2. Potenzen

2.1. nat. Exponenten

Def.: Potenz / Potenzieren

$$\underset{\text{Basis}}{b}^{\overset{\text{Exponent}}{e}} = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e\text{-mal}} \quad \text{mit } b \in \mathbb{N}, e \in \mathbb{N}$$

Potenzen mit natürlichen Exponenten können als wiederholte Multiplikation aufgefasst werden.

→ **Regeln:**

1. Potenz vor Punkt (vor Strich): $3 \cdot 3^2 = 3 \cdot (3^2) = 3 \cdot 9 = 27 \neq (3 \cdot 3)^2 = 9^2 = 81$
2. zuerst Exponent berechnen, dann potenzieren: $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7'625'597'484'987 \neq (3^3)^3 = 27^3 = 19'683$
3. zuerst Potenz dann Gegenzahl: $-4^2 = -(4^2) = -16 \neq (-4)^2 = (-1 \cdot 4) \cdot (-1 \cdot 4) = (-1)^2 \cdot (4)^2 = 16$

→ **Potenzgesetze:** seien $a, b \in \mathbb{N}$ Basen & $f, e \in \mathbb{N}^+$ Exponenten.

1. $\boxed{a^e \cdot a^f = a^{e+f}}$

Bew.: $a^e \cdot a^f = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{e\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{f\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(e+f)\text{-mal}} = a^{e+f}$

2. $\boxed{a^e \cdot b^e = (ab)^e}$

Bew.: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{e\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e\text{-mal}} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{e\text{-mal}} = (ab)^e$

3. $\boxed{(a^e)^f = a^{e \cdot f}}$

Bew.: $\underbrace{a^e \cdot a^e \cdot \ldots \cdot a^e}_{f\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(e \cdot f)\text{-mal}} = a^{e \cdot f}$

4. $\boxed{\text{für } e > f: \frac{a^e}{a^f} = a^{e-f}}$

Bew.: $\dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{e\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{f\text{-mal}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(e-f)\text{-mal}} = a^{e-f}$

5. $\boxed{\frac{a^e}{b^e} = \left(\frac{a}{b}\right)^e}$

Bew.: $\dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{e\text{-mal}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e\text{-mal}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{e\text{-mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^e$

▷ Potenzen zum Auswendiglernen: n^2 bis $n = 20$, n^3 bis $n = 5$, 3^e bis $e = 5$, 2^e bis $e = 10$

Minilaufgabe: $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 169^2}{2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 169^3}$

Lösung: $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 169^2}{2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 169^3} = \dfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 13\,(13^2)^2}{2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot (13^2)^3} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 13^5}{2 \cdot 3^3 \cdot 13^6} = \dfrac{6 \cdot 13^5}{13^5 \cdot 13} = \dfrac{6}{13}$

2.2. neg. Exponenten

Was ist a^{-1}?

Ziel: Die Potenzgesetze sollen weiterhin gültig sein

→ Wir nutzen das 4. Gesetz:

$\frac{a^0}{a^1} \overset{4}{=} a^{0-1} = a^{-1}$ aber auch $\frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$ also $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$ ← "hoch minus 1 bildet den Kehrwert"

$\frac{a^0}{a^n} \overset{4}{=} a^{0-n} = a^{-n}$ aber auch $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ also $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

↳ die Potenzgesetze bleiben auch für neg. Exp. erhalten! ✓

<u>Beispiel</u> $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = ((-1)\cdot 3^{-1})^{-1} \overset{3}{=} (-1)^{-1} \cdot 3^{(-1)\cdot(-1)} = \frac{1}{-1}\cdot 3 = -3$

Miniaufgabe: Schreibe als Bruch von Potenzen mit pos. Exp.: $(e^{-3}f^{2}n^{-5})^{6}$

Lösung: $(e^{-3}f^{2}n^{-5})^{6} = e^{-18}\cdot f^{12}\cdot n^{-30} = \frac{f^{12}}{e^{18}\cdot n^{30}}$

2.3. Wissenschaftl. Darstellung

Beispiele:

- Entfernung Erde-Sonne ≃ 149'600'000'000 m
- Masse eines Elektrons ≃ 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg

↳ sehr mühsam :-(

Sehr grosse/kleine Zahlen werden in den Naturwissenschaften mit Hilfe von Zehnerpotenzen oder ~~Vorsätzen~~ Präfix geschrieben.

Beispiele:

- Entfernung Erde-Sonne ≃ $\underbrace{149'600'000'000}_{11\text{-Stellen}}$ m = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
- Masse eines Elektrons ≃ $\underbrace{0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,9}_{31\text{-Stellen}}11$ kg = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

> **merke**
>
> Eine Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts (links) wird durch den Faktor 10^{-n} (10^{n}) ausgeglichen!

Wir definieren die Vorsätze:

Faktor	~~Vorsatz~~ Präfix	Abkürzung
10^{24}	Yotta-	Y
10^{21}	Zetta-	Z
10^{18}	Exa-	E
10^{15}	Peta-	P
10^{12}	Tera-	T
10^{9}	Giga-	G
10^{6}	Mega-	M
10^{3}	Kilo-	k
10^{2}	Hekto-	h
$10^{1} = 10$	Deka	da
$10^{0} = 1$	–	–
10^{-1}	Dezi-	d
10^{-2}	Centi-	c
10^{-3}	Milli-	m
10^{-6}	Mikro-	μ
10^{-9}	Nano-	n
10^{-12}	Pico-	p

auswendig

Beispiele:

- Entfernung Erde-Sonne ≃ 149'600'000'000 m = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m = 149,6 Gm ← 4-stellige Genauigkeit
- Entfernung zum nächsten Stern ≃ 4,2 Lichtjahre
  ≃ 40 Billionen km = $4 \cdot 10^{13}$ km = $4 \cdot 10^{16}$ m = 40 Pm ← 1-stellige Genauigkeit
- Masse eines Elektrons ≃ 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg
  = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg ← 3-stellige Genauigkeit

↳ diese Schreibweise gibt einen Hinweis auf die Genauigkeit der Angaben.

Miniaufgabe: Schreibe als vollst. gekürzter Bruch: $3^{-4}\cdot 5^{-7}\cdot 225^3$

Lösung: $3^{-4}\cdot 5^{-7}\cdot 225^3 = 3^{-4}\cdot 5^{-7}\cdot (9\cdot 25)^3 = 3^{-4}\cdot 5^{-7}\cdot (3^2\cdot 5^2)^3 = 3^{-4}\cdot 5^{-7}\cdot 3^6\cdot 5^6 = 3^2\cdot 5^{-1} = \frac{9}{5}$

24. Prefixe in der Informatik

In der Informatik werden oft 2er Potenzen statt 10er Potenzen verwendet. Also sind Prefixe wie K, M, G nicht eindeutig definiert. Oft werden

$$K \hat{=} 2^{10}, \quad M \hat{=} 20^{20}, \quad G \hat{=} 2^{30} \quad \text{und } T \hat{=} 2^{40}$$

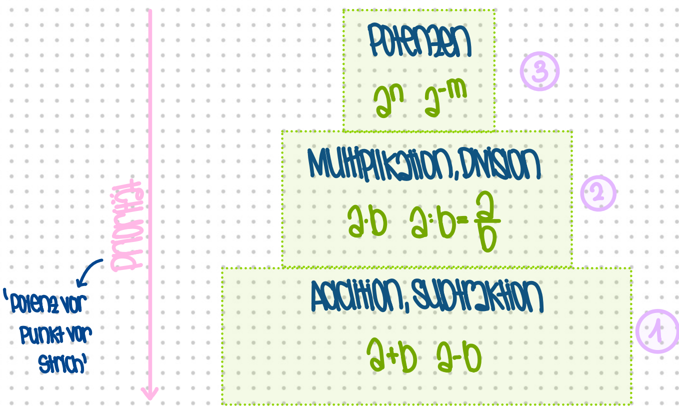
verwendet.

Um die 2er-Potenzen eindeutig zu kennzeichnen, werden Ki, Mi, Gi, Ti, etc. verwendet. Das 'i' kommt von binary resp. binär.

Miniaufgabe: $\frac{125\cdot 196^2\cdot 3^4\cdot 8^3}{2^{10}\cdot 14\cdot 5^4\cdot 196\cdot 27}$

Lösung: $\frac{125\cdot 196^2\cdot 3^4\cdot 8^3}{2^{10}\cdot 14\cdot 5^4\cdot 196\cdot 27} = \frac{5^3\cdot (14^2)^2\cdot 3^4\cdot (2^3)^3}{2^{10}\cdot 14\cdot 5^4\cdot 14^2\cdot 3^3} = \frac{\cancel{5^3}\cdot 14^{\cancel{4}}\cdot 3^{\cancel{4}}\cdot \cancel{2^9}}{2^{\cancel{10}}\cdot \cancel{14^3}\cdot 5^{\cancel{4}}\cdot \cancel{3^3}} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$

Merkhilfe Potenzgesetze



Beispiele

- $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^n\cdot a^{-m} = a^{n-m}$
- $(a+b)^n$ ← bleibt! (keine Stufe unter 1)

Miniaufgabe: Was ist die Primfaktorzerlegung von 36? Und von 54?

Primzahlen bis 20: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Lösung: $36 = 6^2 = (2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2$, $54 = 2\cdot 27 = 2\cdot 3^3$

2.4 ggT und kgV

Def. Der grösste gemeinsame Teiler 'ggT' zweier Zahlen a und b ist die grösste Zahl, die sowohl ein Teiler von a als auch von b ist.

Beispiele:

$ggT(36,54) = 18$ ← Teiler von 36: 1,2,3,4,6,9,12,18,36 & von 54: 1,2,3,6,9,18,27,54

$ggT(36,55) = 1$ ← Teiler von 36: 1,2,3,4,6,9,12,18,36 & von 55: 1,5,11,55

$ggT(17,51) = 17$ ← Teiler von 17: 1,17 & von 51: 1,3,17,51

Def. Das kleinste gemeinsame Vielfache 'kgV' zweier Zahlen a und b ist die kleinste Zahl, die sowohl durch a als auch durch b teilbar ist.

Beispiele:

$kgV(2,5) = 10$ ← 2er-Reihe: 2,4,6,8,10,...

$kgV(12,16) = 48$ ← 16-Reihe: 16,32,48,64
12 Reihe: 12,24,36,48,60,...

$kgV(17,51) = 51$

Berechnung mit Primfaktorzerlegung:

Geg. sei die Primfaktorzerlegung zweier Zahlen a & b
(kommt eine Primzahl in der Zerlegung nicht vor assoziieren wir dieser Primzahl den Exp. 0)

- Die Primfaktorzerlegung des ggT erhalten wir, indem wir für jede Primzahl jeweils den kleineren Exp. beider Zerlegungen wählt.
  - $ggT(36,54) = ggT(2^2\cdot 3^2, 2\cdot 3^3) = 2\cdot 3^2 = 18$ ✓
  - $ggT(2^3\cdot 5^2\cdot 7, 2^2\cdot 3\cdot 5^3) = ggT(2^3\cdot 3^0\cdot 5^2\cdot 7, 2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^0) = 2^2\cdot 3^0\cdot 5^2\cdot 7^0 = 2^2\cdot 5^2$

- Die Primfaktorzerlegung des kgV erhalten wir, indem wir für jede Primzahl jeweils den grösseren Exp. beider Zerlegungen wählt.
  - $kgV(2^2\cdot 3^2, 2\cdot 3^3) = 2^2\cdot 3^3 = 4\cdot 27 = 108$
  - $kgV(2^3\cdot 5^2\cdot 7, 2^2\cdot 3\cdot 5^3) = kgV(2^3\cdot 3^0\cdot 5^2\cdot 7, 2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^0) = 2^3\cdot 3^1\cdot 5^3\cdot 7^1$