3 Planimetrie Grundlagen

Aufgabe A1 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

Aufgabe A2 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

Aufgabe A3 Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe A4 Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben: Punkt Z, Radius r, Umkreis $k = k(Z, r)$.

1.	Wähle $A \in k$	$\rightarrow A$
2.	Rechtwinklige zu ZA durch Z	$\rightarrow g$
3.	$k \cap g$	$\rightarrow G$
4.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\rightarrow F$
5.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\rightarrow B, C, D, E$

Aufgabe A5 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung auf der Wikipedia-Seite zum «Fünfeck» im Abschnitt «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*»

3.1 Koordinatensystem

Aufgabe A6 Zeichnen Sie auf karriertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:

a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

3.2 Geometrische Örter

Aufgabe A7 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP} \text{ und } \overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC} \text{ und } \overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe A8 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe A9 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und

h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe A10 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe A11 Gegeben sind der Kreis $k = k(M, r_1)$ mit $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$, die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.

b*) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Kegelschnitte

Aufgabe A12 Gegeben ist $B = (0, 2)$ und ℓ (die x-Achse). Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ für alle halbzahligen Werte von d von 1 bis und mit 6. Definieren Sie in GeoGebra für d einen Schieberegler und schalten Sie die ≪Spur≫ von P ein. *Hinweis: auf dem Wiki ist ein Erklärvideo zu finden.*

Skizzieren Sie damit die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Aufgabe A13 Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$. Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10$ und $\overline{PB_1} = d$ für alle ganzzahligen Werte von d von 1 bis und mit 9.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$.

Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe A14 Sie stehen auf dem Punkt $P = (-2, -1)$, die Strecke $[AB]$ mit $A = (-3, 0)$ und $B = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden AB) haben die Eigenschaft, dass sie von P gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei A oder B umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

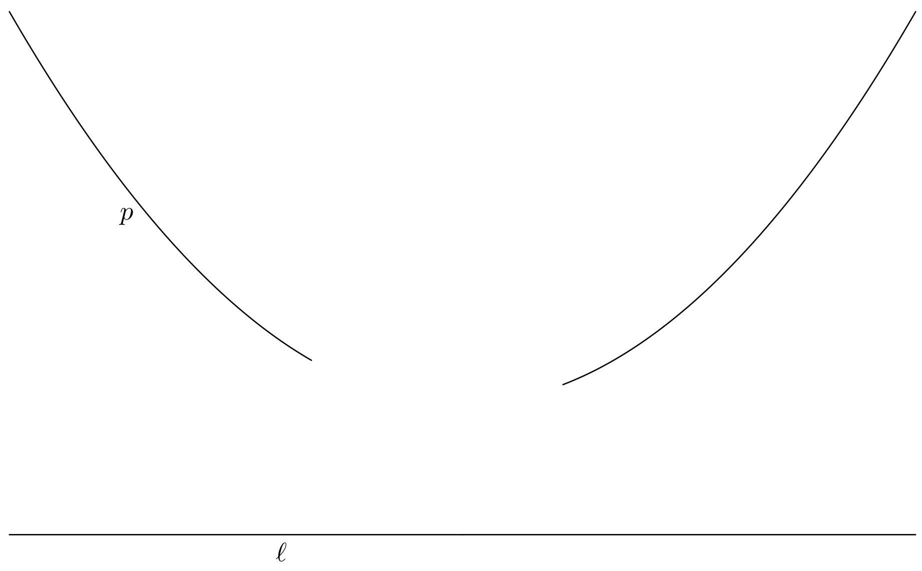
a) Konstruieren Sie den Punkt X auf $[AB]$ der die obige Eigenschaft hat.

b) Konstruieren Sie mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden AB mit der obigen Eigenschaft.

Aufgabe A15 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der geometrische Ort aller Punkte C, für die der Umfang vom $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen, damit es überhaupt eine Lösung gibt?

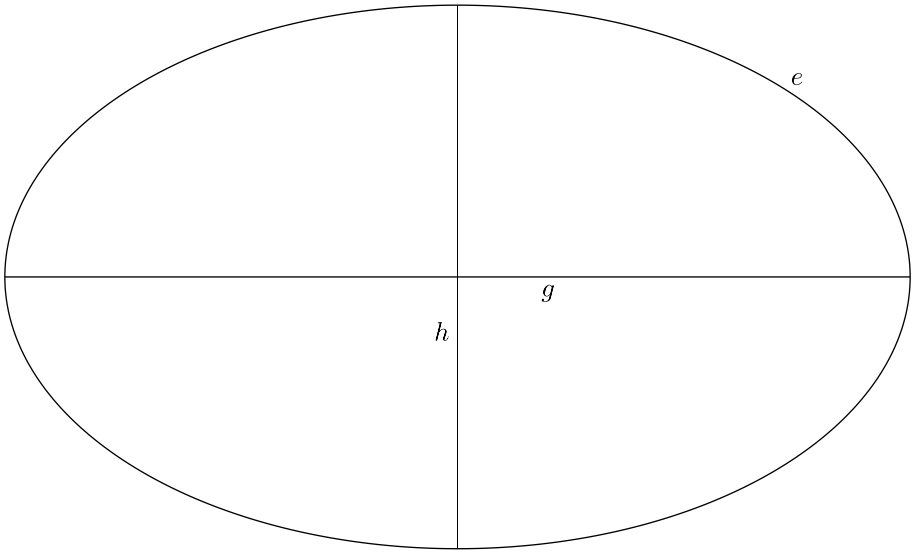
Aufgabe A16 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z der Kreise, die g berühren und durch P gehen, wenn a) $P \in g$? Und wenn b) $P \notin g$?

Aufgabe A17 Gegeben ist eine Parabel p und ihre Leitlinie ℓ. Durch einen Druckfehler ging ein Teil der Parabel verloren. Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe A18 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren.*



Aufgabe A19 Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).

b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte B_2.

Aufgabe A20 Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die entsprechenden Scheitelpunkte der Parablen (Punkte, die am nächsten an der Leitlinie sind) und skizzieren Sie die entsprechenden Parabeln.

3.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu A1 ex-kb-abstand-p-g

Gegeben: Gerade g, Punkt P (mit $P \notin g$).

1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow A$, B
4. M_{AB} $\rightarrow Q$
5. $\overline{PQ}$ $\rightarrow \overline{Pg}$

Lösung zu A2 ex-kb-strecke-abtragen

Gegeben: Strecke $[AB]$, Gerade g mit Punkt $P \in g$.

1. $\overline{AB}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow C$, D

Lösung zu A3 ex-kb-gleichseitiges-dreieck

Gegeben: Länge $s = 5$ cm.

1. Punkt A wählen $\rightarrow A$
2. Gerade c durch A wählen $\rightarrow c$
3. s von A auf g abtragen $\rightarrow B_1$, B_2
4. $k(A, s)$ $\rightarrow k_1$
5. $k(B_1, s)$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1$, C_2

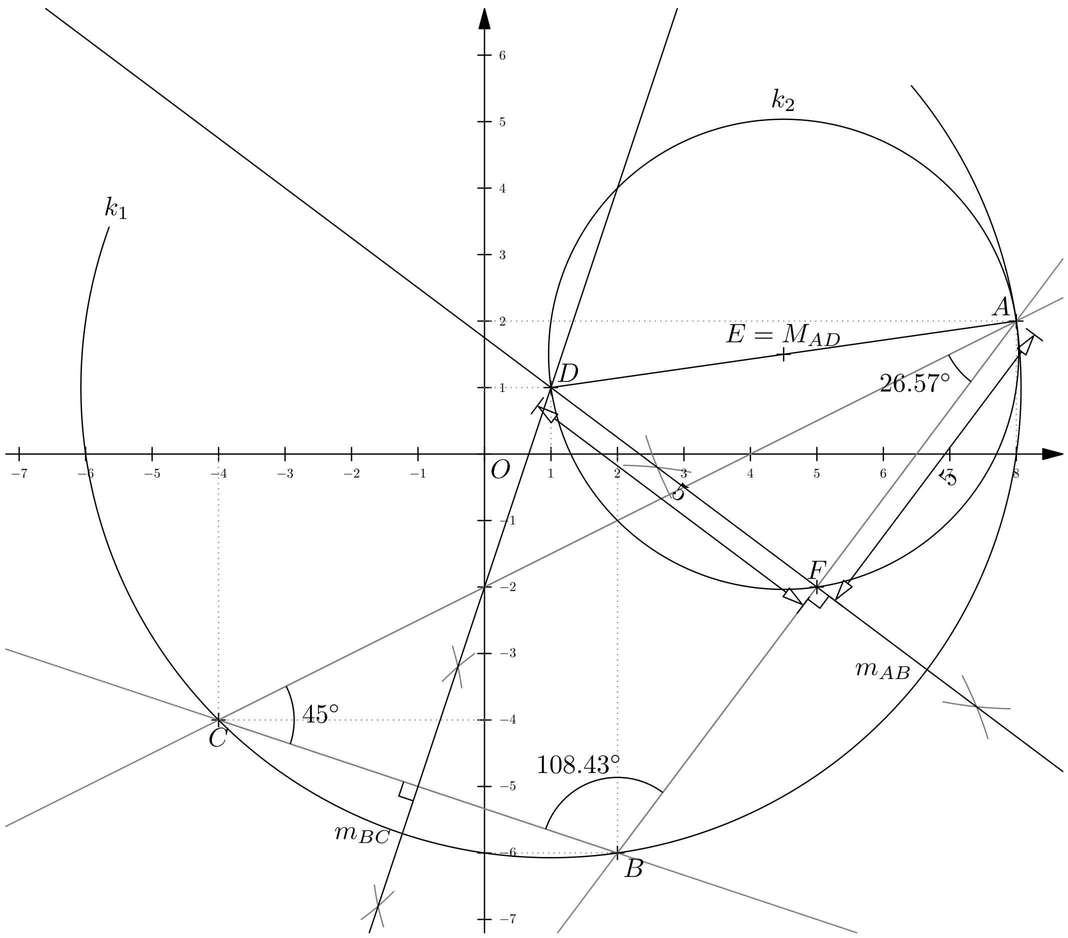
Lösung: ΔAB_1C_1.

Lösung zu A5 ex-kb-penta-aus-seite

Gegeben: Punkte A, B.

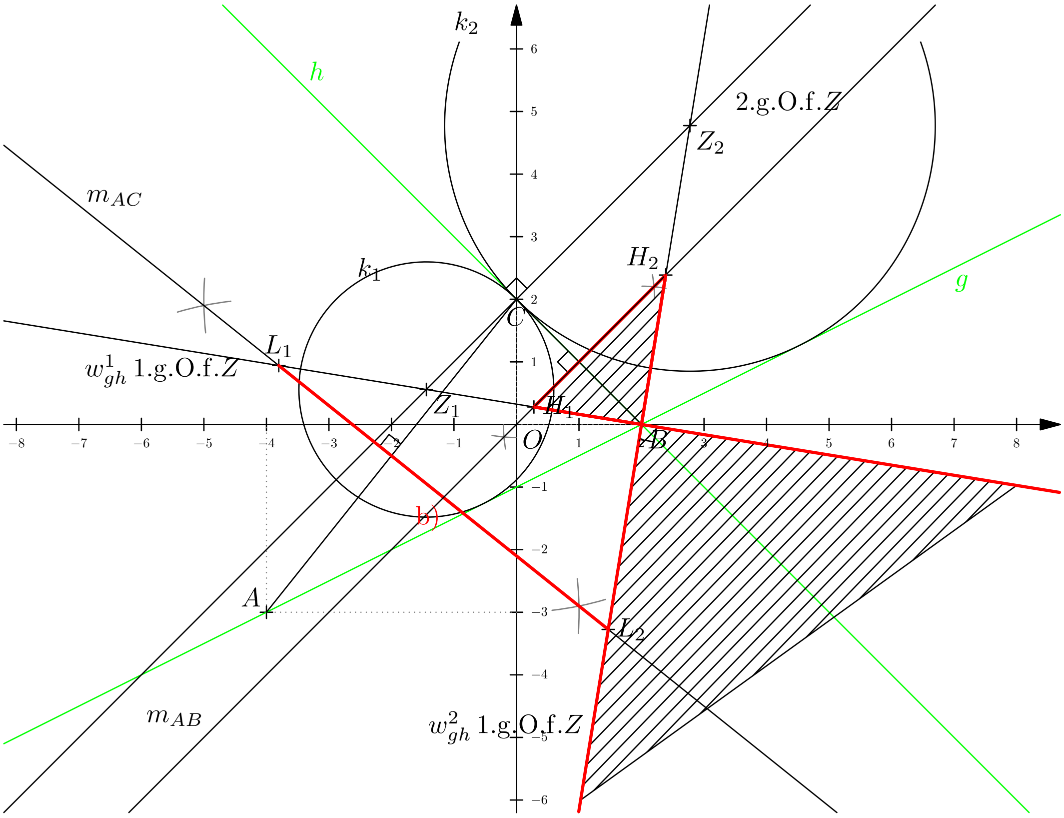
1. Senkrechte zu AB durch A $\rightarrow h$
2. $k(A, \overline{AB})$ $\rightarrow k_1$
3. $k_1 \cap h$ $\rightarrow H$
4. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$ $\rightarrow J$
5. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}J})$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow E$
7. $m_{AB} \cap k_2$ $\rightarrow D$
8. $k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$ $\rightarrow C$

Lösung zu A6 ex-koordinaten-system-einfuehrung



c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).
d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
e) $A, B, C \in k_1$, weil D ist der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Weil $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$, und weil $D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$, und damit ist D gleich weit von A, B, C entfernt.
g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$. So genau messen kann man die Winkel natürlich nicht, die Summe kann daher etwas kleiner oder grösser als die eigentlich exakten 180° sein.
i) Ja, weil $\sphericalangle DFA = 90°$ über dem Kreisdurchmesser $[DA]$ steht. Damit ist k_2 ein Thaleskreis auf dem alle rechten Winkel mit Schenkeln durch A, D liegen.
j) In dieser speziellen Situation ja. Würde man den Punkt C weiter auf BC verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, aber $[AF]$ nicht.

Lösung zu A7 ex-geometrische-oerter3



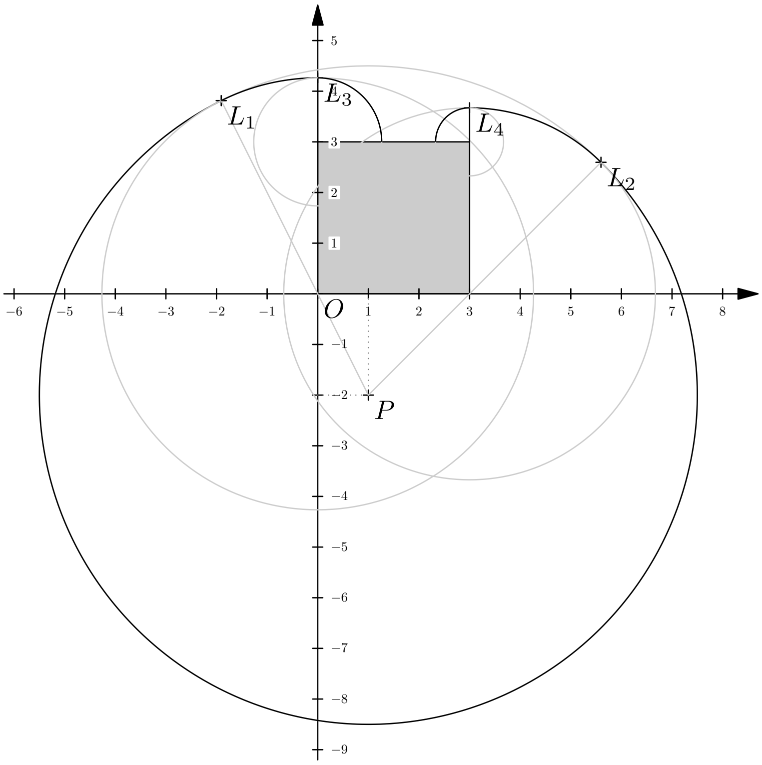
a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w^1_{gh} und w^2_{gh} in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w^1_{gh} und w^2_{gh} in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1.	w^1_{gh}, w^2_{gh}	$\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2.	$\perp$ zu h durch C	$\rightarrow$ 2.g.O.f.Z, Z_1, Z_2
3.	$k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$	$\rightarrow$ 2 Lösungen zu a)
4.	$m_{AC} \cap w^1_{gh}$, $m_{AC} \cap w^2_{gh}$	$\rightarrow$ $[L_1, L_2]$, Lösung zu b)
5.	$m_{BC} \cap w^1_{gh}$, $m_{BC} \cap w^2_{gh}$	$\rightarrow$ H_1, H_2
6.	Schraffierte Fläche	$\rightarrow$ Lösung zu c)

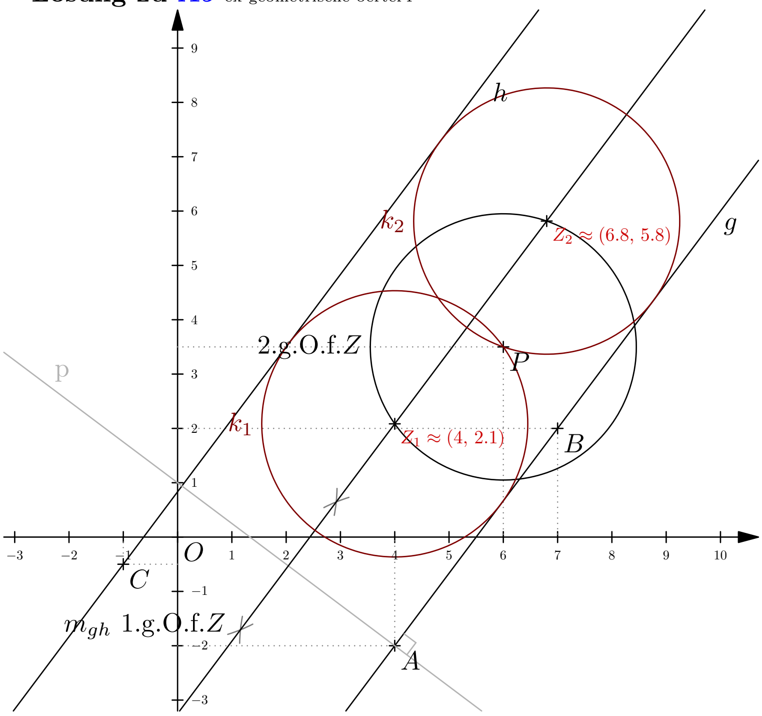
Lösung zu A8 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\to k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\to L_1$ und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\to k_2$ und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\to L_3$ und L_4

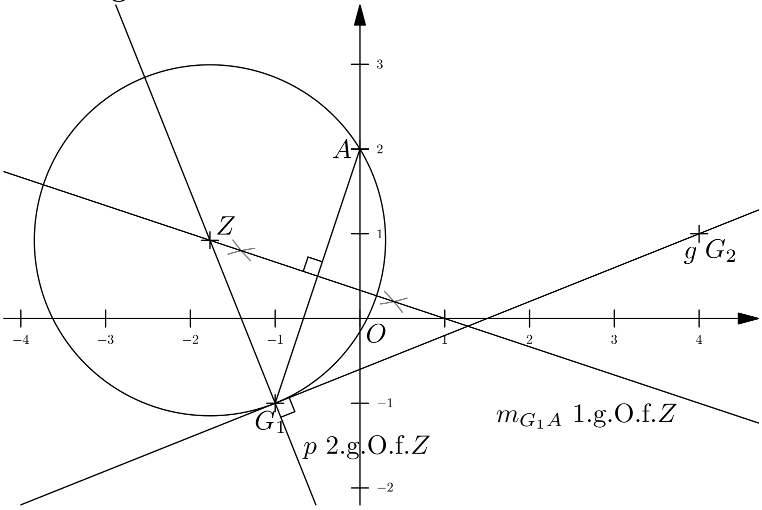
Lösung zu A9 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\rightarrow$ Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

Lösung zu A10 ex-geometrische-oerter1

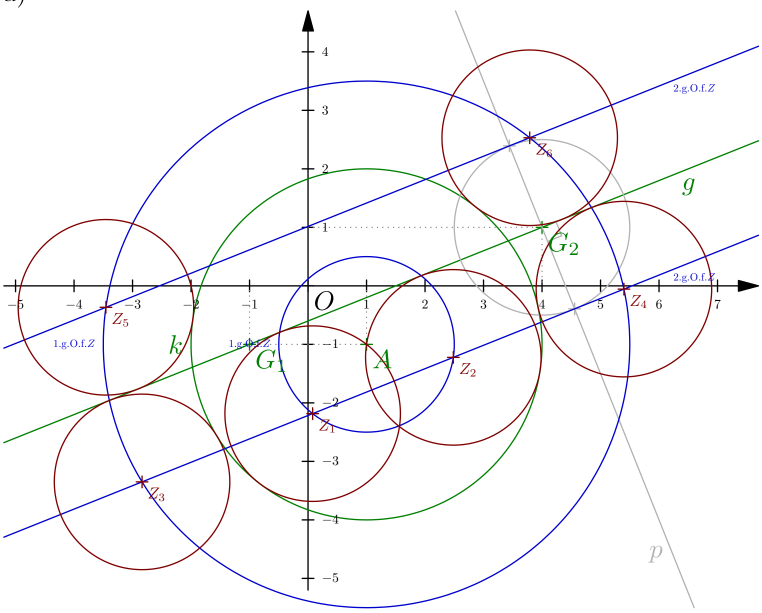


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\rightarrow$ 1 Lösung

Lösung zu A11 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\rightarrow$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

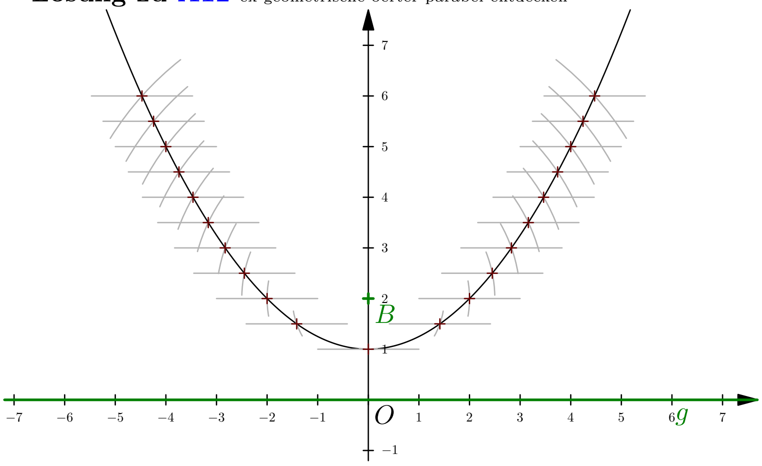
5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu A12 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken

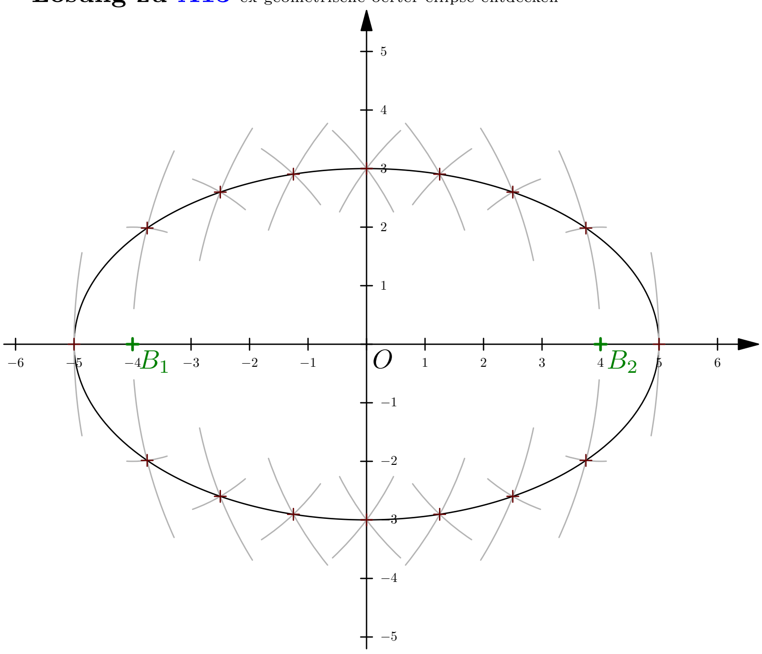


Für alle halbzahligen d wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\rightarrow p$
2. $k(B, d) \cap p$ $\rightarrow P_1$, P_2 (ausser für $d = 1$ nur ein Punkt

Die entstehende Kurve (eine Parabel) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Lösung zu A13 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



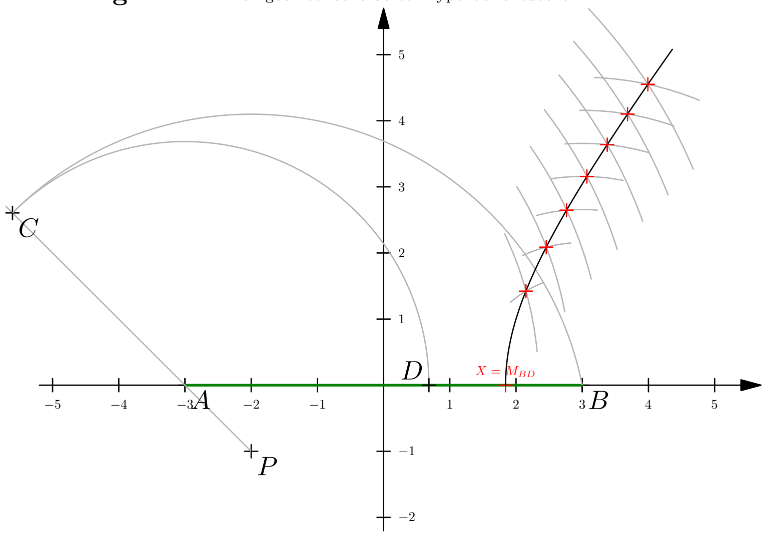
Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

Die entstehende Kurve (eine Ellipse) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10 + \overline{B_1B_2} = 10 + 8 = 18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.

Lösung zu A14 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



Zuerst wird der Punkt D auf $[AB]$ konstruiert, der via A gleich weit von P entfernt ist, wie der Punkt B. Der Mittelpunkt von D und B ist dann X:

1. $k(P, \overline{PB}) \cap [PA \quad \to C$
2. $k(A, \overline{AC}) \cap [AB] \quad \to D$
3. $M_{BD} \quad \to X$

Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(A, d + \overline{AX}) \cap k(B, d + \overline{BX}) \quad \to$ 1 Punkt oberhalb AB

Die entstehende Kurve (ein halber Hyperbelast) ist rund und hat nirgends einen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X ist vertikal.

Man beachte dass für alle Punkte P auf der Hyperbel folgendes gilt: $\overline{AP} - \overline{BP} = \overline{AX} - \overline{BX}$.

Lösung zu A15 ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ell$, bzw. $\overline{AC} + \overline{BC} = \ell - \overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell - \overline{AB}$.

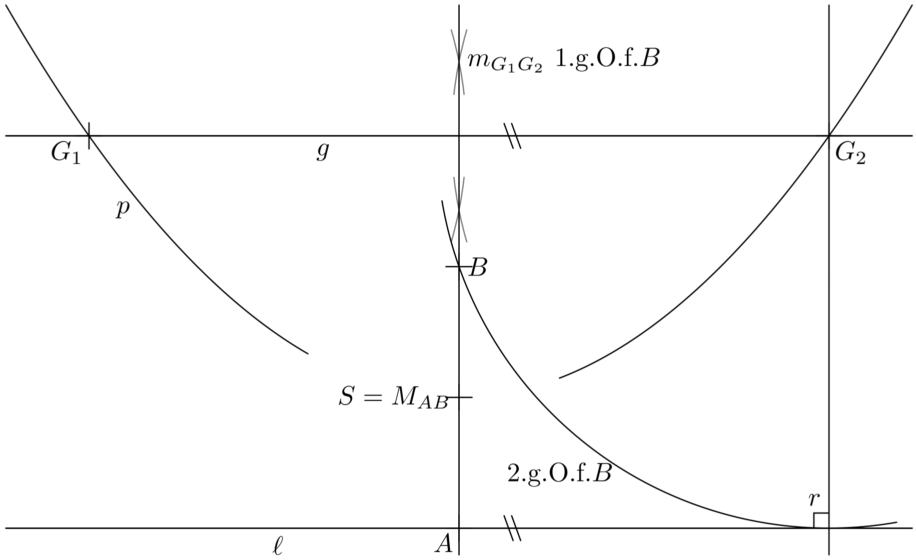
Lösung zu A16 ex-geometrische-oerter-parabel1

a) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Rechtwinklige zu g durch P.

b) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP} = \overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.

Lösung zu A17 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parablel konstruiert. Es gilt: $B \in a$. Danach wird ein Punkt $Q \in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell} = \overline{QB}$ genutzt.



1. Wähle G_1 auf p $\rightarrow G_1$
2. Parallele zu ℓ durch G_1 $\rightarrow g$
3. $g \cap p$ $\rightarrow G_2$
4. $m_{G_1G_2}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.B
5. $k(G_2, \overline{G_2\ell})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.B
6. $m_{G_1G_2} \cap \ell$ $\rightarrow A$
7. M_{AB} $\rightarrow$ Scheitel S

Lösung zu A18 ex-geometrische-oerter-ellipse2

Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

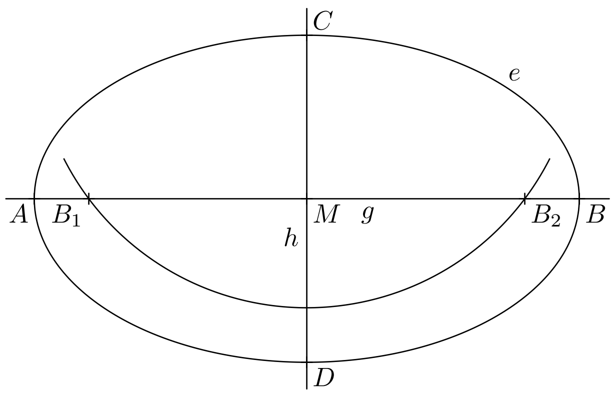
Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g$ $\rightarrow B_1$, B_2



Lösung zu A19 ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1. $k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$ $\to k_1$, 1.g.O.f.B_2
2. $k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$ $\to k_2$, 2.g.O.f.B_2
3. $k_1 \cap k_2$ $\to$ 2 Lösungen

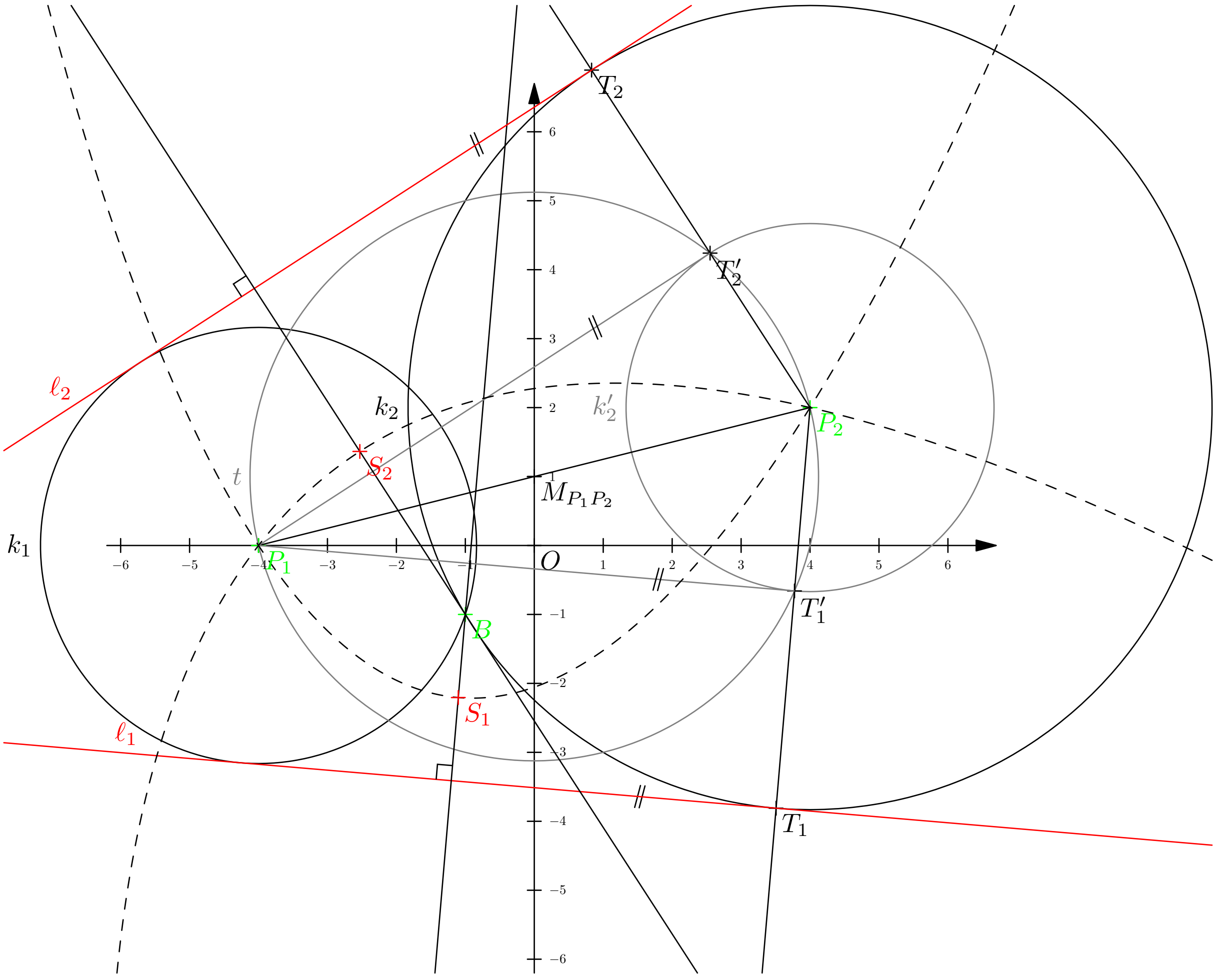
b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von B_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2. Alle Punkte B_2 liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten P_1 und P_2 und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

Lösung zu A20 ex-geom-ort-kegelschnitte3

Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss ℓ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für P_2. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in B), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



1. $k(P_1, \overline{P_1B}$ $\to k_1$
2. $k(P_2, \overline{P_2B}$ $\to k_2$
3. $k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$ $\to k_2'$
4. Thaleskreis über $[P_1P_2]$ $\to t$
5. $t \cap k_2'$ $\to T_1'$, T_2'
6. $[P_2T_1' \cap k_2$ $\to T_1$
7. $[P_2T_2' \cap k_2$ $\to T_2$
8. $\|$ zu P_1T_1' durch T_1 $\to \ell_1$
9. $\|$ zu P_1T_2' durch T_2 $\to \ell_2$
10. $M_{B\ell_1}$ $\to S_1$
11. $M_{B\ell_2}$ $\to S_2$