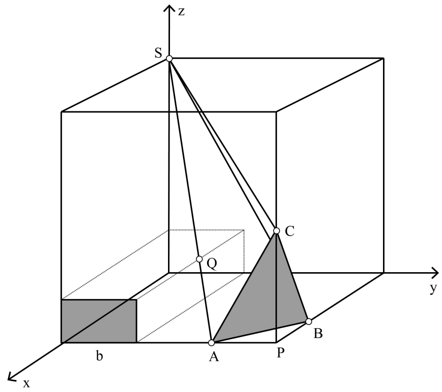
Aufgabe 25.37 In einem Würfel mit den Eckpunkten $O = (0, 0, 0)$, $P = (10, 10, 0)$ und $S = (0, 0, 10)$ befindet sich eine schiefe Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A = (10, 6, 0)$, $B = (6, 10, 0)$ und $C = (10, 10, 5)$.



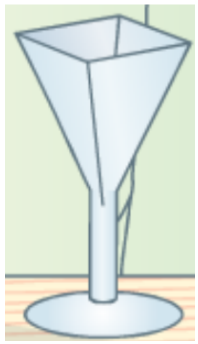
a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Teilergebnis: $E : 5x + 5y - 4z - 80 = 0$)

b) Welchen Winkel schliessen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?

c) Untersuche, ob die Höhe der Pyramide parallel zur Diagonalen PS des Würfels liegt.

d) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze). Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?

Aufgabe 25.38 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A = (4, -2, 5)$, $B = (7, 4, 7)$ und $C = (5, 7, 1)$.



a) Zeige: Dieses Dreieck ist gleichschenklig-rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B.

b) Berechne die Koordinaten von D so, dass ein Quadrat $ABCD$ entsteht.

c) Bestimme den Mittelpunkt M des Quadrats.

d) Bestimme das Volumen einer Pyramide mit Höhe 10.5 Einheiten und Grundfläche $ABCD$. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem cm.

e) Die Spitze S der Pyramide aus d) steht senkrecht über M . Damit entsteht eine gerade quadratische Pyramide $ABCDS$. Bestimme die beiden möglichen Koordinaten von S.

f) Die unten geöffnete Pyramide $ABCDS$ wird umgekehrt auf einen Stiel gesetzt und zu einem Sektglas umgebaut. Dieses wird bis zur halben Höhe gefüllt. In welchem Verhältnis zur ganzen Pyramide steht die gefüllte Menge? Begründe dein Resultat!
Hinweis: Das Volumen der ganzen Pyramide beträgt 171.5 ml

Aufgabe 25.39 Durch die Punkte $A = (0, 3, 6)$, $B = (1, 2, -6)$ und $C = (-9, -2, 2)$ ist die Ebene E festgelegt. Ausserdem sind der Punkt $P = (5, 4, 0)$ und die Gerade g mit $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E. Zur Kontrolle: $E : 4x - 8y + z = 18$.

b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.

c) Weise nach, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt und berechne die Länge der Strecke SP.

d) Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

e) Berechne die Koordinaten des zu P bezüglich der Ebene E symmetrischen Punktes $P^\star$.

Aufgabe 25.40 Gegeben sind die Kugel K mit Mittelpunkt $M = (0, 2, 0)$ und Radius $r = 13$, sowie die Gerade g durch die beiden Punkte $A = (4, 14, 3)$ und $B = (6, -10, 21)$.

a) Zeige durch Berechnung, dass der Punkt A auf der Kugel K liegt.

b) Die Gerade g verläuft ein Stück weit innerhalb der Kugel K. Berechne die Länge dieses Geradenstücks.

c) Berechne den Winkel, unter dem die Gerade g die xy-Ebene schneidet.

d) Berechne die Fläche des Dreiecks ABM.

e) Die Tangentialebene τ an die Kugel K im Punkt A schliesst mit den Koordinatenebenen zusammen ein Volumen ein. Berechne dieses Volumen.

f) Die Ebene $E : 3x + 4z - 25 = 0$ schneidet die Kugel K. Dabei entsteht ein Kreis. Berechne den Radius dieses Kreises.