4 Planimetrie Grundlagen

Euklid'sche Ebene $\mathbb{E}$: Gewohnte Zeichenebene, bestehend aus Punkten.

Zwischen jedem Paar von Punkten $P, Q \in \mathbb{E}$ kann ein Abstand $|PQ|$ gemessen werden.

Abstände werden als relle Zahl ohne Masseinheit angegeben und beziehen sich auf eine Einheitslänge (implizit oder explizit).

4.1 Parallelenaxiom

> Zu jeder Geraden $g \subset \mathbb{E}$ und jedem Punkt $P \in \mathbb{E}$ mit $P \notin g$ gibt es genau eine parallele Gerade $h \subset \mathbb{E}$ mit $P \in h$.

4.2 Strecken und Geraden

Strecke $\overline{AB} := \{P \in \mathbb{E} \mid |AB| = |AP| + |PB|\}$

D.h. eine Strecke ist die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei Punkten: **Geodäte**.

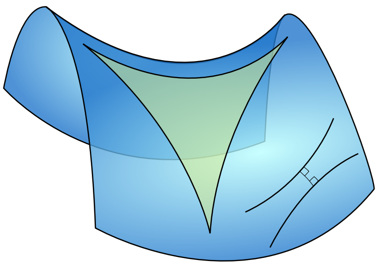
Intuitiv: Faden spannen.

Gerade $(AB) := \{P \in \mathbb{E} \mid P \in \overline{AB}$ oder $A \in \overline{BP}$ oder $B \in \overline{AP}\}$.

Damit lassen sich Geraden auch auf gekrümmten Flächen definieren. Relativitätstheorie!

Auf einer Kugel gibt es keine Parallelen. Geodäten sind Grosskreise.

Auf einem Sattel gibt es mehrere Parallelen. Gerade «laufen auseinander».



4.3 Notationen

Im Formelbuch wird oft die gleiche Notation für Strecken ($\overline{AB}$ als Punktemenge) und Streckenlängen ($|AB|$ als relle Zahl) verwendet. Es muss aus dem Kontext geschlossen werden, was genau gemeint ist.

Notation	**Beschreibung**
A	Punkte: Grossbuchstaben
$g = (AB)$	Geraden: Kleinbuchstaben
$c = \overline{AB}$	Strecken: Kleinbuchstaben
$k = k(Z, r)$	Kreise: Kleinbuchstaben, Angabe von Zentrum und Radius. $k(Z, r) = \{P \in \mathbb{E} \mid r = \lvert PZ\rvert\}$
$\lvert AB\rvert$	Abstand der Punkte A, B
$\lvert Pg\rvert$	Abstand Punkt P zur Gerade g. $\min_{Q \in g} \lvert PQ\rvert$
$g \parallel h$	Parallele Geraden
$g \perp h$	Senkrechte Geraden
$S = g \cap h$	Schnittpunkt der Geraden
m_{AB}	Mittelsenkrechte zwischen A,B. $\{P \in \mathbb{E} \mid \lvert AP\rvert = \lvert BP\rvert\}$
M_{AB}	Mittelpunkt zwischen A,B: $\lvert AP\rvert = \lvert BP\rvert$ und $P \in \overline{AB}$.
$\alpha = \sphericalangle gh$	Winkel zwischen Geraden
$\alpha = \sphericalangle BAC$	Winkel mit Scheitel A
$w_{g,h}$	Winkelhalbierendenpaar der Geraden g, h. $\{Pin\mathbb{E} \mid \lvert Pg\rvert = \lvert Ph\rvert\}$

4.4 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\lvert AB\rvert$ $\to r$ 2. $k(A,r)$ $\to k_1$ 3. $k(B,r)$ $\to k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\to P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\to m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\to M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Wähle $r > \lvert Pg\rvert$ $\to r$ 2. $k(P,r) \cap g$ $\to A, B$ 3. m_{AB} $\to p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Verschiebung mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\to p$
w_{gh}, bzw. w^1_{gh} und w^2_{gh}	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\to S$ 2. Wähle einen Radius $\to r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\to k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\to G$, H 5. Wähle $r_2 > \frac{1}{2}\lvert GH\rvert$ $\to r_2$ 6. $k(G, r_2) \cap k(H, r_2)$ $\to W$ 7. SW $\to w_{gh}$, bzw. w^1_{gh} 8. Optional: Rechtwinklige zu w^1_{gh} durch S $\to w^2_{gh}$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\to P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 3. $k(P,d) \cap h$ $\to H_1$, H_2 4. Parallelen zu g durch H_1, H_2 $\to p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, Halbgerade $i = [AB$ 1. Wähle einen Radius $\to r$ 2. $k(S,r)$, $k(A,r)$ $\to k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\to G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\to I$ 5. $k(I, \lvert GH\rvert) \cap k_2$ $\to J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\to \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

4.5 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\lvert OX\rvert$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhr-**

zeigersinn. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

4.6 Geometrische Örter

Ein **Geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\lvert PA\rvert = \lvert PB\rvert$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \lvert PA\rvert = \lvert PB\rvert\}$
✎	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\lvert MP\rvert = r$. Kurz: ✎
✎	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \lvert Pg\rvert = \lvert Ph\rvert\}$.
✎	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \lvert Pg\rvert = \lvert Ph\rvert\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $|AB| = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $|AC| = b = 4$ und $|BC| = a = 3$.

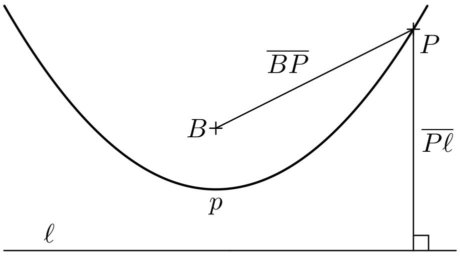
1. $k(A, b)$ $\rightarrow k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für C*
2. $k(B, a)$ $\rightarrow k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1$, C_2

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Merke 4.6.1

✎

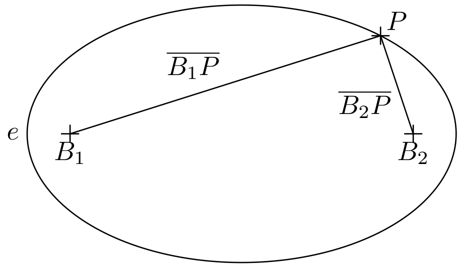
Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die senkrecht zur Leitlinie einfallen, alle zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.



Merke 4.6.2

✎

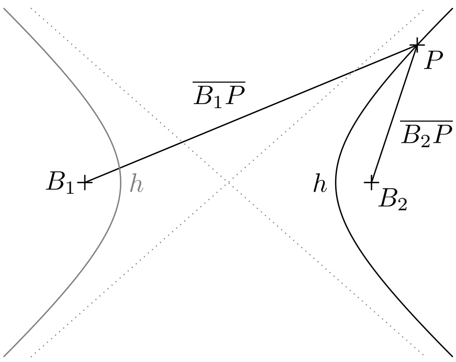
Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.
Planetenumlaufbahnen sind in sehr guter Näherung ebenfalls Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht).



Merke 4.6.3

Eine Hyperbel h ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen **Brennpunkten** B_1 und B_2 einen konstanten **Abstandsunterschied** d haben ($d < |B_1B_2|$).
$h = \{P \mid ||PB_1| - |PB_2|| = d\}$.
Lässt man die Beträge weg, erhält man nur einen Hyperbel-Ast.

Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen so reflektiert werden, als kämen die Strahlen vom anderen Brennpunkt.
Die Bahn eines Himmelskörper, der zu schnell unterwegs ist, um in eine Umlaufbahn einzuschwenken, beschreibt eine Hyperbel.
Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.



Zusammenfassung Kegelschnitte

Kurve	*Gegeben*	*geometrischer Ort*	*Reflexionseigenschaft*
Parabel	Brennpunkt B, Leitlinie ℓ	$\{P \mid \lvert PB\rvert = \lvert P\ell\rvert\}$	Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme $d > \lvert B_1B_2\rvert$	$\{P \mid \lvert PB_1\rvert + \lvert PB_2\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied $d < \lvert B_1B_2\rvert$	$\{P \mid \lvert\lvert PB_1\rvert - \lvert PB_2\rvert\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.