Ersetzt man auf der rechten Seite $\vec{v} \cdot \vec{w}$ durch $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))$ und stellt die Gleichung um:

$$|\vec{v}\times\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))^2 = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot(1-\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))^2) = |\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\sin(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))^2$$

Da alle Grössen in den Quadraten positiv sind (Winkel zwischen Vektoren sind zwischen 0 und 180°, also ist der Sinus positiv (oder Null)), darf die Wurzel gezogen werden:

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))$$

Das Vektorprodukt ist genau dann Null, wenn die beiden Vektoren kollinear = parallel sind (falls beide Vektoren von Null verschieden sind, so folgt dies aus der Gerade bewiesenene Formeln, denn der Sinus ist nur dann Null, wenn der Winkel 0° oder 180° ist, die Vektoren also kollinear sind; ist (mindestens) einer der beiden Vektoren Null, so ist das Vektorprodukt ebenfalls Null – der Nullvektor ist aber per Definition kollinear zu jedem Vektor).

Lösung zu 25.23 ex-crossP-orientierung

$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$
$\vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$
$\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$
$\vec{e_i} \times \vec{e_i} = \vec{0}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$

Lösung zu 25.24 ex-flaechen-berechnen

a) Dreiecksfläche ist halbe Parallelogrammsfläche, aufgespannt durch z.B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ also

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-19\\-17\\-28\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{1434}}{2} \approx 18.9341$$

b) Richtungsvektor senkrecht zum Dreieck:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-19\\-17\\-28\end{pmatrix}$$

$\vec{r}$ wird auf die korrekte Länge $d = 5$ skaliert und zu $\overrightarrow{OA}$ addiert (bzw. subtrahiert), um $\overrightarrow{OD}$ zu erhalten:

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{5}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} \approx \begin{pmatrix}-0.5087\\-5.2446\\0.3030\end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} - \frac{5}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} \approx \begin{pmatrix}4.5087\\-0.7554\\7.6970\end{pmatrix}$$

c) Da D_1 und D_2 symmetrisch zur Dreiecksebene liegen, spielt es keine Rolle, ob mit D_1 oder D_2 gerechnet wird:

$$\sphericalangle ADB = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}\right) \approx 49.797°$$

d)

$$V = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1434}}{2} \cdot 5 = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{1434} \approx 31.5568$$