25.7 Ebenen im Raum

25.7.1. Jede Ebene im Raum kann man sich als ein unendlich ausgedehntes, flaches Blatt Papier vorstellen. Vektorgeometrisch kann man eine Ebene analog zu einer Geraden durch eine Parameterdarstellung mit einem Aufpunkt A und **zwei Richtungsvektoren** $\vec{v}$ und $\vec{w}$ darstellen, wobei die beiden Richtungsvektoren nicht parallel (= kollinear) sein dürfen:

$$\vec{E}(s,t) = \overrightarrow{OA} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Wie bei Geraden gibt es unendlich viele verschiedene Parameterdarstellungen. Während es bei 3-dimensionalen Geraden keine Alternative gibt, können Ebenen mit Koordinatengleichungen beschrieben werden, die mathematisch deutlich komfortabler zu handhaben sind.

Koordinatengleichung einer Ebene

Aufgabe 25.27 Gegeben ist ein beliebiger Einheitsvektor $\vec{n}$, d.h. $|\vec{n}| = 1$. Man stelle sich diesen Vektor als Pfeil mit Start im Nullpunkt vor.

a) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $\vec{n}$, einen «einfachen» Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{n} \cdot \vec{v} = 42$.

b) Beschreiben Sie geometrisch alle möglichen Ortsvektoren $\overrightarrow{OQ}$, für die gilt: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$.

c) Beschreiben Sie geometrisch alle möglichen Ortsvektoren $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \vec{v}$, mit $\vec{v}$ und Q aus den Teilaufgaben a) und b).

d) Was ist $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$? Setzen Sie ein und wenden Sie das Distributivgesetz für das Skalarprodukt an. Welche Ortsvektoren $\vec{a}$ erfüllen also die Gleichung $\vec{n} \cdot \vec{a} = 42$?

e) Die Formel für die Projektion eines Vektors $\vec{w}$ auf den Vektor $\vec{n}$ vereinfacht sich, wenn $\vec{n}$ ein Einheitsvektor ist. Schreiben Sie diese vereinfachte Formel auf und überlegen Sie sich, welche Vektoren die gleiche Projektion auf $\vec{n}$ haben. Interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

Definition 25.7.2 Koordinatengleichung einer Ebene

Für einen beliebigen Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| > 0$ und eine beliebige reelle Zahl d beschreibt die sogenannte **Koordinatengleichung**

$$ax + by + cz + d = 0$$

die Punkte $P = (x, y, z)$ einer Ebene (d. h. die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine Ebene). Die Gleichung kann auch in der Form

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + d = 0 \qquad \text{oder gleichbedeutend} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = -d$$

geschrieben werden.
Der Vektor $\vec{n}$ steht senkrecht zur Ebene E und heisst deswegen **Normalenvektor** der Ebene.

Aufgabe 25.28 Gegeben ist eine Ebene E durch eine Koordinatengleichung $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + d = 0$. Wir nehmen an, dass der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

Sei Q ein beliebiger Punkt im Raum, der aber nicht auf der Ebene E liegt, d.h. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} + d \neq 0$.

Es geht in dieser Aufgabe darum zu verstehen, was die Zahl $q = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} + d = aq_1 + bq_2 + cq_3 + d$ für eine geometrische Bedeutung hat.

Machen Sie eine gute Skizze und betrachten Sie dazu die Projektion von $\overrightarrow{OQ}$ auf $\vec{n}$.