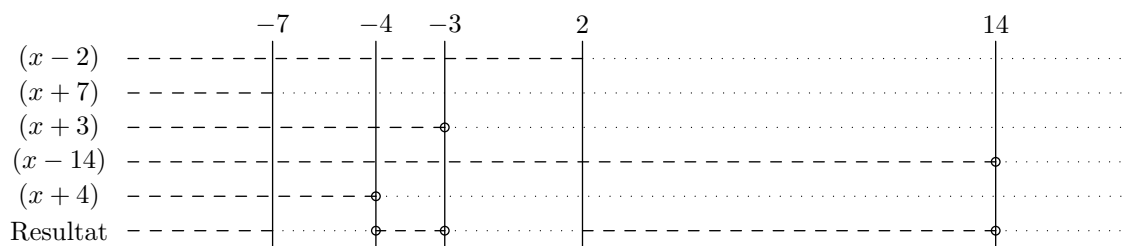
$$\mathbb{L} = \{0, -3, 3, -9, 15\}.$$

✂ Lösung zu A17 ex-ungleichungen-produkt-ungleich-null



a)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 11x - 42} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} &\leq 0 && | \text{TU} \\ \frac{x}{(x+3)(x-14)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} &\leq 0 && | \text{TU} \\ \frac{x(x+4) + (x-14)}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0 && | \text{TU} \\ \frac{x^2 + 5x - 14}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0 && | \text{TU} \\ \frac{(x-2)(x+7)}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0 \end{aligned}$$



Man liest ab:  $\mathbb{L} = ] - \infty, -7] \cup ] - 4, -3[ \cup [2, 14[.$