1 Mengelehre

Aufgabe A1 Schreiben Sie in Mengennotation, in welchen der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ die folgenden Zahlen vorkommen.
Beispiel: $\pi \notin \mathbb{N}$, $\pi \notin \mathbb{Z}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$ und $\pi \in \mathbb{R}$

a) 42 b) $-\frac{6}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\sqrt{2}$
e) ∞ f) $\sqrt{-1}$ g) 1000^{1000} h) $0.333333\ldots$

Aufgabe A2 Welche Zahlenmengen sind Teilmengen der anderen Zahlenmengen? Schreiben Sie mit der Notation $A \subset B$.
Zeichnen Sie ein Venndiagramm der vier Zahlenmengen und schreiben Sie einige typische Elemente in jeden möglichen Bereich.

Aufgabe A3 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge der Primzahlen.
b) Die Menge der Vielfachen von 37.
c) Die Menge der Kubikzahlen kleiner als 1111.
d) Die Menge der Zweierpotenzen.

Aufgabe A4 Schreiben Sie in aufzählender Form:

a) T_{21} b) T_{23} c) T_1 d) T_0

Aufgabe A5

a) Finden Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ so, dass $T_n \subset T_m$.
b) Was ist die allgemeine Beziehung zweier solcher Zahlen n und m, für die $T_n \subset T_m$ gilt?
c*) Gilt das auch umgekehrt? D.h. gilt für Zahlen mit der Beziehung in b) auch immer $T_n \subset T_m$?

Aufgabe A6 Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit folgenden zwei Mengen:

a) T_{12} und T_{16}.
b) T_{18} und T_{24}.

Aufgabe A7 Zeichnen Sie je ein Venn-Diagramm für folgende drei Mengen:

a) T_{36}, T_{40}, T_{42}
b) $\mathbb{P}$, T_{210}, T_{140}

Aufgabe A8 In einem Venn-Diagramm mit 3 Mengen A, B und C beschreiben Sie alle 7 Gebiete mit einem Ausdruck mit Mengenoperationen, z.B. ist das Gebiet in der Mitte $A \cap B \cap C$.

Aufgabe A9 Bestimmen Sie Primfaktorzerlegung:

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300$ b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000$ c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000$ d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000$
e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900$ f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000$ g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000$ h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000$

Aufgabe A10 Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen von allen von 1 verschiedenen Teilern von

a) 30 b) 32 c) 36

Was stellen Sie fest?

Aufgabe A11 Wie viele Teiler haben folgende Zahlen?

a) $1024 = 2^{10}$ b) $162 = 2 \cdot 3^4$ c) $324'000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ d) $49'000'000$

Aufgabe A12 «Übersetzen» Sie zwischen aufzählender und beschreibender Form.
Beispiel: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$, oder $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$

b) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

c) $\{1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \ldots\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 3 oder 5 teilbar}\}$

e) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ hat genau 3 Teiler}\}$

f) $\{6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, \ldots\}$

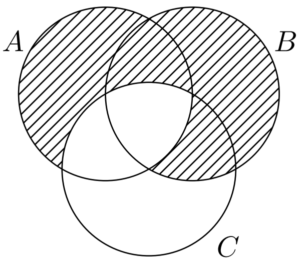
Aufgabe A13 Geben Sie jeweils zwei möglichst kleine, nicht-leeere Mengen A und B in aufzählender Form an, so dass

a) die Schnittmenge genau 2 Elemente enhält und A drei mal soviele Elemente wie B enthält.

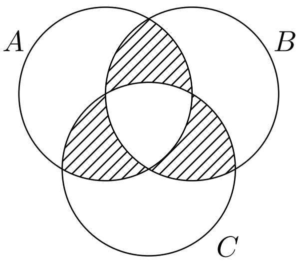
b) die Vereinigungsmenge drei mal so viele Elemente wie der Durchschnitt enthält. A soll dabei mehr Elemente als B enthalten.

c) die Differenzmenge $A \setminus B$ ein Element mehr als $B \setminus A$ enthält.

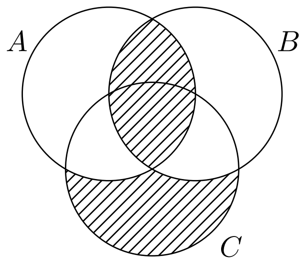
Aufgabe A14 Finden Sie eine Mengenverknüpfung der Mengen A, B und C, die dem schraffierten Gebiet entspricht. Es gibt verschiedene Lösungen. Finden Sie möglichst einfache oder elegante.



a)



b)



c)

Aufgabe A15 Wahr oder falsch?

a) Beim Addieren von natürlichen Zahlen entsteht stets wieder eine natürliche Zahl.

b) Beim Subtrahieren von natürlichen Zahlen entsteht immer eine rationale Zahl.

c) Beim Dividieren ganzer Zahlen entsteht stets eine ganze Zahl.

d) Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.

e) Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.

f) Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.

g) Beim Dividieren von natürlichen Zahlen entsteht immer eine reelle Zahl.

Aufgabe A16 Gegeben sind zwei Mengen A und B so, dass $A \subset B$. Was lässt sich über folgende Mengen sagen?

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \setminus B$

Aufgabe A17 Finden Sie jene zweistellige Zahl, die am meisten Teiler hat. Und für dreistellige Zahlen? Zeigen Sie Quadratzahlen grösser als 0 haben eine ungerade Anzahl Teiler. Zeigen

Aufgabe A18 Zeigen Sie, dass Quadratzahlen ungleich Null immer eine ungerade Anzahl Teiler haben. Zeigen Sie, dass auch der Umkehrschluss korrekt ist.

Aufgabe A19 In den Axiomen der Mengenlehre sind nur Eigenschaften von Mengen definiert. Die einzige Menge, die definiert wird, ist die leere Menge $\{\} = \emptyset = Z_0$.
Diese kann mit der Zahl Null assoziert werden. Die Zahl Eins kann mit der Menge $Z_1 = \{\emptyset\}$ assoziert werden. Wenn Z_n die Menge ist, die der Zahl n entspricht, kann mit $Z_{n+1} = Z_n \cup \{Z_n\}$ die darauffolgende Zahl definiert werden.

a) Schreiben Sie ersten 5 Mengen auf, die den Zahlen 0 bis 4 entsprechen.

b) Wie viele Elemente hat die Menge Z_4?

1.1 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

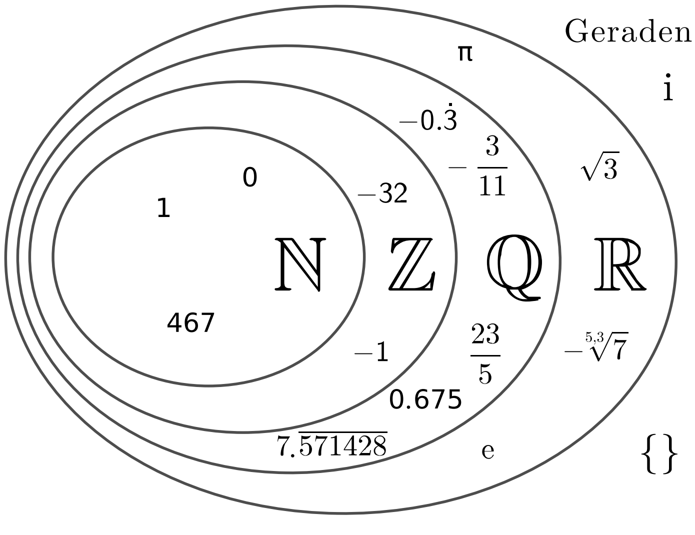
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-elementvon-oder-nicht

a) $42 \in \mathbb{N}$, $42 \in \mathbb{Z}$, $42 \in \mathbb{Q}$ und $42 \in \mathbb{R}$.
b) $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Q}$ und $-2 \in \mathbb{R}$.
c) $\frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ und $\frac{5}{3} \in \mathbb{R}$.
d) $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
e) ∞ ist keine Zahl und darum in keiner der 4 Zahlenmengen.
f) $\sqrt{-1}$ ist undefiniert, und darum ebenfalls in keiner der 4 Zahlenmengen.
g) $1000^{1000} \in \mathbb{N}$, $1000^{1000} \in \mathbb{Z}$, $1000^{1000} \in \mathbb{Q}$ und $1000^{1000} \in \mathbb{R}$.
h) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ und $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$.

Lösung zu A2 ex-verschachtelung-zahlmengen

Zusätzlich ist jede Menge Teilmenge ihrer selbst.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ und $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Lösung zu A3 ex-zahlmengen-schreibweisen

Es gibt z.T. mehrere korrekte Möglichkeiten für die beschreibende Form.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim}\}$.
b) $\{37, 74, 111, 148, 185, \ldots, \}$
$\{37x \mid x \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 37 teilbar}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 37k, k \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000\}$
$\{a^3 \mid a^3 < 1111 \text{ und } a \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{b \in N \mid b < 1111 \text{ und } b = c^3 \text{ mit } c \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$
$\{2^z \mid z \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^x \text{ mit } x \in \mathbb{N}\}$.

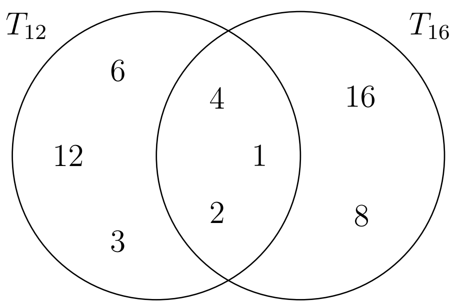
Lösung zu A4 ex-teilermengen

a) $T_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$
b) $T_{23} = \{1, 23\}$
c) $T_1 = \{1\}$
d) $T_0 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}^\star$.

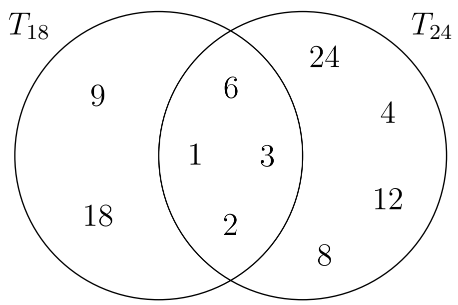
Lösung zu A5 ex-teilermengen-subsets

a) Z.B. wenn $n = m$. Ein Menge ist immer Teilmenge ihrer selbst. Oder z.B. $T_7 \subset T_{28}$.
b) Wenn $T_n \subset T_m$, dann gilt $n \in T_m$, d.h. n ist ein Teiler von m.
c) Wenn n ein Teiler von m ist, sei t ein beliebiger Teiler von n. Zu zeigen ist, dass t auch ein Teiler von m ist. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $n = t \cdot k$. Weil auch n Teiler von m ist gibt es ein $l \in N$ so, dass $n \cdot l = m$. Damit ist $m = t \cdot k \cdot l$ was beweist, dass t auch ein Teiler von m ist, womit bewiesen ist, dass $T_n \subset T_m$.

Lösung zu A6 ex-venn-teiler

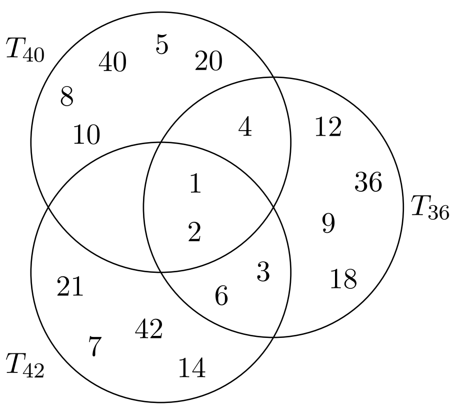


a)

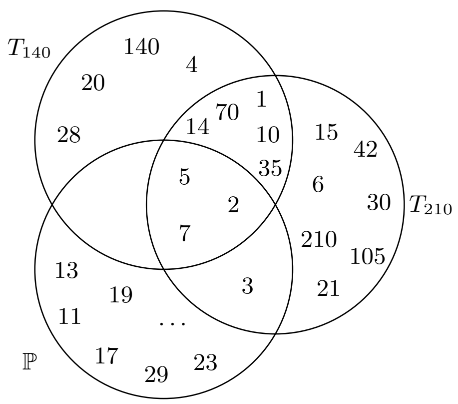


b)

Lösung zu A7 ex-venn-teiler-drei-mengen



a)



b)

Lösung zu A8 ex-venn-gebiete-beschreiben
Gebiete in nur einer Menge:
$(A \setminus B) \setminus C$ oder $A \setminus (B \cup C)$.

Gebiete mit genau zwei Mengen:
$(A \cap B) \setminus C$ oder $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ oder $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Lösung zu A9 ex-primfaktorzerlegung

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 23 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 23 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 23 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 23$

b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 10^4 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 5^5 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 11$

c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 10^3 \cdot 29 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29$

d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 23 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 23 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 23 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^2 \cdot 23$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 19 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^3 \cdot 29 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 29$

g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 19 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 19$

h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^4 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 17 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17$

Lösung zu A10 ex-primfaktorzerlegung-von-teilern

a) $2,\ 3,\ 5,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 5$

b) $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$.

c) $2,\ 3,\ 2^2,\ 2 \cdot 3,\ 3^2,\ 2^2 \cdot 3,\ 2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2$

Alle Teiler haben eine Primfaktorzerlegung, die man aus der Primfaktorzerlegung der zu teilenden Zahl erhält, wenn die Exponenten verkleinert oder die Potenzen weglässt (Exponent 0).

Lösung zu A11 ex-anzahl-teiler

a) $11 = 10 + 1$

b) $12 = (1 + 1) \cdot (5 + 1)$

c) $120 = (5 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (3 + 1)$

d) $147 = (6 + 1) \cdot (6 + 1) \cdot (2 + 1)$

Lösung zu A12 ex-mengen-notieren

a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\} = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ oder $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\}$

b) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$

c) $\{0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots\} = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 3 oder 5 teilbar}\} = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, \ldots\}$

e) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ hat genau 3 Teiler}\} = \{4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, \ldots\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{P}\}$

f) $\{6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist das Produkt zweier unterschiedlicher Primzahlen}\}$.
Eigentlich war die Absicht hier die Menge der Zahlen mit genau 4 Teilern zu notieren. Dabei sind die Kubikzahlen von Primzahlen vergessen gegangen (z.B. und 8 und 27.

Lösung zu A13 ex-mengen-konstruieren

a) Z.B. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{1,2\}$.
b) Z.B. $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{1,\}$.
c) Z.B. $A = \{1,2\}$ und $B = \{3\}$.

Lösung zu A14 ex-mengen-op-fuer-diagramm

a) $(A \cup B) \setminus (A \cap C)$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$
c) $(A \cap B) \cup (C \setminus (A \cup B))$

Lösung zu A15 ex-mengen-wahrfalsch

a) wahr
b) wahr
c) falsch (Bruchzahlen, Division durch 0)
d) falsch (z.B. $\sqrt{2}$)
e) wahr
f) falsch (z.B. -1)
g) falsch (Division durch 0). Für $\mathbb{N}$ ohne Null wäre die Aussage wahr.

Lösung zu A16 ex-teilmengen-und-ops

a) $A \cup B = B$, weil alle Elemente von A bereits in B sind.
b) $A \cap B = A$, weil alle Elemnte von A auch in B sind.
c) $\emptyset$, weil sämtliche Elemente von A weggenommen werden (weil diese ja auch in B sind.

Lösung zu A17 ex-meiste-teiler

Die Anzahl Teiler einer Zahl ergibt sich aus den Exponenten der Primfaktorzerlegung. Die Anzahl berechnet sich als Produkt aus den um Eins erhöhten Exponenten.

Mit nur einem Primfaktor hat $2^6 = 64$ den höchsten Exponenten und 7 Teiler. Mit zwei Primfaktoren sind $2^5 \cdot 3^1 = 96$ und $2^3 \cdot 3^2 = 72$ Kandidaten, mit jeweils 12 und 9 Teilern.

Mit drei Primfaktoren ist sind $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ und $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ die beiden Kanditaten mit ebenfalls 12 Teilern.

Vier Primfaktoren sind nicht möglich, weil $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ zu gross ist.

Die meisten Teiler, nämlich 12, haben die zweistelligen Zahlen 60, 90 und 96.

Für dreistellige Zahlen: 840 hat 32 Teiler.

Lösung zu A18 ex-ungerade-anzahl-teiler-ist-quadratzahl

Teiler kommen immer als Paare, ausser die Wurzel ist alleine. Deshalb haben Quadratzahlen eine ungerade Anzahl Teiler.

Umgekehrt muss bei der Paarbildung der Teiler bei einer ungeraden Anzahl Teiler ein Tieler übrigbleiben. Dieser Teiler muss die Wurzel sein. Wenn es nicht die Wurzel wäre, würde ein Teiler in der Liste fehlen.

Alternativ kann über die Primfaktorzerlegung argumentiert werden:

Sei n unsere Quadratzahl. Es gibt als ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $m = n^2$.

n hat eine Primfaktorzerlegung. Das Quadrat von n hat die gleiche Primfaktorzerlegung, einfach mit verdoppelten Exponenten.

Die Anzahl Teiler von m ist das Produkt der um 1 erhöhten Exponenten der Primfaktorzerlegung. Da alle Exponenten gerade sind, sind alle Faktoren im Produkt für die Anzahl Teiler ungerade, das Produkt also auch.

Lösung zu A19 ex-konstruktion-von-n

a) $Z_0 = \emptyset$, $Z_1 = \{\emptyset\}$, $Z_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und $Z_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ und $Z_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

b) Z_4 hat vier Elemente, nämlich jene von Z_3 plus Z_3 als Element.