



Um zu zeigen, dass $\vec{p} \perp \vec{v}$, zeigen wir, dass das Skalarprodukt Null ist:

$$\vec{v} \cdot \vec{p} = a \cdot (bz - cy) + b \cdot (cx - az) + c \cdot (ay - bx) =$$

$$abz - acy + bcx - abz + acy - bcx = 0$$

Für $\vec{p}$ und $\vec{w}$:

$$\vec{w} \cdot \vec{p} = x \cdot (bz - cy) + y \cdot (cx - az) + z \cdot (ay - bx) =$$

$$bxz - cxy + cxy - ayz + ayz - bxz = 0$$

✂ Lösung zu 25.19 ex-crossP-nicht-kommutativ

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

✂ Lösung zu 25.20 ex-crossP-bilinear

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \lambda bz - \lambda cy \\ \lambda cx - \lambda az \\ \lambda ay - \lambda bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(bz - cy) \\ \lambda(cx - az) \\ \lambda(ay - bx) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w})$$

✂ Lösung zu 25.21 ex-crossP-parallel-null

$$\vec{v} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} bc - cb \\ ca - ac \\ ab - ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

✂ Lösung zu 25.22 ex-crossP-rechtwinklig-laengenprodukt

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = \left| \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \right|^2 = b^2z^2 + c^2y^2 - 2bcyz + c^2x^2 + a^2z^2 - 2acxz + a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy$$

$$|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2$$

Wir betrachten die Differenz obiger Ausdrücke (zweiter minus erster) und erhalten:

$$|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - |\vec{v} \times \vec{w}|^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz) = (ax + by + cz)^2 = (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

Es gilt also:

$$|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - |\vec{v} \times \vec{w}|^2 = (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

Wenn $\vec{v} \perp \vec{w}$ dann ist das Skalarprodukt Null die Länge vom Skalarprodukt also das Produkt der Längen der Vektoren.