5 Polynome

5.1 Definitionen

Aufgabe A1 Studieren Sie folgende Definition Wort für Wort. Danach sollten Sie in eigenen Worten erklären können, was ein Monom ist, Beispiele dafür geben und für gegebene Ausdrücke entscheiden können, ob es sich um ein Monom handelt oder nicht.

Definition 5.1.1 Monom

Ein Monom ist ein Produkt aus einer reellen Zahl (dem **Koeffizienten**) und beliebig vielen **natürlichen Potenzen von Variablen** (dem **Namen** des Monoms).

Beachte:
Ist das Monom nur eine reelle Zahl, nennt man es auch eine **Konstante**.
Ist der Koeffizient 1 (bzw. -1), wird er normalerweise nicht (bzw. nur das Vorzeichen) geschrieben.

Definition 5.1.2 Grad eines Monoms

Der Grad eines Monoms ist die Summe der Exponenten der Variablen.

Definition 5.1.3 Normalform eines Monoms

Der Koeffizient wird an erster Stelle geschrieben (Ausnahme ± 1), Potenzen gleicher Variablen werden zusammengefasst und Variablen werden alphabetisch geordnet.

Beispiele für Monome in Normalform:

0	Konstante, Grad 0	x	Koeffizient 1, Name x, Grad 1
$5x^4y$	Koeffizient 5, Name x^4y, Grad 5	$-\sqrt{2}uvz^2$	Koeffizient $-\sqrt{2}$, Name uvz^2, Grad 4

Aufgabe A2 Folgende Terme sind keine Monome in Normalform. Erklären Sie, warum. Formen Sie die Terme in Monome in Normalform um, wenn das möglich ist.

a) $4+3$ b) $a+b$ c) -4^2 d) x^2+x^2
e) $y+y^2$ f) 3^z g) $|v^2|$ h) $b\cdot 4a$

Definition 5.1.4 Polynom

Ein Polynom ist eine Summe von Monomen. Die einzelnen Summanden nennt man **Glieder**.
Hinweis: Die Summe kann auch aus nur einem Monom bestehen.

Definition 5.1.5 Grad eines Polynoms

Der Grad eines Polynoms ist der grösste Grad seiner Monome.

Beispiele für Polynome: x^2+5xy $a+b^{42}+1$ 7 $7x^7$ $u^2+2uv+v^2$ $-4y-2z$

Aufgabe A3 Begründen Sie kurz, warum folgende Terme keine Polynome sind. Formen Sie die Terme in Polynome um, falls möglich.

a) $4x\cdot(x^2-5y)$ b) $\frac{1}{4a^2-b}$ c) $\frac{x^4-x^2}{x}$ d) 3^x+4^y

Definition 5.1.6 Normalform eines Polynoms

Ein Polynom ist in Normalform wenn:
Alle Monome sind in Normalform. Jeder Name kommt höchstens einmal vor.
Die Monome werden nach Grad **absteigend** geordnet. Monome gleichen Grades werden alphabetisch geordnet, wenn man die Potenzen als Produkte ausschreiben würde.
(Z.B. $a^3b^2 = aaabb$ wird vor $a^2b^3 = aabbb$ geschrieben).

Aufgabe A4 Schreiben Sie als Polynom in Normalform (es muss eventuell zuerst ausmultipliziert werden):

a) $3ab + 2a + 5ab + 3a - b$

b) $(x+2)\cdot x^2 - x\cdot(x-2) - 2\cdot(x-2)$

c) $5xy^2\left((3x)^2 + 3x^3y + 5y^2\right)$

d) $(g+2h^2)\cdot g + (h-2g)\cdot h$

5.2 Formeln

Merke 5.2.1 Multiplikation zweier Polynome

Man multipliziert zwei Polynome miteinander, indem man jedes Glied des ersten Polynoms mit jedem Glied des zweiten Polynoms multipliziert und die Zwischenresultate addiert.

Aufgabe A5 Schreiben Sie in Normalform:

a) $(2a-3b+c)(a-b-a-c)$

b) $(x^3-y^3)(y^3+x^3)$

c) $(c+c^2+c^3+c^4)(c^3-c^2)$

d) $(a-x)(b-x)(c-x)\cdot\ldots\cdot(z-x)$

Aufgabe A6 Wie gross ist der Grad des Produkts zweier Monome?

Aufgabe A7 Wie gross ist der Grad des Produkts zweier Polynome?

Aufgabe A8 Was ist die Ausnahme der Regeln, die Sie bei Aufgaben A6 und A7 gefunden haben? Wie könnte man durch eine geeignete Definition des Grads eines Monoms diese Ausnahme «beheben»?

Binomische Formeln

Ein **Binom** ist ein Polynom mit zwei Gliedern.

Merke 5.2.2 Binomische Formeln

$(a+b)^2 =$ $\qquad$ $(a-b)^2 =$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) =$

Diese Formeln können durch einfache Polynom-Multiplikation bewiesen werden. Die Formeln können aber auch geometrisch einsichtig gemacht werden.

Skizze für $(a+b)^2$ $\qquad$ **Skizze für** $(a-b)^2$ $\qquad$ **Skizze für** $(a+b)(a-b)$

Aufgabe A9 Wenden Sie die binomischen Formeln an und schreiben Sie in Normalform:

a) $(xy+y^2)^2$ b) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{4}{3}\right)^2$ c) $(2e+3f)^2$ d) $\left(\sqrt{2}a+b\right)^2$
e) $(y-z)^2$ f) $\left(xy-y^2\right)^2$ g) $(4ef-3fe)^2$ h) $\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)^2$
i) $(y+x)(y-x)$ j) $(-b+c)(b+c)$ k) $(-e-f)(-e+f)$ l) $(a+b)(-a-b)$

Umkehrung der binomischen Formeln

Für algebraische Umformungen sind Produkte in den meisten Fällen geeigneter als Summen. (Summen sind doof!). Wendet man die binomischen Formeln in die andere Richtung an, lassen sich gewisse Polynome in Produkte überführen. Diesen Vorgang nennt man **Faktorisieren**.

Beispiele:

$e^2+4ef+4f^2=$

$9c^2-6cd+d^2=$

$16a^2b^4-25c^6=$

Aufgabe A10 Faktorisieren Sie:

a) g^2+e^2-2ge b) $u^2v^2-(vu)^2$ c) $25b^2+16a^2-40ab$
d) $4a^2b+a^4+4b^2$ e) $x^{10}-y^{10}$ f) $16a^4-25$
g) x^2-2x+1 h) $4+y^4+4y$ i) a^2+b^2

Auch durch **Ausklammern** kann faktorisiert werden.

Beispiele

$10a^3+20a^2b+10ab^2=10a(a^2+2ab+b^2)=10a\cdot(a+b)^2$
$7x^4-28(xy)^2=7x^2\cdot(x^2-4y^2)=7x^2(x+2y)(x-2y)$

Aufgabe A11 Faktorisieren Sie so weit wie möglich

a) $6a^4b^2+6a^2b^4-12a^2b^2$ b) g^8-h^8 c) $(a+b)^2+(a-b)^2-4b^2$
d) $(x+y)x^2-y^2(x+y)$ e) t^5-2t^3+t f) a^3b-ab^3

Aufgabe A12 Eigentlich reicht die Formel für $(a+b)^2$. Die Formel für $(a-b)^2$ ergibt sich daraus. Zeigen Sie das, indem Sie die Identität $(a-b)=(a+(-b))$ verwenden.

Quadrate von Trinomen und Polynomen

Aufgabe A13 a) Was ist die "trinomische Formel" für $(a+b+c)^2$ und die "quadrinomische Formel" für $(a+b+c+d)^2$?
b) Beschreiben Sie, wie das (ausmultiplizierte) Quadrat eines Polynoms aussieht (so quasi die "polynomische Formel") für $(x_1+x_2+x_3+\ldots x_n)^2$.
Hinweis: Hier sind x_1, x_2 usw. unterschiedliche Variablen, wie z.B. a und b

Höhere Potenzen von Binomen, Pascal'sches Dreieck

Aufgabe A14 Schreiben Sie $(a+b)^3$ als Polynom in Normalform. *Hinweis: Verwenden dazu auch die binomische Formel, indem Sie die Identität $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$ nutzen.*

Aufgabe A15 Schreiben Sie $(a+b)^4$ in Normalform. Berechnen Sie auf zwei Arten:
a) $(a+b)^3(a+b)$
b) $\left((a+b)^2\right)^2$

Aufgabe A16 a) Schreiben Sie die Koeffizienten der Normalform von $(a+b)^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in folgende Tabelle:

$(a+b)^0$	___
$(a+b)^1$	___ ___
$(a+b)^2$	___ ___ ___
$(a+b)^3$	___ ___ ___ ___
$(a+b)^4$	___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^5$	___ ___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^6$	___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^7$	___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

b) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Koeffizienten für $n = 5, 6$ und 7 aussehen und tragen Sie diese in der Tabelle ein.

c) Versuchen Sie Ihre Vermutung zu beweisen, indem Sie die Identität $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$ nutzen.

Merke 5.2.3 Pascal'sches Dreieck

Die Tabelle oben wird **Pascal'sches Dreieck** genannt. Es hat die Eigenschaft, dass jede Zahl gleich ✎

Aufgabe A17 Mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks, berechnen Sie die Normalform von

a) $(x-2)^5$

b) $(2x+3)^6$

Hinweis: Sie dürfen die Koeffizienten auch als Produkt von Potenzen schreiben.

Aufgabe A18 Bilden Sie die Summe für jede Zeile des Pascal'schen Dreiecks.

a) Was stellen Sie fest?

b) Beweisen Sie Ihre Feststellung. *Hinweis: Benutzen Sie dazu entweder die Eigenschaft des Pascal'schen Dreiecks oder setzen Sie geeignete Zahlen für a und b ein.*

Aufgabe A19 Was erhält man, wenn man bei einer Zeile des Pascal'schen Dreiecks die Zahlen von links nach rechts abwechslungsweise addiert und subtrahiert? *Hinweis: Man nennt dies eine* **alternierende** *Summe.* Was vermuten Sie? Können Sie Ihre Vermutung beweisen? *Hinweis: Betrachten Sie $(1-1)^n$.*

Aufgabe A20 Es gilt: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$.

a) Beim vollständigen ausmultiplizieren entsteht ein Polynom. Was sind die Grade der einzelnen Monome und warum?

b) Begründen Sie folgende Aussage: Der Koeffizient vom Monom mit Namen a^2b^4 in der Normalform von $(a+b)^6$ entspricht genau der Anzahl Möglichkeiten aus 6 Objekten 2 Objekte auszuwählen.

c) Begründen Sie folgende Aussage: Der Koeffizient vom Monom mit Namen a^kb^{n-k} in der Normalform von $(a+b)^n$ entspricht genau der Anzahl Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen.

5.3 Übungsaufgaben

Hinweis: *Maxima*, das Computer-Algebra-System, das u.a. für das Erstellen dieser Übungsaufgaben verwendet wurde, ordnet die Variablen in Monomen leider in alphabetisch umgekehrter Reihenfolge an.

Aufgabe A21 Wenden Sie die binomischen Formeln an.

a) $\left(5d^3+5f^3\right)^2$
b) $\left(-g^2+5m^2g-5x^3o\right)^2$
c) $\left(-r^2d^2-5j^3\right)\left(r^2d^2-5j^3\right)$
d) $\left(4i^3-5w^2d^2\right)^2$
e) $\left(3ul+3z\right)^2$
f) $\left(da^2-2e\right)\left(da^2+2e\right)$
g) $\left(-2i^3-2p^3j\right)^2$
h) $\left(-n^3-3r\right)^2$
i) $\left(2w^2-3l^3\right)\left(3l^3+2w^2\right)$
j) $\left(so^3-3d^2\right)^2$
k) $\left(4o^3a+4n^2\right)^2$
l) $\left(-3a^3-4u^3\right)\left(4u^3-3a^3\right)$
m) $\left(5c^3-4jh\right)^2$
n) $\left(2l^3-t^3o^2\right)^2$
o) $\left(4x^2p^3-5w^2\right)\left(4x^2p^3+5w^2\right)$
p) $\left(g^3-3k^2\right)^2$
q) $\left(4z^3h+4x^2\right)^2$
r) $\left(-5r^2k-5z^3t\right)\left(5z^3t-5r^2k\right)$
s) $\left(2a+j^3\right)^2$
t) $\left(3o^3d^2-f^2e\right)^2$
u) $\left(-3s^3-z^2\right)\left(3s^3-z^2\right)$
v) $\left(c^3-4x^2d^3+yi^3\right)^2$
w) $\left(-3l^2d^3-3x\right)^2$
x) $\left(-5vd^2-2i^2\right)\left(2i^2-5vd^2\right)$

Aufgabe A22 Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $k^2b^2-2n^2kb+n^4$
b) $4x^6k^2+4y^3x^3k+y^6$
c) $4o^6-9q^2p^4$
d) $4x^4i^2+20z^3x^2i+25z^6$
e) $16a^4-8la^2+l^2$
f) $m^4d^6-u^2r^2$
g) $25a^2-40n^3a+16n^6$
h) $9f^6+24mh^3f^3+16m^2h^6$
i) $9v^2-25d^4$
j) $25y^2v^4-20zyv^2+4z^2$
k) $j^4-2y^3j^2+y^6$
l) $x^6w^2-25u^2$
m) $9m^6e^6+6r^2m^3f^3e^3+r^4f^6$
n) $16b^6+8t^3d^3b^3+t^6d^6$
o) $9l^2-4m^6b^4$
p) $k^2+6wm^2k+9w^2m^4$
q) $4u^6e^2-4u^3qk^3e+q^2k^6$
r) $n^4h^2-4s^6$
s) $b^4+2e^2b^2+e^4$
t) $9c^4+12r^2c^2+4r^4$
u) $16v^4i^4-9s^2$
v) $w^2c^6+2woh^2c^3+o^2h^4$
w) $l^6-2y^3l^3+y^6$
x) $9y^2u^6-4a^4$

Aufgabe A23 Faktorisieren Sie:

a) $-4x^3o^4m^2+8x^3s^2o^2m^2-4x^3s^4m^2$
b) $5xv^2q^2a^2+10xv^2qo^3g^3a+5xv^2o^6g^6$
c) $8y^4u^3m^2-2y^2u^3d^2$
d) $-5se^4a^3+20sr^3ke^2a^3-20sr^6k^2a^3$
e) $25x^2a^2-30x^2n^3ha+9x^2n^6h^2$
f) $2v^6r^2ki-2l^6kj^6i$
g) $-8d^2c+24ldc-18l^2c$
h) $20o^3n^4h^6-20r^2o^3n^2h^3+5r^4o^3$
i) $3p^4g^4-3p^2b^6$
j) $-4w^6u^2h^4+20x^3w^3u^2h^3-25x^6u^2h^2$
k) $36x^2j^2g^7+96x^2o^3k^2jg^4+64x^2o^6k^4g$
l) $5v^3r^4l^2-5v^3l^2i^4$
m) $5fb^2-50t^3feb+125t^6fe^2$
n) $100nm^2+120wvnm+36w^2v^2n$
o) $5zw^4-5zj^4$
p) $oa^6+4qoa^3+4q^2o$
q) $2f^6c-4w^2k^3f^3c+2w^4k^6c$
r) $80s^4q^6h-45m^4h$
s) $-12o^3l^2h^6e+60o^3lh^3e-75o^3e$
t) $2p^3d^4+4p^3gd^2+2p^3g^2$
u) $125r^6d^4b^2-45y^2f^4b^2$
v) $5x^6kh^2+10x^3w^2r^3kh+5w^4r^6k$
w) $2t^2pe^4-20t^2s^3pe^2+50t^2s^6p$
x) $4zm^2f^6-16zx^6$

5.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A2 ex-monome-normalform

a) $4+3$: Summe. Zusammenfassen: 7 (ist ein Monom).
b) $a+b$: Summe. Kann nicht zusammengefasst werden.
c) -4^2: Potenz einer Zahl. Ausrechnen: -16 (ist ein Monom).
d) x^2+x^2: Summe. Zusammenfassen $2x^2$ (ist ein Monom).
e) $y+y^2$: Summe. Kann nicht zusammengefasst werden.
f) 3^z: Variable im Exponenten.
g) $|v^2|$: Betrag. Da v^2 immer positiv, kann der Betrag weggelassen werden: v^2 (ist ein Monom).
h) $b \cdot 4a$: Koeffizient nicht an erster Stelle, Variablen nicht alphabetisch geordnet. Geordnet: $4ab$ (ist ein Monom).

Lösung zu A3 ex-polynome-ja-nein

a) $4x \cdot (x^2-5y)$: Ein Produkt. Ausmultiplizieren: $4x^3-20xy$ (ist ein Polynom).
b) $\frac{1}{4a^2-b}$: Ein Quotient. Kann nicht in ein Polynom umgeformt werden.
c) Ein Quotient. In diesem Fall kann ausdividiert werden: x^3-x.
d) 3^x+4^y: Variablen im Exponenten. Kann nicht in ein Polynom umgeformt werden.

Lösung zu A4 ex-polynome-normalform

a) $3ab+2a+5ab+3a-b=8ab+5a-b$
b) $(x+2)\cdot x^2-x\cdot(x-2)-2\cdot(x-2)=x^3+2x^2-(x^2-2x)-(2x-4)=x^3+x^2+4$
c) $5xy^2\left((3x)^2+3x^3y+5y^2\right)=45x^3y^2+15x^4y^3+25xy^4=15x^4y^3+45x^3y^2+25xy^4$
d) $(g+2h^2)\cdot g+(h-2g)\cdot h=g^2+2h^2g+h^2-2gh=2gh^2+g^2-2gh+h^2$

Lösung zu A5 ex-polynome-normalform2

a) $(2a-3b+c)(a-b-a-c)=-2ab-2ac+3b^2+2bc-c^2$
b) $(x^3-y^3)(y^3+x^3)=x^6-y^6$
c) $(c+c^2+c^3+c^4)(c^3-c^2)=c^7-c^3$
d) $(a-x)(b-x)(c-x)\cdot\ldots\cdot(z-x)=0$

Lösung zu A6 ex-monom-produkt

Der Grad entspricht der Länge der "ausgeschriebenen" Namen (d.h. ohne Potenzen), bzw. der Summe aller Exponenten der Variablen. Bei Multiplikation addieren sich diese Grössen. D.h. **der Grad des Produkts ist die Summe der Grade der Faktoren**.

Lösung zu A7 ex-polynom-produkt

Der Grad des Produkts entspricht dem höchsten Grad aller Monome. Das Monom mit höchstem Grad wird gebildet als Produkt der beiden Monome mit höchstem Grad. Also auch hier addieren sich die Grade.

Lösung zu A8 ex-polynom-produkt-ausnahme

Nach unserer Definition ist der Grad einer Konstante (also einer rellen Zahl) Null. Ist die Konstante aber selbst Null, ist auch das Produkt Null, unabhängig vom anderen Faktor. Der Grad des Produkts ist also auf jeden Fall Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Würde man den Grad vom Monom 0 als $-\infty$ (minus unendlich) definieren, ergäbe die Addition der Grade ebenfalls $-\infty$ und somit den Grad des Produkts.

Lösung zu A9 ex-binomische-formeln-anwenden

a) $(xy+y^2)^2 = x^2y^2+2xy^3+y^4$

b) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{9}{16}a^2+2a+\frac{16}{9}$

c) $(2e+3f)^2 = 4e^2+12ef+9f^2$

d) $\left(\sqrt{2}a+b\right)^2 = 2a^2+2\sqrt{2}ab+b^2$

e) $(y-z)^2 = y^2-2yz+z^2$

f) $\left(xy-y^2\right)^2 = x^2y^2-2xy^3+y^4$

g) $(4ef-3fe)^2 = e^2f^2$ nicht vereinfacht $(16e^2f^2-24e^2f^2+9e^2f^2)$

h) $\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{d^2}+2+\frac{d^2}{c^2}$ (kein Polynom)

i) $(y+x)(y-x) = -x^2+y^2$ (Normalform x vor y)

j) $(-b+c)(b+c) = -b^2+c^2$

k) $(-e-f)(-e+f) = e^2-f^2$

l) $(a+b)(-a-b) = (a+b)\cdot(-1)\cdot(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2-2ab-b^2$

Lösung zu A10 ex-binomische-formeln-umkehren

a) $g^2+e^2-2ge = (g-e)^2$

b) $u^2v^2-(vu)^2 = 0$ bzw. zuerst $(uv-vu)(uv+vu)$

c) $25b^2+16a^2-40ab = (5b-4a)^2$

d) $4a^2b+a^4+4b^2 = (a^2+2b)^2$

e) $x^{10}-y^{10} = (x^5+y^5)(x^5-y^5)$

f) $16a^4-25 = (4a+5)(4a-5)$

g) $x^2-2x+1 = (x-1)^2$

h) $4+y^4+4y$ (nicht faktorisierbar). Wenn man die Aufgabenstellung "korrigiert" zu $4+y^4+4y^2$ kann man faktorisieren, nämlich $(2+y)^2$.

i) a^2+b^2 (nicht faktorisierbar). Auch wenn man $(a+b)^2-2ab$ schreibt, hat man immer noch eine Summe.

Lösung zu A11 ex-binomische-formeln-faktorisieren

a) $6a^4b^2+6a^2b^4-12a^2b^2 = 6a^2b^2(a^2+b^2-2)$

b) $g^8-h^8 = (g^4+h^4)(g^4-h^4) = \ldots = (g^4+h^4)(g^2+h^2)(g+h)(g-h)$

c) $(a+b)^2+(a-b)^2-4b^2 = a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2-4b^2 = 2(a^2-b^2) = 2(a+b)(a-b)$

d) $(x+y)x^2-y^2(x+y) = (x+y)(x^2-y^2) = (x+y)^2(x-y)$

e) $t^5-2t^3+t = t(t^4-2t^2+1) = t(t^2-1)^2$

f) $a^3b-ab^3 = ab(a^2-b^2) = ab(a+b)(a-b)$

Lösung zu A12 ex-binomische-formeln-eine-reicht

$(a+(-b))^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Lösung zu A13 ex-binomische-formeln-tri-quadri-poly

a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ und $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

b) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_1x_n+2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+\ldots+2x_{n-1}x_n$

Man erhält die (einfache) Summe aller Quadrate plus die doppelte Summe aller möglichen Zweierprodukte.

2 Zweierprodukte

$$(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)$$

1 Quadrat

Lösung zu A14 ex-binomische-formeln-hoch-drei

$(a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \ldots = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Lösung zu A15 ex-binomische-formeln-hoch-vier

a)

$$\begin{array}{rlllll} (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) = & a^4+ & 3a^3b+ & 3a^2b^2+ & ab^3+ & \\ & & a^3b+ & 3a^2b^2+ & 3ab^3+ & b^4 = \\ & a^4+ & 4a^3b+ & 6a^2b^2+ & 4ab^3+ & b^4 \end{array}$$

b) $(a^2+2ab+b^2)^2 = \underbrace{a^4+4a^2b^2+b^4}_{\text{Quadrate}} + \underbrace{4a^3b+2a^2b^2+4ab^3}_{\text{Doppelprodukte}} = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Lösung zu A16 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck

Die vollständige Tabelle sieht wie folgt aus:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

b) Die Zahlen sind immer die Summe der beiden oberen Zahlen (bzw. der einen Zahl an den Rändern).

c) Die Namen der Glieder von $(a+b)^n$ sind a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, …, ab^{n-1}, b^n. D.h. die Potenzen von a sind absteigend, die Potenzen von b aufsteigend (alle Grade sind gleich n).

Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit a, erhält man die Namen von a^n bis ab^{n-1} mit den gleichen Koeffizienten wie $(a+b)^{n-1}$. Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit b, erhält man die Namen von $a^{n-1}b$ bis b^n, wieder mit den gleichen Koeffizienten. Schreibt man die Namen untereinander (wie in der Lösung von Aufgabe 5.4a)), sieht man, dass immer benachbarte Koeffizienten der Zeile $n-1$ zu einem neuen Koeffizienten der Zeile n addiert werden.

Lösung zu A17 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-anwenden

a) $(x-2)^5 = x^5+5\cdot(-2)x^4+10\cdot(-2)^2x^3+10\cdot(-2)^3x^2+5\cdot(-2)^4x+(-2)^5 = x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

b) $(2x+3)^6 = 2^6x^6+6\cdot 2^6\cdot 3x^5+15\cdot 2^4\cdot 3^2x^4+20\cdot 2^3\cdot 3^3x^3+15\cdot 2^2\cdot 3^4x^2+6\cdot 2\cdot 3^5x+3^6$

Lösung zu A18 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-zeilensumme

a) Die Summe der n-ten Zeile ist 2^n.

b) Im Pascaldreieck wird eine Zahl als Summe der oberen beiden Zahlen berechnet. Umgekehrt trägt jede Zahl genau zwei Mal zur darunterliegenden Zeile bei. D.h. die Zeilensumme verdoppelt sich, wenn man eine Zeile nach unten geht. Da die erste Zeile die Summe $1 = 2^0$ stimmt die obige Aussage.

Alternativ betrachtet man den Ausdruck $(1+1)^n$. Wenn man diesen Ausdruck vollständig ausmultiplizert (mit Hilfe des Pascaldreiecks) erhält man genau die Summe aller Koeffizienten. Es gilt natürlich dass $(1+1)^n = 2^n$.

Lösung zu A19 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-alternierende-zeilensumme

Die alternierende Summe ergibt Null, ausser für die oberste Zeile (Zeile zu $(a+b)^0$).

Entwickelt man $(1-1)^n$ erhält man absteigende Potenzen von (-1), d.h. die Koeffizienten erhalten abwechslungsweise ein positives und negatives Vorzeichen. D.h. die Entwicklung von $(1-1)^n$ ist genau die alternierende Summe. Für $n \geq 1$ ist $(1-1)^n = 0$.

Hinweis: 0^0 ist nicht definiert. Es wird aber hin und wieder als 1 angenommen, womit das Pascal'sche Dreieck auch für diesen Spezialfall seine Gültigkeit bewahrt.

Lösung zu A20 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-n-choose-k

a) Der Grad ist immer n, weil immer n Variablen miteinander multipliziert werden.

b) $(a+b)^6 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. Beim Ausmultiplizieren wird jeweils aus jeder Klammer ein Glied ausgewählt und alle zusammen multipliziert. Um a^2b^4 zu erhalten, muss aus genau zwei Klammern ein a ausgewählt werden (und aus den anderen ein b). Addiert man alle diese Möglichkeiten erhält man den Koeffizienten von a^2b^4 (in diesem Fall 15, siehe im Pascal'schen Dreieck). Ob man nun 2 aus 6 Klammern oder 2 Objekte aus 6 auswählt, spielt für die Anzahl Möglichkeiten keine Rolle.

c) Wie oben, addiert man alle Möglichkeiten, aus n Klammern k Klammern mit dem a auszuwählen.

Lösung zu A21 ex-binomische-formeln-anwenden-bis-zum-abwinken

a) $25d^6 + 50f^3d^3 + 25f^6$
b) $g^4 - 10m^2g^3 + 25m^4g^2 + 10x^3og^2 - 50x^3om^2g+$
c) $25j^6 - r^4d^4$
d) $25w^4d^4 - 40w^2i^3d^2 + 16i^6$
e) $9u^2l^2 + 18zul + 9z^2$
f) $d^2a^4 - 4e^2$
g) $4i^6 + 8p^3ji^3 + 4p^6j^2$
h) $n^6 + 6rn^3 + 9r^2$
i) $4w^4 - 9l^6$
j) $9d^4 - 6so^3d^2 + s^2o^6$
k) $16o^6a^2 + 32o^3n^2a + 16n^4$
l) $9a^6 - 16u^6$
m) $25c^6 - 40jhc^3 + 16j^2h^2$
n) $4l^6 - 4t^3o^2l^3 + t^6o^4$
o) $16x^4p^6 - 25w^4$
p) $g^6 - 6k^2g^3 + 9k^4$
q) $16z^6h^2 + 32z^3x^2h + 16x^4$
r) $25r^4k^2 - 25z^6t^2$
s) $4a^2 + 4j^3a + j^6$
t) $9o^6d^4 - 6o^3f^2ed^2 + f^4e^2$
u) $z^4 - 9s^6$
v) $c^6 - 8x^2d^3c^3 + 2yi^3c^3 + 16x^4d^6 - 8yx^2i^3$
w) $9l^4d^6 + 18xl^2d^3 + 9x^2$
x) $25v^2d^4 - 4i^4$

Lösung zu A22 ex-binomische-formeln-umkehren-bis-zum-abwinken

a) $\left(kb - n^2\right)^2$
b) $\left(2x^3k + y^3\right)^2$
c) $\left(2o^3 - 3qp^2\right)\left(2o^3 + 3qp^2\right)$
d) $\left(2x^2i + 5z^3\right)^2$
e) $\left(4a^2 - l\right)^2$
f) $\left(m^2d^3 - ur\right)\left(m^2d^3 + ur\right)$
g) $\left(5a - 4n^3\right)^2$
h) $\left(3f^3 + 4mh^3\right)^2$
i) $\left(3v - 5d^2\right)\left(5d^2 + 3v\right)$
j) $\left(5yv^2 - 2z\right)^2$
k) $\left(j^2 - y^3\right)^2$
l) $\left(-5u - x^3w\right)\left(5u - x^3w\right)$
m) $\left(3m^3e^3 + r^2f^3\right)^2$
n) $\left(4b^3 + t^3d^3\right)^2$
o) $\left(-2m^3b^2 - 3l\right)\left(2m^3b^2 - 3l\right)$
p) $\left(k + 3wm^2\right)^2$
q) $\left(2u^3e - qk^3\right)^2$
r) $\left(-n^2h - 2s^3\right)\left(2s^3 - n^2h\right)$
s) $\left(b^2 + e^2\right)^2$
t) $\left(3c^2 + 2r^2\right)^2$
u) $\left(-4v^2i^2 - 3s\right)\left(3s - 4v^2i^2\right)$
v) $\left(wc^3 + oh^2\right)^2$
w) $(l - y)^2\left(l^2 + yl + y^2\right)^2$
x) $\left(-2a^2 - 3yu^3\right)\left(2a^2 - 3yu^3\right)$

Lösung zu A23 ex-faktorisieren-bis-zum-abwinken

a) $-4m^2x^3(o - s)^2(o + s)^2$
b) $5xv^2\left(qa + o^3g^3\right)^2$
c) $-2y^2u^3(d - 2ym)(d + 2ym)$
d) $-5a^3s\left(e^2 - 2r^3k\right)^2$
e) $x^2\left(5a - 3n^3h\right)^2$
f) $-2k\left(l^3j^3 - v^3r\right)\left(l^3j^3 + v^3r\right)i$
g) $-2c(2d - 3l)^2$
h) $5o^3\left(2n^2h^3 - r^2\right)^2$
i) $-3p^2\left(b^3 - pg^2\right)\left(b^3 + pg^2\right)$
j) $-u^2h^2\left(2w^3h - 5x^3\right)^2$
k) $4x^2g\left(3jg^3 + 4o^3k^2\right)^2$
l) $-5v^3l^2(i - r)(i + r)\left(i^2 + r^2\right)$
m) $5f\left(b - 5t^3e\right)^2$
n) $4n(5m + 3wv)^2$
o) $-5z(j - w)(j + w)\left(j^2 + w^2\right)$
p) $o\left(a^3 + 2q\right)^2$
q) $2c\left(f^3 - w^2k^3\right)^2$
r) $-5h\left(3m^2 - 4s^2q^3\right)\left(3m^2 + 4s^2q^3\right)$
s) $-3eo^3\left(2lh^3 - 5\right)^2$
t) $2p^3\left(d^2 + g\right)^2$
u) $5b^2\left(5r^3d^2 - 3yf^2\right)\left(5r^3d^2 + 3yf^2\right)$
v) $5k\left(x^3h + w^2r^3\right)^2$
w) $2t^2p\left(e^2 - 5s^3\right)^2$
x) $4z\left(mf^3 - 2x^3\right)\left(mf^3 + 2x^3\right)$