Merke 25.6.4 Eigenschaften des Vektorprodukts

Sei $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$. Dann gilt:

- $\vec{u}$ steht rechtwinklig auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
- Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ sind orientiert wie die Basisvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$, gebräuchlicherweise wie Daumen ($\vec{v}$), Zeigefinger ($\vec{w}$) und Mittelfinger ($\vec{u}$) der **rechten Hand**.

  Zeigt die offene **rechte Hand** in Richtung $\vec{v}$ und schliesst man die Finger in Richtung von $\vec{w}$, zeigt der Daumen in die Richtung von $\vec{u}$.
- Es gilt $|\vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}))$.

  Damit entspricht die Masszahl der Länge von $\vec{u}$ der Masszahl der **Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms**.

  Kurz: «Fläche des Parallogramms = Länge von $\vec{u}$» (was aber mit Einheiten sinnlos ist, denn eine Fläche kan nie eine Länge sein)
- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

Aufgabe 25.24 Gegeben sind die Punkte $A = (2, -3, 4)$, $B = (-1, 2, 3)$ und $C = (4, 3, -1)$.

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC.

b) Im Abstand von $d = 5$ über dem Punkt A, senkrecht zur Dreiecksfläche, befindet sich der Punkt D. Berechnen Sie alle möglichen Koordinaten des Punktes D.

c) Wie gross ist der Winkel $\sphericalangle ADB$?

d) Wie gross ist das Volumen der Pyramide $ABCD$?

Aufgabe 25.25 Von einem Würfel $ABCDEFGH$ sind 3 Punkte gegeben. Die Punkte $ABCD$ und $EFGH$ bilden jeweils übereinander liegende Quadrate mit gleichem Umlaufsinn (z.B. sind die Punkte A und E benachbart). Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ bilden ein Rechtssystem.
Erstellen Sie eine saubere Skizze.
Überprüfen Sie zuerst, dass die unten angegebenen Punkte überhaupt die gewünschten Punkte eines Würfels sein können.
Berechnen Sie dann die Ortsvektoren oder Koordinaten der restlichen Punkte.

a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (-3, 3, -5)$, $D = (-3, -6, 4)$.

b) $A = (-3, 4, 5)$, $D = (9, 25, 21)$, $F = (10, -24, 32)$

Aufgabe 25.26 Gegeben sind eine Gerade g durch eine Parameterdarstellung $\vec{g}(t) = \overrightarrow{OA} + t\vec{v_g}$ und ein Punkt P. Gesucht ist eine einfache Formel für den Abstand $\overline{Pg}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Erstellen Sie eine 3-dimensionale Skizze einer Geraden g mit Aufpunkt A und Richtungsvektor $\vec{v_g}$ als Pfeil mit Start in A. Fügen Sie einen Punkt P hinzu, der nicht auf g liegt.
- Ausgehend vom Punkt A, zeichnen Sie das von $\overrightarrow{AP}$ und $\vec{v_g}$ aufgespannte Parallelogramm.
- Welcher Grösse im Parallelogramm entspricht der Abstand $\overline{Pg}$? Finden Sie einen einfachen Weg, diesen Abstand zu berechnen.

Merke 25.6.5 Abstand Punkt-Gerade

Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g mit Parametrisierung/Parameterdarstellung $\vec{g}(t) = \overrightarrow{OA} + t\vec{v_g}$ ist

$$\overline{Pg} = \frac{\left|\vec{v_g} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v_g}|}$$