b) DF ist eine Seitendiagonale, muss als $\sqrt{2}$ mal so lang wie AD sein und rechtwinklig zu AD sein.
$|\overrightarrow{AD}| = 29$ und $|\overrightarrow{AF}| = 29\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ und damit sind die Vektoren rechtwinklig zueinander.
Der Punkt G ist einfach auszurechnen: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ 48 \end{pmatrix}$.
Für die restlichen Punkte betrachten wir den Punkt M_{AF}. Der Vektor $\overrightarrow{M_{AF}E}$ steht rechtwinklig auf $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{AD}$, er ist also parallel zu $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AF}$. Da die Vektoren im Vektorprodukt rechtwinklig sind, ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen. Das Resultat muss also durch die Länge von $\overrightarrow{AD}$ und dann noch 2 geteilt werden:
$\overrightarrow{M_{AF}E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} \cdot \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2.0 \\ 10.5 \end{pmatrix}$. Damit ist
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM_{AF}} + \overrightarrow{M_{AF}E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ 29 \end{pmatrix}$ und
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_{AF}} - \overrightarrow{M_{AF}E} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -10 \\ 18.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17.5 \\ 2 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.
Und schliesslich $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 21 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ und
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Lösung zu 25.26 ex-abstand-punkt-gerade

Der Abstand entspricht der Höhe im Parallelogramm.

Die Fläche des Parallelogramms ist «Grundlinie mal Höhe», also ist die Höhe gleich «Fläche durch Grundlinie».

Die Grundlinie hat die Länge $|\overrightarrow{v_g}|$. Die Fläche ist $|\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{AP}|$

Damit ist der Abstand

$$\overline{Pg} = \frac{|\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{v_g}|}$$

Lösung zu 25.27 ex-ebene-skalarprodukt-mit-einheitsvektor-konstant

a) $\overrightarrow{v} = 42\overrightarrow{n}$ ist so ein Vektor. Weil $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{v}$ parallel sind, ist das Skalarprodukt gleich dem Produkt der Längen (weil $\cos(0°) = 1$).

b) Alle Vektoren $\overrightarrow{OQ}$ die rechtwinklig zu $\overrightarrow{n}$ sind, erfüllen $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$. Als Ortsvektoren liegen diese in einer Ebene E_O durch den Nullpunkt, wobei $\overrightarrow{n}$ rechtwinklig auf diese Ebene steht.

c) Alle möglichen Punkte Q liegen in der Ebene E_O. Die Addition von $\overrightarrow{v}$ bewirkt eine Parallelverschiebung aller dieser Punkte. D.h. die Punkte P liegen auf einer parallelen Ebene E zu E_O. Die Spitze von $\overrightarrow{v}$ liegt in E, wenn man $\overrightarrow{v}$ als Ortsvektor auffasst.

d) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 + 42 = 42$.
D.h. alle Ortsvektoren der Punkte in der Ebene E erfüllen diese Gleichung.

e) Projektion auf Einheitsvektor: $\overrightarrow{w_n} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}\,\overrightarrow{n}$.
Alle Vektoren, die Ortsvektoren von Punkten einer Ebene rechtwinklig zu $\overrightarrow{n}$ sind, haben die gleiche Projektion auf $\overrightarrow{n}$.
Die Projektion ist gleich, wenn $(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n})$ gleich ist.
D.h. die Gleichung $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = c$ mit einer Konstanten c wird von Ortsvektoren einer Ebene erfüllt.

Lösung zu 25.28 ex-hesssche-normalform-verstehen

Weil $\overrightarrow{n}$ ein Einheitsvektor ist, ist die Projektion von $\overrightarrow{OQ}$ auf $\overrightarrow{n}$ gleich

$$\overrightarrow{q_n} = \left(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \overrightarrow{n}.$$

Die Länge dieser Projektion ist $|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OQ}|$.