Definition 25.7.3 Hessesche Normalform (Otto Hesse, 1811 - 1874)

Die Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$ einer Ebene ist in **Hessescher Normalform**, wenn der Normalenvektor normiert ist, wenn also gilt

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Jede Koordinatengleichung einer Ebene kann auf diese Form gebracht werden, indem man die Gleichung durch $|\overrightarrow{n}|$ dividiert.

Merke 25.7.4 Abstand Punkt-Ebene

Gegeben sind ein Punkt Q und eine Ebene E durch eine Koordinatengleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

Der Abstand von $Q = (q_1, q_2, q_3)$ zu E ist:

$$\overline{QE} = \frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ist die Ebene in Hessescher Normalform gegeben, ist der Nenner 1 und kann weggelassen werden.

Aufgabe 25.29 Gegeben sind 4 Punkte $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ und $D = (1, 1, 1)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.
b) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks ABC.
c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E.
d) Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein regulärer Tetraeder ist (bestehend aus 4 gleichseitigen Dreiecken).
e) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders $ABCD$.
f) Skizzieren Sie den Einheitswürfel und das Tetraeder $ABCD$ im Schrägbild und erklären Sie damit das Volumen dieses Tetraeders.

Aufgabe 25.30 Folgende Ebenen haben eine spezielle Lage im Koordinatensystem (bezüglich der Koordinatenebenen und/oder Koordinatenachsen). Beschreiben Sie die spezielle Lage und begründen Sie (evtl. auch mit Skizze).

a) $x = 5$ b) $y - 2z = 4$ c) $z - 2 = 0$ d) $2x - 3z = 4$

Gegenseitige Lage von Ebenen

Aufgabe 25.31 Gegeben sind folgende Ebenen:

$E_1 : 2x-4y+4z+6 = 0$ $E_2 : -3x+6y-6z-9 = 0$ $E_3 : 5x-10y+10z+8 = 0$ $E_4 : 4x-4y+6z+10 = 0$

Bestimmen Sie, ob die Ebenen identisch oder parallel sind oder sich schneiden.
Falls sie sich schneiden: Können Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgerade bestimmen?

Schnitt Ebene-Gerade

Aufgabe 25.32 Gegeben sind eine Ebene E mit der Koordinatengleichung $-2x + 3y - z + 2 = 0$ und die Gerade g durch die Parameterdarstellung $\overrightarrow{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.