Für Punkte $P$ der Ebene ist die vorzeichenbehaftete Länge der Projektion immer $-d$ (womit die Ebenengleichung erfüllt ist).

Für beliebige Punkte $Q$ hat diese Projektion eine andere Länge. Die Differenz zur Länge der Projektion eines Punkt $P$ entspricht dem vorzeichenbehafteten Abstand des Punkte $Q$ von der Ebene.

Diese Differenz ist positiv, wenn der Punkt (in Richtung von $\overrightarrow{n}$) über der Ebene liegt, negativ sonst.

**Lösung zu 25.29** ex-tetraeder-hoehe

a) Man bestimmt erst einen Normalvektor $\overrightarrow{n}$, z.B. $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Für alle Punkte der Ebene gilt die Koordinatengleichung. Wir setzen z.B. die Koordinaten von $A$ ein und lösen nach $d$ auf:

$$a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -\left(a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3\right) = -\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OA} = -1$$

Wir erhalten eine Koordinatengleichung für $E$:

$$x + y + z - 1 = 0$$

b) Mit obigem $\overrightarrow{n}$ ist die Fläche $\frac{1}{2}|\overrightarrow{n}| = \frac{\sqrt{3}}{6}$

c) $\overline{DE} = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OA} + d}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

d) Die Längen von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, und $\overrightarrow{CD}$ sind alle $\sqrt{2}$.

e) $V = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3}$

f) Vom Würfel werden 4 Pyramiden mit Volumen $\frac{1}{6}$ (Grundfläche $\frac{1}{2}$ und Höhe 1) weggeschnitten. Es bleiben also noch $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ für das Volumen vom Tetraeder.

**Lösung zu 25.30** ex-spezielle-lage-von-ebenen

a) Für die Punkte der Ebene ist die $x$-Koordinate auf 5 fixiert, $y$ und $z$ sind beliebig. D.h. wir haben eine **Ebene parallel zur $yz$-Ebene**. Der Normalvektor ist parallel zur $x$-Achse.

b) $x$ ist beliebig, d.h. die **Ebene ist parallel zur $x$-Achse**. Der Normalenvektor ist rechtwinklig zur $x$-Achse.

c) $x$ und $y$ sind beliebig, $z$ fixiert auf den Wert 2. Die Ebene ist also **parallel zur $xy$-Ebene. Der Normalvektor ist parallel zu $z$.**

d) $y$ ist beliebig, d.h. die **Ebene ist parallel zur $y$-Achse**.

**Lösung zu 25.31** ex-gegenseitige-lage-von-ebenen

Seien $\overrightarrow{n_1}, \ldots, \overrightarrow{n_4}$ die entsprechenden Normalvektoren.

**Parallelität:**

Die Ebenen sind parallel (eventuell identisch), wenn die Normalvektoren parallel sind. Dies kann entweder über die Gleichung

$$\overrightarrow{n_1} = \lambda\overrightarrow{n_2}$$

oder das Vektorprodukt $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ bestimmt werden.

Hat die Gleichung eine Lösung für $\lambda$, bzw. ist das Vektorprodukt gleich $\overrightarrow{0}$, sind die Vektoren parallel. Wir erhalten:

Die Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ sind zueinander parallel, aber nicht zu $E_4$.

**Identität:**

Zwei Ebenen sind identisch, wenn die Gleichungen die gleichen Lösungen haben, d.h. wenn die eine Gleichung in die andere umgeformt werden kann.