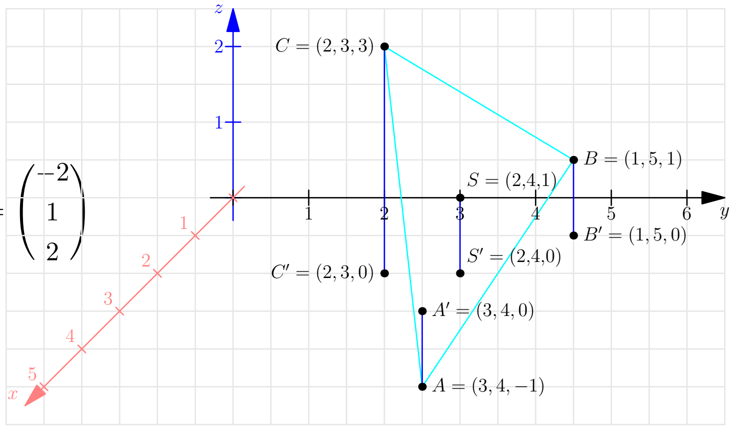
a) siehe Zeichnung (Punkte sind inklusive Grundpunkten eingezeichnet)



b)

$$\vec{c} := \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$c := \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3$$

$$\vec{a} := \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$a := \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$$

$$\vec{b} := \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$b := \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

c) Genauer verwenden wir die Umkehrung des Satzes von Pythagoras: Wegen Die Seitenlängen a, b, c wurden oben definiert.

$$c^2 + a^2 = 9 + 9 = 18 \stackrel{!}{=} b^2$$

ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B.
Beachte: Im Schrägbild ist weder der rechte Winkel bei B sichtbar noch sieht man, dass die Seiten a und c gleich lang sind.
Das Dreieck ABC ist nicht nur rechtwinklig, sondern auch gleichschenklig.

d)
```
[3,4,-1] → a
[1,5,1] → b
[2,3,3] → c
b-a → ab
norm(ab) → sc
c-b → bc
norm(bc) → sa
a-c → ca
norm(ca) → sb
sb*sb-sa*sa-sc*sc
```

Lösung zu 25.6 ex-beweis-skalarprodukt-perp-null

Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Man betrachtet die beiden Vektoren als Ortvektoren. Die zugehörigen Punkte formen mit dem Nullpunkt ein Dreieck. Ist der Winkel im Nullpunkt ein rechter gilt der Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 &= |\vec{v} - \vec{w}|^2 \\
a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2 &= (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2 \\
a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2 &= a^2+x^2-2ax+b^2+y^2-2by+c^2+z^2-2cz \\
0 &= -2(ax+by+cz) \\
0 &= ax+by+cz \\
0 &= \vec{v}\cdot\vec{w}
\end{aligned}$$

Alle diese Umformungen sind auch rückwärts gültig, d.h. wenn das Skalarprodukt Null ist, gilt der Satz von Pythagoras und damit stehen die Vektoren rechtwinklig aufeinander.