Lösung zu 25.7 ex-skalarprodukte-ausrechnen

Es gibt 6 solche Produkte, oder $\binom{4}{2}$. Allgemein gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ solche Produkte.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 - 6 + 3 = -5$
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 - 3 + 1 = 0$, also $\vec{a} \perp \vec{c}$.
$\vec{a} \cdot \vec{d} = 6 + 0 + 1 = 7$
$\vec{b} \cdot \vec{c} = -1 + 2 + 3 = 4$
$\vec{b} \cdot \vec{d} = -3 + 0 + 3 = 0$, also $\vec{b} \perp \vec{d}$
$\vec{c} \cdot \vec{d} = 3 + 0 + 1 = 4$

Lösung zu 25.8 ex-winkel-zwischen-vektoren

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-17}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{14}}\right) =\approx 153.004°$
$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-52}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{104}}\right) = \arccos(-1) =\approx 180°$
$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{34}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{104}}\right) =\approx 26.996°$

Es gilt $-2\cdot\vec{a} = \vec{c}$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ zeigen in entgegengesetzte Richtungen, weshalb der Winkel zwischen ihnen 180° beträgt. Die beiden anderen Winkel müssen sich deswegen auf 180° ergänzen.

Allgemein summieren sich die zwei «kleinen» Winkel nicht zum «grossen» Winkel. Als Gegenbeispiel kann man beispielsweise die drei Einheitsvektoren betrachten (paarweise 90°).

Wenn aber alle drei Vektoren parallel zu einer Ebene sind (anschaulich: wenn sie denselben Startpunkt haben, liegen sie in einer Ebene), so gilt diese Eigenschaft.

Lösung zu 25.9 ex-winkelformel-beweisen

$$\begin{aligned}
|\vec{v} - \vec{w}|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}| - 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))\\
(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))\\
a^2 + x^2 - 2ax + b^2 + y^2 - 2by + c^2 + z^2 - 2cz &= a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))\\
-2(ax + by + cz) &= -2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))\\
ax + by + cz &= |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))\\
\vec{v}\cdot\vec{w} &= |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))
\end{aligned}$$

Lösung zu 25.10 ex-tr-funktion-fuer-winkel

Lösung zu 25.11 ex-winkel-im-wuerfel

Am einfachsten betrachtet man den Einheitswürfel, dessen Eckpunkte alle Koordinaten 0 oder 1 haben.

Diagonale $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, eine anliegende Seite $\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, eine anliegende Flächendiagonale $\vec{f} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

a) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{s}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}$, daraus $\alpha \approx 54.735610$.

b) $\cos(\beta) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{f}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{f}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$, daraus $\beta \approx 35.264390$

Lösung zu 25.12 ex-schlitten-ziehen

a) $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{14} \approx 11.225$.

b) $\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix}$, d.h. von oben gesehen parallel.