Lösung zu 25.33 ex-winkel-und-ebenen

a) Man wählt den Blickpunkt der Skizze so, dass sich dieser in der Ebene selbst befindet und die Ebene so als Gerade erscheint. Die Gerade soll dabei rechtwinklig zur Blickrichtung verlaufen. So sieht man den Winkel. Dieser Winkel ergänzt sich mit dem Winkel zwischen Gerade und Normalvektor auf 90°. Damit gilt:

$$\sphericalangle(E, g) = 90^\circ - \sphericalangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v_g})$$

b) wählt den Blickpunkt auf der Schnittgeraden der Ebenen, d.h. sie erscheint so als Punkt und die Ebenen als Geraden (wie wenn man ein Buch halb öffnet und in der Achse des Buchrückens darauf schaut).
Damit sieht man auch den Winkel zwischen den Ebenen. Da in dieser Skizze die Normalvektoren einfach die (als Geraden erscheinenden) Ebenen um 90° gedreht sind, ist der Winkel zwischen den Ebenen gleich dem Winkel zwischen den Normalvektoren:

$$\sphericalangle(E_1, E_2) = \sphericalangle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$$

Lösung zu 25.34 ex-winkel-polyeder

Tetraeder: Wir betrachten einen Würfel mit den Eckpunktkoordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Mit einer Skizze überzeugt man sich, dass die Ortsvektoren der Würfelpunkte, die nicht Eckpunkte des Tetraeders sind, gerade die Normalvektoren der Tetraederflächen sind.

Für den Winkel zwischen Seitenebnen können z.B. die Normalvektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ betrachtet werden. Man erhält damit allerdings den Aussenwinkel. (Skizze!)
Der Winkel zwischen den Flächen ist

$$180^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = 180^\circ - \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 70.5288^\circ$$

Für den Winkel zwischen Ebene und Kante können z.B. der Normalvektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor der Kante $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ gewählt werden. der Winkel ist also

$$90^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx 54.7356^\circ$$

Oktaeder: Wir betrachten den Oktaeder aufgespannt durch die Basisvektoren und ihre Gegenvektoren. Mit einer Skizze (oder Überlegung, bzw. Rechnung) findet man zwei Normalvektoren, z.B. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1,\\1\\1\end{pmatrix}$. Wie oben ist wieder die Ergänzung auf 180° zu berechnen:

$$180^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}}|\right) = 180^\circ - \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 109.4712^\circ$$

Für den Winkel zwischen Ebene und Kante können z.B. der Normalvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor der Kante $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ gewählt werden. der Winkel ist also ebenfalls

$$90^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx 54.7356^\circ$$